SUMA 53
Noviembre 2006, pp.39-49

Euler jugando al dominó

Se presenta una actividad que relaciona dominó y grafos y con la que pretendemos que el alumno, a partir del análisis de un cierto aspecto del juego, sea capaz de llegar a conjeturar los resultados clásicos de Euler sobre la existencia de caminos o ciclos recorriendo todas las aristas de un grafo.

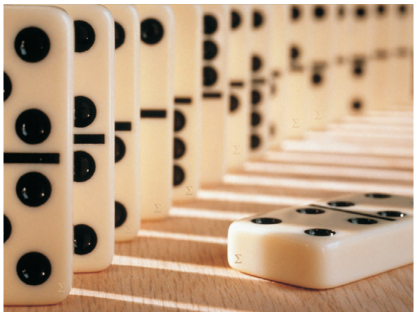
We suggest an activity relating dominoes and graphs. Our main goal is that the student, starting from an analysis of the game, manages to conjecture the classical results about the existence of paths and cycles travelling across every edge in a graph which were first found by Euler.

La actividad desarrollada en este artículo se basa, en parte, en una sesión de trabajo con alumnos de 4.º de ESO dirigida por uno de los autores en el Taller de Talento Matemático[i] organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Nuestro principal propósito es introducir los grafos en el aula de forma natural, consiguiendo que los alumnos lleguen a conjeturar los resultados originales de Euler sobre la existencia de cierto tipo de caminos en un grafo.

La Teoría de Grafos es una herramienta matemática con múltiples aplicaciones en muy diferentes contextos. Pueden aplicarse en sociología (Kindt, 1993), en problemas de índole geográfica (Espinel, 1994), en diseño de algoritmos informáticos (Sipser, 1996) e incluso en el análisis de muchos juegos de estrategia (Martín y Méndez, 2004; Espinel y Sobrón, 1992). Quizás esta pluralidad de contextos en los que pueden aparecer, unida a la simplicidad de conceptos necesarios para introducirse en su estudio, sugiere la viabilidad de que los conozcan los alumnos de secundaria. Ya que, además de su carácter utilitario, la Teoría de Grafos tiene un claro valor formativo puesto que

> los grafos constituyen una buena herramienta para conceptuar situaciones, para extraer pautas y, de forma mucho más evidente, para llegar a extraer esquemas y transferirlos a situaciones nuevas (Coriat y otros, 1989).



> *Comprender las cosas que nos rodean*
> *es la mejor preparación para comprender*
> *las cosas que hay más allá.*
>
> Hipatia de Alejandría

Antonio M. Oller Marcén
José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
Zaragoza

Y además,

> facilitan el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje [...] porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos (ibidem).

Este último hecho lo consideramos de vital importancia, pues en el informe PISA 2003 leemos:

> Los estudiantes con una desarrollada capacidad de gestionar su propio aprendizaje son capaces de elegir objetivos de aprendizaje adecuados, de usar su conocimiento y habilidades previas para dirigir su aprendizaje y de seleccionar estrategias de aprendizaje adecuadas a la tarea que les ocupa.

El juego es una herramienta propicia para invitar a que el alumno investigue casos particulares en busca de posibles generalizaciones.

Por otro lado, los teoremas o resultados de Euler a los que hacíamos referencia anteriormente aparecen como la generalización de la resolución del conocido problema de los puentes de Köningsberg por parte del célebre matemático Leonhard Euler en 1736. Así, en el lenguaje de la Teoría de Grafos, estos resultados dicen lo siguiente:

- Las condiciones necesarias y suficientes para que en un grafo exista un ciclo euleriano (esto es, una forma de recorrer un grafo pasando una sola vez por cada arista y acabando el trayecto en el vértice en que se empezó) son que el grafo sea conexo y que el número de aristas que salgan de cada vértice sea un número par.
- Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de caminos eulerianos de un grafo (una manera de recorrerlo pasando una sola vez por cada arista, pudiendo acabar el trayecto en otro vértice) son que el grafo sea conexo y que el número de aristas que salgan de cada vértice sea par, salvo en dos de los vértices que serán impares. En estos vértices empezará y acabará el camino euleriano.

Los motivos que nos llevan a elegir estos resultados de Euler como objetivo final de la actividad son diversos. En primer lugar podemos indicar que dichos resultados constituyen, en cierto modo, el acta fundacional de la Teoría de Grafos e incluso de la Topología, es decir, tienen un gran interés histórico añadido al puramente matemático. Además, dichos resultados son útiles y aplicables en situaciones muy distintas a la que les dio origen. Por último, éstos son muy intuitivos y fáciles de comprender por parte de los alumnos.

Nos parece, por tanto, que los motivos anteriores justifican sobradamente el intento de abordar una actividad para introducir los grafos —y los resultados de Euler— a alumnos de secundaria. Sin embargo a la hora de abordar una actividad del tipo:

¿Puedes encontrar un camino euleriano en este grafo?

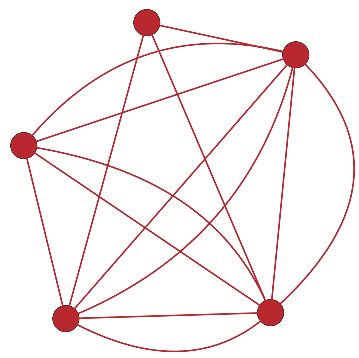


Figura 1. Un grafo difícil de manejar

pueden presentarse algunas dificultades cuando se intenta conjeturar dichos resultados sólo a partir del manejo de los grafos; por ejemplo:

- Existen pocas estrategias de búsqueda de caminos aparte de la técnica de ensayo y error.
- La citada técnica, además, exige marcar las aristas del grafo para gestionar el recorrido y ante una mala elección es difícil *desandar* el camino realizado. Esto obliga a comenzar de nuevo, con las dificultades que esto conlleva respecto a recordar lo que se hizo inicialmente.
- La conjetura sobre los resultados de Euler y su posterior demostración o justificación pueden ser difíciles de intuir si razonamos únicamente a partir de un grafo.

Por todo ello, hemos buscado un juego fácilmente modelizable por los grafos en el que plantearemos actividades relacionadas con los resultados de Euler que los alumnos podrán resolver dentro del mismo, exportando posteriormente sus respuestas al ámbito de los grafos.

Muchos autores han trabajado e investigado a lo largo de estos años sobre la importancia de la introducción de los juegos en el aula de matemáticas como un valioso recurso educativo con un gran factor motivador en el alumnado (Balbuena y otros, 2000; Corbalán, 1994; Delofeu, 2001; Gairín y Muñoz, 2006; Gardner, 2002; Grupo Alquerque, 2004; …). En Gairín (2001) podemos leer que

> hacer matemáticas es un proceso que demanda del aprendiz una actitud positiva para la resolución de problemas [...] una actitud, en suma, de que hacer matemáticas significa crear y destruir.

En el ámbito de los juegos, este crear y destruir es más literal que nunca, pues las partidas pueden ser repetidas tantas veces como se desee, surgiendo de forma natural un amplio abanico de casos diferentes. El juego es una herramienta propicia para invitar a que el alumno investigue casos particulares en busca de posibles generalizaciones, genere sus propias conjeturas y se aventure a validarlas mediante una justificación razonada o una posterior demostración.

Leemos en Corbalán (1999) que

> la posibilidad de disponer de juegos matemáticos es grande, porque no sólo hay que buscar dentro de las propias matemáticas, sino que se puede partir de los juegos sociales habituales.

Nosotros nos decantamos por estos últimos juegos que ya pertenecen a la cultura del entorno del alumno ya que:

- El alumno puede haber tenido experiencias previas fuera del aula, con lo cual parte con un bagaje previo de ensayos, razonamientos y estrategias que pueden serle útiles a la hora de detectar regularidades y posibles generalizaciones.
- Consideramos que para el alumno encierran un gran factor motivador pues, además de las competencias matemáticas que se trabajan en el juego, le permite adquirir también unas competencias sociales que puede percibir como útiles fuera del aula.

De entre los distintos juegos sociales, nosotros hemos optado por el dominó a causa de dos razones bien claras: como ya hemos apuntado, porque se trata de uno de esos juegos que se halla plenamente integrado en nuestro acerbo cultural[ii] y sobre todo por la naturalidad con la que el lenguaje de los grafos surge al intentar analizar sistemáticamente algunos aspectos de este juego. Otra de las ventajas que tiene el dominó es que al ser conocido en casi todo el mundo, puede reducir problemas a la hora de plantear la actividad en un aula en la que convivan alumnos de distintos orígenes. No obstante, la simplicidad del juego es grande y cualquier alumno puede aprender las reglas en muy pocos minutos.

De manera resumida, podríamos decir que los objetivos que se persiguen en este artículo son los siguientes:

- Analizar matemáticamente algunos aspectos del juego del dominó, proponiendo diversos problemas que se resuelven dentro del mismo.
- Presentar los grafos ante el alumno.
- Plantear la relación existente entre dominó y grafos, trasladando problemas y soluciones del ámbito del juego al del grafo.
- Conseguir que los alumnos conjeturen los resultados clásicos de Euler sobre Teoría de Grafos.
- Conseguir que los alumnos utilicen dichos resultados sobre grafos, sabiendo aplicarlos en situaciones diversas.

El artículo está dividido en cinco partes que pretenden recoger los objetivos antes citados. En la primera parte, que coincide con el primero de los objetivos, se presenta el problema dentro del juego del dominó y su análisis posterior dividido en tres fases. En la segunda mostramos en dos fases cómo los grafos surgen con naturalidad a partir de la consideración del problema presentado y vemos el modo de traducir del lenguaje del juego al de los grafos, desarrollando así el segundo, tercer y cuarto objetivos. En la tercera parte presentamos algunas conclusiones a las que llegamos tras el desarrollo de las dos anteriores. Finalmente, en la cuarta parte nos centramos en presentar algunas actividades que permitan sacar partido a los resultados obtenidos al final de la segunda parte, alcanzando así el quinto y último objetivo.

> *La mecánica del juego del dominó es situar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común.*

Planteamiento: hacia la partida perfecta

La mecánica del juego del dominó es bien sencilla: situar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común. Tradicionalmente el dominó es un juego que enfrenta a dos o cuatro jugadores de manera competitiva, sin embargo, la actividad que proponemos permite que se juegue individualmente o por parejas de una forma cooperativa.

Nuestro objetivo final será encontrar las condiciones que debe cumplir a priori un conjunto cualquiera de fichas de dominó para que, si jugamos adecuadamente una partida, utilicemos todas las fichas del conjunto. También distinguiremos dos casos: cuando la partida se *abre* y se *cierra* con la misma cifra (*partida perfecta*) y cuando se *abre* y se *cierra* con cifras distintas (*partida semiperfecta*).

Como una condición previa, descartaremos jugar con fichas dobles. Las fichas dobles tienen en el juego un papel especial dependiendo de la modalidad de dominó que se practique, y nosotros no las vamos a tener en cuenta, es decir, nuestras partidas no van a poder bifurcarse[iii].

Los problemas que proponemos se pueden resolver de modo individual o en pequeños grupos pero es conveniente que las respuestas de los alumnos se discutan en todo el grupo-clase. Las situaciones problemáticas que proponemos pueden ser implementadas siguiendo metodologías muy diversas. Un método tradicional, que nosotros no hemos seguido, consistiría en plantear directamente a los alumnos el enunciado del problema:

¿Qué condiciones deben cumplir un conjunto de fichas de dominó cualquiera (sin fichas dobles) para poder hacer una partida perfecta o semiperfecta?

Nosotros proponemos presentar la situación problemática de forma gradual siguiendo el esquema de pregunta-respuesta porque esta metodología favorece la participación de los alumnos y la construcción social del conocimiento. La propuesta se desarrolla en tres fases que describimos a continuación.

Primera fase: Análisis de casos particulares

Este debe ser el punto de partida en el intento de resolución de cualquier problema. Esta primera fase es muy necesaria, pues permite al alumno comprobar por sí mismo las situaciones que pueden darse o los obstáculos que impiden que algunas posibilidades se den. Con la presentación de estos casos particulares, además, logramos familiarizar al alumno con los elementos y las situaciones que van a constituir el objeto de su trabajo. Puede ser útil también como ejemplo para demostrar que algo es posible basta con exhibir un caso particular, mientras que probar la imposibilidad es algo mucho más delicado.

Comenzamos presentando uno de los conceptos claves en lo que seguirá. Diremos que se ha logrado hacer una partida de dominó *perfecta* si se utilizan todas las fichas de modo que la cifra con la que se comienza y la cifra con la que se termina coinciden.

Cuestión 1: Con todas las fichas menos las dobles, ¿puedes hacer una partida perfecta?

Esta claro que con esta cuestión no estamos sino rompiendo el hielo. Todos los alumnos intentan y consiguen mediante técnicas de ensayo–error hacer su partida perfecta. Quizá pueda ser interesante solicitar a los alumnos que, de forma previa, expongan verbalmente sus conjeturas sobre la posibilidad o no de realizar una partida perfecta.

Cuestión 2: ¿Con que cifra has comenzado y terminado? ¿Crees que puedes hacerlo con otra cifra?

La primera de las preguntas no requiere para su respuesta más que mirar. La segunda pregunta ya puede admitir un pequeño análisis. Claramente podemos hacer partidas perfectas empezando (y terminando) por cualquiera de las cifras de 0 a 6 que forman el dominó. La manera más fácil —pero quizás menos práctica— de ver esto es, simplemente deshacer la configuración inicial, tomar la nueva ficha con la que queremos comenzar y tantear una solución. Otra manera más interesante es observar que si en una partida perfecta tomamos la primera ficha y la enviamos al final, tenemos otra partida perfecta que comienza con una cifra distinta a la original. Basta rehacer el proceso tantas veces como se quiera para ver que todas las cifras tienen derecho a ser las primeras. Otro razonamiento algo más sofisticado consiste en ver que podemos hacer un círculo con las fichas y que para tener una partida lineal basta con *romper* ese círculo. Como esto podemos hacerlo por cualquier punto, llegamos a la misma conclusión.

Introducimos ahora un nuevo concepto. Diremos que hemos hecho una partida de dominó *semiperfecta* cuando utilicemos todas las fichas pero la cifra con la que se empieza y la cifra con la que se acaba no coinciden.

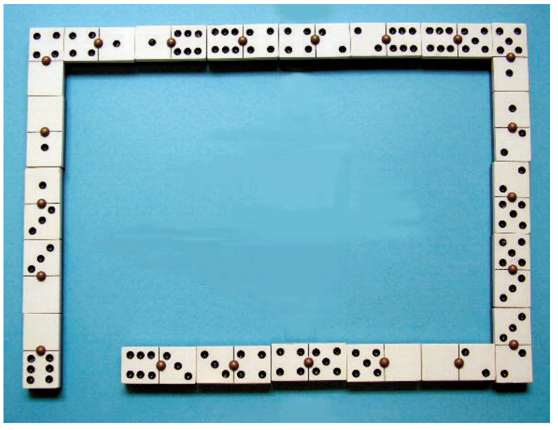


Figura 2. Una partida perfecta

Cuestión 3: Con todas las fichas menos las dobles, ¿puedes hacer una partida semiperfecta?

Aquí surgen los primeros problemas. Vaya por delante que es imposible hacer una partida semiperfecta empleando las 21 fichas no dobles del dominó. Es de suponer que los alumnos traten de encontrar alguna por tanteo o incluso que alguno tenga la intuición de que no va a ser posible. En el primer caso se ha de insistir en el hecho de que no encontrar una solución no quiere decir que no exista y en el segundo caso en que la intuición debe ir acompañada de un proceso de búsqueda, de confirmación de esa intuición.

Cuestión 4: Quita una ficha cualquiera y vuelve a intentarlo. ¿Con qué cifras has comenzado y terminado?

Si se elimina una ficha cualquiera, sí va a ser posible realizar una partida semiperfecta. De hecho, para encontrar una de ellas basta hacer una partida perfecta que comience con la ficha que vamos a eliminar. Al quitarla, tendremos la partida semiperfecta buscada. Un hecho fundamental en esta cuestión reside en que el alumno se dé cuenta de que las cifras con las que se comienza y termina la partida son exactamente las que aparecen en la ficha eliminada.

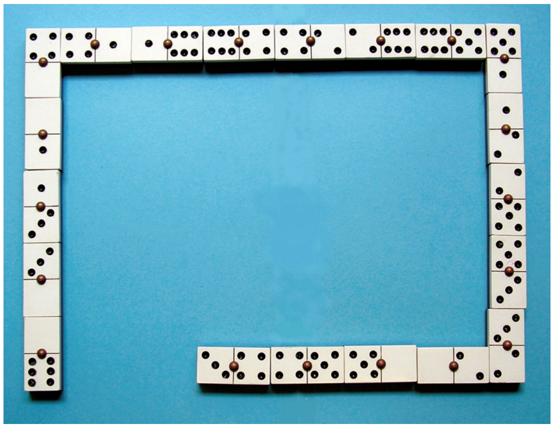


Figura 3. Partida semiperfecta obtenida al quitar la ficha (6,3) en la figura 1

Cuestión 5: Quita ahora otra más y trata de nuevo de hacer una partida semiperfecta. ¿Crees que es importante la segunda ficha que has quitado?

Esta pregunta es más delicada, puesto que la posibilidad de encontrar una partida semiperfecta al quitar dos fichas depende fuertemente de cuál sea la segunda ficha eliminada. Esto resulta difícil de imaginar debido a que la primera ficha no tenía influencia alguna. Probablemente algunos alumnos eliminen una ficha que les permita hacer una partida semiperfecta y deduzcan de ello que esta segunda ficha no tiene importancia y que siempre podrán hacer partidas así. Otros sufrirán el efecto contrario y pensarán que si se quitan dos fichas entonces no pueden hacerse ya partidas semiperfectas. Esta situación se presta a que los alumnos debatan y defiendan públicamente sus conjeturas opuestas.

Sólo como apunte decir que si la segunda ficha eliminada no comparte ninguna cifra con la primera, no podrá encontrarse ninguna partida semiperfecta. La justificación a este hecho viene expuesta más adelante.

Cuestión 6: Ahora vamos a jugar con todas las fichas, exceptuando las dobles y las fichas blancas. ¿Puedes hacer alguna partida perfecta? ¿Y semiperfecta?

La respuesta a ambas preguntas es que no. De nuevo los motivos se verán posteriormente. El objetivo de plantear estas preguntas, que parecen redundar en lo anterior, no es otro que proporcionarles más casos particulares en los que observar qué sucede, fomentar la controversia de los diferentes razonamientos en el aula y tratar de encontrar regularidades que les permitan con algo más de trabajo dar con una explicación.

Segunda fase: Hacia la generalización

Hasta ahora hemos pedido a los alumnos que analizaran algunos casos particulares y les preguntábamos por la posibilidad o no de hacer cierto tipo de configuraciones de fichas. Las cuestiones siguientes tienen como objetivo generalizar a un conjunto cualquiera de fichas los problemas que antes proponíamos a los alumnos. Nuestro propósito es alcanzar una caracterización que nos permita saber cuándo podremos hacer una partida perfecta o semiperfecta con un conjunto de fichas de dominó cualquiera (sin fichas dobles).

Cuestión 7: Elige varios conjuntos de más de seis fichas que te permitan realizar con ellos partidas perfectas. ¿Tienen algo en común?

Es totalmente seguro que la cantidad de conjuntos distintos que encuentren los alumnos será grande. Esto, desde luego, es bueno pues dispondremos de más material sobre el que buscar regularidades. Por ejemplo, podemos encontrarnos con tres posibilidades como las siguientes:

(1,2)(2,4)(4,6)(6,1)(1,3)(3,5)(5,4)(4,3)(3,2)(2,6)(6,5)(5,1)

(2,3)(3,5)(5,6)(6,1)(1,4)(4,6)(6,2)

(4,2)(2,6)(6,3)(3,1)(1,5)(5,4)

Lo primero que salta a la vista es que la longitud de las cadenas es muy variable. En nuestro caso son partidas perfectas de longitudes 12, 7 y 6 respectivamente. Así que debemos descartar que la longitud sea importante; tampoco es importante —salta a la vista— la paridad de la longitud. La regularidad que sí es importante que el alumno trate de observar es que todas las cifras aparecen emparejadas: las *interiores* debido a que seguimos las reglas del dominó, las exteriores debido a que la partida es perfecta. Este es el rasgo común que anotamos y guardamos para más adelante.

Cuestión 8: Elige varios conjuntos de más de seis fichas que te permitan realizar con ellos partidas semiperfectas. ¿Tienen algo en común?

Esta pregunta no es nada sorprendente y, como antes, la variedad de conjuntos encontrados será amplia. Hemos de tener en cuenta, además, que ahora los alumnos ya sabrán qué buscar.

Si queremos evitar esto, una opción es dividir la clase en dos grupos y encargar a cada uno una de las dos cuestiones. De todos modos, nuestra opción es presentarlas secuencialmente. Posibles partidas semiperfectas encontradas por los alumnos pueden ser:

(2,5)(5,1)(1,3)(3,4)(4,6)(6,1)(1,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,0)(0,3)

(3,4)(4,0)(0,1)(1,6)(6,5)(5,2)(2,1)

(1,2)(2,3)(3,5)(5,6)(6,1)(1,4)

Observar que las longitudes de estas cadenas son las mismas que en la cuestión anterior. Esto se ha hecho deliberadamente para mostrar que, de nuevo, el tamaño de los conjuntos de fichas no importa. Un mero procedimiento por tanteo nos permitiría encontrar partidas semiperfectas casi de cualquier longitud. Como hemos dicho, los alumnos ya saben ahora qué buscar y es natural que hablen del emparejamiento de las cifras. Es importante notar que todas están emparejadas excepto dos y que, aquellas con las que empezamos y terminamos la partida, son precisamente las dos que no lo están.

Cuestión 9: ¿Te atreves a hacer alguna conjetura sobre qué tiene que cumplir un conjunto cualquiera de fichas de dominó (sin fichas dobles) para que puedas jugar una partida perfecta? ¿Y para que puedas hacer una partida semiperfecta?

Este es el punto fundamental; el lugar al que pretendíamos llegar en esta primera parte. Vamos a comenzar por la primera pregunta. Antes hemos observado que, en una partida perfecta, todas las cifras aparecerán un número par de veces pero ¿es esto suficiente? Probablemente si se efectúa esta pregunta obtengamos disparidad de opiniones. Como siempre habría que pedir una justificación a los que opten por una u otra opción. Nuestra experiencia nos dice que la respuesta prioritaria será el *sí*. En tal caso basta exhibir el siguiente conjunto de fichas:

{(1,2), (6,4), (3,1), (4,5), (5,6), (2,3)}

Con ellas es imposible hacer una partida perfecta pese a que cumple lo pedido. Hay, pues, que buscar algo más. Si se les deja tantear la situación, es fácil que los alumnos lleguen a darse cuenta de que lo que aquí está sucediendo es que podemos formar dos cadenas separadas:

(1,2)(2,3)(3,1)

(4,5)(5,6)(6,4)

que no podemos conectar de ninguna manera. ¿Qué hemos de exigir entonces a nuestros conjuntos de fichas?

Hemos de pedir que se cumplan dos condiciones:

> Una condición de *paridad*; esto es, que cada cifra debe aparecer un número par de veces
>
> Una condición de *conexión*; esto es, que para cada par de cifras que aparecen en el conjunto, siempre tengamos una cadena de fichas del conjunto empezando y terminando en ellas; esto es, que las ponga en contacto.

Como sucedía en la cuestión anterior, a la hora de enfocar la segunda pregunta acerca de las partidas semiperfectas, los alumnos ya tienen una cierta idea de lo que necesitan. Esto nos hace indicar una vez más que quizás sea interesante dividir la clase en dos grupos, encargando a cada uno de ellos cada una de las preguntas. En el caso de las partidas semiperfectas se necesita que:

> Todas las cifras, salvo dos, aparezcan un número par de veces.
>
> Que se puedan siempre *conectar* dos de ellas.

Cuestión 10: ¿Sabrías explicar con lo que hemos visto hasta ahora, lo que sucedía en las cuestiones 1 a 6?

Esta pregunta ejerce el papel de revisión de lo realizado hasta ahora, nos permite observar si nuestra conjetura responde adecuadamente a las cuestiones anteriores y contestar las posibles cuestiones que quedaron abiertas. En un juego de dominó habitual al que se han quitado las fichas dobles, cada cifra aparece 6 veces —un número par— y por tanto permite hacer partidas perfectas y no semiperfectas (cuestiones 1, 2 y 3). Si quitamos una ficha todas las cifras aparecen 6 veces excepto las dos que están en la ficha eliminada y por ello siempre podemos hacer una partida semiperfecta (cuestión 4). Ahora si la segunda ficha eliminada no tiene ninguna cifra en común con la primera habrá cuatro cifras que aparecerán 5 veces y por tanto ya no podremos hacer partidas semiperfectas. Si por el contrario la segunda ficha comparte una cifra con la primera, esa cifra aparecerá 4 veces —de nuevo par— y las otras dos cifras lo harán 5 veces; permitiendo así una partida semiperfecta (cuestión 5). Como al quitar las fichas blancas todas las cifras aparecen 5 veces no podemos hacer partidas perfectas ni semiperfectas (cuestión 6).

Cuestión 11: ¿Qué sucedería si no quitásemos las fichas dobles?

Al añadir las fichas dobles lo único que sucede es que cada cifra aparece 2 veces más, es decir, 8 en total. Así que podremos hacer partidas perfectas y no semiperfectas. Ahora, al quitar un ficha para intentar hacer una partida semiperfecta, ya no es irrelevante cuál elijamos pues si quitamos una ficha doble, todas las cifras seguirán apareciendo un número par de veces y seremos incapaces de hacer una partida semiperfecta. La consideración respecto a la segunda ficha eliminada sigue siendo válida. Al quitar las fichas blancas todas las cifras aparecerán 7 veces y tampoco podremos efectuar partidas perfectas ni semiperfectas.

Tercera fase: Demostración

Bien, una vez encontrada en la sección anterior una conjetura que parece válida y confirma los casos particulares que hemos planteado anteriormente, daría la impresión de que ya hemos acabado el problema propuesto; pero nos falta todavía lo más importante: la demostración. Introducir una, en este punto, es muy delicado y creemos que debe quedar al arbitrio de cada docente decidir si puede convenir hacerlo o no. Caso de decidirse por hacerlo, debe estar siempre adecuada al nivel de los alumnos, que no va más allá del de la secundaria[iv]. En lo que sí debe hacerse énfasis es en la necesidad de la demostración.

Grafos y dominó: un nuevo enfoque al problema original

Hay diversas formas de definir un grafo. Una, quizás demasiado formal, sea decir que un grafo *G* es un triple consistente en un conjunto de *vértices V(G)*, un conjunto de aristas *E(G)* y una relación que asocia a cada arista dos vértices (no necesariamente distintos) llamados extremos. Es obvio, no obstante, que esta definición no puede, ni debe, ser presentada ante alumnos de secundaria. Creemos que la mejor presentación es la visual, diciendo que un grafo es un conjunto de puntos y de aristas que los unen de forma arbitraria:

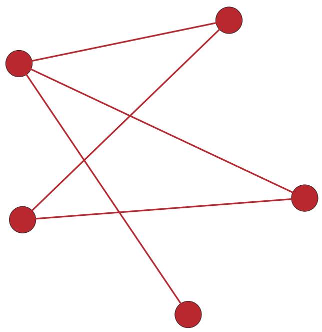


Figura 4. Un grafo típico

No queremos introducir ningún tipo de terminología especializada pues lo creemos innecesario. Nos contentaremos con decir que un grafo conexo es aquel en el que siempre podemos encontrar un camino que une un vértice con otro cualquiera.

Cómo aparecen los grafos jugando al dominó: Un viaje de ida y vuelta

De una manera sencilla, se puede obtener un grafo de un conjunto cualquiera de fichas de dominó:

- Vértices: Se dibujan en un papel tantos vértices como cifras distintas aparecen en el conjunto de fichas, numerando cada vértice con el valor de una de las cifras.
- Aristas: Se unen dos vértices mediante una arista si se encuentra una ficha en nuestro conjunto de fichas de dominó que contenga las dos cifras.

Por ejemplo:

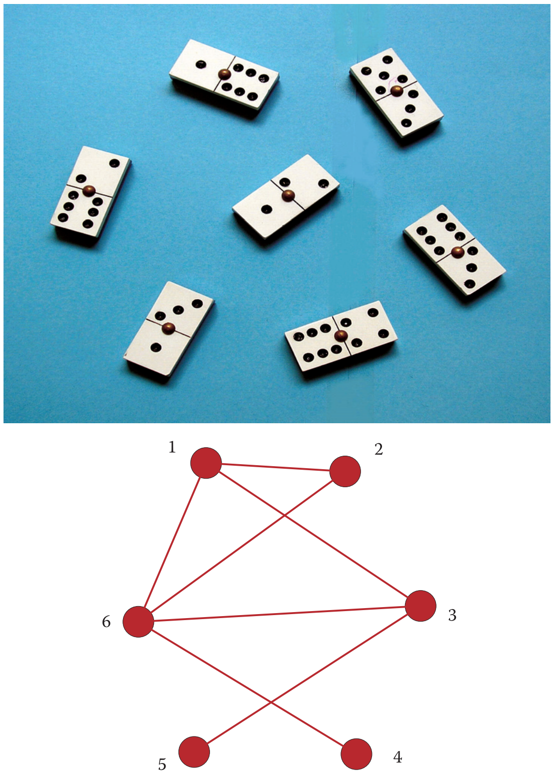


Figura 5. Un conjunto de fichas de dominó y su grafo asociado

De esta forma, podemos convertir cualquier conjunto de fichas de dominó en un grafo. También parece importante hacer notar a los alumnos que la identificación de cada ficha es con una de las aristas del grafo y no con uno de sus vértices.

Además podemos realizar de manera análoga el proceso inverso:

La idea es dibujar un grafo cualquiera y numerar sus vértices. Para cada arista que una dos de esos vértices tomamos una ficha de dominó cuyas cifras coincidan con los vértices que une esa arista. Mediante este proceso obtenemos un cierto conjunto de fichas de dominó.

Luego también podemos *convertir* un grafo en un conjunto de fichas de dominó. Aunque en este caso tenemos que imponer una serie de condiciones elementales sobre el grafo escogido para que se pueda efectuar correctamente el proceso antes descrito:

- En primer lugar, el conjunto de vértices del grafo debe ser menor o igual que siete, ya que el juego de dominó estándar con el que estamos desarrollando la actividad es de siete cifras. En caso contrario podríamos *adaptarlo*, proponiendo jugar a un dominó generalizando de ocho o más cifras.
- No pueden existir en el grafo vértices aislados (no unidos a ningún otro), puesto que toda cifra que aparecerá en una ficha de dominó tiene una cifra *compañera*. Luego de cada vértice sale una arista que lo une a otro vértice distinto. Esta condición también puede ser evitada si permitiésemos emplear en la actividad las fichas dobles.
- Dos vértices no pueden están unidos más de una vez por dos aristas, ya que eso equivaldría a tener dos fichas del dominó iguales. Como las anteriores, esta condición puede ser evitada si permitimos jugar con varios juegos de dominó.

Resulta interesante invitar a los alumnos a que, a priori, investiguen y traten de conjeturar acerca de las diferentes condiciones que debe cumplir un grafo para que pueda ser identificado a un conjunto de fichas de dominó.

De todo lo anterior podemos establecer una biyección entre conjuntos de fichas de dominó y grafos con las condiciones anteriores. Veamos cómo se puede relacionar todo esto con lo visto en el apartado anterior, en el que continuaremos con el mismo esquema de cuestiones.

Síntesis de las actividades anteriores:
Traducción de partidas en grafos

Cuestión 1': Imagina que has dibujado un grafo y que has cogido las fichas de dominó correspondientes. Te pones a jugar y consigues una partida perfecta. ¿En qué se traduce esto en tu grafo?

Si recordamos en qué consistía una partida perfecta y tenemos presente cómo se construía el conjunto de fichas de dominó a partir del grafo la respuesta es sencilla. Como una partida perfecta consistía en ir poniendo fichas una tras otra según las reglas del dominó —empezando y acabando en la misma cifra— y cada ficha se corresponde con una arista del grafo, resulta que una partida perfecta no es más que el reflejo de recorrer todo el grafo —empezando y terminando en el mismo vértice— y pasando una única vez por cada arista.

Como observación curiosa indicamos que si un grafo permite un camino como el anterior, no importa para nada el vértice que elijamos para comenzar (es sencillo justificar este hecho usando los razonamientos que veíamos en la cuestión 2 para conjuntos de fichas arbitrarios).

> *Podemos establecer una biyección entre conjuntos de fichas de dominó y grafos.*

Cuestión 2': Imagina que has dibujado un grafo y que has cogido las fichas de dominó correspondientes. Te pones a jugar y consigues una partida semiperfecta. ¿En qué se traduce esto en tu grafo?

Este caso también es sencillo y más aún tras haber comentado la anterior cuestión. Una partida semiperfecta se traduce en, comenzando por un vértice, recorrer todas las aristas del grafo una sola vez para terminar en otro de los vértices.

Es interesante observar que se comienza y termina precisamente en los vértices correspondientes a las cifras que aparecen un número impar de veces. Al contrario de lo que sucedía en la cuestión 1', ahora sólo podemos comenzar por el vértice correspondiente a una de las dos cifras que aparece un número impar de veces.

Cuestión 3': Recuerda las condiciones que debía cumplir un conjunto de fichas para poder hacer partidas perfectas y semiperfectas. Tradúcelas al lenguaje de grafos.

En el caso de partidas perfectas pedíamos que cada cifra apareciera un número par de veces y que dos cifras cualesquiera pudieran ser *conectadas* por una cadena. Esto se traduce en este caso en que de cada vértice salga un número par de aristas y que el grafo sea conexo. Esto sucede porque cada cifra aparece en tantas fichas como aristas salen del vértice correspondiente y porque una cadena que una dos cifras es recorrer un camino de un vértice al otro.

Para partidas semiperfectas la traducción es que de todos los vértices, salvo de dos, salga una cantidad par de aristas y que el grafo sea conexo. La explicación es la misma.

Con estas cuestiones alcanzamos uno de los objetivos principales que pretendíamos, relacionar la posibilidad de hacer partidas de dominó empleando todas las fichas de una determinada forma con la existencia de caminos de un cierto tipo en un grafo.

Cuestión 4': Formula un resultado sobre grafos usando la conjetura sobre fichas de dominó obtenida anteriormente y las cuestiones anteriores.

Haciendo uso de la biyección entre grafos y fichas de dominó que obtenemos al principio de esta segunda sección y las traducciones a lenguaje de grafos de las condiciones del problema de la primera sección que deducíamos en las cuestiones 1', 2' y 3', encontramos un caso particular de los resultados de Euler que exponíamos en la introducción:

Un grafo que se obtiene de una colección de fichas de dominó puede recorrerse completamente, empezando y terminando en el mismo vértice y pasando una única vez por cada arista (esto es, posee un ciclo euleriano), siempre que:

- Sea un grafo conexo.
- Salga un número par de aristas de cada vértice.

Un grafo que se obtiene de una colección de fichas de dominó puede recorrerse completamente, empezando en un vértice y acabando en otro distinto, y pasando una única vez por cada arista (esto es, posee un camino euleriano), siempre que:

- Sea un grafo conexo.
- Salen un número par de aristas de todos los vértices menos de dos, que serán los vértices inicial y final.

Leonhard Euler

Ventajas y desventajas del planteamiento de nuestra actividad

En esta sección del artículo analizaremos las ventajas y desventajas que hemos apreciado a la hora de diseñar e implementar la actividad que proponemos. Como ya hemos expuesto en la introducción, nuestro propósito no era diseñar una actividad de modelización matemática con los grafos, aunque sí que encontramos en ella una situación problemática real (hacer partidas perfectas y semiperfectas de dominó) modelizada por medio de un concepto matemático (los grafos y la existencia o no de ciclos y caminos eulerianos). Sin embargo la solución del problema no se obtiene trabajando dentro del modelo matemático, ya que en él pueden aparecer las dificultades que se indicaron en la introducción; antes bien, surge dentro del mismo ámbito del problema real (manipulando fichas de dominó), siendo posteriormente traducida al modelo matemático y permitiéndonos alcanzar nuestro propósito de presentar a los alumnos el concepto de grafo y conseguir que éstos logren conjeturar y justificar los teoremas clásicos de Euler.

El actuar desde el modelo real del dominó se ha revelado como muy adecuado ya que hemos conseguido evitar algunas de las dificultades que se presentan cuando los alumnos trabajan con los grafos para conjeturar los resultados de Euler, observando además las siguientes ventajas:

- Los alumnos, manipulando las fichas, pueden construir y reconstruir partidas de manera más rápida y sencilla mediante la técnica de ensayo–error ya que, en caso de que no lleguen a formar una partida perfecta pueden *volver a atrás* en la elección de las últimas fichas y seguir intentándolo con otras combinaciones.
- Aparecen más estrategias para construir partidas perfectas y semiperfectas, como empezar a poner fichas por el principio y el final simultáneamente o una vez encontrada una partida perfecta, obtener otra trasladando una ficha del principio al final.
- Se observa de forma detallada todos los pasos que se han seguido en la construcción de la partida perfecta debido a que las fichas aparecen alineadas.
- Debido a las reglas del juego de dominó, las cifras aparecen emparejadas, lo que hace más fácil conjeturar sobre el número de fichas en las que debe aparecer cada cifra.
- En su traducción a los grafos se le presta una mayor atención a las aristas, que son las fichas del dominó, que a los vértices, que son las cifras presentes en las fichas. Esta atención resulta necesaria en los teoremas de Euler, donde no son importantes la cantidad de vértices que hay sino la cantidad de aristas que salen de ellos.
- Como ya apuntábamos en la introducción, la utilización de un juego tan conocido como el dominó se revela como un factor motivador para el alumno.

Por otro lado, la principal de las desventajas que percibimos que tiene esta manera de acercarse a los resultados de Euler es que, tal y como veíamos en la parte anterior, la clase de grafos sobre los que tenemos nuestros resultados probados son los que provienen de un conjunto de fichas de dominó y éstos poseen unas condiciones determinadas que no cumple cualquier grafo.

Sin embargo, estas condiciones pueden ser evitadas con un poco más de esfuerzo: generalizando la conjetura a un juego de dominó con 8 o más cifras (lo que equivaldría a aceptar los grafos de 8 o más vértices). Observamos que añadiendo vértices *extra*, no resulta difícil modificar un grafo conexo cualquiera que no se corresponda con un conjunto de fichas en otro grafo similar que sí provenga de un conjunto de fichas, de modo que en el primero existen o no ciclos y caminos eulerianos siempre que existan o no en el otro.

Más allá del dominó: sacando partido a nuestros resultados sobre grafos

Llegados a este punto nos podemos plantear presentar diversas actividades sobre grafos que saquen partido de este resultado, olvidándonos ya del dominó que hemos empleado *sólo* para obtener la caracterización necesaria.

Una primera posibilidad es introducir en este punto el ya citado problema de los Puentes de Köningsberg (Alfonso y otros, 2004). Este problema histórico en la disciplina de la Teoría de Grafos —e incluso de la Topología— suele ser utilizado para introducirla, pero nosotros optamos por emplearlo para ilustrar un uso del resultado que hemos obtenido[v]. El grafo asociado a este problema es el que vemos en la siguiente figura:

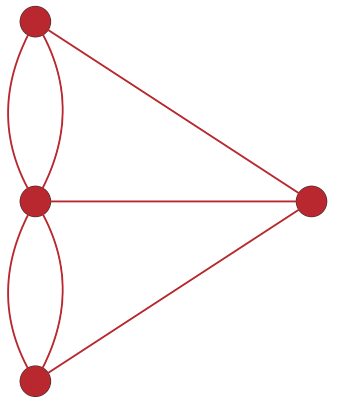


Figura 6. El grafo asociado al problema de los Puentes de Köningsberg

Claramente no es un grafo que haya sido obtenido de un conjunto de fichas de dominó porque no se cumple la condición de la no existencia de dos vértices unidos por dos aristas distintas. Sin embargo, encontrar un camino o un ciclo euleriano en este grafo es equivalente a encontrar un camino o ciclo euleriano en este otro grafo, que sí se obtiene de las fichas de dominó:

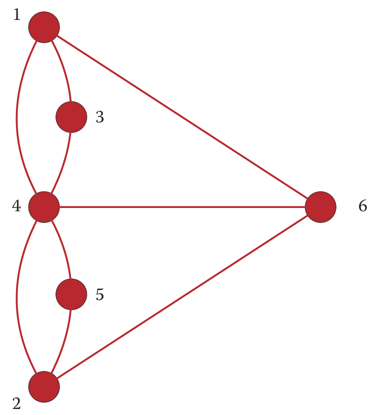


Figura 7. El grafo de Köningsberg modificado

En el grafo de la figura 6, por tanto, podemos utilizar el resultado obtenido en la cuestión 4' y concluir que no posee ni caminos ni ciclos eulerianos. Para más detalles sobre el problema puede recurrirse a múltiples fuentes además de las ya citadas.

Sobradamente conocido resulta el pasatiempo en el que, dado un dibujo como el de la figura siguiente se pide dibujarlo con un solo trazo de lápiz y pasando una única vez por cada línea.

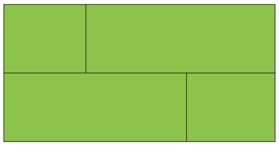


Figura 8. Pasatiempo infantil

Nosotros proponemos un problema alternativo a partir del mismo gráfico. Se pide trazar una curva cerrada que atraviese una única vez cada una de los segmentos que forman la figura.

Otra actividad posible que nos permite sacar jugo de los resultados obtenidos tendría un enunciado como el siguiente:

La siguiente figura representa un mapa (simplificado) de carreteras. Las ciudades aparecen marcadas con cuadrados rojos.

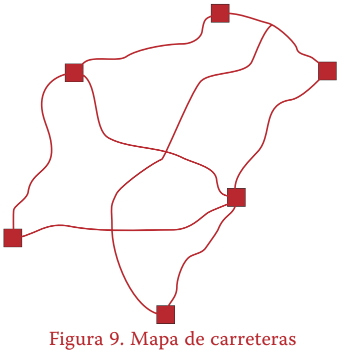


Figura 9. Mapa de carreteras

El gobierno de la región pretende asfaltar las carreteras teniendo en cuenta que el peso de la maquinaria empleada deteriora tanto el suelo que, una vez asfaltada una carretera, las máquinas ya no deben pasar por ella. Si tu fueras el encargado de dirigir las obras, ¿qué orden seguirías para asfaltar la red de carreteras?

Sirvan estas posibilidades como ejemplo de las muchas actividades que pueden ser resueltas gracias a una modelización del problema mediante grafos y utilizando posteriormente los resultados de Euler. Desde luego no son las únicas y se presentan sólo a modo de ilustración o muestra con la esperanza de que puedan ser realizadas por los docentes con sus alumnos. ■

NOTAS

i http://www.unizar.es/ttm

ii Se cree que hay que situar el nacimiento del dominó en China hace unos 3000 años. De ahí pasó a Egipto y al mundo árabe, donde se incluyeron las fichas blancas (recordar que fueron los árabes los que introdujeron el *0* en occidente). En Europa no se tiene constancia del conocimiento del dominó hasta el siglo XVIII en Italia. Actualmente se halla plenamente difundido, celebrándose incluso campeonatos nacionales y del mundo.

iii De hecho, si únicamente permitimos que nuestras partidas se desarrollen de una forma lineal, el contar o no con las fichas dobles es casi irrelevante en la actividad; como se desprenderá en un análisis posterior.

iv Una propuesta de demostración: Si tenemos una partida perfecta es obvio que cada cifra aparece un número par de veces y que podemos conectar siempre dos cifras cualesquiera. Al revés, supongamos que tenemos cada cifra un número par de veces y que todas las cifras pueden conectarse. Comenzamos nuestra partida y vamos colocando fichas arbitrariamente (pero siempre siguiendo las reglas del dominó). En algún momento dejaremos de poder seguir, si hemos usado todas las fichas ya hemos terminado. Si no las hemos utilizado todas es fácil ver que debemos terminar con la misma cifra que empezamos (por la paridad), así que en las fichas que nos sobran las cifras aparecen un número par de veces y no está la cifra con la que hemos terminado el intento (porque si no, seguiríamos). Lo que está claro es que alguna de las cifras que nos quedan aparece en nuestro intento fallido de partida perfecta (si no, no se cumpliría la condición de conectividad). Lo que debe hacerse es una partida perfecta con las fichas sobrantes, que empiece y termine con una de las cifras que también aparecen en el primer intento. Una vez hecho basta insertar la segunda cadena dentro de la primera. Obsérvese que hay aquí un razonamiento de tipo inductivo sobre la longitud de las partidas, pero que puede ser soslayado sin problemas. La demostración para las partidas semiperfectas es similar.

v De hecho este problema es el que, históricamente, dio origen a los resultados de Euler que hemos presentado. Aquí lo presentamos como aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFONSO, M.; BUENO, M.; DE ELÍAS, M.; DIÁNEZ, M. y NÚÑEZ, J. (2004): "Siete puentes, un camino: Königsberg", *SUMA*, n.º 45, pp. 69–78.

BALBUENA, L.; CUTILLAS, L. y COBA, D. de la (2000): *Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos*, Rubes, Barcelona.

CORBALAN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Colección Educación Matemática en Secundaria, Editorial Síntesis, Madrid.

CORBALÁN, F. (1999): "Juegos y estrategias de pensamiento", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 7, Educación Abierta, 141, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 73–108.

CORIAT, M.; SANCHO, J.M.; GONZALVO, P y MARÍN, A. (1989): *Nudos y nexos: redes en la escuela*, Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, Madrid.

DELOFEU, J. (2003): *Gimnasia mental*, Martínez Roca, Barcelona.

ESPINEL, M.C. (1994): "El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación", *SUMA*, n.º 18, pp. 32–38.

ESPINEL, M.C. y SOBRÓN, M. (1992): "Grafos a través de juegos", *SUMA*, n.º 11/12, pp. 88–94.

GAIRÍN, J.M. (2001): "Hacer matemáticas: el juego como recurso", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 8, Educación abierta, 153, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 55–116.

GAIRÍN, J.M. y MUÑOZ, J.M. (2006): "Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático", *SUMA*, n.º 51, pp. 15–29.

GARDNER, M. (2002): *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GRUPO ALQUERQUE (2004–2005): "Sección Juegos", *SUMA*, Madrid.

KINDT, M. (2001): "Matemática discreta como preparación a las ciencias sociales", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 4, Educación abierta, 103, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 67–91.

MARTÍN, E. y MÉNDEZ, A. (2004): "Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia", *SUMA*, n.º 46, pp. 31–35.

PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT, PISA (2004): *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*, París, OCDE.

SIPSER, M. (1996): *Introduction to the theory of computation*, Course Technology, Boston.

WEST, D. (2001): *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, New Jersey.