SUMA 52
Junio 2006, pp. 7-14

Aproximaciones de las raíces cuadradas

La generalización del uso escolar de las calculadoras ha ayudado a aumentar la confusión de nuestros alumnos entre los números irracionales y sus aproximaciones racionales. La perspectiva histórica y su explotación didáctica pueden ser de gran ayuda para superar estas dificultades. En este artículo se presentan dos métodos de aproximación radicalmente distintos en múltiples aspectos.

The generalization of the scholastic use of the computers has helped to increase this confusion between the irrational numbers and their rational approaches. The historical perspective and its didactic operation can be helpful to surpass these difficulties. In this article two radically different methods of approach are showed.

El número π, por ejemplo. Pues yo no me había planteado nunca cómo... Sabes que es 3,14 pero no sabes de dónde viene.
Figueiras (2002)

La cita anterior –transcripción textual de una conversación con una alumna de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona– nos permite comprobar cómo incluso entre los universitarios es habitual la identificación entre los números irracionales –en este caso π– y sus aproximaciones decimales –en este caso es 3,14.

En este artículo presentaremos algunos ejemplos que permitan ver cómo, a lo largo de la historia, se ha tratado el problema de las aproximaciones racionales de los números irracionales.

Con relación a este problema, estos elementos históricos pueden ayudar a los maestros y profesores en su esfuerzo por evitar las falsas creencias de los alumnos.

De los distintos métodos utilizados a lo largo de la Historia de la Matemática para aproximar irracionales cuadráticos hemos elegido dos especialmente relevantes: las aproximaciones babilónicas, unas de las más antiguas que se conocen, y la caracterización de los irracionales cuadráticos mediante las fracciones continuas ordinarias periódicas, que dieron sus primeros pasos con Bombelli y Cataldi, a caballo entre los siglos XVI y XVII. En ambos casos evitaremos caer en la tentación de sugerir caminos de aplicación directa de estos conocimientos en las aulas de Secundaria o Bachillerato. Sólo pretendemos dar elementos al profesorado que le ayuden en su quehacer cotidiano. Para proporcionar estos elementos nos basamos en referencias históricas, que nos ayudan a comprender las dificultades conceptuales ligadas al desarrollo de las ideas, sin pretender inferir de estos datos explotaciones directas en el aula.

El uso de las calculadoras ha hecho desaparecer de la enseñanza de la Matemática el algoritmo tradicional de *calcular raíces cuadradas*. Apresurémonos a felicitarnos por este hecho, pero no por algunas de sus consecuencias; la falta de tratamiento del problema de las aproximaciones de un irracional puede reforzar todavía más las creencias de los estudiantes descritas al principio de esta introducción, que les lleva a la confusión entre un número irracional y sus aproximaciones.

Joan Miralles de Imperial Llobet
Universidad Pompeu Fabra. Barcelona
Jordi Deulofeu Piquet
Universidat Autónoma de Barcelona. Barcelona

Puede trabajarse el concepto de aproximación racional de un irracional utilizando cualquier número irracional, puesto que el concepto es el mismo en todos los casos. Sin embargo, los irracionales cuadráticos permiten gran número de algoritmos de aproximación racional, lo que permite en estos casos determinar aproximaciones, compararlas entre sí y deducir conclusiones –en una palabra, manipular el concepto de aproximación– con mucha mayor facilidad que si tratáramos otros irracionales bien conocidos por nuestros alumnos, como podrían ser los números π o e.

El uso de las calculadoras ha hecho desaparecer de la enseñanza de la Matemática el algoritmo tradicional de calcular raíces cuadradas.

Desgraciadamente, la inmensa mayoría de las ideas y de los procedimientos desarrollados en la Antigüedad se han perdido de manera irremisible. Citaremos un único ejemplo: en su libro *De la medida del círculo* (Ver Eecke, 1960), Arquímedes lleva a su máximo nivel de sofisticación el método de exhaución de Eudoxo para determinar la acotación de π:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

En este proceso, y sin más explicación, Arquímedes aproxima $\sqrt{3}$ con el valor

$$\sqrt{3}\approx\frac{1351}{780}$$

que coincide con $\sqrt{3}$ hasta las diezmillonésimas. ¿Cuántas ideas y construcciones habrá detrás de esta aproximación? ¿Cuántas ideas para su explotación didáctica podríamos obtener de sus métodos? Lo único que está claro es que esta precisión no se obtiene por casualidad, aunque desconocemos absolutamente los procedimientos por los que Arquímedes llegó a este resultado.

Las aproximaciones babilónicas

Se han encontrado cálculos de aproximaciones de raíces cuadradas en tablillas babilónicas de una antigüedad al menos de la época de Hammurabi (1700 A.C.). Probablemente, estas operaciones nacieron de la necesidad de los cálculos trigonométricos relacionados con la elaboración de calendarios para prever los momentos óptimos de la siembra y de la cosecha (Kline, 1972). Esta teoría, sin embargo, no ha sido probada dado lo limitado de nuestro conocimiento de las civilizaciones mesopotámicas.

Su sistema de aproximaciones de los radicales consistía en hallar primero una aproximación por defecto y otra por exceso, para luego hacer la media aritmética de ambas aproximaciones. Veámoslo con un ejemplo traducido a nuestro lenguaje, ya que los babilonios utilizaban un complejo sistema de numeración mixto decimal y sexagesimal. Queremos calcular $\sqrt{13}$. Su parte entera es 3. Entonces, dado que $\sqrt{13}$ no es computable, tomaremos un rectángulo de área 13 y tal que uno de sus lados valga 3, aproximación por defecto de $\sqrt{13}$, y calcularemos el valor del otro lado, que obviamente será una aproximación por exceso:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=13\\ 3\cdot\dfrac{13}{3}=13\end{array}\right\}$$

Tenemos ya una primera aproximación por defecto, 3, y una por exceso, 13/3. Haciendo la media de ambas obtendremos una nueva aproximación:

$$\frac{1}{2}\left(3+\frac{13}{3}\right)=3+\frac{2}{3}$$

Elevando al cuadrado esta aproximación obtenemos

$$\left(3+\frac{2}{3}\right)^2=13+\frac{4}{9}>13$$

Por tanto, si dividimos 13 entre la aproximación anterior obtendremos una aproximación de $\sqrt{13}$ por defecto:

$$\frac{13}{3+\frac{2}{3}}=3+\frac{6}{11}$$

Hallaremos la siguiente aproximación haciendo la media aritmética entre las dos aproximaciones anteriores:

$$\frac{1}{2}\left(3+\frac{2}{3}+3+\frac{6}{11}\right)=3+\frac{20}{33}$$

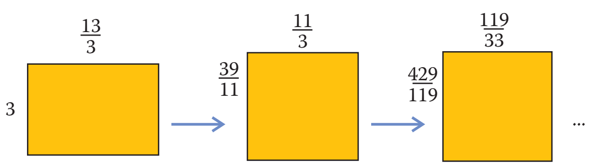
que, como podemos comprobar, es una aproximación por exceso. Continuando este proceso hallaríamos aproximaciones alternativamente por defecto y por exceso:

$$3,\ 3+\frac{2}{3},\ 3+\frac{6}{11},\ 3+\frac{20}{33},\ 3+\frac{72}{119},\ 3+\frac{2378}{3927},$$
$$3+\frac{8574}{14159},\ 3+\frac{33670100}{55602393},\ \ldots$$

En el Anexo presentamos un pequeño programa informático, elaborado con Maple, que nos da las aproximaciones babilónicas sucesivas de las raíces cuadradas junto con sus aproximaciones decimales. Tanto la elaboración de programas sencillos, como su utilización, pueden colaborar al aprendizaje de estos conceptos por la vía de la reflexión sobre los algoritmos y de la manipulación de los datos numéricos.

Desde el punto de vista geométrico, hallar la raíz cuadrada de un número equivale a determinar el lado de un cuadrado de área dada.

Es especialmente interesante analizar el proceso desde el punto de vista geométrico puesto que la interpretación del mismo es simple: hallar la raíz cuadrada de un número equivale a determinar el lado de un cuadrado de área dada. Así, en el caso de un cuadrado de área 13 se parte de un rectángulo de área 13 y de lados 3 (parte entera de $\sqrt{13}$) y 13/3. Ahora basta con ir cuadrando progresivamente ese rectángulo, construyendo una familia de rectángulos de área A tales que las sucesivas diferencias entre sus lados sean cada vez menores:



Veamos ahora desde un punto de vista analítico que este proceso es válido en general, es decir, que su aplicación permite hallar aproximaciones sucesivas de cualquier irracional cuadrático de la forma $\sqrt{A}$; una demostración analítica es la siguiente, que dividiremos en tres pasos:

1. Si a es la parte entera de $\sqrt{A}$, entonces

$$\frac{a+\frac{A}{a}}{2}$$

es una aproximación por exceso. En efecto, tenemos que

$$\frac{a+\frac{A}{a}}{2}=\frac{A+a^2}{2a}=\frac{a}{2}+\frac{A}{2a}=a+\frac{A}{2a}-\frac{a}{2}=a+\frac{A-a^2}{2a}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{A+a^2}{2a}\right)^2=\left(a+\frac{A-a^2}{2a}\right)^2=a^2+(A-a^2)+\left(\frac{A-a^2}{2a}\right)^2=$$
$$=A+\left(\frac{A-a^2}{2a}\right)^2>A$$

2. Si p es una aproximación por exceso, entonces A/p, siguiente aproximación por defecto, es más fina que p (figura 1). Es decir, si

$$p=\sqrt{A}+k \quad \text{y} \quad p'={}^{A}\!/_{p}=\sqrt{A}-k' \qquad k,k'>0$$

entonces $k > k'$.

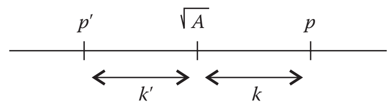


Figura 1. Dos aproximaciones sucesivas de $\sqrt{A}$

En efecto,

$$A=p\cdot p'=(\sqrt{A}+k)\cdot(\sqrt{A}-k')=A+(k-k')\cdot\sqrt{A}-kk'$$

por tanto

$$(k-k')\cdot\sqrt{A}=kk'>0$$

y queda demostrado que $k > k'$.

3. Si p es una aproximación de $\sqrt{A}$ por exceso, y p' es la siguiente aproximación por defecto, entonces

$$\frac{p+p'}{2}$$

es una aproximación por exceso más fina que p. En efecto, sea

$$\left.\begin{array}{l} p=\sqrt{A}+k \\ p'=\sqrt{A}-k' \end{array}\right\}$$

con $0 < k' < k$. Entonces es inmediato que

$$\frac{p+p'}{2}=\sqrt{A}+\frac{k-k'}{2}>\sqrt{A}$$

ya que $k - k' > 0$. Trivialmente la nueva aproximación por exceso

$$\frac{p+p'}{2}$$

es más fina que la anterior aproximación por exceso, p: Como $p<p'$,

$$\frac{p+p'}{2}<\frac{2p}{2}=p$$

Obsérvese que el método consiste en hallar la media aritmética de los dos lados para obtener un lado del rectángulo siguiente y, a continuación, determinar el otro lado de modo que ambos sean la media geométrica del área A.

Esta demostración puede presentarse también desde un punto de vista geométrico, como veremos a continuación. Pero antes recordemos la construcción geométrica de la raíz cuadrada que aparece en los *Elementos* de Euclides (Heath, 1956), aunque era ya conocida desde mucho antes. Se trata simplemente de construir una circunferencia de diámetro $A+1$ y trazar la perpendicular por el punto P (figura 2):

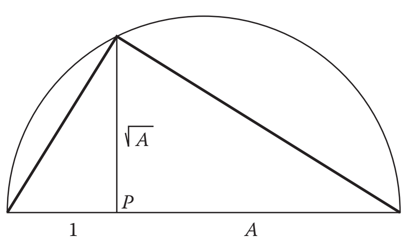


Figura 2. Construcción geométrica de $\sqrt{A}$

Veamos ahora la demostración geométrica:

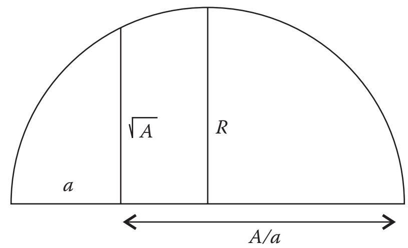


Figura 3. Construcción de $\sqrt{A}$ a partir de a

La figura 3 muestra la construcción de $\sqrt{A}$. El primer paso de la demostración es evidente, ya que

$$\frac{a+\frac{A}{a}}{2}=R>\sqrt{A}$$

El segundo paso consiste en ver que si p es una aproximación por exceso, entonces $p' = A/p$ es una aproximación por defecto más fina que p. Como antes, tenemos que demostrar que si $p = \sqrt{A} + k$ y $p' = \sqrt{A} - k'$, entonces $k > k'$.

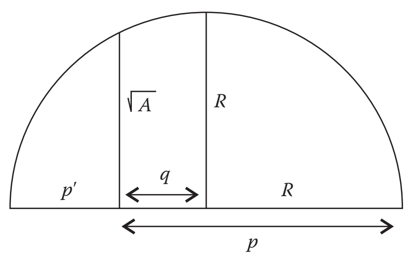


Figura 4. Demostración de $k > k'$

En la figura 4 vemos que

$$p'<\sqrt{A}<R<p\,.$$

Por tanto tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{A}-p'<R-p' \\ p-\sqrt{A}>p-R=q \end{array}\right\}$$

que nos lleva a

$$p-\sqrt{A}>\sqrt{A}-p'$$

que equivale a $k > k'$.

El tercer paso de la demostración resulta inmediato ya que

$$\frac{p+p'}{2}=R>\sqrt{A}$$

y la validez general del proceso queda demostrada geométricamente.

Es interesante observar que la demostración geométrica es más clara, más corta y más fácil de validar que la algebraica. Además requiere niveles menores de abstracción. En pocas palabras: es mucho más convincente para nosotros y para nuestros alumnos.

Los historiadores, como Brezinski (1991), sitúan el nacimiento de las fracciones continuas en Bombelli (Bombelli, 1579) y, sobre todo, en Cataldi (Cataldi, 1613).

Si experimentamos un poco con las aproximaciones babilónicas veremos que la convergencia es muy rápida: con un número muy corto de iteraciones obtenemos aproximaciones muy buenas. El problema es que las fracciones que aparecen tienen denominadores –y numeradores– que crecen a gran velocidad. Ello nos lleva al concepto de aproximación óptima: dado un número irracional cualquiera α diremos que p/q es una *aproximación óptima* de α si no existe ninguna fracción con denominador menor o igual que q que aproxime a mejor que p/q:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\left|\alpha-\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right| \quad \forall\bar{q}<q$$

Las aproximaciones babilónicas no son óptimas, tal como se verá con sólo compararlas con las obtenidas a partir de las fracciones continuas; en cambio, las aproximaciones por fracciones continuas que veremos a continuación siempre lo son (Olds, 1963).

Las aproximaciones irracionales por fracciones continuas

Los historiadores, como Brezinski (1991), sitúan el nacimiento de las fracciones continuas en Bombelli (Bombelli, 1579) y, sobre todo, en Cataldi (Cataldi, 1613). Bombelli utiliza por vez primera procedimientos algebraicos para aproximar raíces (Miralles de I., 2000), con lo que ello supone de simplificación mental. Pocos años después será Cataldi quien utilizará por primera vez una notación similar a la moderna para indicar las fracciones continuas, además de presentar algunas aplicaciones –puede seguirse un completo estudio del libro de Cataldi en Maracchia (1979)–. Sin embargo, tendremos que esperar a Euler (1748) para contemplar una teoría de las fracciones continuas en el contexto de la Teoría de Números, contexto en el que las fracciones continuas acabarán por caracterizar los números irracionales. Para una iniciación al estudio de las fracciones continuas se puede consultar Olds (1963).

Llamamos fracción continua unitaria ordinaria (a partir de ahora, fracción continua) a toda expresión de la forma:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\dots}}}$$

donde a_i = 1, 2, ... son enteros no negativos. Es evidente que, mediante el algoritmo de Euclides, todo número racional positivo se expresa de manera única como fracción continua finita, y que toda fracción continua finita corresponde a un número racional. En consecuencia, todo número irracional se expresa como fracción continua infinita. Lo curioso del caso es que, como veremos, los irracionales cuadráticos se expresan como fracción continua periódica, lo que convierte la expresión en fracción continua de los números en una forma de caracterización de los mismos.

Vamos ahora a construir un algoritmo que nos permita conocer la fracción continua correspondiente a un irracional cuadrático. Para ello necesitaremos algunas definiciones:

Definición 1: Dado el número

$$\alpha=\frac{A+\sqrt{n}}{B}$$

donde A, B son enteros y n es entero positivo, diremos que α es *reducido* si verifica las siguientes condiciones: $\alpha > 1$ y

$$\alpha'=\frac{A-\sqrt{n}}{B}$$

verifica que $-1 < \alpha' < 0$.

Además, para asegurar que el proceso recursivo del algoritmo es finito, exigiremos que $n - A^2$ sea divisible por B. Ello no supone ninguna pérdida de generalidad ya que, en caso de no verificarse, bastará con poner:

$$\alpha = \frac{A+\sqrt{n}}{B} = \frac{AB+\sqrt{B^2 n}}{B^2} = \frac{A'+\sqrt{n'}}{B'}$$

Ahora tendremos que

$$n' - A'^2 = B^2 n - A^2 B^2 = B^2 (n - A^2)$$

es divisible por $B' = B^2$.

Definición 2: Llamaremos *transformado de* α, y lo indicaremos por α', al número tal que

$$\alpha = p + \frac{1}{\alpha'}$$

donde p es la parte entera de α.

Definición 3: Llamaremos *coordenadas* de α al par (A, B).

Bajo estas condiciones se puede demostrar (Miralles de I., 2000) que:

1. El transformado de α siempre tiene coordenadas enteras y verifican la restricción indicada.
2. El número de coordenadas que hacen que α sea reducido es finito.
3. Si α es reducido, entonces su transformado α' también lo es.

Estas consideraciones nos permiten asegurar la corrección del algoritmo que presentamos a continuación. Por ejemplo: queremos expresar $\sqrt{2}$ en fracción continua. Como $\sqrt{2}$ no es reducido, tomaremos $1 + \sqrt{2}$:

$$\alpha = 1+\sqrt{2} = 2 + \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{2} - 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2}.$$

En este caso hemos obtenido α en un solo paso. Por tanto tenemos:

$$1+\sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

y ya hemos obtenido la expresión de $\sqrt{2}$ como fracción continua:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

Veamos un ejemplo un poco más complejo: la expresión de $\sqrt{13}$ en fracción continua.

> *Las aproximaciones babilónicas no son óptimas mientras que las aproximaciones por fracciones siempre lo son.*
>
> Olds

Paso 1: tomaremos $\alpha = 3 + \sqrt{13}$, que es reducido. Su parte entera es 6.

Paso 2:

$$\alpha = 3+\sqrt{13} = 6 + \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{13} - 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{3+\sqrt{13}}{4}$$

Paso 3:

$$\alpha_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{4} = 1 + \frac{1}{\alpha_2} \rightarrow \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha_2 = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$$

Paso 4:

$$\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \rightarrow \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\sqrt{13}-2}{3} \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha_3 = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$$

Paso 5:

$$\alpha_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3}=1+\frac{1}{\alpha_4}\rightarrow\frac{1}{\alpha_4}=\frac{\sqrt{13}-1}{3}\rightarrow$$
$$\rightarrow\alpha_4=\frac{3}{\sqrt{13}-1}=\frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

Paso 6:

$$\alpha_4=\frac{1+\sqrt{13}}{4}=1+\frac{1}{\alpha_5}\rightarrow\frac{1}{\alpha_5}=\frac{\sqrt{13}-3}{4}\rightarrow$$
$$\rightarrow\alpha_5=\frac{4}{\sqrt{13}-3}=3+\sqrt{13}=\alpha$$

En consecuencia tendremos que:

$$\sqrt{13}=\alpha-3=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

Las aproximaciones de los irracionales por fracciones continuas son todas óptimas, en el sentido que hemos definido más arriba. Es un interesante ejercicio el comparar las aproximaciones babilónicas con estas últimas: comprobamos inmediatamente que los denominadores ahora obtenidos son mucho menores que los anteriores. En el caso de $\sqrt{13}$, por ejemplo, ahora obtenemos lo siguiente:

$$3+\frac{1}{2},3+\frac{2}{3},3+\frac{3}{5},3+\frac{20}{33},3+\frac{23}{38},3+\frac{43}{71},3+\frac{66}{109},3+\frac{109}{180},\cdots$$

cuya simplicidad no tiene comparación con las aproximaciones de los babilonios, aunque la convergencia de éstas es mucho más lenta.

Si deseamos utilizar el programa Maple para determinar fracciones continuas basta con cargar el paquete numtheory y utilizar la instrucción cfrac. La sintaxis es la siguiente: para obtener las 6 primeras fracciones de $\sqrt{13}$ escribiremos

cfrac(*sqrt*(13),6)

Comentario final

Conviene hacer notar que, en este aspecto como en tantos otros, los obstáculos del aprendizaje se corresponden con obstáculos de tipo epistemológico. Nuestros alumnos aceptan sin rechistar expresiones como $\sqrt{2}$ *es 1,4* o *π es 3,14*, pero se revolverán en sus pupitres si decimos *π es 3*, porque *3 es un número y π es otro número distinto* mientras que cuesta mucho más pensar que 3,14 es un número tan respetable como 3, o como *π*. El uso acrítico de las calculadoras puede contribuir a agravar este problema: cuando utilizamos una calculadora para calcular un irracional la respuesta es un racional, y al no *ver* los procesos lógicos se tiende a ver la respuesta como la solución, y no como una aproximación. Un camino de superación de estos obstáculos puede ser la utilización de distintos métodos para la determinación de aproximaciones de números irracionales, lo cual nos permitirá distinguir el número de sus distintas aproximaciones.

> *La generalización del uso de calculadoras ha supuesto la desaparición escolar de los antiguos algoritmos de cálculo de raíces cuadradas a pesar de que el concepto de raíz cuadrada y de sus aproximaciones sea necesario para la educación matemática.*

La generalización del uso de calculadoras ha supuesto la desaparición escolar de los antiguos algoritmos de cálculo de raíces cuadradas, lo que supone una liberación para la mayoría de los escolares. Sin embargo, el concepto de raíz cuadrada y de sus aproximaciones es necesario para la educación matemática, con independencia de su cálculo, y en el presente artículo hemos mostrado elementos para la profundización de dicho concepto.

El trabajo que hemos expuesto permite introducir el concepto de aproximación en distintos niveles didácticos: un primer nivel consiste en conocerlo y aplicarlo para determinar aproximaciones de raíces cuadradas. En un segundo nivel se trata de relacionar el concepto de raíz cuadrada con elementos de la geometría, en el caso de aquellos métodos que tengan significado geométrico. En un tercer nivel se pueden utilizar procedimientos analíticos para demostrar la corrección general de cada método de aproximación. Estos niveles se relacionan con los distintos niveles de rigor deductivo, lo que nos permite trabajar el cálculo de aproximaciones de raíces cuadradas con alumnos de distintas edades.

Anexo: Programa de Maple para las aproximaciones babilónicas

El programa es el siguiente:

```
apbab:=proc(n,r)
local s,t,e,m,g,f,k,ap,ep,lista,lista2;          ——→  Declaración de variables
lista:=NULL;k:=0;lista2:=NULL;

s:=sqrt(n);t:=evalf(s);e:=floor(t);f:=e;
m:=(n+e^2)/(2*e)-f;                               ——→  Determinación de la primera
ap:=sqrt(n)-f-m;ep:=evalf(ap,20);                      aproximación
lista:=lista,m;lista2:=lista2,ep;

while k<r-1 do
g:=n/(m+f)-f;ap:=sqrt(n)-f-g;ep:=evalf(ap,20);
lista:=lista,g;lista2:=lista2,ep;k:=k+1;          ——→  Determinación de las demás
if k<r-1 then                                          aproximaciones
m:=(m+g)/2;ap:=sqrt(n)-f-m;ep:=evalf(ap,20);
lista:=lista,m;lista2:=lista2,ep;k:=k+1;fi;od;

print(lista);
print(`error, con 20 decimales:`);                ——→  Output
print(lista2);
end;
```

Por ejemplo, el *output* que resulta de introducir *apbab*(13,5) es:

> **apbab(13,5);**

$$2/3, \quad 6/11, \quad \frac{20}{33}, \quad \frac{72}{119}, \quad \frac{2378}{3927}$$

error, con 20 decimales:

–.0611153912026773736, .0600967300094438386, –.0005093305966167675, 0005092586572666040, –.359696750817 10^{-7} ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOMBELLI, R. (1579): *L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri, 2ª edición*, Bologna.

BREZINSKI, C. (1991): *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer-Verlag, Berlin.

CATALDI, P.A. (1613): *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice...*, B. Cocchi, Bologna.

HEATH, T. (1956): *The thirteen books of Euclid's Elements (3 vol.)*, Dover Publications, New York.

EULER, L. (1748): *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, Traducción inglesa: (1988) Introduction to analysis of infinite, Springer-Verlag, New York.

FIGUEIRAS, L. (2002): *Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros*, tesis doctoral UAB, Barcelona.

KLINE, M. (1972): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, I. Alianza Universidad, Madrid.

MARACCHIA, S. (1979): *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'Algebra*, Feltrinelli, Milano.

MIRALLES DE I., J. (2000): *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes*, tesis doctoral UAB, Barcelona.

OLDS, C.D. (1963): *Continued fractions*, Mathematical Association of America, Yale.

VER EECKE, P. (1960): *Les oeuvres complètes d'Archimède*, Vaillant-Carmanne, Paris.