SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 83-91

En las ciudades invisibles Ia

Presentación

Entre 1298 y 1299 un mercader veneciano preso en Génova dictó sus memorias a un compañero de cárcel. Lo que había visto y vivido en el imperio de Kublai Jan eran maravillas difíciles de creer para el mundo occidental al que pertenecía. Se dice que algunas de ellas fueron inventadas, pero la mayoría han sido corroboradas a lo largo del tiempo. Esa obra se llamó *Libro de las maravillas* y fue publicada por primera vez en 1477. Su autor, Marco Polo.

Cinco siglos más tarde, en 1973, Ítalo Calvino publicó *Las Ciudades Invisibles*, una obra fantástica en la que el autor reproduce algunos de los aspectos del libro de Marco Polo. La obra es una interlocución entre Marco y Kublai en la que el primero describe al otro las ciudades que ha visitado. Las ciudades son, tanto para Kublai como para el lector, invisibles, pero puesto que sus rasgos y características son similares a los de una ciudad real, el lector ve en ellas trazos de ciudades conocidas. Eso y la exposición rigurosa y lógica hacen que las descripciones acaben pareciendo cada vez menos fantasiosas, y si bien, como sucede en Matemáticas, no podemos decir que existan, aunque invisibles, se nos hacen imaginables y verosímiles.

Esta *sección* pretende destacar las referencias a las Matemáticas, a veces evidentes, a veces subyacentes, de *Las Ciudades Invisibles* y mostrar como gracias a esas ideas matemáticas presentes en el texto logramos representarnos mentalmente las ciudades. La interpretación no será, por tanto, tan gratuita como podría parecer de entrada.

No es raro que un trato semejante inspire reflexiones matemáticas que difícilmente uno se plantearía sin leer la obra. Y dado que toda lectura es personal, lo que se expondrá depende de quien la realiza. Cuando el lector de esta revista visite *Las Ciudades Invisibles* sin duda encontrará, interpretará, y verá en ellas aspectos distintos de los que yo he apreciado. Si lo desea, queda invitado a comunicarlos:

ciudadesinvisibles@revistasuma.es

Escuchemos pues a Marco Polo y recorramos con él avenidas, calles, canales, puentes, minaretes y balaustradas, visitemos palacios y mercados, conozcamos a comerciantes, artesanos y pescadores de las ciudades descritas en ese libro que el propio autor calificó de ‘poliédrico’ (Calvino, 1994).

La lectura se basará en la versión castellana a cargo de Aurora Bernárdez, publicada por *Siruela* en 1994 y que ha sido revisada y reeditada recientemente (octubre de 2005). ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es

nota preliminar

nota preliminar

La edición se abre con una *Nota Preliminar* en la que el autor realiza un análisis estructural de la obra y que remite, sin duda, al ámbito matemático:

A partir del material que había acumulado fue como estudié la estructura más adecuada, porque quería que estas series se alternaran, se entretejieran, y al mismo tiempo no quería que el recorrido del libro se apartase demasiado del orden cronológico en que se habían escrito los textos. Al final decidí que habría 11 series de 5 textos cada una, reagrupados en capítulos formados por fragmentos de series diferentes que tuvieran cierto clima común.

Calvino, 1994, p.13

El libro se desarrolla según un plan premeditado de antemano por el que las 55 ciudades se agrupan en 11 series de 5 ciudades cada una.

Las once series son desmembradas para reagruparse en los 9 capítulos del libro y que se abren y cierran siempre con un diálogo entre Marco y Kublai.

El sistema con arreglo al cual se alternan las series es de lo más simple, aunque hay quien lo ha estudiado mucho para explicarlo (op. cit.: 13). Con el número asignado antes a cada serie y el orden que cada ciudad ocupa en ella en el capítulo obtenemos un código numérico de doble entrada con el que identificar todas las ciudades.

Este orden es el mismo que el usado por los matemáticos para contar el conjunto infinito de los números racionales.

La distribución enfatiza la simetría alrededor del número 5, siendo éste precisamente, el quinto, el capítulo central, el centro de gravedad del libro: *... el sentido de un libro simétrico debe buscarse en el medio...* (op. cit.: 16).

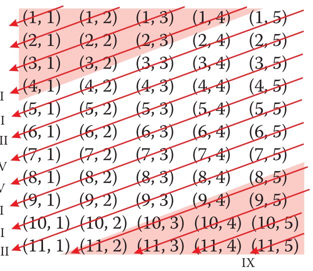
Todas las ciudades poseen los rasgos de un ciudad global que el lector recorre en un orden determinado y que muy bien podría corresponderse a la duodécima cara pentagonal de un icosaedro truncado, tal vez el poliedro más apropiado a este libro poliédrico: *Pero este libro es poliédrico y en cierto modo está lleno de conclusiones, escritas siguiendo todas sus aristas* (op. cit.: 16).

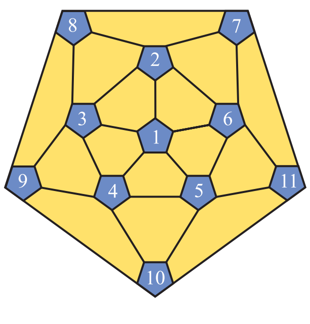
Abriendo el icosaedro truncado por una de sus caras pentagonales, y extendiéndolo sobre el plano, veremos 11 caras pentagonales. La duodécima es la ausente, la que hizo posible el despliegue, la formada por todas las demás.

De cada ciudad se destacaran una o varias frases o términos que servirán de base a las disquisiciones matemáticas. Lo ideal sería haber leído antes el texto completo de cada ciudad para situarse en el contexto y no quedarse con expresiones o frases aisladas del conjunto. ■

1. las ciudades y la memoria.
2. las ciudades y el deseo.
3. las ciudades y los signos.
4. las ciudades sutiles.
5. las ciudades y los trueques.
6. las ciudades y los ojos.
7. las ciudades y el nombre.
8. las ciudades y los muertos.
9. las ciudades y el cielo.
10. las ciudades continuas.
11. las ciudades escondidas.

I. 1.1, 1.2, 2.1, 1.3, 2.2, 3.1, 1.4, 2.3, 3.2, 4.1
II. 1.5, 2.4, 3.3, 4.2, 5.1
III. 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1
IV. 3.5, 4.4, 5.3, 6.2, 7.1
V. 4.5, 5.4, 6.3, 7.2, 8.1
VI. 5.5, 6.4, 7.3, 8.2, 9.1
VII. 6.5, 7.4, 8.3, 9.2, 10.1
VIII. 7.5, 8.4, 9.3, 10.2, 11.1
IX. 8.5, 9.4, 10.3, 11.2, 9.5, 10.4, 11.3, 10.5, 11.4, 11.5





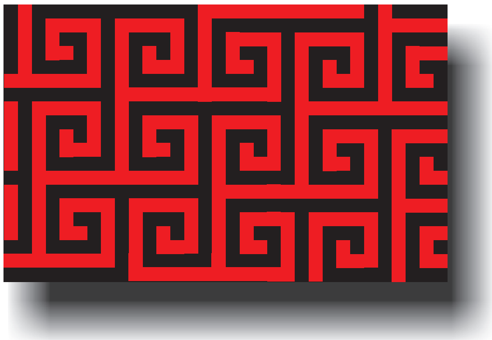
diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

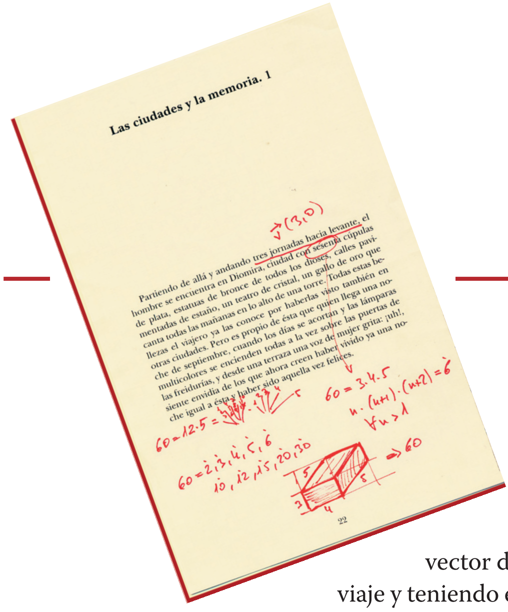
... la filigrana de un diseño tan sutil que escapaba a la mordedura de las termitas.

La filigrana es una obra de orfebrería consistente en la incrustación lineal de fino hilo de oro o plata en la madera. Gracias a la habilidad del artesano esas líneas pueden ser muy intrincadas y los motivos de sus diseños de tamaño casi microscópico. Será fácil romper la figura, pero quebrar el motivo que la fundamenta será tanto más difícil cuanto más diminuto sea su tamaño. Sólo siendo menor que el bocado amenazante sobrevivirá intacto.

Un segmento también cumple la propiedad de que cualquier fracción suya incorpora el motivo de su totalidad. No existe ningún animal capaz de morder un único punto. Pero un segmento no es una filigrana porque una filigrana no es rectilínea. La filigrana se basa en la repetición y en la recurrencia: una voluta de la que nacen, a su vez, otras volutas menores de las que brotan también otras volutas aún más pequeñas y de las que también surgen otras más diminutas todavía y así sucesivamente, hasta los límites que las manos y la vista del artesano determinan.



Sólo hay una filigrana capaz de sobrevivir a la más pequeña de las mordeduras, a la fractura infinitesimal: la curva fractal. Pero esa curva es una ficción matemática. En la realidad práctica, la recurrencia termina en dos, tres o cuatro etapas a lo sumo. Esos pocos pasos le bastan al artesano para situarse en el infinito. ■



Las ciudades y la memoria. 1

Partiendo de allá y andando tres jornadas hacia levante, el hombre se encuentra en Diomira, ciudad con sesenta cúpulas de plata, estatuas de bronce de todos los dioses, calles pavimentadas de estaño, un teatro de cristal, un gallo de oro que canta todas las mañanas en lo alto de una torre. Todas estas bellezas el viajero ya las conoce por haberlas visto también en otras ciudades. Pero es propio de ésta que quien llega una noche de septiembre, cuando los días se acortan y las lámparas multicolores se encienden todas a la vez sobre las puertas de las freidurías, y desde una terraza una voz de mujer grita: ¡uh!, siente envidia de los que ahora creen haber vivido ya una noche igual a ésta y haber sido aquella vez felices.

22

Diomira

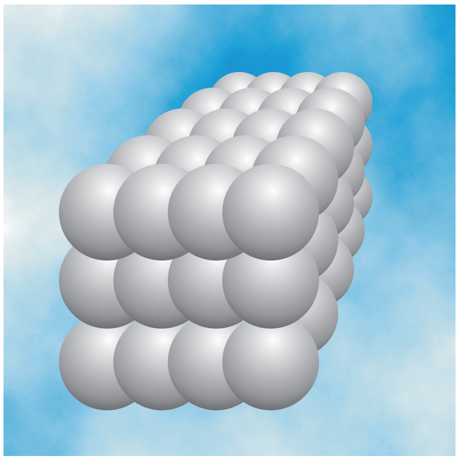
Diomira

La descripción de la ciudad comienza con su localización mediante una doble cuantificación, la distancia y el ángulo con relación al origen de referencia. El primer vector del libro. Tomando como unidad la jornada de viaje y teniendo en cuenta que el Sol sale por levante, la expresión indica que el sentido y dirección del viaje son los del vector (3, 0).

... tres jornadas hacia levante...

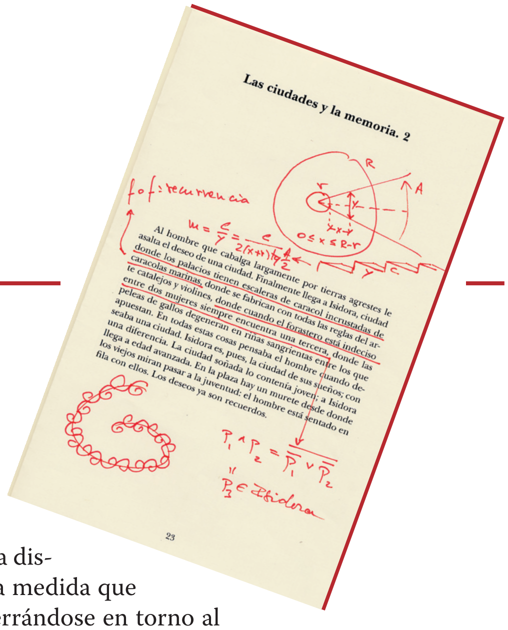
Sesenta es uno de los números más importantes de la Historia de las Matemáticas. Ya en la antigüedad los pueblos mesopotámicos lo adoptaron como base numérica. Una base de orígenes inciertos para la que se han ofrecido justificaciones diversas. Unos atribuyen su uso al hecho de que 60 es un número pequeño con muchos divisores y entre los que están los seis primeros números naturales; otros ven en 60 la sexta parte de 360, una buena aproximación de los días del año; y los hay que opinan que la numeración de base 60 es resultado de la fusión de dos bases de numeración antropomórficas manuales, la de base 12 y la de base 5. ■

... sesenta cúpulas de plata...



En **Diomira** el cielo se multiplica sesenta veces.

Isidora



Las ciudades y la memoria. 2

$f \circ f$: recurrencia

$m = \frac{c}{y} = \frac{c}{2(x+r)\,tg\frac{A}{2}}$

$0 \le x \le R-r$

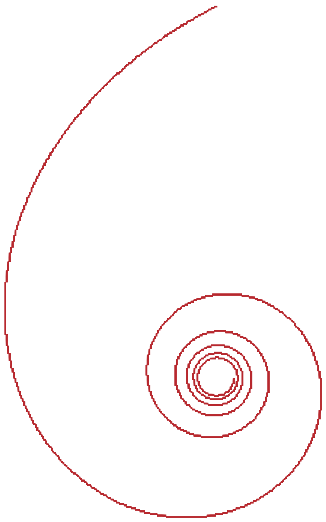
Al hombre que cabalga largamente por tierras agrestes le asalta el deseo de una ciudad. Finalmente llega a Isidora, ciudad donde los palacios tienen escaleras de caracol incrustadas de caracolas marinas, donde se fabrican con todas las reglas del arte catalejos y violines, donde cuando el forastero está indeciso entre dos mujeres siempre encuentra una tercera, donde las peleas de gallos degeneran en riñas sangrientas entre los que apuestan. En todas estas cosas pensaba el hombre cuando deseaba una ciudad. Isidora es, pues, la ciudad de sus sueños; con una diferencia. La ciudad soñada lo contenía joven; a Isidora llega a edad avanzada. En la plaza hay un murete desde donde los viejos miran pasar a la juventud: el hombre está sentado en fila con ellos. Los deseos ya son recuerdos.

$P_1 \wedge P_2 = \overline{\overline{P_1} \vee \overline{P_2}}$

$P_3 \in$ Isidora

23

... donde los palacios tienen escaleras de caracol incrustadas de caracolas marinas...



Incrustar caracolas en una escalera de caracol encierra la idea de recurrencia. La escalera de caracol asciende verticalmente, peldaño a peldaño, girando en torno al eje central que la guía trazando una hélice. La disminución aparente del tamaño de las cosas a medida que se alejan nos hace verla como una espiral cerrándose en torno al ojo de la escalera. Una caracola marina es un cono enrollado sobre sí mismo en espiral. Incrustar una escalera de caracol de caracolas marinas es pues una espiral de espirales, un caracol de caracolas, la composición de una función consigo misma: $f \circ f$. En esto consiste la recurrencia.

Aprovechando la visita a Isidora entro en uno de sus más impresionantes palacios y me detengo contemplando su escalera de caracol. Sé que lo que veo no es real porque una cosa es la escalera y otra distinta cómo la perciben mis ojos. Su forma real es una hélice ascendente por la pared de un cilindro, pero al situarme en medio de su base y levantar la mirada veo una espiral girando alrededor de un punto. La esencia de la forma de esa espiral aparente está en la reducción del radio de la escalera con la distancia. Tomando radio 1 y llamando x a la distancia que nos separa del punto observado, el tamaño aparente (ángulo de visión) con el que percibimos el radio de la escalera es $a(x)=2\cdot arctan(1/x)$. La curva que vemos es la espiral de ecuaciones paramétricas $[a(x)\cdot cos(x), a(x)\cdot sen(x)]$, una espiral que se encarama por un cilindro que percibimos como un embudo cuyas paredes se estrechan según $a(x)$.

... donde cuando el forastero está indeciso entre dos mujeres siempre encuentra una tercera...

Pasando por alto el aire políticamente incorrecto de la frase y centrándonos en lo que nos interesa, la indecisión del forastero proviene de quererlas tanto y por igual que ninguna de las dos puede hacerle olvidar a la otra. Si una tercera resuelve la indecisión, ¿qué relación guarda ésta con aquellas? Podemos representar el problema en una tabla de valores preposicionales en la que 1 significa 'la quiero' y 0 significa 'no la quiero'. Cuando sólo se quiere a una de las dos, la tercera es innecesaria. Se trata de la misma tabla de valores que la de la intersección de dos conjuntos A y B.

Primera	Segunda	Tercera
1	0	0
0	0	0
1	1	1
0	1	0

Luego la tercera mujer es lógicamente equivalente a la intersección de las dos primeras. Desde la perspectiva matemática, el aprecio irrenunciable produce un resultado por el que la indecisión se auto redime.

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\cap B$
1	0	0
0	0	0
1	1	1
0	1	0

En **Isidora**, ciudad construida con los rasgos de la recurrencia, la indecisión no es yerma, sino fructífera en las intersecciones de las cosas más deseadas. ■

Foto FMC

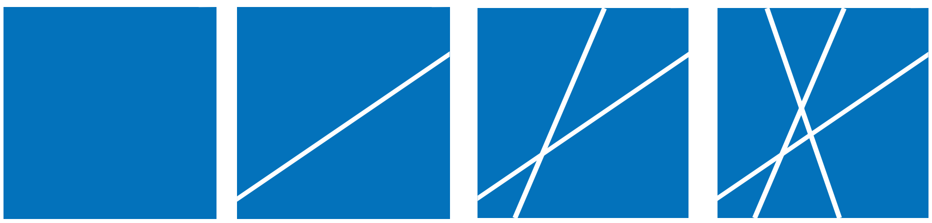
Dorotea

Determinar nueve barrios con cuatro canales rectilíneos es un problema fácil que admite muchas soluciones. Pero pueden crearse hasta 11 barrios con cuatro canales si trazado el primero se añaden otros de modo que cada nuevo canal se cruce con todos los anteriores.

... el foso cuyas aguas alimentan cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios...

Lo que nos conduce al planteamiento de un problema más general: ¿Cuál es el número máximo de barrios que pueden formarse en una ciudad atravesada por n canales rectilíneos? Es decir, ¿en cuántas regiones queda dividido un recinto plano convexo atravesado por n segmentos? Los términos *recinto* y *segmento* sustituyen al de barrio y canal. Consideramos que los segmentos o canales atraviesan la ciudad de lado a lado determinando en ella una partición en polígonos o barrios disjuntos.

Comenzando por un canal e incorporando los sucesivos de manera que cada uno se cruce con todos los anteriores podemos calcular el número $B(n)$ de barrios resultante:



$B(0)=1$ $B(1)=2=B(0)+1=1+1$ $B(2)=4=B(1)+2=1+1+2$ $B(3)=7=B(2)+3=1+1+2+3$

Por tanto, el número máximo de barrios $B(n)$ que pueden crearse es:

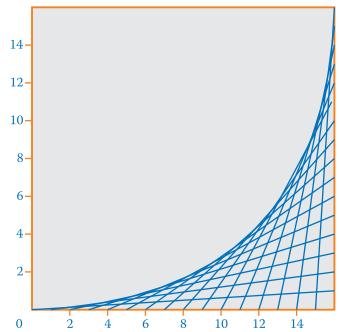
$$B(n)=1+\sum_{i=1}^{n} i=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

No es fácil construir en la práctica particiones muy numerosas. Para valores grandes de n el uso del ordenador se hace imprescindible. Tomando como planta de la ciudad el cuadrado de vértices (0, 0), $(n, 0)$, $(0, n)$ y (n, n), la recta que la atraviesa uniendo el punto $(i, 0)$ con el punto $(n, i+1)$ es:

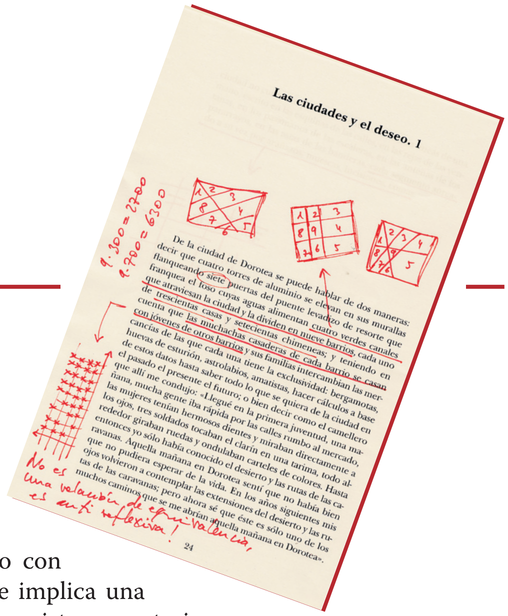
$$y=\frac{i+1}{n-i}\cdot(x-i)$$

Así podemos representar con *Maple* los 121 barrios creados por n=15 canales:

```
> n:=15:
> for i from 0 to n-1 by 1 do f(i):=(i+1)*(x-i)/(n-i) od:
> plot([seq(f(i),i=0..n-1)],x=0..n,y=0..n);
```



Un análisis matemático profundo de la cuestión revela que el perfil de la curva *envolvente* de esos barrios cuando n tiende a infinito es la hipérbola $x^2+y^2+2xy-4y=0$, también expresable como función explícita: $y=2\left(1-\sqrt{1-x}\right)-x$


Las ciudades y el deseo. 1

De la ciudad de Dorotea se puede hablar de dos maneras: decir que cuatro torres de aluminio se elevan en sus murallas flanqueando siete puertas del puente levadizo de resorte que franquea el foso cuyas aguas alimentan cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios, cada uno de trescientas casas y setecientas chimeneas; y teniendo en cuenta que las muchachas casaderas de cada barrio se casan con jóvenes de otros barrios y sus familias intercambian las mercancías de las que cada una tiene la exclusividad: bergamotas, huevas de esturión, astrolabios, amatistas, hacer cálculos a base de estos datos hasta saber todo lo que se quiera de la ciudad en el pasado el presente el futuro; o bien decir como el camellero que allí me condujo: «Llegué en la primera juventud, una mañana, mucha gente iba rápida por las calles rumbo al mercado, las mujeres tenían hermosos dientes y miraban directamente a los ojos, tres soldados tocaban el clarín en una tarima, todo alrededor giraban ruedas y ondulaban carteles de colores. Hasta entonces yo sólo había conocido el desierto y las rutas de las caravanas. Aquella mañana en Dorotea sentí que no había bien que no pudiera esperar de la vida. En los años siguientes mis ojos volvieron a contemplar las extensiones del desierto y las rutas de las caravanas; pero ahora sé que éste es sólo uno de los muchos caminos que se me abrían aquella mañana en Dorotea».

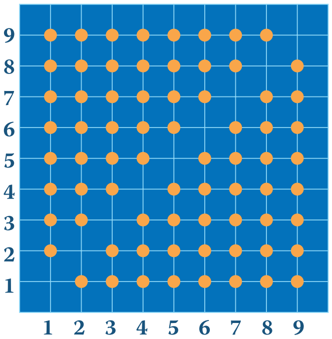
9·300 = 2700
9·700 = 6300
No es una relación de equivalencia, es anti reflexiva!

24

Dorotea

... las muchachas casaderas de cada barrio se casan con jóvenes de otros barrios.

La afirmación citada al márgen determina una relación binaria entre elementos de diferentes subconjuntos o barrios. Los elementos del mismo subconjunto no se relacionan entre sí, sino que deben hacerlo con algún elemento de otro subconjunto, lo que implica una partición del todo cuya representación en un sistema cartesiano deja vacía la diagonal. Una característica de las relaciones anti reflexivas.



Supongamos una ciudad de k barrios disjuntos B_k, cada uno de población p_k. Entonces, la población total N de la ciudad, será:

$$N = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Y el número de matrimonios M posibles:

$$M = \binom{N}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{p_i}{2}$$

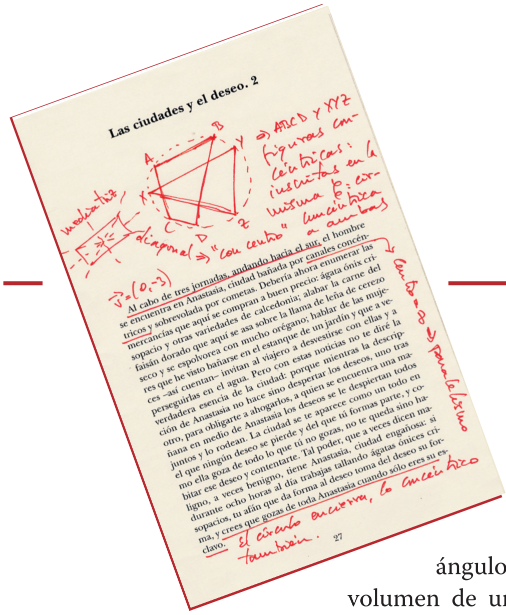
Si en cada barrio vive el mismo número p de personas, $kp = N$ y el resultado se simplifica:

$$M = \frac{N(N-p)}{2}$$

Al ser el valor de p el que se sustrae de N, para dos poblaciones de igual tamaño habrá más riqueza matrimonial en aquella en que las familias sean menos numerosas, pero en las que, por contra, haya más familias:

$$N=12,\ k=4,\ p=3 \Rightarrow M=54$$
$$N=12,\ k=3,\ p=4 \Rightarrow M=48$$

Cuatro canales determinan la topología de **Dorotea** y las relaciones matrimoniales anti reflexivas de quienes viven en ellos. ■



Las ciudades y el deseo. 2

ABCD y XYZ ⇒ figuras concéntricas: inscritas en la misma circunferencia concéntrica a ambas

mediatriz

diagonal ⇒ "con centro"

$\vec{v}=(0,-3)$

Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos y sobrevolada por cometas. Debería ahora enumerar las mercancías que aquí se compran a buen precio: ágata ónix crisopacio y otras variedades de calcedonia; alabar la carne del faisán dorado que aquí se asa sobre la llama de leña de cerezo seco y se espolvorea con mucho orégano; hablar de las mujeres que he visto bañarse en el estanque de un jardín y que a veces –así cuentan– invitan al viajero a desvestirse con ellas y a perseguirlas en el agua. Pero con estas noticias no te diré la verdadera esencia de la ciudad: porque mientras la descripción de Anastasia no hace sino despertar los deseos, uno tras otro, para obligarte a ahogarlos, a quien se encuentra una mañana en medio de Anastasia los deseos se le despiertan todos juntos y lo rodean. La ciudad se te aparece como un todo en el que ningún deseo se pierde y del que tú formas parte, y como ella goza de todo lo que tú no gozas, no te queda sino habitar ese deseo y contentarte. Tal poder, que a veces dicen maligno, a veces benigno, tiene Anastasia, ciudad engañosa: si durante ocho horas al día trabajas tallando ágatas ónices crisopacios, tu afán que da forma al deseo toma del deseo su forma, y crees que gozas de toda Anastasia cuando sólo eres su esclavo.

centro = 0 ⇒ paralelismo

El círculo encierra, lo concéntrico también.

27

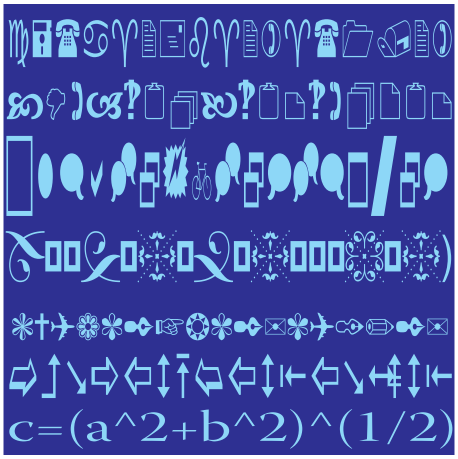
Zaira

Zaira

El espacio se mide con la longitud, la superficie y el volumen. En Zaira, cada una de esas magnitudes remite a un suceso. La longitud de una diagonal, el ángulo de una pendiente, el área de un parque y el volumen de un estanque, además de un valor numérico intrínseco, poseen el valor que determinan los acontecimientos con los que se relacionan. Cada cálculo realizado en Zaira rememora y fundamenta su historia.

La ciudad no está hecha de esto, sino de las relaciones entre las medidas de su espacio y los acontecimientos de su pasado ...

No es nuevo que las medidas de un campo de cultivo acostumbren a relacionarse con las inundaciones del delta de un río, ni que una diagonal irracional rememore las discusiones filosóficas y políticas del origen de nuestra cultura, o que la medida constante de la curvatura de un arco semicircular sobre la entrada a una iglesia nos transporte al vacío de conocimiento científico más longevo que ha conocido Europa, o que en las medidas 'divinas' de un rectángulo revivamos el Renacimiento italiano del s. XVI, ni que la medida nula de algunos conjuntos infinitos nos sitúe en el romanticismo del s. XIX o que la inexistencia de medida de la derivada en todos los puntos de una curva continua sea característica del s. XX. ■



De **Zaira** hablan las Matemáticas.

Anastasia

Anastasia


Las ciudades y el deseo. 2

Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos y sobrevolada por cometas. Debería ahora enumerar las mercancías que aquí se compran a buen precio: ágata ónix crisopacio y otras variedades de calcedonia; alabar la carne del faisán dorado que aquí se asa sobre la llama de leña de cerezo seco y se espolvorea con mucho orégano; hablar de las mujeres que he visto bañarse en el estanque de un jardín y que a veces –así cuentan– invitan al viajero a desvestirse con ellas y a perseguirlas en el agua. Pero con estas noticias no te diré la verdadera esencia de la ciudad: porque mientras la descripción de Anastasia no hace sino despertar los deseos, uno tras otro, para obligarte a ahogarlos, a quien se encuentra una mañana en medio de Anastasia los deseos se le despiertan todos juntos y lo rodean. La ciudad se te aparece como un todo en el que ningún deseo se pierde y del que tú formas parte, y como ella goza de todo lo que tú no gozas, no te queda sino habitar ese deseo y contentarte. Tal poder, que a veces dicen maligno, a veces benigno, tiene Anastasia, ciudad engañosa: si durante ocho horas al día trabajas tallando ágatas ónices crisopacios, tu afán que da forma al deseo toma del deseo su forma, y crees que gozas de toda Anastasia cuando sólo eres su esclavo.

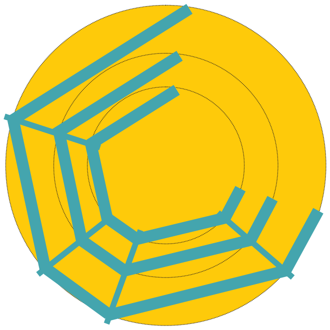
27

Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia...

Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos...

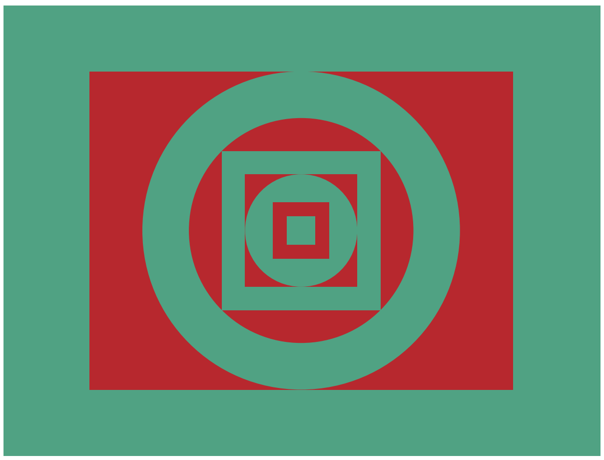
El vector de localización de Anastasia es el de componentes (0,–3), toman por unidad es la jornada a pie.

Dos figuras concéntricas comparten un mismo centro. La idea más inmediata es pues relacionar el término con circunferencias concéntricas. Pero hay también cuadrados, rectángulos y triángulos concéntricos. El caso de los polígonos es distinto al de las circunferencias. En los primeros no todos sus puntos equidistan del centro, su *concentricidad* se refiere a los vértices. Dos polígonos concéntricos tienen sus vértices sobre circunferencias concéntricas. Dudo mucho que los canales de Anastasia sean circulares, más bien me inclino por canales poligonales paralelos, esto es, concéntricos, como los de Ámsterdam, (figura del márgen).



Dos figuras pueden ser concéntricas y no parecerlo en absoluto. Dos polígonos cualesquiera inscritos en la misma circunferencia o inscritos en distintas circunferencias, pero concéntricas, son concéntricos.

Podríamos imaginar los canales de Anastasia como segmentos paralelos, siendo su centro común un punto en el infinito. Pero ésa sería una representación matemática demasiado estereotipada. Más aún teniendo en cuenta que, en tal caso, no nos referiríamos a ellos como canales concéntricos, sino paralelos. ■



En **Anastasia** reina la concentricidad.