suma+ 78
Artículos
Marzo 2015
pp. 53-61

Resolución gráfica de problemas: aspectos históricos y didácticos

Vicente Meavilla Seguí
Antonio M. Oller Marcén

El uso de representaciones gráficas como método para transmitir, pensar, hacer y entender Matemáticas es una práctica habitual en parcelas tan diversas como Combinatoria y Probabilidad, Álgebra elemental, Aritmética, etc. Además, desde una óptica didáctica, dicha práctica puede ser de capital importancia en los tres campos siguientes: Resolución de problemas, Razonamiento inductivo y Demostraciones gráficas.

En este artículo nos centraremos en la resolución gráfica de problemas elementales, presentando algunos ejemplos históricos.

Palabras clave: Resolución de problemas, Resolución gráfica de problemas, Visualización, Educación Matemática, Historia de la Matemática.

Graphic resolution of problems: historical and educational aspects

The use of graphical representation as a tool to communicate, think, do and understand Mathematics is a common practice in such different branches as Probability and Combinatorics , Elementary Algebra, Arithmetic, etc. Moreover, from a didactic point of view, these practices can be important in: Problem solving, Inductive reasoning and Visual proofs.

In this paper we focus on graphical problema solving. In particular we present some historical problems.

Key words: Problem solving, Graphical problem solving, Visualization, Mathematics Education, History of Mathematics.

El uso de representaciones gráficas es una práctica habitual a la hora de resolver problemas. Polya (1973) señala que «las figuras no son sólo el objeto de problemas geométricos sino que son una ayuda importante en toda clase de problemas».

Esta idea no es, desde luego, original. Por ejemplo, De Guzmán (1997) señala como algunas de las *Reglas cartesianas para la dirección del espíritu* apuntan directamente a la visualización. Existen ejemplos del uso de figuras como apoyo a la resolución de problemas en diversos textos antiguos (Meavilla y Oller, 2013).

A continuación, presentamos dos ejemplos de los siglos XIII y XVI en los que, si bien los autores utilizan una figura para resolver el problema, el papel que esta juega es esencialmente diferente.

El primero de nuestros ejemplos procede del capítulo XV del *Liber Abaci*, compuesto por Leonardo de Pisa, conocido como *Fibonacci*, en 1202. Allí el autor propone y resuelve una interesante colección de problemas por la regla del «algebra y almucabala». Para obtener sus soluciones, Fibonacci transita por dos etapas bien diferenciadas. En la primera, haciendo uso de razonamientos geométricos, construye una ecuación que se ajusta a las condiciones

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2013 y aceptado en julio de 2014

del enunciado del problema. En la segunda, resuelve dicha ecuación. El texto original dice así (Sigler, 2003):

> Repartí 60 denarios entre varios hombres, y cada uno recibe cierta cantidad, y añadí dos hombres más y repartí los 60 entre todos ellos, y resultaron para cada uno 5/2 denarios menos que lo que resultó inicialmente.

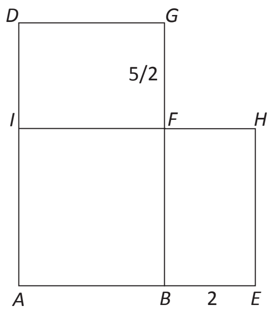

Figura 1

> Pon que el número original de hombres sea el segmento rectilíneo *AB*[1], y levanta sobre él un segundo segmento rectilíneo *BG* que forme un ángulo recto haciendo un rectángulo que contenga los antedichos 60 denarios, y extiende el segmento rectilíneo *GD* igual y paralelo al *AB* y conecta el segmento rectilíneo *DA*; entonces, el área del rectángulo *ABGD* será el 60 que resulta de la multiplicación de *AB* por *BG*; después, prolonga el segmento *AB* hasta el punto *E,* y haz que *BE* sea 2, a saber el número de hombres que se han añadido, y marca sobre el segmento rectilíneo *BG* el punto F, de modo que *GF* sea 5/2, a saber los denarios de menos que corresponden a cada hombre cuando se añaden dos, y por el punto *F* extiende el segmento rectilíneo *HI*, igual y paralelo al segmento rectilíneo *EA*, y conecta el segmento rectilíneo *EH*, y el rectángulo *HEAI* será 60 pues es el producto de *AE* y *EH*, es decir *AE* veces BF; y BF es lo que resulta cuando los 60 denarios se reparten entre el número de hombres *AE*; entonces, el área *EI*[2] es igual al área *BD*; por consiguiente la multiplicación de *GB* por *BA* es igual a la multiplicación de *EA* por *FB*; luego, los cuatro segmentos rectilíneos son proporcionales; es decir *GB* primero es a *FB* segundo como *EA* tercero es a *BA* cuarto; luego por división[3] *GF* será a *FB* como *EB* es a *BA*, y por permutación *GF* será a *EB* como *FB* es a *BA;* pero la proporción *GF* a *EB* es como la de 5 a 4; y por tanto *FB* es una vez y cuarta el número *BA.* Así que pon que el número *AB* sea la cosa[4]; así *BF* será 5/4 de la cosa, y si multiplicas *AB* por *BF* resultarán 5/4 de censo[5] para el área *BI*, y si multiplicas *AB* por *FG,* es decir *IF* por *FG* obtendrás 5/2 de cosa para el área *FD;* por tanto el área total *BD* son 5/4 de censo más 5/2 de cosa; pero esto son los 60[6]; en consecuencia 5/4 de censo más 5/2 de cosa son iguales a 60 denarios; divide entonces todo por el número de censos, o sea los 5/4, obteniendo que el censo más dos raíces[7] son lo mismo que 48 denarios[8]; entonces suma el cuadrado de la mitad del número de raíces, o sea 1, al 48; habrá 49, extrae la raíz cuadrada y obtendrás 7; resta la mitad del número de raíces; habrá 6 para el número *AB*; por lo que *BG* es 10 y AE es 8…

Si analizamos detenidamente el razonamiento seguido por Fibonacci observamos que todos los pasos dados por el autor y que le llevan a obtener una ecuación de segundo grado con una incógnita que permita resolver el problema se apoyan de manera esencial en la figura. De hecho, todas las cantidades y operaciones realizadas con ellas tienen una clara y sencilla interpretación geométrica. La figura es esencial en el razonamiento. Sin ella ese procedimiento de resolución no podría haber sido ideado o habría sido diferente.

A continuación presentamos otro ejemplo, extraído del texto titulado *Pratica mercantíuol*, escrito en catalán en 1521 por el mallorquín Joan Ventallol. Este problema aparece en el Capítulo tercero, dedicado a la Geometría (Ventallol, 1521):

> Dos torres están una delante de la otra. La más alta tiene 60 canas[9] de altura y la más baja tiene 40 canas de altura. El camino que está en medio tiene 25 canas de anchura. Os pido: ¿cuál es la distancia entre las partes más altas de las dos torres?
> Resta la altura de la torre menor, 40, de la altura de la mayor, 60, sobran 20. Multiplícalos por sí mismos, hacen 400. Después multiplica la anchura de la calle, 25, por sí misma, resulta 625. Suma 400 y 625, hacen 1025. Extrae su raíz cuadrada, resulta 32 1/64 y tanto hay de la cima de una torre a la cima de la otra.

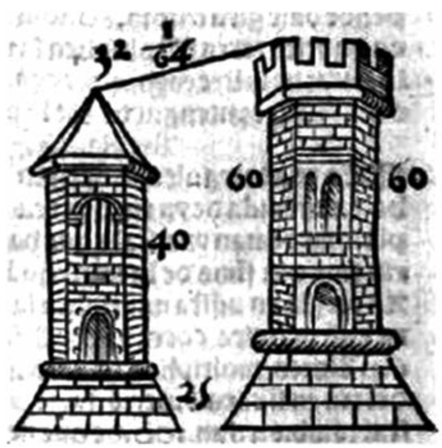

Figura 2

En este caso, observamos que la figura que acompaña al texto no posee ninguna influencia en la argumentación de Ventallol ni en el tipo de procedimiento elegido para resolver el problema. Se trata únicamente de un apoyo o un complemento al discurso.

Parece pues bastante claro el distinto papel que juega la figura en cada una de las dos situaciones presentadas:

1. En el primer ejemplo, la figura es una parte esencial de la resolución. De hecho, es la idea central de la misma y para construirla el autor ha debido manipular y representar las cantidades del problema de diversas formas.
2. En el segundo, la figura juega un papel meramente descriptivo. Para construirla únicamente se ha reproducido la situación del enunciado.

La resolución gráfica de problemas

La distinción que hemos puesto de manifiesto al final del apartado anterior nos lleva a proponer una definición de aquello que entendemos por una *resolución gráfica de un problema* (RGP).

Para nosotros, una RGP es aquella forma de resolver un problema que requiere esencialmente de un dibujo o figura para ser ideada. Por contra, aquellas resoluciones en las que el papel del dibujo (incorporado o no en el enunciado) es secundario o nulo no se consideran una RGP.

Así, bajo nuestro punto de vista, Fibonacci resolvió gráficamente el problema presentado en el primer ejemplo de la introducción, mientras que la resolución dada por Ventallol en el segundo ejemplo no es gráfica[10].

Años atrás, las investigaciones, entre otros, de Krutetskii (1976) en el campo de la resolución de problemas, ya pusieron de manifiesto que, a la hora de aprender matemáticas, los alumnos se pueden clasificar en tres grandes grupos:

1. El «visual o geométrico», compuesto por aquellos alumnos que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las Matemáticas.
2. El «no visual o analítico», formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.
3. El «intermedio o armónico», integrado por aquellos alumnos en los que las dos orientaciones cognitivas anteriores se conjugan armoniosamente[11].

Sin embargo, generalmente los programas de enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de las Matemáticas, centrándose casi exclusivamente en su componente analítica. Incluso la Geometría se halla fuertemente aritmetizada (Muñoz y Oller, 2011) y se reduce a la mera aplicación de fórmulas. Este enfoque presenta algunas deficiencias, dado que:

— No cubre las necesidades de aquellos alumnos cuya orientación cognitiva es eminentemente visual.
— Propicia el abandono de estudiantes que podrían acceder a las Matemáticas a través de su componente visual.
— Ignora las representaciones visuales como herramientas potentes para la resolución de problemas no necesariamente geométricos.

Para paliar estas limitaciones parece aconsejable que en los tópicos que configuran el currículo se desarrollen los aspectos analíticos y visuales para que, de este modo, el estudiante se pueda enfrentar al material de la manera que esté más próxima a su orientación cognitiva (Dreyfus y Eisenberg, 1986).

En lo que concierne a la RGP de álgebra, Simon y Stimpson (1988) puntualizan:

> Los estudiantes a los que, antes de que aprendan a manipular símbolos algebraicos, se les pide que resuelvan problemas algebraicos mediante diagramas, experimentan los problemas algebraicos de enunciado verbal como problemas no rutinarios. Sus esfuerzos se centran en desarrollar una representación del problema.

Muy a menudo esta representación pasa por lo que puede llamarse «álgebra geométrica». Es decir, por interpretar las cantidades como líneas, sus productos como áreas, etc. Como veremos, este punto de vista es potente y útil. No obstante, tiene sus limitaciones[12].

Sin embargo, la RGP no se limita únicamente a este «álgebra geométrica». En la tesis doctoral de Presmeg (1985) se encuentran buenos ejemplos de resolución de problemas mediante diagramas. He aquí uno de ellos:

> En una casa hay 8 mesas en total. Algunas de ellas tienen cuatro patas y las restantes tienen tres. En total hay 27 patas. ¿Cuántas mesas tienen cuatro patas?
> *Solución:*
> He resuelto este problema dibujando las mesas. En primer lugar las he dibujado como si todas tuvieran tres patas.

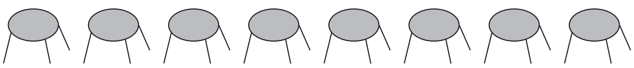

Figura 3

> Después he añadido una pata a las mesas hasta completar las 27 patas. He encontrado que hay 3 mesas con cuatro patas y 5 mesas con tres patas.

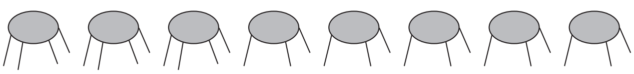

Figura 4

En todo caso, si aceptamos el interés y la utilidad de la RGP para los estudiantes, esto supone la necesidad de trabajar con profesores, en formación y en ejercicio, de los niveles no universitarios.

La Historia de las Matemáticas, y más concretamente el uso de problemas históricos, puede jugar un papel importante en esta formación. De hecho Tzanakis y Arcavi (2000), al clasificar los problemas históricos desde una perspectiva didáctica, señalan como una de las categorías la de aquellos problemas que «poseen una solución ejemplar, alternativa o inteligente». Evidentemente la RGP encaja en esta descripción.

Así pues, en este trabajo vamos a presentar algunos casos de RGP provenientes de textos antiguos, que puedan servir como ejemplo animando al profesorado a la lectura de las fuentes así como a la búsqueda de más situaciones similares y su utilización en el aula.

Ejemplos históricos de RGP

En esta sección, como ya hemos anticipado, presentamos algunos ejemplos de RGP extraídos de textos antiguos. Además de las soluciones originales, presentaremos algún comentario junto con el método de resolución que podría seguir un alumno hoy en día[13].

Trataremos un problema de ámbito geométrico, uno aritmético y uno algebraico provenientes, además, de culturas y tiempos muy diferentes.

Un problema geométrico de la antigua China

Los *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* (*Jiuzhang Suanshu*) es un texto matemático chino seguramente anterior al siglo I. El noveno capítulo está dedicado a los triángulos rectángulos y contiene veinticuatro problemas resueltos. El siguiente ocupa el lugar undécimo (Kangshen, Crossley y Lun, 1999):

> Hay una puerta que es 6 chi y 8 cun más larga que ancha. Su diagonal mide 1 zhang[14]. Di: ¿cuál es la altura y la anchura?
> Respuesta: La anchura es 2 chi y 8 cun y la altura 9 chi y 6 cun.
> Método. Considera el cuadrado de 1 zhang. Quítale el doble del cuadrado de la mitad de la diferencia dada. Divide por dos lo que sobra y extrae su raíz cuadrada. Réstale la mitad de la diferencia dada para obtener la anchura de la puerta. Sumando la mitad de la diferencia dada a la raíz da la altura de la puerta.

Pongamos que a es la anchura de la puerta, b es la altura y c es la diagonal; es decir, conocemos c (1 *zhang*) y $b - a$ (6 *chi* y 8 *cun*) y se nos pide calcular a y b. La regla dada en el texto para determinar la altura y la anchura de la puerta se reduce a las dos expresiones algebraicas siguientes:

$$a = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2}$$

$$b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}+\frac{b-a}{2}$$

Utilizando lenguaje moderno, es fácil comprobar que estas expresiones son correctas. Sin embargo, resulta bastante difícil imaginar cómo puede llegarse a ellas si se carece de un simbolismo algebraico como el actual. Para aportar algo de luz podemos recurrir al comentario de Liu Hui (siglo III) que acompaña al texto original y que, como veremos, se basa esencialmente en un razonamiento gráfico[15].

El texto original es bastante oscuro. Sin embargo, la idea básica es muy simple y se basa en observar la siguiente figura (el texto original se refiere a ella indicando incluso los colores).

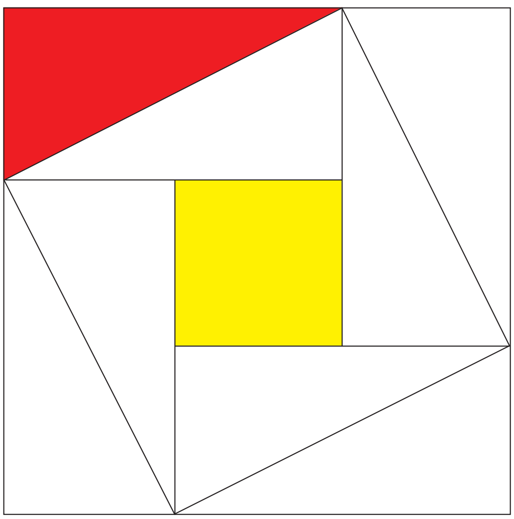

Figura 5

En la figura se observa que el cuadrado grande, de lado $a+b$, está formado por ocho triángulos rojos y un cuadrado amarillo; mientras que el doble del cuadrado de lado c está formado por ocho triángulos rojos y dos cuadrados amarillos, así que el cuadrado de lado $a+b$ es dos veces el cuadrado de lado c menos un cuadrado amarillo. En lenguaje moderno esto se traduce en:

$$(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2$$

Esto nos permite obtener el valor de la suma $a+b$ y en consecuencia se tiene que:

$$2a=(a+b)-(b-a)=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)$$
$$2b=(a+b)+(b-a)=\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)$$

A partir de estas expresiones las fórmulas buscadas se pueden obtener inmediatamente.

Esta resolución gráfica se basa en la descomposición de una misma figura de varias formas diferentes utilizando elementos cuyas áreas son conocidas a partir de los datos del problema. Aunque es susceptible a una traducción algebraica, el razonamiento es puramente geométrico, acorde al contexto del problema.

En todo caso, este procedimiento de resolución no forma parte del catálogo de soluciones al «problema de la puerta» del que disponen los alumnos de Educación Secundaria que, en el mejor de los casos, lo resolverían utilizando un sistema cuadrático de dos ecuaciones con dos incógnitas similar a este:

$$\begin{cases} x-y=68 \\ x^2+y^2=10000 \end{cases}$$

Un problema aritmético de la alta Edad Media

Alcuino de York vivió entre los años 735 y 804. Enseñó durante ocho años en la Escuela Palatina, en Aquisgrán. Fue el autor (seguramente compilador) de una curiosa colección de problemas titulada *Propositiones ad acuendos juvenes*. Este texto, que contiene 53 problemas (o 56, según las fuentes), se considera a veces como el primer texto de matemática recreativa (Meavilla, 2011). No obstante también contiene algunos problemas que no son en absoluto meros pasatiempos (Oller, 2014).

A mitad de camino entre el rompecabezas y el problema serio está el enunciado siguiente, que ocupa el segundo lugar de la colección (Hadley y Singmaster, 1992):

> Un hombre que iba por un camino vio a otros hombres que iban hacia él y les dijo: «Si fueseis otros tantos como sois

y se añadiese la cuarta parte de los que seríais entonces más la mitad de este último número, entonces conmigo seríamos cien». ¿Cuántos hombres vio el caminante?
Solución. 36. Otros tantos, 72. Un cuarto de esto son 18. Y la mitad de 18 es 9. 72 y 18 hacen 90. Añado 9 y hacen 99; y con el que habla hacen 100.

Desconocemos cómo llegó Alcuino a la solución del problema puesto que en el texto no aparece comentario ni indicación alguna. Veamos una posible solución basada en una representación gráfica como la siguiente[16].

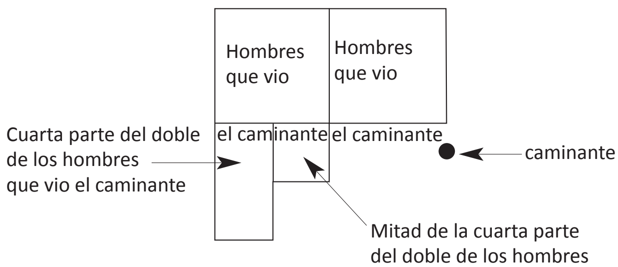

Figura 6

El enunciado del problema implica que el polígono de la figura anterior representa a 99 personas. Sin embargo, dicho polígono se puede descomponer en partes iguales, utilizando como unidad la cantidad más pequeña de las citadas en el enunciado, del siguiente modo:

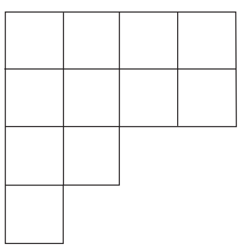

Figura 7

Por tanto, cada uno de los onces cuadrados iguales que lo componen debe representar a 9 personas y, en definitiva, el número de hombres que vio el caminante es igual a $4 \times 9 = 36$.

En este caso, la idea subyacente consiste en representar «físicamente» una cantidad desconocida (los hombres que vio el caminante) de tal manera que las cantidades relativas que van a apareciendo en el problema se pueden representar de un modo similar y de forma que su suma puede interpretarse como la unión de todas las figuras (en nuestra propuesta son superficies, pero pudieran ser longitudes).

Es interesante observar que este problema está en la frontera entre la Aritmética y el Álgebra. Un alumno actual al que se le propusiera el problema seguramente elegiría como incógnita x el número de hombres que vio el caminante para terminar planteando una ecuación semejante a esta:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

El uso de un diagrama similar al propuesto presenta varias potencialidades interesantes. En primer lugar, permite abordar el problema de manera puramente aritmética, sin hacer uso del lenguaje algebraico. En segundo lugar, permite asignar un significado claro y concreto a los términos de la anterior ecuación, evitando que la construcción de la misma se perciba como algo artificioso.

En definitiva, la resolución gráfica permite *ver* el problema desde ópticas distintas que pueden ser útiles al enfrentarse a él.

Un problema algebraico indio

El *Satkhandagama* es uno de los textos sagrados del Jainismo digambara, una religión india. Aunque no se trata de un texto matemático puramente dicho, el matemático indio Viranesa (siglo VIII) incluye, en su comentario del mismo, el problema siguiente (Sarasvati, 1979):

Cuando el cuadrado del número total de criaturas se divide por su número aumentado en su mitad, ¿qué resulta?
La figura representa el cuadrado del número de criaturas. Se divide en tres partes *(iguales)* por líneas que van de este a oeste.
Una de estas tres partes se divide en dos partes iguales y se unen a las otras dos partes.
La anchura de la figura resultante será 2/3 del número total de criaturas.

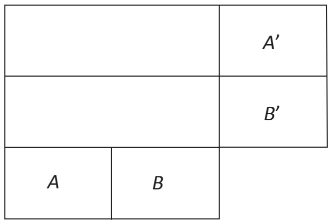

Figura 8

Dejando a un lado el aspecto esotérico del enunciado, el problema propuesto por Viranesa equivale a determinar el cociente de los monomios x^2 y $3x/2$, donde x simboliza «el número total de criaturas».

Para ello, el matemático indio se sirve de una representación gráfica en la que un cuadrado de área x^2 se transforma en un rectángulo equivalente, una de cuyas dimensiones es $3x/2$. Con esto, la otra dimensión del rectángulo es el cociente que se obtiene al dividir x^2 por $3x/2$.

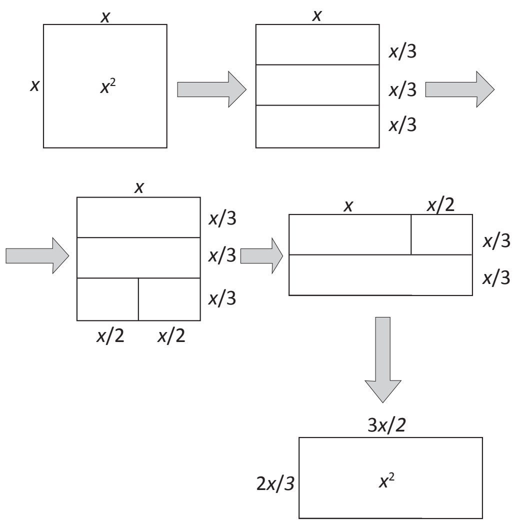

Figura 9

En este caso sí que nos encontramos ante un ejemplo de álgebra geométrica en el que no sólo se interpretan las cantidades como segmentos y sus productos como áreas, sino que se construyen figuras equivalentes y se hace uso esencial de la «conservación» del área. En la actualidad este tipo de razonamientos no se trabaja y la única respuesta esperable en un alumno sería la mera manipulación formal que, aunque correcta, carece de una motivación concreta.

Es interesante observar que la estrategia de Viranesa es fácilmente generalizable al caso en que el monomio dividendo sea x^2 y el monomio divisor sea $x+(x/2)$.

Un problema de generalización. Cómo resolver gráficamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

En la sección 2 hemos presentado un problema que, desde el punto de vista tradicional, implicaba la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 3x+4y=27 \end{cases}$$

La solución que se presentó en ese momento puede estar al alcance de alumnos del tercer ciclo de Educación Primaria. Veamos otro posible enfoque, que bien podría ensayarse con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria.

Designemos por x el número de mesas con tres patas y por y el número de mesas con cuatro patas. Con esta elección de las incógnitas, el diagrama siguiente es una representación gráfica del sistema anterior.

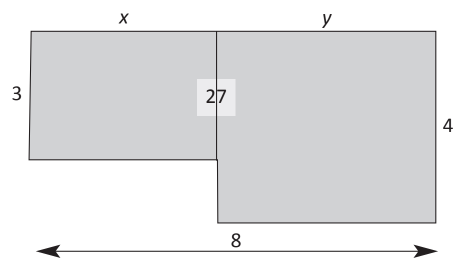

Figura 10

Por otro lado, la figura anterior (reducida de tamaño) se puede *ver* del modo siguiente:

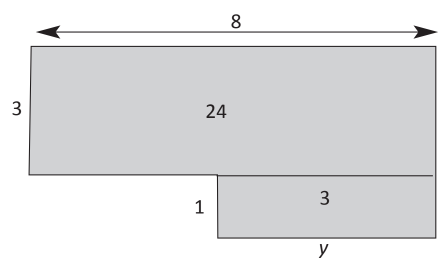

Figura 11

En consecuencia, $y=3 \Rightarrow x=8-3$.

Por su naturaleza, se podría pensar que la RGP está abocada necesariamente a la resolución de casos particulares. Sin embargo, esto no es cierto. Veamos cómo la resolución gráfica que acabamos de proponer se puede extender a la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas del tipo:

$$\begin{cases} x+y=C \\ ax+by=P \end{cases} \quad (a>b)$$

La idea es idéntica a la del ejemplo que acabamos de desarrollar. La «traducción» gráfica del sistema dado es la siguiente:

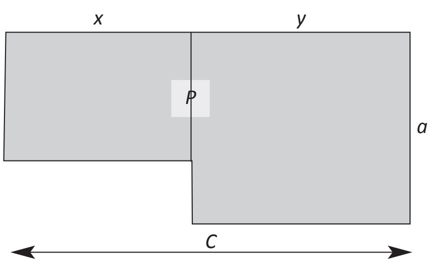

Figura 12

Descomponiendo la figura anterior (reducida de tamaño) de modo general, se tiene:

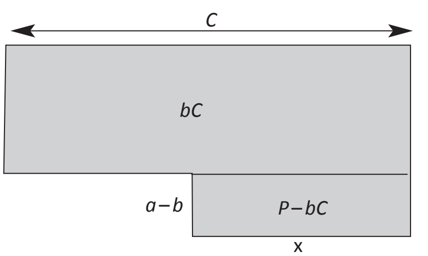

Figura 13

Y, por lo tanto:

$$(a-b)x = P-bC \Rightarrow x = \frac{P-bC}{a-b}$$

Finalmente, la incógnita y se puede obtener gráficamente de manera análoga o bien efectuando la diferencia:

$$(a-b)x = P-bC \Rightarrow x = \frac{P-bC}{a-b}$$

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado algunos ejemplos antiguos de resolución gráfica de problemas, provenientes además de ámbitos diferentes de la matemática: Geometría, Aritmética y Álgebra.

Con ello queda patente que la utilidad de este tipo de razonamientos no puede, ni debe, quedar circunscrita al ámbito de la Geometría y que el uso de figuras va más allá del mero apoyo o reproducción de los datos del enunciado.

Además, hemos mostrado, a través de un caso concreto, cómo la resolución gráfica de problemas permite atacar casos generales y familias de problemas, evitando así la idea de que se trata de un método de resolución anecdótico o adecuado sólo para casos concretos.

Referencias bibliográficas

Chace, A. B. (1979), *The Rhind Mathematical Papyrus*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Dreyfus, T., y T. Eisenberg (1986), «On visual versus analytical thinking in mathematics», en Univ. of London Inst. of Educ. (eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 152-158.

Grattan-Guinness, I. (1996), «Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them?», *Historia Math.*, n.º 23(4), 355-375.

Guzmán, M. de (1997), *El rincón de la pizarra,* Pirámide, Madrid.

Hadley, J., y D. Singmaster (1992), «Problems to sharpen the young. An annotated translation of 'Propositiones ad acuendos juvenes' the oldest mathematical problem collection in Latin attributed to Alcuin of York» *Math. Gaz.,* n.º 76, 102-126.

Kangshen, S., J. N. Crossley, y A. W.-C. Lun (1999), *The nine chapters on the mathe-*

matical art, Oxford University Press, Pekín.

Krutetskii, V. A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren,* The University of Chicago Press, Chicago.

Meavilla, V. (2011), *El lobo, la cabra y la col,* Almuzara, Córdoba

Meavilla, V., y A. M. Oller (2013), «Comprando caballos: Soluciones históricas a un tipo de problemas famosos», *Epsilon*, vol. 30(1) nº 83, 105-126.

Mikami, Y. (1974), *The development of Mathematics in China and Japan* (segunda edición), Chelsea Publishing Company, Nueva York.

Muñoz, J. M., y A. M. Oller (2011), «Mosaicos modulares», *Unión*, n.º 26, 165-182.

Oller, A. M. (en prensa), «Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York» *Pensamiento Matemático*.

Polya, G. (1973), *How to solve it,* Princeton University Press, Princeton.

Presmeg, N. C. (1985), *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*, Tesis doctoral, Universidad de Cambridge.

Sarasvati, T. A. (1979), *Geometry in ancient & medieval India*, Motilal Banarsidass, Delhi.

Sigler, L. E. (2003), *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer-Verlag, Nueva York

Simon, M. A., V. C. y Stimpson (1988), «Developing Algebraic Representation using diagrams», *The ideas of Algebra K-12. National Council of Teachers of Mathematics. 1988 Yearbook*, 136-141.

Tzanakis, C., y A. Arcavi (2000) , «Integrating history of mathemtics in the classroom: an analytic survey», en J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI study,* Kluwer, Dordrecht, 201-240.

Ventallol, J. (1521), *Pratica mercantíuol*, Joan de la Place, Lyo.

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
<meavilla@unizar.es>

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar
<oller@unizar.es>

1 En el texto original, los extremos de los segmentos rectilíneos se designan por letras minúsculas.

2 Fibonacci utiliza dos vértices opuestos para referirse al rectángulo completo.

3 Utilizando lenguaje moderno se tiene:

$$\frac{GB}{FB}:\frac{EA}{BA}>\frac{GB+FB}{FB}:\frac{EB+BA}{FB}>\frac{GF}{FB}+1:\frac{EB}{BA}+1>\frac{GF}{FB}:\frac{EB}{BA}$$

4 O sea la incógnita, que hoy llamaríamos x.

5 El término censo se utiliza para referirse a x^2.

6 La ecuación obtenida es

$$\frac{5x^2}{4}+\frac{5x}{2}=60 .$$

7 El término «raíz» es sinónimo de «cosa» [= x].

8 Es decir, $x^2+2x=48$.

9 Antigua unidad de longitud utilizada especialmente en Cataluña. Equivale a aproximadamente 1,5 metros.

10 Nótese, sin embargo, la particularidad de que el primer problema es aritmético-algebraico, mientras que el segundo es geométrico.

11 Krutetskii divide a este grupo a su vez en dos subgrupos: el «armónico abstracto» y el «armónico pictórico», en función de la preferencia del alumno por uno u otro método.

12 Grattan-Guinness (1996) avisa, por ejemplo, de los problemas que puede tener una interpretación de este tipo de los *Elementos* de Euclides.

13 La experiencia acumulada de más de cuarenta años de docencia de ambos autores de este artículo con alumnos de diversos niveles educativos nos permiten efectuar dichos supuestos.

14 1 *zhang* = 10 *chi* = 100 *cun.* Se trata de unidades de longitud, 1 *chi* equivale aproximadamente a 23 cm actuales.

15 Mikami (1974) propone una estrategia gráfica diferente para obtener dichas fórmulas. Preferimos recurrir a la que aparece en el texto original.

16 En el Papiro de Rhind aparecen problemas muy similares, como el siguiente (Chace, 67): «Si juntamos un cantidad con 1/7 suyo obtenemos 19. ¿Cuál es la cantidad?». Allí este tipo de problemas se resuelven mediante el *método de falsa posición*.