SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 53-60

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI)

Durante diez capítulos hemos recuperado dos temas de matemática elemental asiduos de los libros de texto de enseñanza media desde la revolución francesa a nuestros días: el Teorema de Pitágoras y el Triángulo de Pascal. Con la modestia que corresponde a los grandes retos, hemos intentado conjugar una presentación didáctica e histórica de ellos. El objetivo: aportar ideas con las que poder abordar el viejo desafío de incorporar la historia de las matemáticas al aula. Como no podría ser de otro modo, hemos rehuido la traslación literal porque estamos convencidos de que, entre lo que el profesor o profesora conoce y lo que trasmite debe haber un espacio para la admiración, otro para el entusiasmo, unas pequeñas dosis de realismo y la fe ciega en las posibilidades de sus discípulos. Por eso las decisiones didácticas son reino de cada cual, porque son parte de las herramientas de que disponemos como artistas.

Las posibilidades de converger didácticamente hacia el Triángulo Aritmético son múltiples. Hemos salpicado los artículos anteriores con diversos problemas que permiten ese acercamiento desde diferentes puntos de vista. Los dos que siguen a continuación son otras tantas alternativas a aquellos, planteadas desde perspectivas distintas. En un caso buscando el atractivo del deporte[1] y en otro la posibilidad de introducir materiales manipulativos.

El Empate

El duelo en la cumbre entre el Racing y el Albacete se saldó con un 5-5[2]. Pero no ha sido el único empate voluminoso de la jornada. ¿De cuántas formas diferentes se pudieron dar los resultados parciales que llevaron a ese empate final? Por ejemplo, si hubieran empatado a 1 sólo habría dos posibilidades:

a) De (0,0) a (0,1) y a (1,1)
b) De (0,0) a (1,0) y a (1,1)

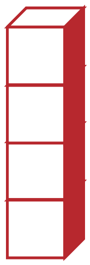
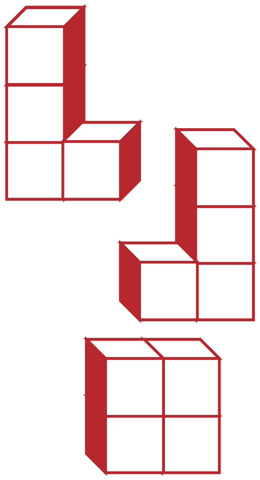
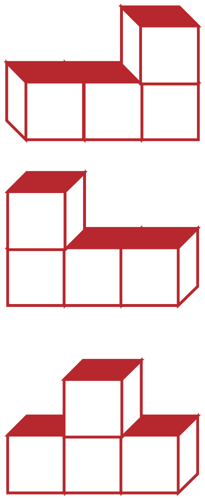
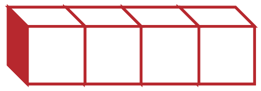
Pero, a partir de ahí, las cosas se complican...

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

King strut's cubes[3]

King Strut kept his gold in cubes. He enjoyed handling is gold and often spent time stacking these cubes. The king only stacked cubes directly on top of each other or side by side (never one behind the other). The diagram below shows the different ways of stacking four gold cubes.

The different Ways of stacking 4 gold cubes is:

1 column	*1 column*	*1 column*	*1 column*
			
1 way	*1 way*	*1 way*	*1 way*

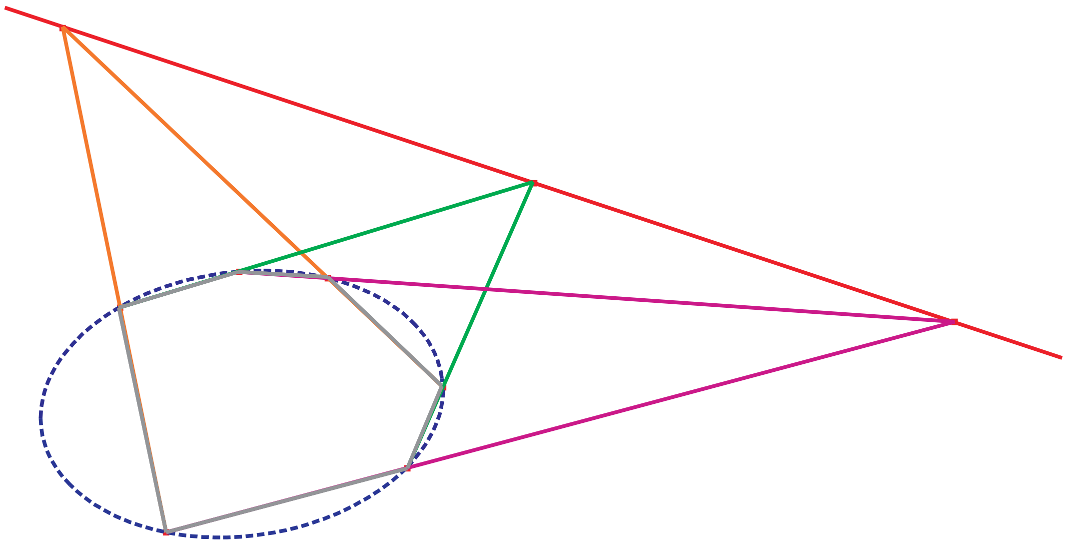
Total 8 ways

Make a diagram showing how three gold cubes be stacked according to the kins's rules.
Make a diagram showing how five gold cubes could be stacked.
Predict the number of ways six gold cubes could be stacked.
What is the pattern?

Pascal, de nuevo Pascal

Podríamos seguir hablando de Pascal y del Triángulo Aritmético algunos capítulos más. Sus notables aportaciones al campo de la probabilidad son sobradamente conocidas y preferimos obviarlas. Sobre la figura de Pascal como ser humano atormentado y profundamente religioso hemos incidido en algunas ocasiones. Acerca de sus aportaciones filosóficas hablaremos en el siguiente capítulo.

Ahora bien, antes de terminar esta larga disertación y en compensación por la paternidad robada en lo que al Triángulo Aritmético se refiere, nos gustaría rendir homenaje en Pascal a uno de esos teoremas maravillosos de la geometría. Una de esas verdades matemáticas que deslumbran al lego y de las que resulta difícil determinar qué tipo de belleza la impregna. Para el platonismo, la regularidad es el arquetipo de la sabiduría, en particular de las Matemáticas. A la estética matemática[4] le importa más el hecho en sí que la razón sobre la que se



Teorema de Pascal: Las prolongaciones de los lados opuestos de un hexágono se cortan en tres puntos alineados si el hexágono se puede inscribir en una cónica.

sustenta[5]. El que las prolongaciones de los pares de lados opuestos de un hexágono se corten en tres puntos y que estos estén en una circunferencia no tiene para el erudito en matemáticas valor plástico alguno puesto que conoce las razones de que así suceda. Sin embargo, la condición de que estén alineados estimula su pasión estética. Si se cortaran en un único punto llegaría al éxtasis. Parece por tanto existir una cierta correlación intrínseca entre estupidez geométrica, regularidad y platonismo estético.

Podemos negar el platonismo pero reivindicamos la sorpresa de que, para que estén alineados, el hexágono debe ser inscriptible en una cónica. La demostración de Pascal ocupa una sola página. El lo dedujo de las enseñanzas de su maestro Girard Desargües (eso afirmó) y, al parecer, para él también constituía una obviedad, un juego de niños, no en vano lo publicó a los 16 años... los mismos que tenían Adriana y Diana cuando gestaron su trabajo. Ahora bien, conocer la razón última que encierra una cónica para que suceda tal cosa es harina de otro costal. Esa razón intima puede ser del mismo universo de verdad que la que determina cómo deben estar dispuestos esos seis puntos para que los de corte formen un triángulo equilátero, uno isósceles, coincidan dos de ellos o los tres. Pero puede no serlo. La estética que rodea esa verdad última es la estética del naturalista, la del técnico. Por cierto ¿Y si se tratase de un octógono? ¿Qué condiciones deberían darse para que se cumplieran cada uno de los postulados anteriores? ¿Por qué nos conformamos con una pequeña parcela de placer? Parece como si tuviéramos miedo a transcender la regularidad, como si temiéramos romper esa frágil porcelana. Pero, miremos un momento detrás de la niebla: si asumimos la obviedad de que cada estética lleva asociada una fuerte carga ideológica, ¿en qué educamos? y, recalando en la didáctica: si nosotros mismos no nos planteamos preguntas como curiosos impenitentes, si rehuimos la trascendencia, el deleite de ir más allá, el conocimiento profundo de las cosas... ¿en qué adoctrinamos?

Tartaglia

Tampoco nos gustaría olvidar a Tartaglia. Ese mítico personaje que, en nuestra juventud, compitió con Pascal por la paternidad del Triángulo Aritmético. Desconocemos los avatares científicos, políticos e historiográficos por los que nuestros libros de texto optaron por el italiano. Sea como fuere, *Niccolo Fontana* (1499-1557), más conocido como *Tartaglia*[6], debe la fama a sus aportaciones a la resolución de ecuaciones cúbicas, verdadera preocupación matemática de la época. La primacía se la atribuyó Cardano (1501-1576) quien, en su *Ars Magna* (1545), publicó los resultados del bresciano junto a sus propias aportaciones y a las que hiciera Ludovico Ferrari a la resolución de ecuaciones de cuarto grado. Tartaglia se sintió traicionado por el milanés, a quien había confiado su secreto a cambio de una recomendación ante el gobernador Alfonso de Avalos (1502-1546) que le permitiera conseguir un trabajo en la corte de Milán y poder abandonar así su pobre empleo de profesor en Venecia.

NICOLAVS TARTAGLIA, BRIXIANVS.

La ruptura del juramento solemne que le hiciera Cardano llevó a Niccolo Fontana a publicar *Quesiti et inventioni diverse* (1546) y denunciar en él la felonía. Pero Cardano era, además de matemático, un prestigioso médico de Milán mientras Tartaglia no pasaba de ser un modesto profesor de Venecia. Desde su superioridad Cardano no aceptó el debate con Tartaglia y se lo trasladó a Ferrari con quien Tartaglia mantendría algunos intercambios epistolares[7], salpicados de insultos, sin decidirse a aceptar el reto. Hasta que, en 1548, Tartaglia recibió una oferta para dar clases en su ciudad natal a condición de que saliera vencedor en el debate con Ferrari. El 10 de agosto de 1548, Niccolo fue derrotado en buena lid y perdió su plaza viéndose obligado a volver a Venecia. Podría pensarse que, una vez más, la pobreza hizo causa con la injusticia y la oligarquía para decidir el devenir de una historia en la que el bresciano fue la víctima, de no ser porque, en 1543 y dentro de su menos conocida labor de traductor, Tartaglia publicó *Opera Archimedis*. Una copia literal de la traducción que hiciera Moerbeke (c. 1215-1286) del autor griego, en el siglo XIII, y que el defraudado matemático pretendió atribuirse como propia[8].

En 1537 publicó *Nova scientia.* Un libro sobre mecánica en el que afirma, aunque no demuestra, que el alcance máximo de un proyectil se logra cuando el ángulo de disparo es de 45º. Unos años después, en 1560, aparecería su *Trattato*[9], obra póstuma en la que hace referencia al Triángulo Aritmético y al desarrollo de las potencias del binomio que hoy lleva el nombre de Newton.

Otros Triángulos Aritméticos

Más allá de Tartaglia y de Pascal, nos gustaría terminar esta serie de referencias al Triángulo Aritmético acercándolo al aula y dotándolo de actualidad. Ya comentamos en (IV)[10] que la primera vez que Adriana y Diana entraron en contacto con él fue a través de los números con forma. Fue el estudio de los órdenes numéricos[11] los que dieron lugar al trabajo *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular* al que venimos haciendo referencia y en el que el verdadero interés por continuar investigando lo suscitó la distribución fractal de los múltiplos de un número cualquiera (para ellas primo) en el Triángulo Aritmético.

Pascal insiste muchas veces en que el generador del Triángulo Aritmético no tiene por qué ser “1”, que puede ser cualquier otro número, pero no pasa de ahí. Las propiedades, todas las que enuncia se cumplen, con ligeras variantes, en todos ellos puesto que no son más que réplicas de las del primero[12] obtenidas al multiplicar todos sus elementos por el valor del nuevo generador. Sin embargo, lo que Adriana y Diana se plantean, y lo que posiblemente les hizo merecedoras de su galardón en el concurso de *Jóvenes Investigadores*, es considerar el objeto en sí mismo, transcender su origen y construir otros triángulos centrados en los números cuadrados, pentagonales o hexagonales, tratar de buscar en ellos las propiedades que se conservaban del de Pascal y estudiar la posibilidad de encontrar un fractal de Pascal para cada pareja de números naturales. En sus propias palabras:

¿Qué pasaría si en un Triángulo Aritmético ordinario en el que, como se ve, sus diagonales son respectivamente la unidad, los números naturales, triangulares, tetraédricos en tres dimensiones, cuatro, etc., se generase a partir de números cuadrados, pentagonales, etc. manteniendo el criterio de formación?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Rojo: números naturales
Azul: números triangulares
Violeta: números tetraédricos (3D)
Verde: números triangulares en 4D
Magenta: números triangulares en 5D

Si sustituimos 1, 3, 6, 10, por 1, 4, 9, 16 y mantenemos la idea de que la suma de dos números ha de generar el de abajo, 1 y 4 obligan a que aparezca el tres rojo, y ese 3 a que aparezca el 2 negro etc.

□
2 1
□ 3 1
□ □ 4 1
□ □ 9 5 □
□ □ 16 14 □ □
□ □ 25 30 □ □ □

Para empezar, no sabemos si la diagonal de "unos" y la de los números naturales existiría. Pero la primera decisión a tomar es la que hace referencia a ¿cuáles son los números cuadrados en tres, cuatro, etc. dimensiones? Pero esa respuesta es sencilla si se tiene en cuenta que el primer número cuadrado en tres dimensiones es 1 y que queremos mantener el mismo criterio sumatorio para construir el triángulo.

Eso es suficiente para calcular la diagonal amarilla y todas las demás. Quedando sin determinar el primer término del Triángulo que podría ser un 1 o un 2. Los números que aparecen como cuadrados en otras dimensiones son, en realidad, piramidales y no cúbicos[13], que fue nuestra primera intención y que luego desechamos. Con esa condición obtuvimos los siguientes triángulos:

2 1
2 3 1
2 5 4 1
2 7 9 5 1
2 9 16 14 6 1
2 11 25 30 20 7 1
2 13 36 55 50 27 8 1
2 15 49 91 105 77 35 9 1
2 17 64 140 196 182 112 44 10 1

Y el de los números pentagonales.

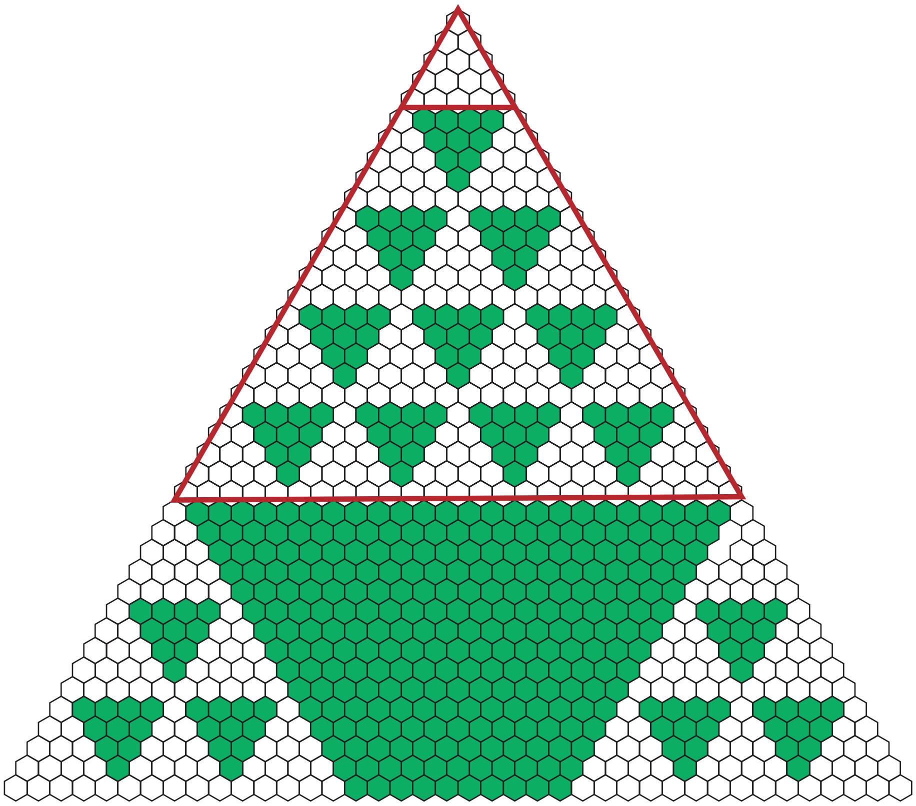
3 1
3 4 1
3 7 5 1
3 10 12 6 1
3 13 22 18 7 1
3 16 35 40 25 8 1
3 19 51 75 65 33 9 1
3 22 70 126 140 98 42 10 1
3 25 92 196 266 238 140 52 11 1

Podríamos hacer lo mismo con números hexagonales o de cualquier otro tipo pero no tiene mucho sentido pues los resultados que vamos obteniendo parecen fácilmente generalizables a cualquier número poligonal.

Los tres triángulos tienen por tanto la misma estructura, por lo que tendrían que tener las mismas características, o al menos, un número considerable de ellas en común. Veamos si es así o hay diferencias.

No vamos a entrar en ese análisis, ellas sí lo hicieron y concluyeron que, con las variantes necesarias, algunas de las cuales exigen trabajar en un sistema de numeración de base 11, son generalizables todas las propiedades que se fundamentan en la suma o expresan relaciones con sumandos, el resto no. Una conclusión coherente con haber mantenido el criterio de formación pero que requiere ser revisada y precisada. No es el momento de hacerlo, preferimos centrarnos en lo que acabó siendo su verdadera obsesión: Las propiedades fractales del Triángulo.

Incluimos, sin más, alguna de las hojas del escrito que presentaron para que se vea que fue un trabajo manual[14]. En esos momentos, ellas no tenían la posibilidad de desarrollar un programa informático que diera una respuesta técnica al problema, pero eso no fue óbice para adentrarse en un proceso de investigación. Jugaron con los lápices de colores y calcularon después las dimensiones fractales correspondientes. Es cierto que encontraron escollos que no pudieron solventar. Las limitaciones eran grandes. Pero poco importa, tenían suficiente autonomía de pensamiento y seguridad en sus propias capacidades, habían descubierto tanto que no sólo no iba a producirles decepción alguna no poder responder a todas las preguntas, sino que disfrutaron del placer de haberse adentrado en un universo en el que todos los caminos estaban aún por explorar.



Múltiplos de 5 en un Triángulo de números triangulares

Hemos pintado en cada uno de los triángulos los múltiplos de cinco, de tres, y dos (...). En todos ellos aparece señalado qué es lo que cogemos como *unidad* y como *representación del todo* a la hora de calcular las dimensiones fractales.

La dimensión fractal[15] sería

$$\frac{\log 15}{\log 5}$$

y eso pasa en todos los que son potencia de un número primo puesto que el número de veces que cabe la *unidad* en el *todo* es el número triangular que designa la unidad:

$$\frac{\log[(n+1)n/2]}{\log n}=\frac{\log(n+1)}{\log n}+\frac{\log n}{\log n}-\frac{\log 2}{\log n}=1+\frac{\log[(n+1)/2]}{\log n}$$

como

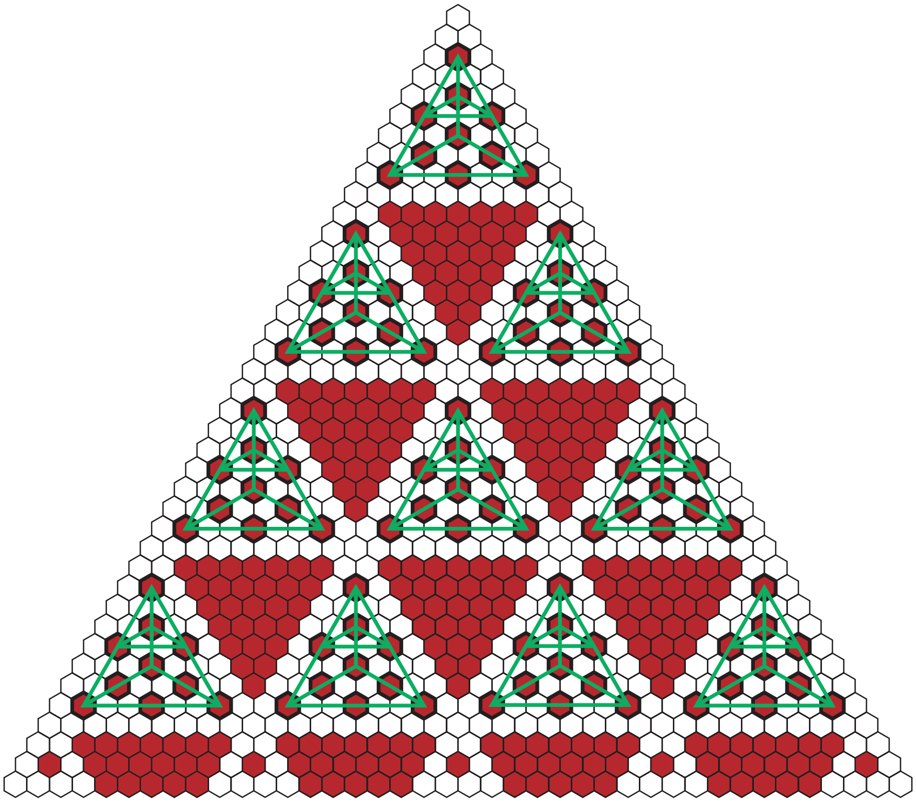
$$\frac{n+1}{2}<n$$

porque el menor valor de n que tomamos es 2, tenemos que $\log[(n+1)/2]< \log n$ luego la dimensión es siempre uno y pico, es decir, mayor que 1 y menor que

$$2=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log[(n+1)/2]}{\log n}\right)$$

Pero las fracciones relacionan un número natural y uno triangular ¿será posible obtener una relación entre dos números naturales cualesquiera a partir de estos otros triángulos?

Es decir, si un *triángulo de números triangulares* establece relaciones entre un número natural y uno triangular y eso se pudiera transladar a natural con cuadrado en los cuadrados, natural con pentagonal en los pentagonales, etc. siempre podríamos establecer un fractal para cualesquiera dos números naturales. Sin embargo, la generalización topó con problemas irresolubles a partir del método de trabajo elegido. En algunos casos, como el de la siguiente figura, determinar la relación entre la *unidad* y el *todo* hubiera requerido poder dibujar un mayor número de filas. En cualquier caso, el número de filas es suficiente para saber que hay que modificar la hipótesis de partida. El dibujo contiene la dirección hacia la que orientaron sus



Múltiplos de 3 en un Triángulo de números cuadrados

pasos, pero a estas alturas eran conscientes de que lo que debían modificar era su método de trabajo. Ahora bien, al margen de la incompletitud de los resultados, el reto que Adriana y Diana nos dejan sobre la mesa es el de transcender las propias limitaciones, el de cultivar la ambición de ir más allá, el de aceptar que existen nuevas posibilidades que se abren frente a nosotros, absolutamente actuales, y que es nuestra la decisión, y la responsabilidad, de cultivarlas o dejarlas baldías.

Epígono

Investigar por el placer de investigar sería ya, en sí mismo, un excelente objetivo. Construir las matemáticas a partir de ese proceso es además un reto. Cuando se deja que la libertad guíe los pasos, un sinfín de posibilidades se abre ante nosotros. Un mundo desconocido para el alumno, y muchas veces para el profesor[16], en el que, nuestros miedos, sus cautelas y la cortedad de miras de las familias son razones para una parálisis didáctica que ha terminado por convertir lo que debiera ser un lugar común para el deleite en un bosque encantado que alumnos y profesores no se atreven a pisar, dedicándose de por vida a tartamudear sus pesares cultivando la algorítmica.

Que alumnos y alumnas necesiten calculadora para realizar sencillas operaciones de matemáticas e incluso que se equivoquen al simplificar una derivada o una expresión algebraica... genera una profunda crisis de principios entre el profesorado que se multiplica exponencialmente cuando se constata que les pasa a la mayoría de nuestros pupilos... A corregir esa dificultad se dedican ingentes esfuerzos a pesar de que sabemos que es un problema intranscendente para la mayoría de los profesionales. Incluso para matemáticos e ingenieros que, conscientes de que el trabajo manual no es garante de nada, prefieran recurrir a la exactitud de las máquinas. Sin embargo, que al acabar las enseñanzas medias ¡y superiores! un estudiante no haya tenido la oportunidad de disfrutar del placer de descubrir, ni se le haya formado para ser capaz de enfrentarse a un problema y ser eficaz buscando soluciones, no parece preocuparle a nadie.

Desde hace siglos, hay quienes opinan que la mejor manera de aprender es estudiar sobre el mapa los caminos que otros recorrieron en su día para garantizar que lleguen –aunque de forma virtual– a los mismos lugares a los que llegaron ellos. Otros proponemos la resolución de problemas como modelo de aprendizaje. En ese proceso el mapa no existe, los caminos no están marcados, los primeros pasos son titubeantes y los recorridos erráticos e imprevisibles, pero los resultados son tan extraordinariamente sorprendentes que merece la pena confiar decididamente en las posibilidades del alumnado.

Es hora de rentabilizar el talento humano. Es hora de mandar al museo de la algorítmica los múltiples cálculos algebraicos que realiza en segundos cualquier mediocre ordenador. Es hora de orientar el tiempo que dedicamos a adiestrar en la disciplina y la obediencia hacia el placer del descubrimiento. Es hora de cultivar la imaginación y el pensamiento divergente. Es hora de permitir a los alumnos y alumnas que se planteen sin complejos cualquier pregunta por extraña que parezca, que traten de dar una respuesta en la medida de sus posibilidades e intuyan la forma de abordarla en profundidad. Es hora de permitir que la historia entre en las aulas, ilustre a los –y las– adolescentes y nos ilumine al profesorado para entender algunos de sus bloqueos epistemológicos.

Estos seis últimos capítulos tejidos en torno a un sencillo contenido de las matemáticas más elementales no pretendían ser una invitación a la disidencia, ya no reclamamos héroes, nos vamos haciendo viejos, nos conformamos con instaros a la reflexión: Cuando el Consejo de Europa habla de competencias básicas, ¿hace referencia a la autonomía de pensamiento que el estudiante debe desarrollar para aplicar sus conocimientos a contextos diferentes? ¿Vamos a ser capaces de asumir ese reto en esencia o, por el contrario, dedicaremos nuestros esfuerzos a inventar una prolija taxonomía de casos concretos, dispuestos para el adiestramiento tipo Paulov, y pervertir así, una vez más, ese nuevo campo de libertad que se abre frente a nosotros? ■

NOTAS

1 A estas edades (a otras también), el deporte sigue siendo un elemento motivador. El inglés, a pesar de los años de estudio, un reto.

2 En el décimo aniversario del problema... El partido se jugó en la jornada n.º 20 de la temporada 95-96.

3 Hemos conservado el título y enunciado con que aparece en Dale Seymour [1986]. No debería haber problema alguno para respetarlo en clase.

4 Si hablamos con propiedad deberíamos decir "una determinada estética matemática". Aunque en este caso lo afirmado disfrute de un amplio campo para la generalización.

5 En muchas ocasiones, al saber matemático también.

6 Tartamudo en italiano. Recibió este apodo, que él mismo utilizaría como seudónimo, debido a las dificultades en el habla que se derivaron de un sablazo recibido en 1512 durante la monstruosa matanza infligida por los franceses a los habitantes de su ciudad natal, Brescia. La herida, que afectó a sus cuerdas vocales, le dejó horribles cicatrices que disimuló dejándose crecer la barba.

7 En forma de pasquines.

8 En esta desgraciada competencia en malas artes, también salió perdedor Tartaglia. Cardano, en su *Ars Magna*, tuvo al menos la apostura de reconocer el mérito que competía a Fontana, del Ferro y Ferrari en la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado.

9 General tratatto di numeri et misuri.

10 En torno al "Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV)", *SUMA*, Febrero 2006, n.º 51

11 Así llama Pascal a los números figurados.

12 En el ya referido (nota 10): "En torno al Triángulo ... (IV)", Adriana y Diana aportan una extensa colección de propiedades de éste Triángulo Aritmético que tiene por generador la unidad.

13 Unos años antes, en "Alrededor del Triángulo", Miguel Ángel Velasco, Alberto Pérez, Javier Eced y Javier Adán (4º de ESO) hicieron del Triángulo Aritmético Tridimensional –el que recoge los coeficientes del trinomio– su objeto de estudio. El análisis de sus propiedades y la comparación con las del Triángulo Aritmético habitual constituye un excelente problema de investigación para alumnos y alumnas de cualquier nivel, incluido el universitario. También ellos se vieron obligados a decidir sobre la forma de los números cuadrados y trataron de expandirse, aunque sin éxito, a pirámides de base pentagonal y hexagonal.

14 La calidad de la impresión nos ha decidido a sustituir los dibujos de las alumnas que estaban pintados a mano. Nota del Editor.

15 Hausdorff.

16 Por supuesto, también para alumnas y profesoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

No querríamos acabar esta serie dedicada al Triángulo Aritmético sin reseñar un excelente y bien documentado texto de divulgación histórica:

MARTÍN CASALDERREY, Francisco, 2000, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el renacimiento italiano*, Nivola, Madrid.