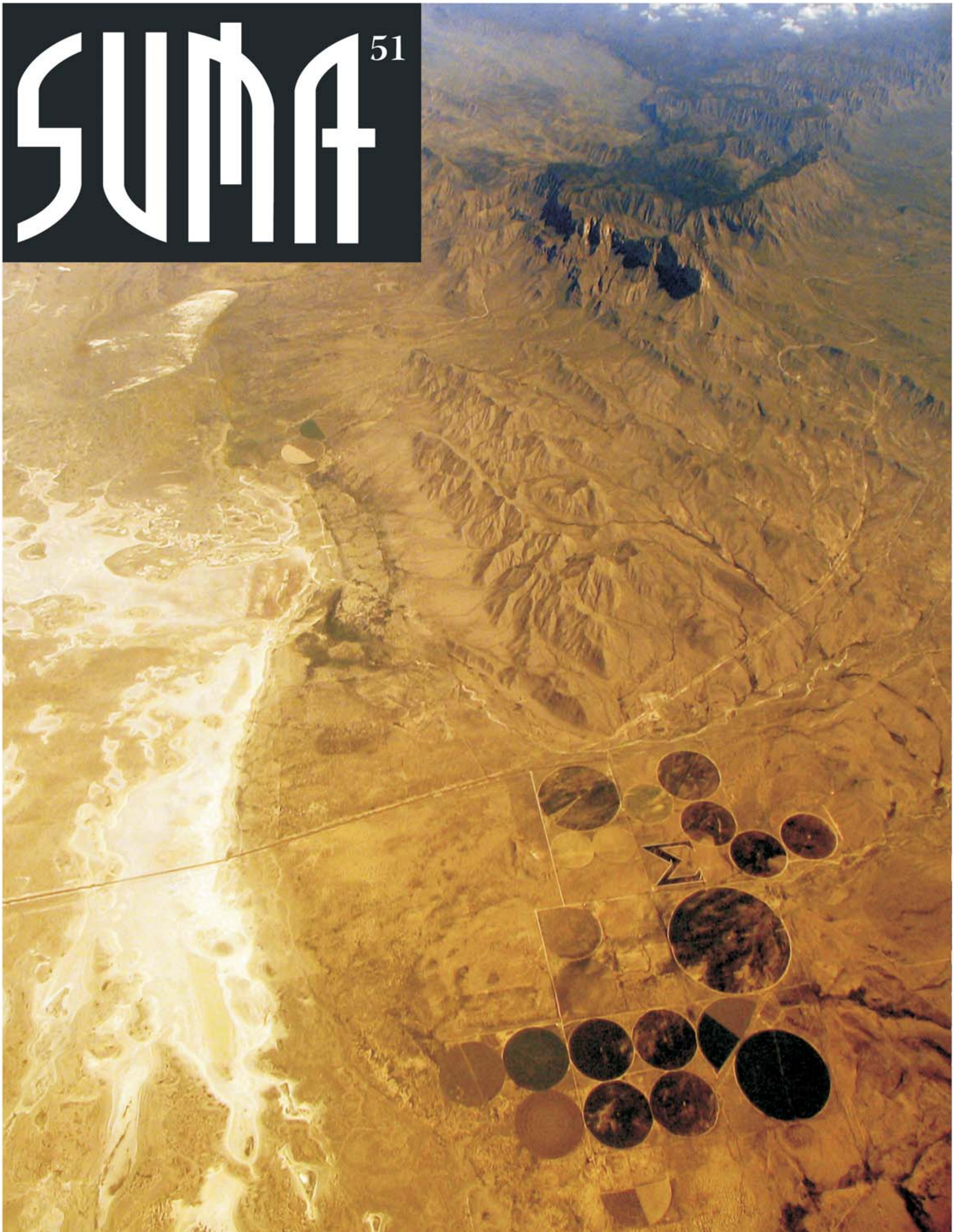
SUMA 51



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · FEBRERO 2006 · Nº. 51 · ISSN 1130-488X

SUMA
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
51
Febrero 2006

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
www.revistasuma.es

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

ACTIVIDADES DE LA FESPM

SUMA 51
Febrero 2006

Sin nosotros no es posible

Ya hace más de un año que se conocieron los resultados del estudio PISA 2003, nada favorables para nuestro sistema educativo y en particular para la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Con la perspectiva que da el paso del tiempo, superada la fase de los titulares de presa que pretendiendo resumir la información, la simplificaban para acabar tergiversándola, deberiamos empezar todos una fase reflexiva sobre la forma en la que llevamos a cabo nuestra tarea educativa.

Algunos de los problemas que acechan a la educación en esta primera década del siglo son heredados de la anterior —menos recursos que otros países con respecto a nuestro producto interior bruto, competecia desleal del entorno con la escuela (televisión, videojuegos), inercia de la estructura educativa ante el cambio...—. Otros, en cambio, son problemas surgidos en los ultimos años.

La profesión de enseñante en general y la de enseñante de matemáticas en particular, se ha trasformado. Cada día se le demanda más al docente: que conozca su materia, que sepa enseñarla, que entienda a los adolescentes, que sepa motivarlos incluso cuando manifiestan una resistencia heroica al aprendizaje, que sea capaz de educalos para defenderse de un entorno cada vez más agresivo, para ser autónomos y abandonar algún día el ambiente de hiperprotección de la mayoria de las familias, que sean capaces de mantener el orden y de crear un clima adecuado para el aprendizaje, incluso en las condiciones más extremas. Y, cierto es, muchos nunca *hubieramos imaginado que trabajar de profesor terminaría siendo esto, aunque haga ya tiempo que asumimos esta redefinición de nuestra profesión.*

Pero todo lo anterior, no basta por sí solo para justificar lo que sucede. Se supone que como profesionales debemos también reflexionar sobre lo que hacemos y aunque sepamos que en gran medida no somos parte del problema, deberemos abordar lo que nos corresponde: ser parte de la solución.

De PISA podemos aprender muchas cosas, sin creer a la vez que la solución sea preparar a nuestros alumnos para superar pruebas de ese tipo. Eso sería sin duda un grave error contra el que hay que estar prevenidos.

Nos han de preocupar también las reacciones que ante los resultados de PISA están teniendo algunas Administraciones Educativas. Éstas pueden terminar confirmando aquello de que es peor el remido que la enfermedad. En este sentido, la aparición de ciertos estándares curriculares que rozan el surrealismo o de colecciones de ítems en formato *PISA promovidos por algunas administraciones, o la sustitución de evaluaciones internacionales como ésta, por pruebas censales carentes de rigor que, de manera cuando menos ingenua, pretenden poder medir lo que saben o no todos los alumnos y comparar asi unos Centros con otros, merecen también nuestra reflexión pausada y crítica.*

Debemos exigir ser los diseñadores de las acciones que se lleven a cabo, que los colectivos de profesores seamos los que promovamos los cambios que se hayan de adoptar, que aportemos las ideas y que éstas junto con nuestra experiencia docente e innovadora sean la base sobre la que se sustenten esas acciones. De lo contrario, en el mejor de los casos, simplemente se habrá vuelto a perder una nueva oportunidad.

Sin nosotros, sin los profesores, no es posible. ■

SUMA 51
Febrero 2006, pp.5-6

www.revistasuma.es

Desde el pasado mes de enero de 2006 se encuentra disponible en Internet la página web de la revista *SUMA*:

www.revistasuma.es

Hace tiempo que era nuestra intención poder ofrecer una edición electronica de la revista que le diera, por una parte, más visiblidad y por otra, facilitara las tareas de establecer contacto con nosotros, conocer las normas de publicación, encontrar los artículos publicados e, incluso, permitiera descargar algunos ellos.

Aprovechando la reciente liberalización de los dominios *.es* hemos registrado, a nombre de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas el dominio *revistasuma.es*, que utilizaremos a partir de ahora.

Presentamos una página sencilla, en la que los objetivos que hemos enunciado se puedan conseguir, sin añadir, por ahora muchas más pretensiones.

Buscamos, fundamentalmente, que resulte útil y práctica para nuestros actuales lectores y, también, para los que todavía no lo son y acudan a ella.


SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

buscar...

La Revista
Revistas SUMA
Monografías SUMA
Normas de Publicación
Boletín de Suscripción
Preguntas y Respuestas
Equipo Suma

Sociedades Federación
Noticias
Enlaces Web
Buscar Aquí

SUMA, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es una publicación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).
Actualmente se edita e imprime en Madrid (España). Cada año se publican tres ejemplares que aparecen en Febrero. Junio y Noviembre. La tirada actual es de 6700 ejemplares.ISSN 1130-488X

Consta de dos partes diferenciadas: artículos y secciones.

En los artículos encontramos cualquier tema relacionado con la didáctica de las matemáticas tanto a nivel divulgativo como formativo. Publicamos temas sobre actividades en el aula, historia de las matemáticas, desarrollo analítico... Cualquier persona puede escribir un artículo mientras este cumpla con las normas establecidas y tenga el rigor que caracteriza nuestra ciencia.

Por otra parte, las secciones son espacios con una continuidad en conjunto pero independiente en cada número.

También publicamos acontecimientos o eventos organizados por las sociedades matemáticas o por la federación para que esa información llegue de manera efectiva a todos aquellos que están suscritos o bien reciben la revista por pertenecer a alguna sociedad española adscrita a la FESPM.

Un poco de historia

Como aparece en el editorial del número 1,

SUMA nace con pretensión de ser una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, órgano de expresión de la Federación de Sociedades que la edita(...); útil para la clase, plural y participativa, dedicada a todos los niveles educativos y que recogerá ideas, sugerencias, informaciones, innovaciones...

La revista se empezó a publicar en 1988 en Granada. Su primer Director fue **Rafael Pérez Gómez**. En **Granada** se publicaron los ocho primeros números de SUMA.

En 1991, coincidiendo con la publicación del número 9, **Sixto Romero** se convirtió en el segundo director y la sede de SUMA se trasladó a **Huelva**, donse se publicaría hasta el número 19, en 1995.

Equipo editorial de *SUMA*

Recorriendo el menú comenzamos con la **Introducción**, donde se hace una breve presentación de las revista y sus objetivos y un resumen de su historia desde que se empezara a publicar en Granada, en 1988, hasta la actualidad.

En la sección **Revistas SUMA**, aparecen los índices de todos los números publicados y sus portadas. Desde este mismo apartado es posible descargar, en formato PDF, algunos de los artículos publicados en la edición en papel.

Monografías de SUMA da cuenta de las portadas de las aparecidas hasta ahora, junto con un breve resumen de su contenido.

Las entradas: **Normas de publicación**, **Boletín de suscripción** y **Preguntas y respuestas** tratan de poporcionar apoyo a los lectores y autores de *SUMA*.

Equipo de SUMA porporciona la manera de establecer contacto con el equipo de dirección y con el administrador de la página web. Relaciona también las personas que forman los consejos editorial, de redacción, y asesor.

En un segundo bloque tratamos de dar algunos servicios ajenos a la revista como tal.

En **Sociedades federadas** aparece la lista de todas las sociedades que actualmente se integran en la FESPM, con enlaceS, en su caso, a laS correspondienteS página web.

Noticias es el tablon de anuncios de SUMA, donde reflejaremos las convocatorias que recibamos de jornadas, cursos y otras actividades que puedan resultar de interés para los visitadores de nuestra página.

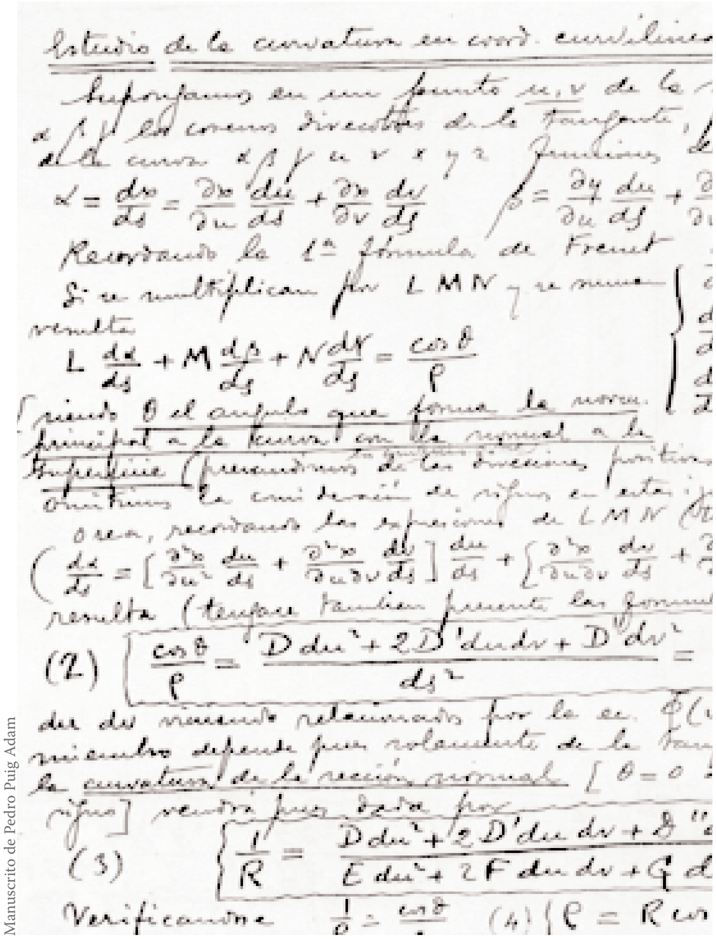
Enlaces Web ofrece accesos directos a diversos lugares de Internet relacionados con la enseñanza de las Matemáticas. Destacamos en esta sección los enlaces a otras revistas de educación matemática, tanto españolas como de otros países.

Se incluye en la página tambien un buscador interno y, naturalmente, a través de su logo, una conexión con la FESPM, editora de *SUMA*.

Esta es a grandes rasgos la estructura actual de la página, pero, es consustancial con Internet el dinamismo. Esperamos que, pasada la primera etapa de rodaje inicial, los servicios que desde ella podamos proporcionar aumenten poco a poco y que, con el paso del tiempo, esta estrucura se enriquezca con la aportación de todos.

Animamos a todos los lectores de la edición en papel de *SUMA* a acceder a la nueva edición digital y a hacernos llegar sus comentarios, sus sugerencias y sus críticas.

SUMA



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 9-13

Las matrices, la base 2 y la tecnología digital

En este artículo presentamos, mediante dos sencillos juegos de adivinación de números en unas tablas, cómo la base 2 y las matrices son fundamentales en la tecnología digital que nos rodea en el mundo civilizado que habitamos. Además aportamos la implementación en Mathematica del algoritmo que permite realizar esta acción.

In this paper we give, by using two simple guess games of numbers in two tables, how basis 2 and matrices are fundamental in digital technology that rounds us in the civilized world that we habit. We also give an implementation using Mathematica of the algorithm that allows to develop this action.

El mundo civilizado actual es conocido como el mundo de la tecnología digital. Todo se basa en aparatos digitales, aparatos sin los cuales no sabríamos vivir o al menos, nuestra vida no sería tan cómoda. Pero, ¿conoce la gente que el funcionamiento de todos ellos se basa en matemáticas muy sencillas? En concreto en dos aspectos: la expresión en base 2 y el producto de matrices. Del primero deriva precisamente el término digital; el segundo, junto con el primero, proporciona métodos que nos permiten confiar en la tecnología digital. Nuestro objetivo en este artículo es proponer una actividad muy sencilla que puede llevarse a cabo en el aula con los alumnos, proponiendo un enfoque distinto de esta parte del álgebra lineal, como Baena (1994) al usar la criptografía para introducir o hablar de los métodos matriciales, al tiempo que haga comprender la importancia de las matrices en la Teoría de Códigos y las grandes aplicaciones que esto tiene en nuestro entorno.

La teoría de la codificación trata del estudio de la transmisión de datos a través de diversos medios y de la detección y corrección de los errores producidos durante dicha transmisión.

Primeramente, proponemos un pequeño juego que permitirá la comprensión de la importancia de la expresión en base 2 en nuestro mundo. En concreto, el juego consiste en la adivinación de un número escogido de una tabla por otra persona a partir de algunas pistas que se piden a ésta. Seguidamente, modificaremos el juego para ver la importancia del producto de matrices dentro de esta tecnología. Más precisamente, cambiaremos la tabla y haremos la misma operación, es decir, pediremos a una persona que nos dé pistas sobre un número elegido de esta segunda tabla, con la salvedad de que en esta ocasión están permitidas las mentiras.

La teoría de la codificación trata del estudio de la transmisión de datos a través de diversos medios y de la detección y corrección de los errores producidos durante dicha transmisión.

Ilustraremos estos juegos con algunos ejemplos. Finalmente, dado que el uso del ordenador es un recurso muy utilizado ya en la enseñanza de las matemáticas y que algunos, como nos-

Juan Antonio López Ramos
Universidad de Almería. Almería.
Justo Peralta López
Universidad de Almería. Almería.

otros, creemos imprescindible a partir de un cierto nivel, presentamos una implementación en Mathematica de una máquina que actúe como adivinadora de números, haciendo comprender de este modo la posibilidad de trasladar las matemáticas al mundo real, en concreto, a aparatos o programas que funcionan en los mismos, al tiempo que estos métodos constituyen la base del mundo actual. El uso de Mathematica se ha propuesto como recurso para la experimentación con álgebra lineal (González, 1998), además de que ya existe numerosa bibliografía al respecto, como por ejemplo *Alemany y otros, 2002.*

La base 2

Consideremos la siguiente tabla de números del 1 al 31:

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Figura 1

Pedimos ahora a alguien que elija un número de los que aparecen en la tabla y, sin decirnos de qué número se trata, nos indique todas las columnas en las que se encuentra. Si ahora sumamos cada uno de los números que aparecen en la parte superior de las columnas indicadas, obtendremos el número elegido por el otro. ¿Magia? No, matemáticas, o más precisamente un simple cambio a base 2. La otra persona nos ha indicado el número mediante sus dígitos en base dos: uno para las columnas en las que se encontraba el número y cero para las que no. Así, para recuperar el número pensado basta multiplicar por cero o uno los números de la parte superior de las columnas y sumar los resultados. Si nos fijamos, la tabla no es ni más ni menos que una codificación de los números del 1 al 31, es decir, cada número aparece en aquellas columnas para las cuales, en su expresión en binario, el dígito correspondiente es un uno. Por ejemplo, el 3 expresado en base 2 es 11 y así, aparece en la primera y en la segunda; el 6 expresado en base 2 es 110, con lo que aparece en la segunda y en la tercera; las potencias de dos aparecerán obviamente en una sola columna, y así, con el resto de números.

Esta es la forma en la que todos los aparatos de la era digital, ordenadores, teléfonos móviles, televisión digital, etc. representan la información. Sonidos o imágenes, números o palabras son representados, transmitidos y recibidos como largas cadenas de ceros y unos. El término digital deriva precisamente del uso de los dígitos cero y uno. Incluso podríamos detallar aún más: 1 si por un circuito concreto pasa electricidad y 0 en caso contrario.

Por ejemplo, en el caso de los ordenadores, cada carácter (ya sea imprimible o no, como los saltos de línea) se representa por un número comprendido entre el 0 y el 255, conocido como código ASCII. Así, la oración *Las matemáticas son muy útiles*, tiene un equivalente en dicho código ASCII a la sucesión de números

76, 97, 115, 32, 109, 97, 116, 101, 109, 225, 116, 105, 99, 97, 115, 32, 115, 111, 110, 32, 109, 117, 121, 32, 250, 116, 105, 108, 101, 115

y que expresada en base 2 es el conjunto de números:

{01001100, 01100001, 01110011, 00100000, 011001101,
01100001, 01110100, 01100101, 01101101, 11100001,
01110100, 01101001, 01100011, 01100001, 01110011,
00100000, 01110011, 01101111, 01101110, 00100000,
01101101, 01110101, 01111001, 00100000, 11111010,
01110100, 01101001, 01101100, 01100101, 01110011}.

Si ahora unimos todos los elementos del conjunto obtenemos la cadena

010011000110000101110011001000000110011010110000101110100011001010110110111100001011101000110100101100011011000010111001100100000011100110110111101101110001000000110110101110101011110010010000011111010011101000110100101101100011001010111 0011

que es lo que en realidad *entiende* el aparato digital en cuestión. Pero, ¿qué pasa si cambiamos un cero por un uno o viceversa?

Matrices y tecnología digital

Este intercambio de unos por ceros o viceversa puede deberse a una interferencia en la comunicación, a una caída de tensión, etc. La gran ventaja de establecer la comunicación en forma digital es que se han desarrollado métodos matemáticos que permiten detectar y corregir cuándo, al transmitir la información, se cambian ceros por unos o viceversa, es decir, se detectan y corrigen los errores.

Hagamos ahora una modificación en nuestro juego y veamos que en realidad esto es así.

El proceso de codificación de un número natural entre 0 y 15 de forma que podamos detectar errores dobles o mentiras dobles, y corregir errores simples o mentiras simples consiste en convertir dicho número en un vector binario de longitud 8. Para el alumno consiste en colocar un 1 en la posición i-ésima del vector si el número escogido se encuentra en la columna número *i* o un cero en caso contrario. La tabla utilizada es la siguiente:

8	4	2	1	1	1	1	2
9	5	3	3	2	2	3	3
10	6	6	5	4	5	4	4
10	7	7	7	7	6	6	5
12	12	10	9	9	8	8	8
13	13	11	11	10	11	10	9
14	14	14	13	12	12	13	14
15	15	15	15	15	15	15	15

Figura 2

Por ejemplo, la codificación del número 13 será el vector 11010010 ya que aparece en las columnas 1, 2, 4 y 7, mientras que la codificación del número 15 será 11111111 ya que aparece en todas las columnas. Obsérvese que el resultado de codificar cualquier entero entre 0 y 15 es una palabra código. Nuestro objetivo ahora es determinar cuándo uno o dos bits de dicha palabra cambian de 0 a 1 o de 1 a 0. Esto se corresponde en el juego a cuando el alumno ha mentido al indicar en qué columnas aparece el número en el cual previamente ha pensado.

Como podemos observar, esta tabla contiene sólo los números del 1 al 15, pero ello se debe únicamente al intento de evitar usar una tabla demasiado grande, y aún así, observamos que la posición que ocupan los números es muy distinta y que existen más columnas, pero si lo que queremos ahora es detectar y corregir los errores, hemos de proporcionar al receptor algo más de información denominada información de redundancia, es decir, la codificación de la información se ha llevado a cabo de forma distinta, aunque se sigue usando la base 2 (ceros y unos) tanto para la información base, como para la redundancia. El juego ahora consiste en lo mismo: pedimos a una segunda persona que elija un número de la tabla y le pedimos la misma información relativa a las columnas en las que aparece el número. Sin embargo ahora permitimos el hecho de que nos mienta (si quiere) como mucho dos veces, es decir, puede decirnos que el número se encuentra en una columna cuando esto no es así o que no se encuentra en una columna cuando en realidad el número sí que está en esa columna. Para llevar a cabo nuestra experiencia hemos considerado un código basado en un código Hamming (Hamming, 1950) capaz de detectar dos errores y corregir uno cometido durante la transmisión en un canal con ruido. El mecanismo de corrección de errores consiste en multiplicar un vector binario por una matriz *H*. En nuestro juego, utilizaremos la matriz siguiente

0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 3

Aunque no es objeto de nuestra experiencia con los alumnos construir la matriz *H*, explicaremos brevemente su obtención y su relación con la nueva tabla de números considerada: un código Hamming binario, capaz de corregir un solo error, con longitud de palabra 2*r*-1, tiene asociada una matriz *D*, conocida como matriz de paridad o matriz de decodificación, formada por todas las columnas binarias no nulas posibles. Ahora bien, podemos modificar esta matriz *D*, con r filas y 2*r*-1 columnas, obteniendo una nueva matriz de paridad, de forma que nuestro código sea capaz de corregir un error y detectar dos, tan sólo añadiendo una fila con 2*r*-1 unos y una columna de ceros, excepto el último elemento que es un uno. En nuestro caso hemos considerado la matriz *D* con *r*=3 y la hemos modificado del modo anterior. La segunda parte es saber cómo codificar la información, es decir, construir la tabla de la figura 2. Para ello hemos calculado lo que se conoce como matriz generadora del código, es decir, una matriz *G* tal que el producto de *G* por la matriz transpuesta de nuestra matriz H sea 0. Entonces codificamos los bits de información dados por el vector *u*=(*ur*,..., *u1*), que es la representación binaria de los números, en nuestro caso, del 1 al 15, haciendo *uG*, obteniendo así un vector binario de longitud 2*r*, que es lo que se representa en la tabla de la figura 2. Por ejemplo, el número 14 aparece en las tres primeras columnas de la tabla, ya que su vector de información en binario es *u*=(1, 1, 1, 0) y aparece en la última columna puesto que al hacer *uG*, el resultado es el vector (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) (observemos que las cuatro primeras posiciones de este vector se corresponden con *u*, es decir, la información base y las otras cuatro constituyen la información de redundancia necesaria para nuestros fines).

Para un mayor detalle en el estudio de los códigos de Hamming podemos consultar, por ejemplo, el capítulo 8 del libro de Hill (1997).

La matriz de paridad o decodificación *H* la podemos definir con Mathematica mediante la siguiente asignación:

```
In[1]:=H={{0,0,0,1,1,1,1,0},{0,1,1,0,0,1,1,0},{1,0,1,0,1,0,1,0},{1,
1,1,1,1,1,1,1}};
```

El proceso de multiplicar un vector binario o palabra del código por la transpuesta de la matriz de paridad *H* es lo que se llama en Teoría de Códigos cálculo del síndrome, el cual será, en nuestro caso, un vector fila de longitud 4. Para calcular dicho síndrome definimos la siguiente función con Mathematica:

In[2]:=Sindrome[a_,H_]:=Mod[a.Transpose[H],2];

Una vez calculado el síndrome, la decodificación se realiza como sigue:

1. Si el síndrome es 0, es decir, la columna cero, entonces no se ha producido ningún error. Lo cual nos indica en el juego que el alumno no ha mentido.

2. Si el síndrome es distinto de 0, quiere decir que se ha producido algún error o que el alumno ha mentido. Entonces podemos distinguir varios casos.

   2.1. Si la última posición del síndrome es 0, entonces se ha producido más de un error, en concreto, un número par de errores (probablemente 2), y el alumno ha mentido más de una vez.

   2.2. Si la última posición del síndrome es 1, entonces se ha producido sólo un error y el alumno ha mentido sólo una vez. Si los tres primeros bits del vector síndrome son ceros, entonces el error se ha producido en la última posición de la palabra código y el alumno ha mentido en la última columna. Y si los tres primeros bits son distintos de cero, entonces estos nos indica en binario o base dos en qué posición de la palabra se ha producido el error o en qué columna ha mentido el alumno.

Una vez que sabemos con exactitud en qué posición se ha cometido el error o en qué columna ha mentido el alumno podemos adivinar el número en que había pensado.

Se llama cálculo del síndrome al proceso de multiplicar un vector binario o palabra del código por la transpuesta de la matriz de paridad H.

Empieza el Juego

Supongamos que el alumno ha pensado en el número 15 y no ha mentido al indicar en qué columnas aparece. En este caso la codificación será 11111111 y se traducirá con la siguiente asignación en Mathematica:
In[3]:= palabra={1,1,1,1,1,1,1,1};

Ahora calculamos el síndrome:

In[4]:= Sindrome[palabra,H]

Out[4]:= {0,0,0,0}

De donde tenemos, según lo anterior, que el alumno no ha mentido y por tanto, la decodificación es 15, que es la información que proporcionan los cuatro primeros bits de la palabra.

Si el alumno miente en la última columna la codificación de 15 sería 11111110. Veamos cómo se realiza la codificación.

In[5]:=palabra={1,1,1,1,1,1,1,0};

In[6]:=Sindrome[palabra,H]

Out[6]:= {0,0,0,1}

Como la última posición del síndrome es 1, esto quiere decir que se ha producido un error y como además, las tres primeras son ceros, tenemos que dicho error se ha producido en la última columna, es decir, la decodificación sería 11111111, o lo que es lo mismo, de nuevo 15.

Si el alumno miente en la tercera columna, 15 quedaría codificado por 11011111. Veamos qué nos indica la decodificación:

In[7]:=palabra={1,1,0,1,1,1,1,1};

In[8]:=Sindrome[palabra,H]

Out[8]:= {0,1,1,1}

Como la última posición del síndrome es 1, esto quiere decir que se ha producido un error. Además, las tres primeras entradas del vector nos indican la posición en la que se ha producido: la 011, en binario, 3. Por tanto, la decodificación sería 11111111, con lo que, considerando una vez más los cuatro primeros bits, los de información, tenemos de nuevo 15.

Si el alumno miente en la tercera y última columna entonces 15 será codificado por 11011110. Veamos a continuación su decodificación.

In[9]:=palabra={1,1,0,1,1,1,1,0};

In[10]:=Sindrome[palabra,H]

Out[10]:= {0,1,1,0}

Como la última posición del síndrome es 0, esto quiere decir que el alumno ha mentido más de una vez, aunque ahora no sabemos dónde.

Veamos qué sucede si el alumno miente 3 veces y codificamos 15 por 10101011.

In[11]:=palabra={1,0,1,0,1,0,1,1};

In[12]:=Sindrome[palabra,H]

Out[12]:= {0,0,0,1}

Lo que nos indica que se ha producido un error en la última columna y así la decodificación sería 10101010, o lo que es lo mismo, 10 (dado por 1010). En este caso hemos fallado, pero ello se debe a que, como hemos indicado anteriormente, el código es capaz de detectar, a lo sumo, dos errores.

La función en Mathematica que nos permite realizar el proceso de decodificación o adivinación completo viene dado por la función Decodificar:

Ahora, si usamos esta función para probar de nuevo con los ejemplos anteriores obtenemos:

```
Mathematica 4.1 - [funcion.nb]
File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help
funcion.nb

In[13]:= Decodificar[a_, H_] := Module[{correcto, sindro, trozo,
          error, cadena}, trozo = Take[a, 4];
          correcto = Table[0, {4}]; sindro = Sindrome[a, H];
          If[sindro == correcto,
           cadena = " Eres honrado... El numero es el:  ";
            Return[StringJoin[cadena, ToString[
               FromDigits[trozo, 2]]]]]; If[sindro[[4]] == 0,
           Return[" Has mentido más de una vez"]];
          error = FromDigits[Take[sindro, 3], 2];
          If[error == 0, cadena =
            "Me has mentido en la última columna",
           cadena = StringJoin["Me has mentido en la columna",
             ToString[error]]]; cadena = StringJoin[cadena,
            ". El número que has pensado es... "];
          If[error > 0 && error < 5, trozo[[error]] =
            Mod[trozo[[error]] + 1, 2]];
          cadena = StringJoin[cadena, ToString[
             FromDigits[trozo, 2]]]; Return[cadena]]
```

```
Mathematica 4.1 - [ejemplo.nb]
File Edit Cell Format Input Kernel Find Window Help
ejemplo.nb

In[14]:= palabra = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1};

In[15]:= Decodificar[palabra, H]

Out[15]=  Eres honrado... El numero es el:  15

In[16]:= palabra = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0};

In[17]:= Decodificar[palabra, H]

Out[17]= Me has mentido en la última columna. El número que has pensado es... 15

In[18]:= palabra = {1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0}

Out[18]= {1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0}

In[19]:= Decodificar[palabra, H]

Out[19]=  Has mentido más de una vez

In[20]:= palabra = {1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1}

Out[20]= {1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1}

In[21]:= Decodificar[palabra, H]

Out[21]= Me has mentido en la última columna. El número que has pensado es... 10
```

Con esta experiencia podemos tratar de concienciar a los alumnos de que cuando vemos la televisión digital, escuchamos un CD, visionamos un DVD, utilizamos un ordenador, un móvil o un cajero automático hacemos uso, sin darnos cuenta, de las matemáticas, concretamente de las matrices y la base 2.

Debido a este tipo de métodos, apreciamos que la reproducción de un CD o un DVD es perfecta, o percibimos que existe una gran diferencia de calidad entre la televisión analógica y la televisión digital y todo ello se debe a la posibilidad de arreglar los datos erróneos, ya sean debidos éstos a interferencias o a defectos del soporte que estemos utilizando (un CD o un DVD), por ejemplo, un arañazo.

De este modo, una vez más, gracias a las matemáticas obtenemos una mejor calidad de vida a través de la tecnología digital.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAENA RUÍZ, J. (1994): "Códigos secretos: otra forma de aplicar las matrices en Bachillerato (16-18)", *Suma*, n.º 14-15, 40-42.

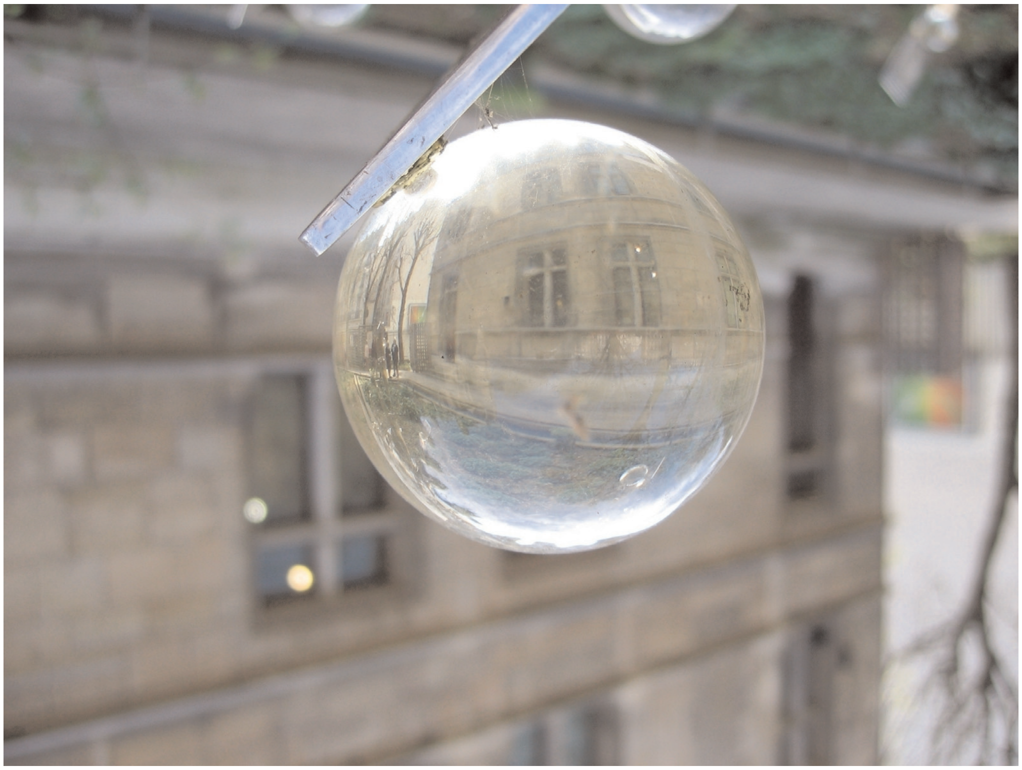
GONZÁLEZ HENRÍQUEZ, J.J. (1998): "Experimentos en álgebra lineal con Mathematica", *Suma*, n.º 27, 97-102.

HAMMING, R.W. (1950): *Error detecting and error correcting codes*, Bell. System Tech. J. 29, 147-160.

HILL, R. (1997): *A first course in Coding Theory*, Oxford University Press, ISBN 0-19-853803-0.

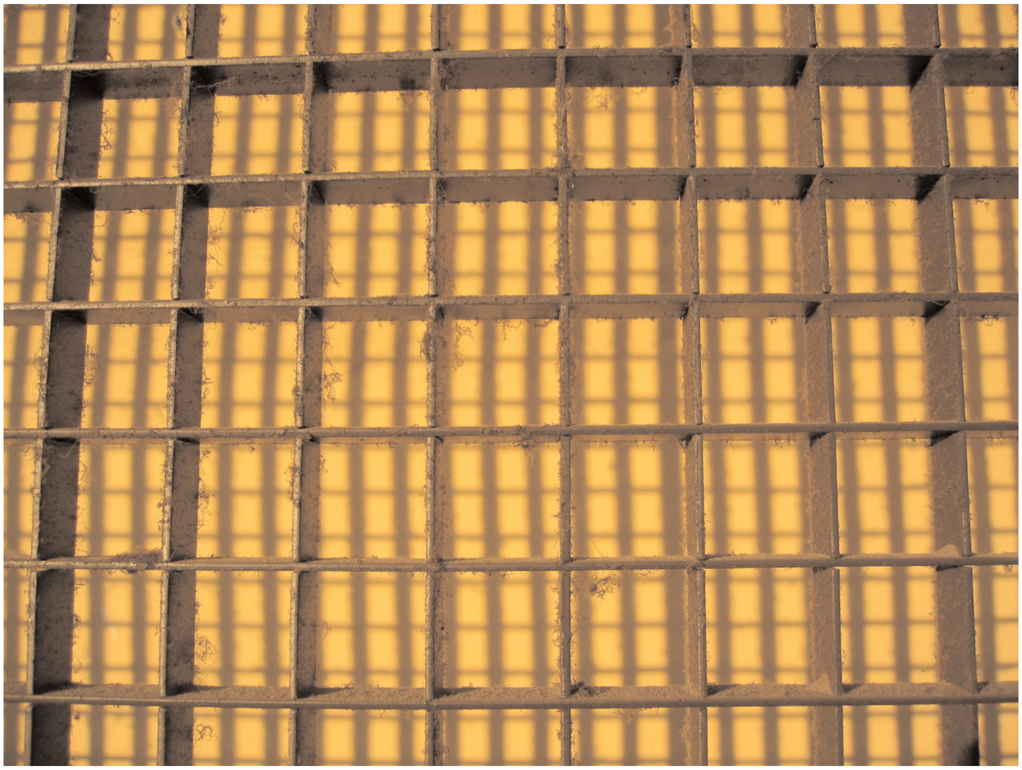
MACWILLIAMS, F.J. y SLOANE, N.J.A. (1993): *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland Mathematical Library 16, North-Holland, ISBN 0-444-85193-3.

ALEMANY MARTÍNEZ E., BALAGUER BESER, A., MARÍN MOLINA, J. (2002): *Prácticas de Álgebra con Mathematica*, Universidad Politécnica de Valencia, ISBN 84-9705-313-3.



Cabeza abajo Foto: CTB

Cuadrícula. Foto: CTB



SUMA 51
Febrero 2006, pp. 15-29

Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático

Un sencillo juego de fichas es el recurso que proponemos para que los alumnos utilicen métodos, técnicas y herramientas propios del razonamiento matemático inductivo y deductivo. En este artículo se comentan algunas vías para llegar a formular una hipótesis, y también se comentan distintas formas de abordar la demostración de dicha hipótesis; además, se incluyen consideraciones didácticas para que los propios alumnos construyan resultados matemáticos.

We suggest a simple board game with counters as a didactic resource so that pupils can get used to methods, techniques and tools of inductive and deductive mathematical thinking. In this paper we comment different methods to set a hypothesis and some ways to deal with the proof of this hypothesis; moreover we provide several didactical outlines, so that pupils can build their own mathematical results.

Los responsables de la Educación Matemática marcan como objetivo principal la formación de ciudadanos bien informados; es decir, ciudadanos que sean capaces de participar en decisiones políticas, económicas y sociales que implican cuestiones tecnológicas tan complejas como la protección del medio ambiente, la energía nuclear, los gastos militares, la conquista del espacio, etc.

Para alcanzar este objetivo es preciso, en primer lugar, que

> los niños se convenzan de que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos sino que, por el contrario, tienen sentido, son lógicas y son divertidas (NCTM, 1992, pp. 28).

En segundo lugar, como señala el Informe Pisa 2003, hay que lograr que los estudiantes sean competentes en Matemáticas, lo que significa potenciar su capacidad de analizar, razonar, comunicar eficazmente las ideas, y formular y resolver problemas en contextos variados.

Oigo, y olvido.
Veo, y recuerdo.
Hago, y entiendo.
Refrán popular

Este artículo ofrece un medio adecuado para avanzar en este camino, para que los alumnos puedan realizar tareas fundamentales en el trabajo matemático como son la recopilación de evidencias, la formulación de hipótesis y la elaboración de argumentos que apoyen las hipótesis formuladas. Nuestra propuesta es la de ofrecer a los estudiantes un juego, o actividad no identificada con resultados matemáticos escolares, para que hagan matemáticas sin inhibiciones:

> admitir que se pueden recorrer caminos equivocados o inconvenientes, estar dispuestos para rectificar o reformular las respuestas, y constatar, en suma, que las matemáticas no es una ciencia ya terminada en la que solamente hay cabida para la verdad o la falsedad (Gairín, 2001, pp. 59).

Desde estas consideraciones afrontamos el trabajo de analizar un juego de estrategia en el que se profundiza en los tres niveles de trabajo que se pueden abordar teniendo en cuenta las exigencias cognitivas de la tarea: resolver casos particulares, generalizar y demostrar. Su objetivo es que el profesor pueda reflexionar acerca de la educación del razonamiento matemático y de las peculiaridades de la comunicación de las ideas matemáticas. Este trabajo, persigue ofrecer al profesorado un desarrollo completo de una actividad de aula, en la que interesa mucho más el grado de formación del alumno que la relevancia de los resultados matemáticos alcanzados.

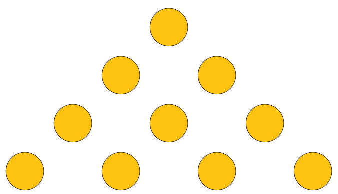
José María Gairín Sallán
Universidad de Zaragoza. Zaragoza
José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza. Zaragoza

Este artículo se estructura en tres partes, que se corresponden con los tres niveles de trabajo anteriormente establecidos, en cada una de las cuales el resolutor debe poner en juego conocimientos y destrezas de naturaleza bien diferenciada. De este modo, quedan recogidas distintas alternativas para que cada alumno pueda desarrollar, de acuerdo con sus competencias, tareas de alguno de los niveles y para que, con la ayuda del profesor, pueda avanzar hacia niveles de mayor dificultad.

Además, y por considerarla una actividad de aula, hemos querido reflejar tanto el proceso de búsqueda de la solución como los recursos utilizadas para comunicar dicha solución; en este sentido hemos querido dejar constancia del modo en que deberíamos estructurar el proceso de resolución del juego: delimitar con precisión el alcance de la tarea en cada uno de los tres niveles, los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para encontrar la solución, y las características de los sistemas de representación que hemos utilizado para comunicar la respuesta a las distintas tareas. Finalmente, y desde la consideración de que los problemas admiten soluciones diferentes, hemos introducido algunas sugerencias sobre otras posibilidades de dar respuestas a las tareas de cada uno de los niveles. Con ello queremos dejar constancia de que las respuestas que ofrecemos no son las únicas ni, posiblemente, las mejores; pero que para encontrar tales respuestas hemos debido utilizar conceptos, herramientas y técnicas que, a buen seguro, serán de naturaleza diferente a las utilizadas en otros procesos de resolución del juego.

Todo comienza con un pequeño juego o divertimento que encontramos en libros de matemática recreativa que reformulamos de este modo:

Con 10 fichas circulares iguales hemos formado el triángulo de la figura. ¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede invertido?



Nivel 1. Resolver un caso particular

El enunciado contiene un reto, una situación problemática que hay que abordar. El trabajo del alumno es el de dar respuesta a la pregunta que se ha planteado y en los términos en que se formuló. Y este trabajo exige, cuando menos, tres tareas principales: precisar el enunciado, encontrar la solución y formular la respuesta.

Precisar el enunciado

Antes de resolver el juego consideramos oportuno introducir un par de matizaciones sobre el término *invertir el triángulo* que aparece en el enunciado del juego:

1. Decir que *el triángulo quede invertido* es equivalente a decir que *pasa de tener un vértice superior a tener un vértice inferior*.

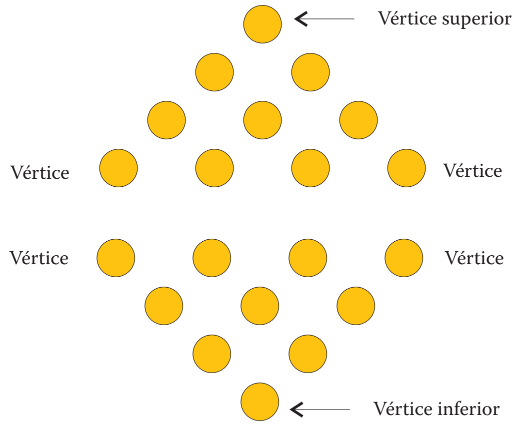


Figura 1. Triángulos de 10 fichas (4 filas) y vértices del triángulo

2. Añadimos una condición de simetría[1]: el vértice inferior estará sobre la recta *r* perpendicular a la base del triángulo que pasa por el vértice superior del triángulo original.

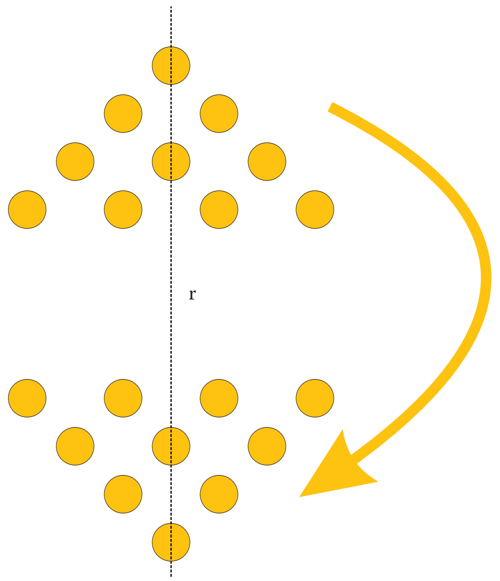


Figura 2. Invertir el triángulo con la condición de simetría

Encontrar la solución

En un primer momento podríamos intentar mover las fichas al azar, ir encontrando diversas formas de invertir este triángulo de forma adecuada y elegir la que implique menor número de movimientos.

Pronto comprobamos que es necesario sistematizar el problema de alguna manera; es decir, encontrar algún método para llevar el control de los movimientos, comparar todas las posibles formas de mover las fichas y elegir la que exige el menor número de movimientos.

Para encontrar algún método que nos permita *rastrear* todas las soluciones posibles de invertir el triángulo, necesitaremos introducir algún tipo de notación o lenguaje que nos permita expresarnos de una manera eficiente. Con esta finalidad, nos ha parecido interesante numerar las filas del triángulo: llamamos fila 1 a la fila del vértice superior; fila 2 a la fila que está debajo de la fila 1 y que tiene 2 fichas; fila 3 a la que tiene 3 fichas y fila 4 a la que tiene 4 fichas. En el caso en que, moviendo las fichas, formemos una fila debajo de la fila 4, llamaremos fila 5 a esta nueva fila creada y así sucesivamente.

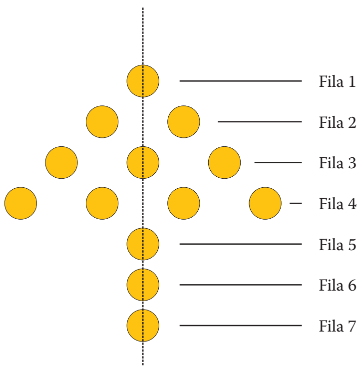
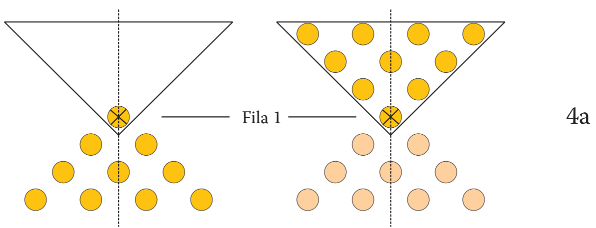


Figura 3. Numeración de las filas de un triángulo

Por la condición de simetría que hemos impuesto, observamos que la posición del vértice inferior del triángulo invertido resulta clave para resolver el juego. En efecto, fijada la posición del vértice inferior, queda determinado el triángulo invertido final (ver figuras 4a, 4b, 4c y 4d) cuyos *espacios vacíos* indican el número de movimientos a realizar y las fichas que quedan fuera de él serán las fichas que tendremos que mover para ocupar esos *espacios*. Por tanto, la forma de resolver el problema se traduce en dar respuesta a la pregunta: ¿en qué fila estará la ficha que corresponda al vértice inferior del triángulo invertido?



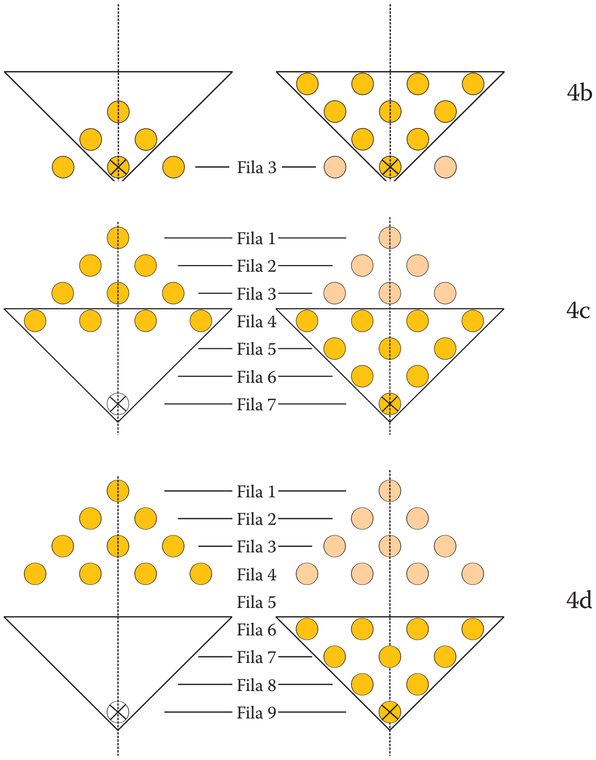


Figura 4. Inversión del triángulo con el vértice inferior situado, respectivamente, en la fila 1, en la fila 3, en la fila 7 y en la fila 9

Los ejemplos de la figura 4 reafirman nuestra idea de que la posición del vértice inferior del triángulo permite resolver el problema porque determina totalmente el número de movimientos. Así, si el vértice inferior estuviese sobre la fila 9 (figura 4d) tendríamos que mover todas las fichas; y si, por ejemplo el vértice lo situásemos en la fila 1 habríamos de mover todas las fichas menos la situada en la fila 1 (figura 4a). Además, una lectura detallada de los casos presentados en la figura 4 nos permite enunciar tres observaciones o ideas importantes para reducir el número de formas de invertir el triángulo:

- Comprobamos que el vértice debe situarse en una fila impar porque la condición de simetría con respecto a la recta *r* obliga a mover todas las fichas si el vértice está situado en una fila par (ver figura 5). En consecuencia, el vértice inferior se encontrará en las filas 1, 3, 5, 7, 9...

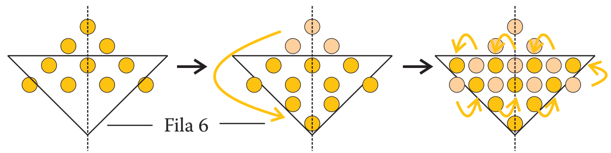


Figura 5. Inversión del triángulo con el vértice inferior situado en la fila 6

• El ejemplo de la figura 4d del párrafo anterior nos indica que podemos descartar los de la fila 9 en adelante para invertir con mínimos movimientos.

• También comprobamos que el vértice inferior de los triángulos invertidos tendrá que estar en una fila mayor que 4 (si estuviese por encima de la fila 4, podemos encontrar un modo de mover las fichas más *económico* fijando el vértice inferior dos filas debajo de la fila donde lo queríamos poner, como se pone de manifiesto en las figuras 4a y 4b).

Teniendo en cuenta estas observaciones, para resolver el problema nos quedan dos opciones por analizar: fila 5 o fila 7. Y se comprueba que la mejor posición del vértice inferior es en la fila 5, siendo 3 el número de movimientos.

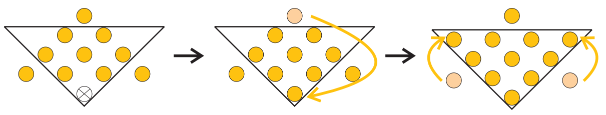


Figura 6. Esquema de la resolución del problema en un triángulo de 4 filas

Formular la respuesta
El alumno se debe enfrentar a una respuesta poco habitual como es la de minimizar el número de movimientos. Posiblemente haya alumnos que den como solución la primera de las formas en que han invertido el triángulo, lo que ofrece una oportunidad para que el profesor introduzca en el aula la reflexión sobre el momento en que se finaliza un problema, alertando sobre la necesidad de volver a leer el enunciado y de revisar la solución que se ofrece.

Y también es un momento oportuno para que los alumnos reflexionen sobre las particularidades de la comunicación en matemáticas. En efecto, la solución del juego comprende el número de fichas que hay que mover y la forma de hacerlo. El número de fichas a mover se hace con la utilización del sistema simbólico habitual para los números naturales; pero para la descripción de los movimientos no hay un sistema de representación de uso común, por lo que corresponde al resolutor crear un lenguaje de comunicación (que será de tipo gráfico en la mayoría de los casos, aunque también aparecerán notaciones de tipo simbólico). Es más, esta representación debe permitir al alumno hacer un estudio sistemático de la solución del problema: comprobar que se cumplen las reglas, controlar si hay posibilidades no contempladas, buscar otras posibles soluciones, etc.

Finalmente hay que utilizar algún sistema de representación para formular la respuesta en términos precisos y concisos. Ofrecemos algunas posibles maneras de dar la solución:

• Mediante representaciones verbales, que describen la situación utilizando el lenguaje materno y que resulta más o menos compleja de formular y de interpretar:

> Se mueven 3 fichas, que corresponden a los vértices del triángulo, y hay que desplazarlas una a la fila 5 y las otras dos a los extremos de la fila 2.

• Mediante representaciones gráficas: es un sistema que refleja las manipulaciones con las fichas, tal y como reflejamos en la figura 6.

• Mediante representaciones simbólicas, que ofrecen un amplio abanico de posibilidades de acuerdo con las capacidades y conocimientos del resolutor. A modo de ejemplo podemos citar el siguiente:

> Numerar las posiciones con dos dígitos (fila y columna): la ficha de la posición (1,4) pasa a la posición (5,4), la de la posición (4,1) a la posición (2,1) y la de la posición (4,7) a la posición (2,7).

Nivel 2. Generalizar

El enunciado del problema se formula en términos similares a los siguientes:

Supongamos que tenemos ahora un triángulo de fichas con un número cualquiera, n, de filas, ¿cómo conocer el mínimo número de fichas necesario para invertir el triángulo y la forma en que se realizan los movimientos?

Precisar el enunciado
La actividad de generalización exige utilizar el razonamiento inductivo que implica tareas como formular conjeturas, someter dichas conjeturas a prueba, formular nuevas conjeturas y enunciar la hipótesis. Y ello conlleva unas técnicas que favorecen el éxito y que también conviene que los alumnos conozcan: estudio sistemático de casos particulares, revisión de los resultados obtenidos, resolución de nuevos casos particulares para constatar las conjeturas, delimitar las series de datos que se quieren relacionar, descomponer los datos en dos o más series, etc.

Encontrar la solución
La solución al problema conlleva la formulación de una hipótesis en la que se relacione las características de un triángulo cualquiera y el número de fichas que hay que mover, así como las posiciones que deben ocupar las fichas que se mueven. Para ello, hay que formular alguna conjetura y someterla a prueba:

a. Formular una conjetura

Para lograr este objetivo parcial hay que decidir, en primer lugar, qué característica del triángulo vamos a considerar; nuestra propuesta es la de considerar el número de filas (aun cuando también se podría trabajar con el número total de fichas del triángulo o con otra característica).

En segundo lugar, hay que disponer de algunos datos que relacionen la característica número de filas con el número de fichas que se mueven o número de movimientos. En este sentido suele ser útil resolver casos más sencillos, con 2 y 3 filas, y ordenar los datos en una tabla como la siguiente:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

Con estas informaciones surge una sencilla relación numérica que formulamos como conjetura: el número de movimientos necesarios para invertir un triángulo cualquiera es 1 unidad menor que el número de filas.

b. Someter a prueba la conjetura

Una vez formulada una conjetura es buen momento para animar a los alumnos a comprobar si *funciona* con nuevos casos, con otros triángulos distintos de los ya resueltos. Además, conviene que los alumnos actúen de forma sistemática, por lo que se aconseja resolver el triángulo de 5 filas, lo que significa indicar el número mínimo de fichas que hay que mover, así como la posición inicial de estas fichas y su posición final. Y también conviene que los alumnos trasladen al nuevo problema las técnicas y conocimientos adquiridos al resolver los casos anteriores.

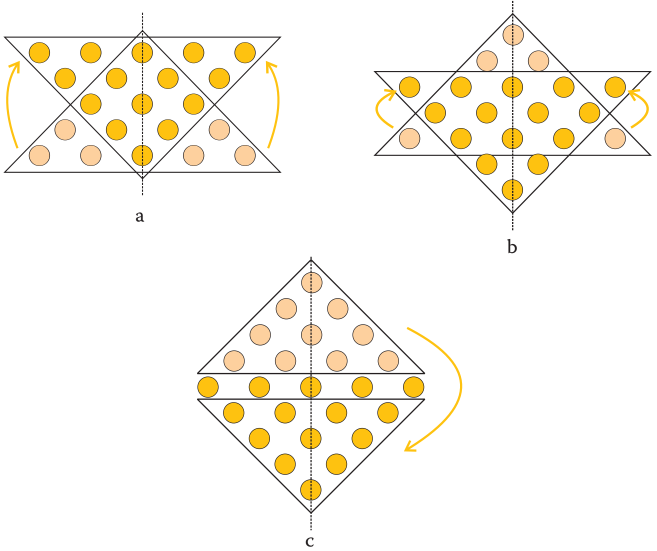


Figura 7. Esquema de los modos de invertir un triángulo de fichas de 5 filas

Con estas consideraciones, y aplicando razonamientos análogos a los utilizados en el triángulo de 4 filas, sabemos que el vértice inferior tendrá que encontrarse en las filas 5, 7 o 9. Las figuras 7a, 7b y 7c indican, respectivamente, que hay que mover 6, 5 ó 10 fichas; por tanto, la respuesta es colocar el vértice en la fila 7 y hacer 5 movimientos.

Trasladamos este resultado a la tabla

Número de filas	2	3	4	5
Número de movimientos	1	2	3	5

Con estos resultados resulta evidente que nuestra conjetura no se cumple para el triángulo de 5 filas y en consecuencia hay que seguir buscando nuevas conjeturas.

c. Obtención de más resultados y formulación de una nueva conjetura

Hay que proseguir con el estudio de triángulos con mayor número de filas. Y en este nuevo empeño cabe pensar que el trabajo con representaciones gráficas presentará dificultades técnicas que desaconsejan utilizarlas.

Otra forma de expresar la solución es mediante representaciones orales que tampoco son aconsejables porque se van haciendo más farragosas al aumentar el número de filas.

Finalmente, y ante la necesidad de estudiar nuevos casos, interesa *inventar* un sistema simbólico que nos permita formular la respuesta de manera ágil y precisa. En este sentido, y sin querer transmitir la idea de que la simbolización es única, a partir de la figura 7 establecemos que el proceso de invertir el triángulo consiste en actuar del siguiente modo:

1. Desplazar un triángulo de fichas de la parte superior del triángulo original de k filas (que denominamos triángulo superior) y dos triángulos de fichas iguales y simétricos respecto a r de j filas cada uno (a los que llamaremos triángulos laterales)[2]. Se admiten los triángulos de 0 filas.

2. El número de fichas que componen el triángulo de n filas lo simbolizamos con T_n , por similitud con los conocidos números triangulares[3].

3. Para expresar el número de movimientos que invierten el triángulo utilizaremos la expresión T_k+2T_j , en la que T_k indica el triángulo superior que hay que desplazar a la parte inferior y 2 T_j indica los dos triángulos laterales que hay que desplazar[4].

4. Como se observa en la figura 8, hay tres variables que intervienen en esta modelización de la inversión de un triángulo: n el número de filas del triángulo original o el número de

fichas de la fila inferior, k el número de filas del triángulo superior y j el número de filas de un triángulo lateral. Además, se constata que estas variables están relacionadas por la igualdad: $2j + (k+1) = n$.

De esta forma conocido el número de n o tamaño del triángulo a invertir, para cada valor de k sabemos el tamaño de cada uno de los triángulos laterales: $j = (n - k - 1) / 2$.

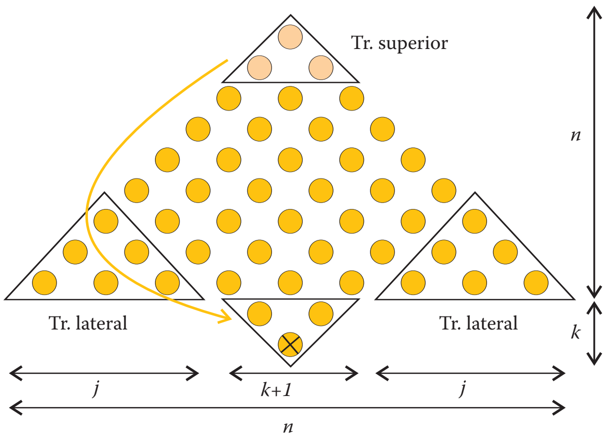


Figura 8. Inversión de un triángulo de 9 filas de forma que el vértice inferior esté en la fila 11. Relación entre las variables n, k y j

Esta técnica de modelizar el problema en términos matemáticos nos permite estudiar el juego a partir de relaciones numéricas; de este modo, ya no es necesario el soporte físico, la manipulación de fichas o la representación gráfica de las mismas, que nos ha servido para resolver casos particulares sencillos así como para construir un modelo matemático sustentado en representaciones simbólicas.

Así, para resolver el caso del triángulo de 5 filas analizamos las 3 posibles formas de invertir el triángulo:

a. El vértice inferior se coloca en la fila 5:

Hay que mover (ver figura 7a) un triángulo superior de 0 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 0 - 1)/2 = 2$ filas; por lo que el número de movimientos será: $T_0 + 2\ T_2 = 6$ movimientos.

b. El vértice inferior se coloca en la fila 7:

Hay que mover (ver figura 7b) un triángulo superior de 2 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 2 - 1)/2 = 1$ fila; por lo que el número de movimientos será: $T_2 + 2\ T_1 = 5$ movimientos.

c. El vértice inferior se coloca en la fila 9:

Hay que mover (ver figura 7c) un triángulo superior de 4 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 4 - 1)/2 = 0$ filas; por lo que el número de movimientos será: $T_4 + 2\ T_0 = 10$ movimientos. La ventaja de este sistema simbólico es que facilita la resolución de nuevos casos que aportarán datos para la formulación de una nueva conjetura.

Así, para resolver un triángulo de 6 filas procedemos del siguiente modo:

• El vértice inferior se puede encontrar en las filas 7, 9 y 11. Luego el triángulo superior que tendremos que mover será de k = 1, 3 y 5 filas respectivamente. Calculamos de esta forma que el número de movimientos, en cada uno de los casos, serán:

$$T_1 + 2\ T_2 = 7$$
$$T_3 + 2\ T_1 = 8$$
$$T_5 + 2\ T_0 = 15$$

• Por tanto, se consigue invertir el triángulo con 7 movimientos y se debe mover un triángulo superior de 1 fila y dos triángulos laterales de 2 filas.

De forma similar podemos encontrar la solución del triángulo de 7 filas:

• El vértice inferior se puede encontrar en las filas 7, 9, 11 y 13. Luego el triángulo superior que tendremos que mover será de k = 0, 2, 4 y 6 filas, respectivamente. Con lo que obtenemos los siguientes resultados:

$$T_0 + 2\ T_3 = 12$$
$$T_2 + 2\ T_2 = 9$$
$$T_4 + 2\ T_1 = 12$$
$$T_6 + 2\ T_0 = 21$$

• Hacen falta 9 movimientos, que vienen descritos en la formulación $T_2 + 2\ T_2 = 9$

Una vez resueltos estos tres casos particulares nos replanteamos la tarea inicial, la de formular una solución general para un triángulo de n filas, para lo que procedemos a recoger los datos disponibles en una tabla:

n	2	3	4	5	6	7
mov	1	2	3	5	7	9

A la vista de estos datos, desechamos definitivamente la conjetura inicial (el número de movimientos es una unidad inferior al número de filas), pues no se cumple a partir del triángulo de 5 filas. A su vez, se pueden formular nuevas conjeturas, como la siguiente: el número de movimientos necesario para invertir un triángulo se corresponde con los números impares consecutivos (con excepción del caso $n = 3$).

d. Someter a prueba la nueva conjetura

Para comprobar si es válida esta nueva conjetura, obtenemos el número de movimientos necesarios para invertir el triángulo de 8 filas mediante el mismo sistema simbólico que planteamos en el apartado anterior. De esta forma, para invertir el triángulo de 8 filas, el vértice inferior puede estar en la filas 9, 11, 13 ó 15. Por lo tanto k = 1, 3, 5 ó 7, respectivamente. Con lo que obtenemos:

$$T_1 + 2\ T_3 = 13$$
$$T_3 + 2\ T_2 = 12$$
$$T_5 + 2\ T_1 = 17$$
$$T_7 + 2\ T_0 = 28$$

Luego el número de movimientos mínimo para invertir un triángulo de 8 filas es 12 y los movimientos realizados son los correspondientes a la expresión $T_3 + 2\ T_2$. Pero este resultado invalida *la conjetura de los impares* expresada en el apartado anterior y nos obliga a seguir obteniendo nuevos datos para conseguir formular otra conjetura.

e. Obtención de más resultados y nueva búsqueda de regularidades

Con el método anteriormente establecido y que se revela muy útil para la resolución de la inversión de triángulos con relativamente *pocas* filas[5], construimos esta tabla más extensa:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mov	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35

Es evidente que el número de movimientos es unas veces impar y otras veces par, por lo que desechamos la conjetura de los impares y formulamos nuevas conjeturas. En este sentido conviene señalar a los alumnos que la conjetura puede formularse a partir del estudio separado de diferentes grupos de datos, tal y como sugiere la lectura de la tabla con el agrupamiento de cada grupo de tres datos:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mov	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35

+1 +1 +2 +2 +2 +3 +3 +3 +4 +4 +4 +5

Vemos que el número de movimientos de un caso es la suma del número de movimientos del caso anterior más otro número. Para calcular éste es necesario hacer grupos de 3 en 3. De esta manera, el otro número que se suma es constante dentro de cada grupo de 3 casos y aumenta en 1 cada vez que pasamos a un grupo de 3 casos mayor.

Formular la respuesta

La respuesta al problema planteado exige, de una parte, indicar el número de fichas que hay que mover o el número de movimientos a realizar; y, por otra parte, hay que indicar cuáles son las fichas que se mueven y la posición que han de ocupar. En consecuencia, la respuesta exige dar dos resultados bien diferenciados que abordamos por separado: número de movimientos y la forma de mover las fichas.

Número de movimientos necesarios:

En el apartado anterior ya hemos encontrado una regularidad en la tabla que indica el número de movimientos a realizar para invertir el triángulo, pero resulta complicado escribir una fórmula para calcular el caso general n, así que vamos a agrupar de 3 en 3 los casos, haciendo un estudio diferenciado de cada uno de ellos:

Caso 1: $n = 3c$

Si $n = 3c$, c es el cociente entero de dividir n entre 3; tenemos la siguiente tabla

n=3c	3	6	9	12	15
mov	2	7	15	26	40

+5 +8 +11 +14

Observamos que el número de movimientos para un valor de n se obtiene sumando al anterior valor de la tabla el correspondiente múltiplo de 3, menos una unidad:

$$mov\ (n) = mov\ (3c) = mov\ (3(c-1)) + (3c-1)$$

Aplicando esta igualdad a todos los casos, haciendo su suma y simplificando los términos que están en ambos lados de la igualdad, encontramos la expresión general de los movimientos necesarios para invertir el triángulo de n fichas, con n múltiplo de 3:

$$\begin{array}{llll} mov\ (3) & = & & (3 \times 1) - 1 \\ mov\ (6) & = mov\ (3) & + & (3 \times 2) - 1 \\ mov\ (9) & = mov\ (6) & + & (3 \times 3) - 1 \\ \ldots\ldots\ldots & = \ldots\ldots\ldots & + & \ldots\ldots\ldots \\ mov\ (3(c-2)) & = mov\ (3(c-3)) & + & 3(c-2) - 1 \\ mov\ (3(c-1)) & = mov\ (3(c-2)) & + & 3(c-1) - 1 \\ mov\ (3c) & = mov\ (3(c-1)) & + & 3c - 1 \end{array}$$

$$mov\ (n) = mov\ (3c) = 3[c+(c-1)+(c-2)+\ldots+3+2+1] - c =$$
$$= (3T_c - c) = 3c(c+1)/2 - c = (3c^2+c)/2$$

Caso 2: $n = 3c+1$

Construida la correspondiente tabla de valores

n=3c+1	4	7	10	13
mov	3	9	18	30

+6 +9 +12

y procediendo de forma similar al caso 1 se obtiene

$$mov\ (n) = mov\ (3c+1) = mov\ (3(c-1)+1) + (3c+1-1)$$
$$mov\ (n) = mov\ (3c+1) = 3T_c = 3c(c+1)/2$$

Caso 3: n = 3c+2

n=3c+2	2	5	8	11
mov	1	5	12	22

+4 +7 +10

$$mov\ (n) = mov\ (3c+2) = mov\ (3(c-1)+2) + (3c+2-1)$$
$$mov\ (n) = mov\ (3c+2) = 3T_c + c + 1 =$$
$$= 3c(c+1)/2 + c + 1 = (3c^2+5c+2)/2$$

Luego ya hemos formulado una expresión general que calcula el número mínimo de movimientos para un triángulo de cualquier número de filas[6]. Respondemos así a la pregunta de cuántas fichas hay que mover para invertir un triángulo de n filas. Lo que aún no sabemos es la forma en que hay que mover esas fichas para invertirlo.

Forma de mover las fichas:

Como hemos visto anteriormente, dado un triángulo cualquiera con n filas, el conocer en qué fila se sitúa el vértice inferior nos permite saber qué fichas hay que mover y a qué lugares hay que moverlas. Como vemos en la figura 8, para un n dado, si conocemos k, conocemos dónde se sitúa el vértice inferior y podemos identificar los triángulos superior y laterales. De esta manera, conociendo k deducimos cuál es el número de fichas que movemos y además la forma de moverlas.

En consecuencia, construimos una tabla en la que se relacionen n, las filas del triángulo a invertir, y k, las filas del triángulo superior que consigue invertirlo con el menor número de movimientos.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5

En esta tabla aparecen muchas posibles regularidades y se presta a formular distintas conjeturas. Nosotros, a la vista de los resultados obtenidos con el número de movimientos, preferimos separar los datos de la tabla en tres distintas:

Si $n = 3c$

n=3c	3	6	9	12
k	0	1	2	3

el triángulo superior tendrá $k = c-1$ filas. Por lo tanto, como $2j + (k+1) = n$, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Si $n = 3c + 1$

n=3c+1	4	7	10	13
k	1	2	3	4

el triángulo superior tendrá $k = c$ filas. Por lo tanto, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Si n = 3c + 2

n=3c+2	2	5	8	11	14
k	1	2	3	4	5

el triángulo superior tendrá $k = c + 1$ filas. Por lo tanto, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Observamos que la forma de invertir el triángulo se corresponde con que los tres triángulos de fichas que movemos (triángulo superior y triángulos laterales) sean lo más iguales posibles.

Con los resultados obtenidos en los anteriores epígrafes, ya podemos enunciar una hipótesis sobre las condiciones para invertir un triángulo de cualquier número n de filas:

Para invertir un triángulo de n filas:

Si $n = 3c$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $3c^2+c/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c-1$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Si $n = 3c + 1$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $3c(c+1)/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Si $n = 3c + 2$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $(3c^2+5c+2)/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c+1$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Revisar la solución
En el proceso de generalización necesitamos determinar una característica o variable independiente del problema sobre la que construimos todo el proceso. La elección de tal característica la hace el resolutor conjugando informaciones de distinta índole: sus intuiciones, sus observaciones al resolver casos particulares, su experiencia, sus interpretaciones del enunciado, etc.; además, tiene que definir otra variable dependiente que permita dar la respuesta al problema en forma de relación entre variables.

Esta decisión marcará el trabajo posterior de generalización. En efecto, tal y como se ha puesto de manifiesto en los apartados *Precisar el enunciado*, *Encontrar la solución* y *Formular la respuesta*, el trabajo se centra en dar la respuesta sin cuestionar la elección realizada: el número de filas del triángulo es la variable independiente y el número de movimientos es la variable dependiente. Salvo que se llegue a una situación de bloqueo, el resolutor buscará soluciones a los distintos problemas parciales que aparezcan hasta enunciar la hipótesis que va buscando.

Con posterioridad, y una vez revisado el trabajo, aparecen nuevas perspectivas del problema cuestionando las elecciones realizadas. De este modo, es factible alcanzar resultados que sean más simples, más comprensibles o más elegantes que los obtenidos en una primera solución. Conviene, por tanto, trasladar al alumno la necesidad y utilidad de revisar las soluciones porque se pueden encontrar nuevas relaciones, como estas dos que mostramos seguidamente:

1. La variable independiente que consideramos es el número de fichas que tienen los triángulos, comenzando por el de 2 filas, y la variable dependiente es el menor número de movimientos necesarios para invertir sus posiciones:

N.º de fichas	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
N.º de *mov*	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35

Observamos que en esta tabla resulta sencillo relacionar el número de fichas con el número de movimientos[7]: el número de movimientos de fichas mínimo es el cociente entero entre el número total de fichas y 3.

2. Mantenemos como variable independiente el número de filas n del triángulo, mientras que consideramos como variable dependiente el número de filas de cualquiera de los dos triángulos laterales que se desplazan al resolver el juego, y que denotamos con j:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4

A partir de esta tabla resulta sencillo establecer como hipótesis que: para invertir un triángulo de n filas con el menor número de movimientos, el número de filas j de un triángulo lateral será siempre el cociente entero c resultante de la división de n entre 3.

Nivel 3. Demostrar

La certeza matemática se alcanza mediante el razonamiento deductivo, demostrando la veracidad de las hipótesis formuladas por medio de argumentos lógicos y resultados matemáticos. Alcanzar la demostración de un resultado conlleva un proceso de recorrer distintos caminos, de retomar ideas abandonadas, de reformular el proceso, de buscar la simbología adecuada, etc. Y una vez que las ideas ya están claras queda el proceso de comunicar el resultado, lo que suele acompañarse de cambios en la simbología utilizada y nuevas reformulaciones de los argumentos.

El producto final oculta muchas de las ideas y de las fases del proceso seguido. Nuestra intención es la de ofrecer al lector algunas aclaraciones sobre el modo en que llegamos a los resultados, y siendo muy conscientes de que existen otras muchas formas de alcanzar dichos resultados.

Precisar el enunciado
El punto de partida son las hipótesis formuladas, los resultados alcanzados aplicando el razonamiento inductivo a unos pocos casos particulares. Recordemos que, en este caso, el menor número de movimientos necesarios para invertir el triángulo viene determinado por el tamaño de los tres triángulos de fichas que hay que mover, tal y como se recoge en el apartado *Formular la respuesta*.

Encontrar la solución
Para demostrar la veracidad de la hipótesis formulada no se parte de cero pues en el proceso seguido con el juego propuesto hay un camino recorrido que facilita el trabajo. En efecto, las observaciones y reflexiones realizadas para formular la hipótesis serán de gran ayuda en esta tarea: ya tenemos un sistema simbólico que se ha mostrado eficaz, ya conocemos de dónde procede el número de fichas que hay que cambiar, ya sabemos un método que garantiza la inversión de un triángulo cualquiera, ya conocemos resultados matemáticos que resultan adecuados para nuestro juego, etc. Especialmente interesa destacar dos informaciones que hemos obtenido en el proceso de generalización:

• El tamaño del que denominamos triángulo superior, de k filas, determina el tamaño de los dos triángulos laterales implicados en la inversión del triángulo.

• Las formas posibles de invertir el triángulo y el número de movimientos necesarios para lograrlo, vienen dados por expresiones de la forma $T_k + 2T_j$ donde k y j serán números naturales relacionados mediante $(k+1) + 2j = n$ (ver figura 8).

A partir de estos elementos hay que justificar que el número de fichas que aparece en la hipótesis es el mínimo, el que garantiza la inversión del triángulo desplazando el menor número de fichas posibles. Desde este punto de partida hay que planificar el proceso de demostración que se va a seguir y presuponiendo que la construcción de resultados matemáticos admite distintas vías, cada una de las cuales se corresponde con diferentes perspectivas de un mismo problema. Ofrecemos tres vías de demostración diferentes, cuyas características esenciales son las siguientes:

• La primera consiste en comprobar que el número de movimientos indicados en las hipótesis es menor que cualquiera de los movimientos necesarios para cualquiera de las otras posibilidades de invertir el triángulo. Es una demostración más cercana al mundo escolar pues solamente demanda la manipulación de símbolos algebraicos.

• La segunda consiste en establecer las condiciones para que uno de los números sea el mínimo de los números que forman el conjunto de posibles movimientos para invertir un triángulo de n filas. Para el alumno puede resultar interesante justificar la ordenación de un conjunto finito de números naturales, determinar las condiciones para que uno de dichos números sea el mínimo y comprobar que esas condiciones son las que figuran en las hipótesis.

• La tercera pone en juego conocimientos sobre el mínimo de una función. Desde el punto de vista del alumno, esta demostración aporta ideas sobre cómo afrontar el cálculo de mínimos con funciones naturales de variable natural.

Formular la respuesta

La presentación de los resultados matemáticos conlleva un proceso de refinamiento de distintas formulaciones. En dicho proceso nuevos discursos sustituyen a otros anteriores porque se consideran más precisos y más comprensibles, hasta alcanzar una versión que se considera definitiva y que es la que se plasma en los siguientes apartados:

Vía de demostración 1:

Lo que sabemos: En los apartados *Formular la respuesta* y *Encontrar la solución* ya se han sintetizado las hipótesis a demostrar y los conocimientos, técnicas y resultados que se han acumulado en el proceso de formulación de la hipótesis.

Pretendemos: Para alcanzar nuestro objetivo de demostrar la hipótesis vamos a proceder del siguiente modo:

1. Para cada uno de los tres valores que aparecen en las hipótesis calculamos M, el número de movimientos implicados.
2. Elegimos un valor cualquiera N, de los que invierten el triángulo.
3. Comparamos M y N para determinar cuál es el mayor de los dos y, en consecuencia, poder determinar si se cumplen las condiciones de valor mínimo para M.

1. Aparecen tres casos, para cada uno de los cuales ya calculamos, en el apartado *Formular la respuesta*, el número de movimientos:

$$M = T_{c-1} + 2T_c = 3c^2+c/2$$
$$M = T_c + 2T_c = 3c(c+1)/2$$
$$M = T_{c+1} + 2T_c = (3c^2+5c+2)/2$$

2. Elegimos un caso cualquiera de los que invierten el triángulo, $T_r + 2T_s$, siendo s distinto de c

El número de movimientos implicados es

$$N = \frac{r(r+1)}{2} + 2\frac{s(s+1)}{2}$$

Puesto que queremos comparar N y M vamos a utilizar valores similares; y como además sabemos que $r + 1 + 2s = n$, tomamos $r = n - 2s - 1$ y lo sustituimos en N, con lo que se tiene:

$$N = \frac{n^2 - 4ns - n + 6s^2 + 4s}{2} \quad [1]$$

3. Comparamos N y M en cada uno de los tres casos:

Caso a: $n = 3c$

Sustituyendo este valor en [1] se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs - 3c - 6s^2 + 4s}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + c}{2}$$

Por tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs - 2c + 3s^2 + 2s \quad [2]$$

Para saber si ese resultado es positivo o negativo, y dado que s es distinto de c, estudiamos las dos posibilidades:

- $s > c$

Tomamos $s = c + t$, siendo t mayor o igual que 1, y sustituimos en [2]

$$N - M = 3t^2 + 2t = t(3t + 2)$$

valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

- $s < c$

Tomamos $s = c - t$, siendo t mayor o igual que 1, y sustituimos en (2)

$$N - M = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$$

valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Caso b: $n = 3c + 1$

Procediendo de forma similar al caso a, se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs + 3c + 6s^2}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + 3c}{2}$$

Por tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs + 3s^2 = 3(c - s)^2$$

valor que es siempre positivo puesto que s es distinto de c.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Caso c: $n = 3c + 2$

Procediendo de forma similar al caso a, se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs + 9c + 6s^2 - 4s + 2}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + 5c + 2}{2}$$

Por lo tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs + 2c + 3s^2 - 2s$$

- $s > c$

$N - M = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$, valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

- $s < c$

$N - M = 3t^2 + 2t = t(3t + 2)$, valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1 . Por tanto $N > M$.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Vía de demostración 2:

Lo que sabemos: Para invertir el triángulo de n filas, tenemos que mover fichas. Hemos demostrado que la forma de mover fichas se puede organizar por medio de la estrategia de fijar el vértice inferior.

Como queremos elegir la inversión con el mínimo número de movimientos, podemos prescindir de las estrategias que sitúan el vértice inferior en las filas pares, puesto que en este caso deberíamos mover todas las demás para que se respete la condición de simetría (figura 5). También podemos prescindir de las que sitúan el vértice inferior por encima de la base (en la fila $d < n$), puesto que siempre moveríamos menos fichas si situásemos el vértice dos filas más abajo (en la fila d+2).

Comentamos en el apartado *Encontrar la solución* que si fijamos el vértice en cualquier fila, el número de movimientos que realizaremos tendrá esta expresión: $T_k + 2T_j$ donde k y j serán dos números naturales y se relacionan mediante la igualdad $(k+1) + 2j = n$ (ver figura 8). De las dos condiciones impuestas, obtenemos que $k + n$ será impar.

Dado un n, podemos hacer un listado con todas las expresiones del tipo anterior ordenando las expresiones que aparecen según el valor de k (ver tabla 9). En esta lista estarán contenidos no sólo todos los números de movimientos en que invertiremos el triángulo, sino la forma en que se invierte (ya que k determina la forma en que se realizan los movimientos).

n=11	k=0	$T_0+2T_5=30$
	k=2	$T_2+2T_4=23$
	k=4	$T_4+2T_3=22$
	k=6	$T_6+2T_2=27$
	k=8	$T_8+2T_1=38$
	k=10	$T_{10}+2T_0=55$

Tabla 9. Listado de todas las formas de invertir un triángulo de 11 filas, ordenado según k

Lo que pretendemos: Nuestro objetivo es identificar y escoger el número menor de entre todas las expresiones de la lista (en el caso de la tabla 9, el mínimo es $T_4 + 2T_3$), para lo cual tenemos que:

1. Encontrar las condiciones para que un número de la lista, $m = T_r + 2T_s$, sea menor que los anteriores.
2. Encontrar las condiciones para que un número de la lista, $m = T_r + 2T_s$, sea menor que los posteriores.

1. Razonamos con los números anteriores.

Tomamos el número, m_a , de la lista inmediatamente anterior a m: tiene $k = r - 2$ y vale $m_a = T_{r-2} + 2T_{s+1}$.

Entonces:

$$m - m_a = (T_r + 2T_s) - (T_{r-2} + 2T_{s+1}) = (T_r - T_{r-2}) + \\ + 2(T_s - T_{s+1}) = (r + r - 1) - 2\,(s + 1) = 2\,(r - s) - 3$$

Luego $m \neq m_a$ siempre, ya que r y s son números naturales y además

$$m < m_a \Leftrightarrow r - s \leq 1$$

Ahora vamos a intentar decir algo acerca de *todos* los números anteriores al m, usando esta nueva relación.

Sea un $m = T_r + 2T_s$ que cumpla la condición $r - s \leq 1$, sean $m_a = T_{r-2} + 2T_{s+1}$ y $m_{a(2)} = T_{r-4} + 2T_{s+2}$ el número anterior a m y a m_a en la lista respectivamente. Los *coeficientes* de m_a cumplen que $(r - 2) - (s + 1) = (r - s) - 3 \leq r - s \leq 1$; entonces afirmamos que $m < m_a < m_{a(2)}$.

En general, no es difícil comprobar que todo número anterior a m tendrá la forma $m_{a(q)} = T_{r-t} + 2T_{s+q}$ con t y q números naturales.

Luego la resta de sus *coeficientes* será $(r - s) - (t + q)$ y será ≤ 1.

Por lo tanto, queda probado que si encontramos en nuestra lista un número $m = T_r + 2T_s$ tal que $r - s \leq 1$, entonces

$$m < m_a < \ldots < m_{a(q)} < m_{a(q+1)} <\ldots$$

2. Razonamos ahora con los números posteriores.

Tomamos el número, m_p , de la lista inmediatamente posterior a m: tiene $k = r + 2$ y vale $m_p = T_{r+2} + 2T_{s-1}$.

Entonces:

$$m - m_p = (T_r + 2T_s) - (T_{r+2} + 2T_{s-1}) = \\ = (T_r - T_{r+2}) + 2(T_s - T_{s-1}) = -\,(r + 1 + r + 2) + 2s = \\ = (-2)\,(r - s) - 3$$

Luego $m \neq m_p$ siempre, ya que r y s son números naturales y además

$$m < mp \Leftrightarrow r - s \geq -1$$

Por razonamientos análogos a los realizados con los números anteriores podemos decir que si encontramos en nuestra lista un número $m = T_r + 2T_s$ tal que $r - s \geq -1$, entonces

$$m < m_p <\ldots< m_{p(q)} < m_{p(q+1)} <\ldots$$

Con todo esto, concluimos que sea $m = T_r + 2T_s$ un número de la lista entonces

m cumple que $-1 \leq r - s \leq 1 \Rightarrow m$ es el mínimo de la lista[8].

Este resultado coincide con las hipótesis del apartado *Formular la respuesta*:

a. Para $n = 3c$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c - 1$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = (c - 1) - c = -1$. Luego $T_{c-1} + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

b. Si $n = 3c + 1$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = c - c = 0$. Luego $T_c + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

c. Si $n = 3c + 2$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c + 1$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = (c + 1) - c = 1$. Luego $T_{c-1} + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

Vía de demostración 3:

Ahora abordamos la demostración del problema desde el punto de vista de la optimización de funciones.

Fijado un n, para invertir un triángulo de n fichas, necesitamos mover un triángulo superior de k filas y mover dos triángulos laterales de j filas. Estas variables cumplen que $k + n$ es impar y $2j + (k + 1) = n$.

Cada valor que toma k representa una forma distinta de realizar la inversión y un número distinto de movimientos de fichas. Una manera cualquiera para invertir el triángulo constará de $T_k + 2T_j$ movimientos.

$$T_k + 2T_j = \frac{k(k+1)}{2} + 2\frac{j(j+1)}{2} =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{n-k-1}{2}\left(\frac{n-k-1}{2}+1\right) = \frac{3k^2+(2-2n)k+n^2-1}{4}$$

Puesto que n es un número fijo (hace el papel de un parámetro), observamos que el número de movimientos realizados nos queda como una expresión que varía en función de k.

Luego podemos entender el número de movimientos necesarios para invertir un triángulo de n filas como una función aritmética de variable k, $f_n(k)$. Donde

$$f_n(k) = \frac{3k^2+(2-2n)k+n^2-1}{4}$$

y cuyo dominio de definición será $Z \cap [0, n) \cap \{k \mid k+n \text{ impar}\}$.

El problema de hallar el número y la forma de mover las fichas de un triángulo de n filas para que éste quede invertido se reduce a encontrar el valor k con el que se obtiene el mínimo de la función $f_n(k)$. Al ser f_n una función aritmética (su dominio de definición y su imagen son conjuntos de números naturales), la forma de hallar su mínimo será diferente de cuando lo hacemos para una función cuyo dominio son los números reales ya que entonces podemos usar el concepto matemático de derivada para calcular su crecimiento y decrecimiento y encontrar su mínimo. Es por ello que, para encontrar el mínimo de $f_n(k)$, recurrimos a una función real auxiliar definida del siguiente modo:

$$g_n(x) = \frac{3x^2+(2-2n)x+n^2-1}{4}$$

que cumple

$$g_n(k) = f_n(k) \text{ para todo } k \in Z \cap [0, n) \cap \{k \mid k+n \text{ impar}\}.$$

Averiguando para qué valor de x se obtiene el mínimo de g_n (analizando el crecimiento y decrecimiento con su función derivada), tomamos en el dominio de f_n el valor k más aproximado a este x y de esta manera, podemos asegurar (ya que g_n es una función parabólica) que $f_n(k)$ es el mínimo de f_n.

Como

$$g_n'(x) = \frac{3x+(1-n)}{2}$$

entonces hay un mínimo en

$$x = \frac{n-1}{3}$$

1. Si $n = 3c$ entonces $x = c - 1/3$.

Ahora bien, si tomamos $k = c$, entonces $k + n = 4c$ es par y por tanto no pertenece al dominio de f_n. En consecuencia, el k más próximo a $c - 1/3$ es $k = c - 1$.

2. Si $n = 3c + 1$ entonces $x = c$ y $k = x = c$.

3. Si $n = 3c + 2$ entonces $x = c + 1/3$ y, por razonamientos análogos a los del caso 1, el k del dominio más próximo a $c + 1/3$ es $k = c + 1$.

A modo de conclusión

Una vez completada la actividad que ha surgido desde un problema particular enunciado como un divertimento matemático, nos parece oportuno hacer algunas consideraciones desde la perspectiva de la educación matemática:

La actividad matemática admite diferentes niveles o grados de dificultad; por tanto, es posible implicar a los alumnos en tareas matemáticas ajustadas a sus conocimientos y habilidades matemáticas. Además, conforme los alumnos alcancen éxitos en tareas de un determinado nivel se podrán proponer tareas de niveles superiores.

La realización de tareas como las planteadas en este trabajo ayudan a que los alumnos no limiten su concepción de las matemáticas a una disciplina científica que consiste en conocer y aplicar técnicas de cálculo. Entendemos que de este modo se provoca en los alumnos actitudes positivas hacia las matemáticas y, en consecuencia, un mayor interés por el estudio.

Las recomendaciones de los expertos inciden en la conveniencia de que los alumnos conecten las diversas áreas de las matemáticas, puesto que si no se producen tales conexiones, los alumnos se ven obligados a aprender y recordar demasiados conceptos y destrezas en vez de reconocer los principios generales que son realmente relevantes (NCTM, 1992). El juego que hemos desarrollado, al igual que muchos otros juegos y problemas genuinos, permite establecer de forma natural conexiones entre ideas aritméticas, algebraicas, geométricas y funcionales.

A lo largo de este trabajo hemos querido transmitir la idea de que la Matemática no es una ciencia terminada y que los resultados matemáticos no se alcanzan siguiendo un único camino. Esta idea será asumida por los alumnos en tanto en cuanto contrasten sus trabajos con los de otros compañeros y observen que los problemas se pueden abordar desde distintos planteamientos y que cada uno de ellos puede utilizar razonamientos, procedimientos y herramientas de índole claramente diferenciadas.

La comunicación en matemáticas es esencial para comprender y comunicar las ideas tanto personales como colectivas. Es más, en la resolución de problemas, como es el caso del juego que nos ocupa, aparece la necesidad de crear un sistema de representación, generalmente simbólico, que represente el modo en que se ha resuelto el problema. Es más, en la resolución es el propio resolutor quien debe *inventarlo*, y también quien decide si lo modifica o lo abandona de acuerdo con la eficacia que demuestre al utilizarlo en distintas fases del trabajo. Resulta necesario, por tanto, que los alumnos presenten y discutan con sus compañeros las soluciones que han encontrado y la forma en que lo han hecho; esta actividad les obligará a organizar sus exposiciones, a describir la simbología utilizada, a justificar los resultados utilizados y a utilizar argumentos bien construidos.

Actividades similares a las planteadas en este trabajo ayudan a que los alumnos simulen el trabajo de los matemáticos. Y para que esta práctica docente resulte efectiva deben modificarse los tradicionales papeles y relaciones en el sistema esco-

NOTAS

1 Incluimos esta condición de simetría para *simplificar* el trabajo. Se puede demostrar que no es necesaria, ya que para cualquier forma de invertir el triángulo dejándolo *desplazado*, se puede encontrar otra forma de invertirlo que cumpla la simetría con respecto a r y que tenga el mismo o menor número de movimientos de ficha.

2 Por sistematizar la forma de mover las fichas, trasladaremos siempre las fichas del triángulo superior a la parte inferior del triángulo original, y las fichas de los triángulos laterales serán trasladadas a las correspondientes posiciones simétricas (ver figura 7).

3 Cabe recordar que el número de fichas de T_n es igual a $n(n+1)/2$

4 Sobre la modelización matemática:

El juego permite un trabajo inicial de manipulación de objetos reales, pero al ampliar el trabajo a situaciones con un mayor número de fichas surge la necesidad de sustituir los objetos reales por modelos matemáticos que faciliten la tarea.

En la descripción realizada hemos recurrido a la modelización del juego con números triangulares que representan bloques de fichas que han de trasladarse. Y sobre este modelo hemos dado respuesta a las tareas de formulación de hipótesis y construcción de demostraciones.

De nuevo alertamos sobre la existencia de otras posibilidades de construir modelos ante una misma situación problemática. Así, por ejemplo, podíamos haber construido un modelo como el siguiente, que ejemplificamos con un triángulo de 7 filas:

Hacemos un modelo del triángulo como una sucesión de números dispuestos en una tabla de 1 columna por 7 filas, donde cada fila indica el numero de fichas que tiene (ver tabla *A*). El procedimiento de invertir el triángulo se produciría cuando al sumar y restar números a los que hay en la tabla *A*, llegásemos a otra tabla donde los números estén situados en orden inverso (ver tabla *B*). Las sumas y restas que se realizan se pueden recoger en otra tabla (ver transiciones) y de ella, sumando todos los números positivos obtendríamos el número de movimientos para invertir un triángulo.

Tabla *A*	Fichas		Transiciones		Fichas	Tabla *B*
Fila 1	1		-1			Fila 1
Fila 2	2		-2			Fila 2
Fila 3	3		+4		7	Fila 3
Fila 4	4		+2		6	Fila 4
Fila 5	5				5	Fila 5
Fila 6	6		-2		4	Fila 6
Fila 7	7		-4		3	Fila 7
Fila 8			+2		2	Fila 8
Fila 9			+1		1	Fila 9

Como vemos en la tabla central, los signos que preceden a los números indican si hay que quitar (-) o añadir fichas en una fila cualquiera; además, las p fichas que se quitan de una fila se deben trasladar a la fila en que aparece $+p$.

Para conocer el número de movimientos necesarios para invertir el triángulo basta sumar los valores del cuadro central que tienen el mismo signo. En este caso, el número de movimientos será 1+2+2+4=9.

Lo que queremos destacar es que con este modelo diferente se alcanzarán los mismos resultados pero se hará de un modo distinto, y también serán distintas las ideas puestas en juego para formular y justificar las hipótesis. En efecto, ya intuimos que los movimientos se podrán expresar como sumas de términos de sucesiones aritméticas, pero ¿cómo razonaríamos para poder calcular todas las inversiones posibles?, ¿cómo sería el paso entre los datos obtenidos con este modelo de números al modelo de las fichas?, ¿cómo se garantiza la condición de simetría?, ¿cómo sería la búsqueda de regularidades y la generalización?, etc.

5 Al valorar este método de obtención de los movimientos debemos reconocer que es poco eficaz puesto que para casos en los que n sea grande habría que realizar muchos cálculos (para n = 100 habría que analizar 50 casos, para n = 1000 analizaríamos 500, etc). Por lo tanto, intentamos un camino más *económico*. Vamos a trabajar con el número de movimientos mínimos necesarios para invertir triángulos con un número pequeño de filas y aplicar un razonamiento inductivo para obtener resultados generales.

6 Esta expresión general también podríamos ponerla en función de n, quedando de esta forma:

Caso 1: mov $(n) = (n^2+n)/6$

Caso 2: mov $(n) = (n^2+n-2)/6$

Caso 3: mov $(n) = (n^2+n)/6$

7 Trabajando con la expresión de los números de movimientos en función de n que figura en la nota anterior, esta regularidad es casi directa.

8 Aunque no lo necesitemos (ya que lo hemos encontrado de manera concreta en las conjeturas), es posible demostrar que en la lista siempre existe algún número m cuyos *coeficientes* r y s cumplen que $-1 \le r - s \le 1$. Por lo tanto podemos ampliar el resultado y decir que

$$m \text{ es el mínimo de la lista} \Leftrightarrow -1 \le r - s \le 1$$

lar: el alumno debe ejercer el trabajo del aprendiz de una profesión, el trabajo de la persona que, bajo la tutela del maestro, va paulatinamente adquiriendo los conocimientos del profesional; el profesor ocupa la posición del maestro artesano, la del experto profesional, que tiene a su cargo a un colectivo de aprendices a los que va educando en la profesión; y el conocimiento matemático es el resultado de los trabajos que realizan los alumnos acompañados de su profesor (Gairín, 2002).

Esperamos y deseamos que este trabajo sirva para que unos cuantos profesores animen a unos cuantos alumnos a realizar unas cuantas actividades que impliquen la construcción personal de resultados matemáticos. En apoyo de este deseo incluimos publicaciones, más o menos recientes, de las que se pueden sacar actividades para proponer a los alumnos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALBUENA, L. (1999): *Naciones y banderas*, Proyecto Sur, Granada.

BALBUENA, L., CUTILLAS, L. y COBA, D. de la (2000): *Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos*, Rubes, Barcelona.

BRANDRETH, G. (1999): *Juegos con números*, Gedisa, Barcelona.

CAPÓ, M. (2005): *El país de las mates. 100 problemas de ingenio*, Volúmenes 1 y 2, El Rompecabezas, Madrid.

CHAMOSO, J. y RAWSON, W. (2003): *A vueltas con los números*, Nivola, Madrid.

DEULOFEU, J. (2001): *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*, Planeta, Barcelona.

DEULOFEU, J. (2003): *Gimnasia mental*, Martínez Roca, Barcelona.

FABRETTI, C. (1999): *El libro del genio matemático,* Martínez Roca, Barcelona.

FERRERES, J. (2003): *Juegos de ingenio*, Orbis, Barcelona.

GAIRÍN, J.M. (2001): "Hacer matemáticas: el juego como recurso", *Aspectos didácticos de Matemáticas 8*, Educación Abierta, 153, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GAIRÍN, J.M. (2002): "Aprender a demostrar: los juegos de estrategia", *Actas de las X Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Volumen I, pp. 171-188, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GARDNER, M. (2000): *Los mágicos números del Doctor Matriz*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Juegos y enigmas de otros mundos*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GRUPO ALQUERQUE (2004-2005): Sección Juegos, *SUMA*, Madrid.

GUZMÁN, M. de (2002): *La experiencia de descubrir en geometría*, Nivola, Madrid.

HAIGH, J. (2003): *Matemáticas y juegos de azar*, Tusquets, Barcelona.

HOFFMAN, P. (2000): *El hombre que sólo amaba los números,* Granica, Barcelona.

JOUETTE, A. (2000): *El secreto de los números*, Robinbook, Barcelona.

MALA, M. (2000): *Juegos de ingenio III*, Victor, Barcelona.

MALA, M. (2002): *Juegos de ingenio V*, Robinbook, Barcelona.

MUÑOZ, J. (2003): *Ernesto, el aprendiz de matemago*, Nivola, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, NCTM (1992): *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*, Sevilla.

NAVARRO, A. y MORAL, T. (2003): *Ingenio 2*, El Aleph, Barcelona.

NELSON, R. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.

NIEDERMAN, D. (2003): *Juegos matemáticos. Rompecabezas, cifras y números para agudizar el ingenio*, Victor, Barcelona.

PERELMAN, Y. (2002): *Matemáticas recreativas*, Martínez Roca, Barcelona.

PISA 2003 (2004): *Evaluación Pisa 2003. Resumen de los primeros resultados en España*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

SEGARRA, LL.: *Problemates*, Graó, Barcelona.

SERRA I FABRA, J. (2002); *El asesinato del profesor de matemáticas*, Anaya, Madrid.

SMULLYAN, R. (2001): *El enigma de Scherezade*, Alianza Editorial, Madrid.

SORET, I. (2003): *Matemágicas*, ESIC, Madrid.

STEWART, I. (2000): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

STEWART, I. (2005): *Locos por las matemáticas: juegos y diversiones matemáticos*, Crítica, Barcelona.

VIVES, P. (2003): *Juegos de ingenio*, Martínez Roca, Barcelona.

UNO (1988): Número 18, monográfico sobre juegos matemáticos.

En Internet:

www.arrakis.es

www.juntadeandalucia.es/averroes

www.educa.aragob.es

www.divulgamat.net

www.buscoacertijos.com

www.matematicas.net

www.recursosmatematicos.com

www.galeon.com

Homotecia y giro. Foto: CTB

Simetría imperfecta. Foto: CTB

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 31-39

¿Teoremas o fórmulas?

En este artículo se describen algunos ejemplos que muestran que un teorema es mucho más que una fórmula.

This paper considers some examples that show that a theorem is much more than a formula.

Una de las conversaciones preferidas entre los profesores de matemáticas es sobre de los errores que cometen nuestros alumnos. Todos, alguna vez, hemos co-mentado lo mal que han simplificado una fracción o las equivocaciones surgidas al operar con raíces cuadradas, o les hemos convencido de que 0 es igual a 1 con una prueba falsa en la que no han sabido descubrir el paralogismo. Todo este tipo de cosas están recogidas, por ejemplo, en el libro Cipra (2000), o en las páginas de Internet:

http://members.cox.net/mathmistakes/
http://math.vanderbilt.edu/~schectex/commerrs/

> *Una de las conversaciones preferidas entre los profesores de matemáticas es la que trata sobre los errores que cometen los alumnos.*

También, en los artículos (Abramovitz, Berezina y Berman, 2002), (Abramovitz, Berezina y Berman, 2003) y (Berezina y Berman, 2000) se presentan interesantes ejemplos de pruebas erróneas, definiciones mal interpretadas o usos incorrectos de la teoría, y se exponen algunos tests que se han pasado a los alumnos para comprobar su nivel de conocimientos teóricos.

En un artículo de Movshovitz, Zaslavsky y Inbar (1987) se clasifican los errores en categorías tales como pruebas falsas, aplicaciones de teoremas fuera de sus condiciones, interpretaciones erróneas del lenguaje, usos erróneos de algoritmos o usos erróneos de una definición.

De todas estas categorías de errores, creo que resulta especialmente interesante la que se refiere a la aplicación indiscriminada de un teorema. Es decir, los errores que se derivan de aplicar una fórmula que no se debe utilizar. Este tipo de hábitos lleva consigo una interesante reflexión acerca del tipo de matemáticas que queremos explicar. No sólo los alumnos, también los profesores nos lanzamos a aplicar fórmulas sin comprobar si estamos en las condiciones requeridas en las hipótesis del teorema. Ya sea por simplificar, por ahorrar tiempo o simplemente por considerar que las posibilidades de que se nos presente un caso que falle son escasas, el caso es que incluso libros muy difundidos propician el mal empleo de algún algoritmo (como veremos).

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
Cádiz

Objetivos

Este artículo va dirigido a todos los profesores de Matemáticas que quieran transmitir a sus alumnos el rigor y la sutileza de los teoremas. En todos los niveles de las Matemáticas nos podemos plantear, en determinados momentos, hacer una mirada reflexiva sobre algunos enunciados que pensamos que son especialmente interesantes para nuestros cursos. La frecuencia e intensidad de esta mirada reflexiva dependerá de dos factores principales: el tiempo que podamos emplear y la receptividad de nuestros alumnos.

En todos los niveles de las Matemáticas nos podemos plantear, en determinados momentos, hacer una mirada reflexiva sobre algunos enunciados que pensamos que son especialmente interesantes para nuestros cursos.

Para articular la forma de reflexionar sobre los teoremas se propondrán dos propuestas metodológicas con las que poder hacer un análisis teórico de un resultado. En este artículo hemos seleccionado seis, muy conocidos, donde aplicaremos estas propuestas. Han sido escogidos con el fin de hacer ver que una fórmula, o un método automático de resolver un problema, pueden llevarnos a conclusiones falsas si no los usamos bien. Pero las posibilidades son infinitas. Cada profesor podría hacer una selección propia, fruto de sus propias experiencias y necesidades, y sería perfectamente válida.

Se ha usado un programa de matemáticas para realizar algunas de las gráficas que se muestran, pero los objetivos de este artículo se centran en análisis teóricos que no se pueden realizar con un programa. Estos análisis teóricos son, precisamente, los que muestran la potencia y sutileza de los teoremas. Por otro lado, el uso indiscriminado de los programas de Matemáticas lleva, en ocasiones, a errores de cálculo. Estos errores, causados unas veces por fallos del programa y otras veces por el mal uso de los mismos, deben ser detectados con un análisis detallado del enunciado en cuestión.

Propuestas Metodológicas

Como ya hemos visto anteriormente, la aplicación indiscriminada de un teorema, es decir, hacer caso omiso de las hipótesis requeridas y usar simplemente la fórmula, es una práctica habitual. Para hacer reflexionar sobre esto proponemos dos maneras de actuar:

Opción I

Paso 1. Obtener una fórmula aparentemente válida sin problemas.
Paso 2. Dar un contraejemplo.
Paso 3. Dar el enunciado correcto.

Opción II

Paso 1. Dar el enunciado correcto.
Paso 2. Avisar de los usos incorrectos.
Paso 3. Dar ejemplos de los usos incorrectos.

Con la opción I mostraremos que, en Matemáticas, a veces no hay que fiarse de la primera impresión.

Con la opción II mostraremos que las hipótesis de los teoremas se dan porque son necesarias para aplicarlos.

En los casos que daremos a continuación diremos, al principio, qué opción hemos elegido.

Regla de L'Hopital

En este caso usaremos la Opción II.
Paso 1: Damos el enunciado de la regla de L'Hopital (Spivak, 1986, p. 264).

Paso 2: La regla de l'Hopital es el típico resultado que se suele aplicar de manera automática, sin embargo su uso indiscriminado puede llevarnos a resultados falsos. La hipótesis de la existencia de

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

significa dos cosas: dicho límite debe existir antes de aplicar la regla y debe existir un entorno alrededor de a donde $f'(x)$ y $g'(x)$ existan y donde $g'(x)$ sea distinto de cero (salvo en a).

Paso 3: Damos los ejemplos que muestren los errores que podemos cometer si no comprobamos si se respetan o no las condiciones del teorema:

Ejemplo 1
Tomemos las funciones $f(x) = x + \text{sen}\, x$ y $g(x) = x$.

Se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Si aplicamos la regla se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} (1+\cos x)$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x$$

no existe, llegamos a la conclusión de que el límite buscado tampoco existe. Esto, sin embargo, es falso porque:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{senx}{x}\right) = 1$$

Observación: El límite del cociente de las derivadas debe existir antes de aplicar la regla de L'Hopital.

La regla de l'Hopital es el típico resultado que se suele aplicar de manera automática, sin embargo su uso indiscriminado puede llevarnos a resultados falsos.

Ejemplo 2
Tomemos las funciones

$$f(x) = \left(xsen\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

y

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(Rickert, 1968).

Se verifica que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

Si aplicamos la regla se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(sen\frac{1}{x^4}\right)x^3 - 4\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4} + 2\left(sen\frac{1}{x^4}\right)x\right)$$

Llegamos a la conclusión de que el límite buscado no existe ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4}$$

no existe, como puede apreciarse en la gráfica de

$$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4}$$

(figura 1, realizada con el programa Scientific WorkPlace).

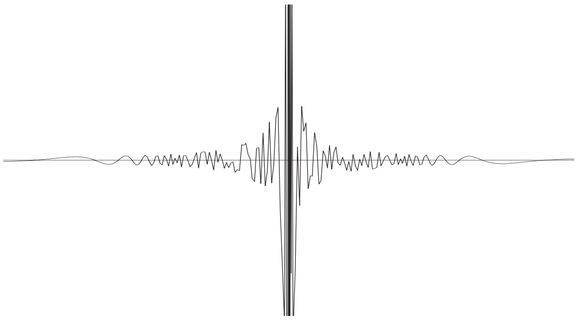


Figura 1

Sin embargo nuestra conclusión es falsa porque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} xsen\frac{1}{x^4} = 0$$

Como en el ejemplo anterior, la regla de L'Hopital sólo se puede aplicar si previamente existe el límite del cociente de las derivadas.

Ejemplo 3
Tomemos las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \cos xsenx)$$

y

$$g(x) = f(x)e^{senx}$$

(Boas, 1986).

Se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

ya que

$$g(x)=f(x)e^{senx}\geq f(x)\frac{1}{e}$$

Si aplicamos la regla de L'Hopital se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos^2 x}{e^{senx}(\cos x)(\cos x+f(x))}$$

Observemos que el error se consuma al simplificar *cos x*. En efecto, tanto *cos x* como $e^{sen\,x}$ *cos x* son acotadas, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^{senx}\cos x+e^{senx}f(x)}=0$$

Sin embargo esta conclusión es falsa porque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{senx}}$$

y el segundo límite no puede ser 0 ya que

$$\frac{1}{e^{senx}}\geq\frac{1}{e}$$

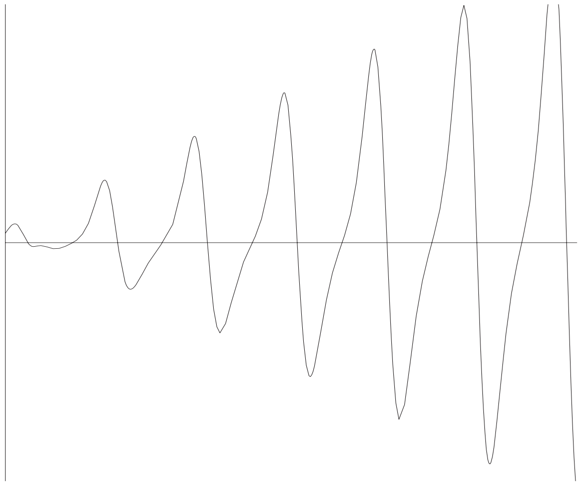


Figura 2

Observación: la regla sólo se puede aplicar si $g'(x)$ es distinto de cero en un entorno de $+\infty$, condición que no se cumple como puede verse en su gráfica (figura 2, realizada con el programa Scientific WorkPlace).

Función inversa

En este caso usaremos la Opción I.

Partiendo de una función inyectiva *f*, la función inversa f^{-1} suele visualizarse (Spivak, 1986, p. 298) intercambiando los ejes horizontal y vertical (esta práctica en la pizarra puede acarrear problemas en el cuello).

> *Partiendo de una función inyectiva f, la función inversa f^{-1} suele visualizarse (Spivak, 1986, p. 298) intercambiando los ejes horizontal y vertical.*

Paso 1: Partiendo de $y = f(x)$, entonces $x = f^{-1}(y)$, y derivando ambos miembros de la igualdad respecto de x, se obtiene la derivada de la función inversa en un punto $b = f(a)$. Este valor viene dado por la fórmula:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Paso 2: Evidentemente, la derivada de la inversa se calcula mediante la expresión anterior, siempre que el denominador de dicha expresión sea distinto de cero. Sin embargo, es posible que se cumpla esta condición, pero que ésta no baste para garantizar la derivabilidad de la inversa. En otras palabras, podríamos calcular el valor anterior, y que este valor no signifique nada.

En el ejemplo que sigue, daremos una función con estas características:

Ejemplo 4
Tomemos la función (Ionin, 1993)

$$f(x)=\begin{cases} x \quad si \quad x\leq 0 \\ (1+\frac{1}{n})x \quad si \quad \frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n} \\ \frac{x}{n(n+1)^2}+\frac{1}{n+1} \quad si \quad n\leq x<n+1 \end{cases}$$

Su gráfica está en la figura 3.

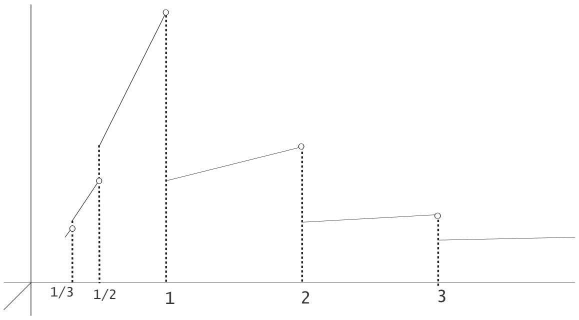


Figura 3

La función verifica que $f'(0) = 1$. En efecto:
Si $x < 0$ tenemos que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

por tanto $f'_-(0) = 1$.

Además:

$$f(x)=(1+\frac{1}{n})x \;, n=n(x)=\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil -1$$

(el símbolo $\lceil\ \rceil$ representa la parte entera por exceso). Por tanto:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)=1$$

Entonces

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

Aunque hayamos podido calcular el valor anterior, este valor no tiene ningún significado. En efecto: gráficamente podemos observar que f^{-1} no está acotada en ningún entorno del origen y por tanto no es continua ni derivable en el origen.

Paso 3: En el enunciado correcto sobre la derivabilidad de f^{-1} en un punto $b = f(a)$ (Spivak, 1986, p. 309), aparece como hipótesis el hecho de que f sea continua en un entorno del punto a. Observemos que f verifica:

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n-1}$$

Por tanto, f es discontinua en cada $1/n$, por lo cual no existe ningún entorno de 0 en el que sea continua, y el teorema de derivación de la inversa no se puede aplicar.

Observación: a veces es posible aplicar una fórmula y obtener un resultado y, sin embargo, este resultado puede carecer de sentido.

Integrales

En este caso aplicaremos la Opción II.

Paso 1: Enunciamos la Regla de Barrow para calcular integrales definidas a través del cálculo de primitivas.

Paso 2: La regla anterior se presta a la automatización del cálculo de las integrales definidas: se calcula una primitiva y después se sustituyen los límites de integración. Sin embargo, esta automatización puede llevarnos a situaciones equivocadas. El problema se puede presentar si no miramos bien los límites de integración. Puede ocurrir que el integrando no esté acotado entre los límites dados, y no nos hayamos dado cuenta. Otra posibilidad es que la primitiva, que se obtiene mediante los métodos de integración habituales, tenga problemas en el intervalo dado por esos límites.

Paso 3: Damos los ejemplos que muestran las dos actuaciones equivocadas a las que nos hemos referido en el Paso 1.

Ejemplo 5
Consideremos la integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$$

La primitiva de la función $1/x^3$ es

$$F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$$

La simple sustitución de los límites de integración da:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

Pero este resultado es falso. Notemos que $1/x^3$ no está acotada en [-1,1]. Por tanto, la integral dada es una integral impropia que resulta ser divergente por serlo

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3} dx$$

Ejemplo 6
Consideremos la integral

$$\int_{0}^{\pi} f(x) dx$$

para

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 3 sen^2 x}$$

(Abramovitz, Berezina y Berman, 2003).

Mediante el cambio $tg\, x = t$, se obtiene:

$$\int f(x) dx = \int \frac{dt}{1+3t^2}$$

por tanto:

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg(\sqrt{3} tgx) + C$$

La simple sustitución de los límites de integración da como resultado:

$$\int_{0}^{\pi} f(x) dx = F(\pi) - F(0) = 0$$

Sin embargo, el resultado anterior es falso ya que al ser $f(x)$ continua y positiva se tiene que

$$\int_{0}^{\pi} f(x) dx > 0$$

El problema radica en que $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ en $[0, \pi]$, ya que no está definida en $\pi/2$. En realidad la primitiva de la función $f(x)$ en $[0, \pi]$ debe tener la forma:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x + C_1, & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x + C_2, & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Para asegurar la continuidad en $\pi/2$ ha de cumplirse que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} G(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} G(x)$$

Por tanto ha de ser:

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_2$$

De la igualdad anterior obtenemos que

$$C_2 = C_1 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

por tanto:

$$\int_{0}^{\pi} f(x) dx = G(\pi) - G(0) = C_1 - C_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Observación: Debemos asegurarnos de que la primitiva que se obtiene con los métodos de integración está definida en el intervalo dado por la integral definida.

Ecuaciones diferenciales

En este caso aplicaremos la Opción II.

Paso 1: enunciamos el teorema de existencia y unicidad de un problema con valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

Paso 2: de forma análoga al caso de las integrales definidas, la resolución de las ecuaciones diferenciales se hace de forma automática, según el tipo de ecuación que sea, y seguidamente se aplica la condición inicial. Sin embargo, esta automatización puede llevarnos a situaciones equivocadas, si no nos aseguramos de que estamos en las condiciones del teorema.

La resolución de las ecuaciones diferenciales se hace de forma automática, según el tipo de ecuación que sea, y seguidamente se aplica la condición inicial.

Paso 3: ilustramos el comentario del Paso 2 con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7
Tomemos (Abramovitz, Berezina y Berman, 2002) el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (x-2)dx+(y-1)dy=0 \\ y(2)=1 \end{cases}$$

Como la ecuación diferencial

$$(x-2)dx+(y-1)dy=0$$

es exacta, la solución general viene dada por el potencial de $F=(x-2, y-1)$, es decir:

$$U(x,y)=\frac{1}{2}((x-2)^2+(y-1)^2)=C$$

De la condición inicial se obtiene $C = 0$ y se llega a la falsa solución

$$(x-2)^2+(y-1)^2=0$$

Observemos que reescribiendo la ecuación en la forma

$$y' = -\frac{x-2}{y-1}$$

vemos que

$$f(x,y)=-\frac{x-2}{y-1}$$

no es continua en ningún entorno de (2, 1), y por tanto no satisface las hipótesis del teorema.

Plano tangente

En este caso usaremos la Opción I.

Paso 1: generalizando el concepto de recta tangente, la fórmula del plano tangente a una superficie $z = z(x, y)$ en un punto $(a, b, z(a, b))$viene dada por:

$$z-z(a,b)=z_x(a,b)(x-a)+z_y(a,b)(y-b)$$

Paso 2: el paso de las funciones reales de una variable al de dos variables presenta una serie de dificultades a la hora de la extensión de ciertos conceptos. Aquí nos referiremos exclusivamente al paso del concepto de recta tangente al de plano tangente. Para el caso de una variable, la existencia de derivada en un punto asegura la existencia de una recta tangente en ese punto, sin embargo para el caso de dos variables, la simple existencia de las derivadas parciales en un punto no asegura la existencia de un plano tangente en ese punto: hace falta la diferenciabilidad de la función en el punto. Aquí nos encontramos con un caso parecido al que vimos con la derivada de la función inversa: podemos obtener la fórmula del Paso 1 y, sin embargo, esta fórmula puede carecer de sentido. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8
Tomemos (Martínez y Vinuesa, 2002) la función:

$$z(x,y)=\begin{cases} x & si \quad y=x^2, x\geq 0 \\ 0 & en\,otro\,caso \end{cases}$$

Esta función es continua en el origen y verifica que

$$z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$$

con lo que aparentemente tendríamos que $z = 0$ es un plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el origen. Pero esto es falso. En la figura 4 se aprecia que la recta tangente a la curva (t, t^2, t) en $t = 0$ no está contenida en el plano $z = 0$, y por tanto éste no es un plano tangente.

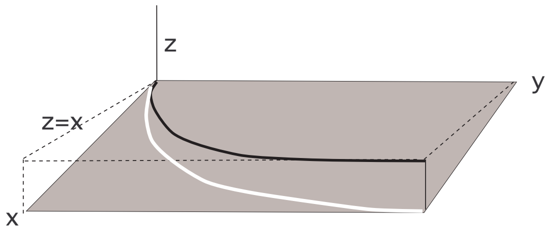


Figura 4

Observación: aunque podamos aplicar una fórmula, el resultado puede carecer de sentido.

Paso 3: damos el concepto de plano tangente unido al de la diferenciabilidad.

Extremos relativos condicionados de funciones de dos variables

En este caso usaremos la Opción I.

Cuando se introducen los extremos relativos, los alumnos no tienen problemas en comprender que el valor en un máximo relativo puede ser menor que el valor en un mínimo relativo.

Cuando se introducen los extremos relativos (tanto en funciones de una como de dos variables), los alumnos no tienen problemas en comprender que el valor en un máximo relativo puede ser menor que el valor en un mínimo relativo. Las figuras 5 y 6 ilustran este hecho.

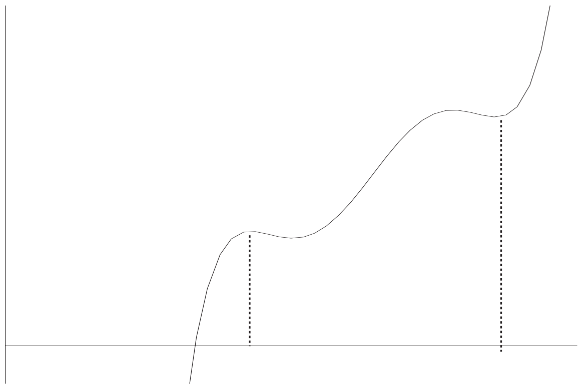


Figura 5

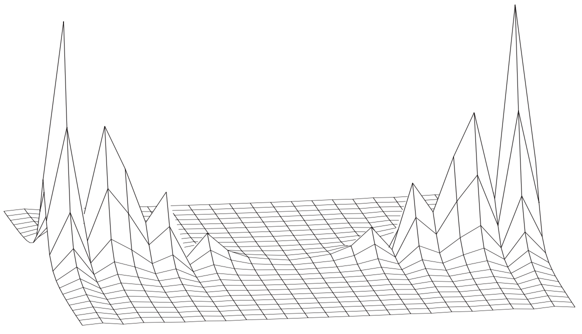


Figura 6

Es evidente que la misma situación se produce con los extremos relativos condicionados de funciones de dos variables. La figura 7 (Burgos, 1995, p. 180) ilustra la localización de los valores máximos y mínimos relativos de una función $z=z(x, y)$ cuando (x, y) recorre una cierta curva $g(x, y) = 0$.

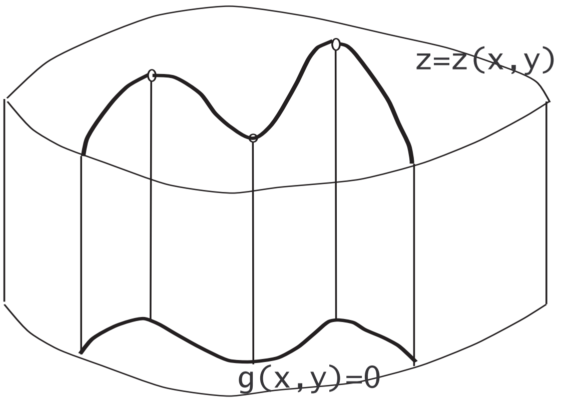


Figura 7

Parece lógico pensar que el valor de una función en un máximo relativo condicionado puede ser menor que el valor en un mínimo relativo condicionado. Sin embargo, en el método de los multiplicadores de Lagrange que se da en muchos libros de cálculo que manejan los alumnos, por ejemplo (Larson, 1995, p. 1075), se detalla que basta comparar los valores de la función en los puntos críticos de la Lagrangiana para saber donde están los máximos y los mínimos.

Paso 1: nos limitamos a la comparación de valores para la obtención de los máximos y mínimos.

Paso 2: damos el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 9
Tomemos la función:

$$z(x,y)=\frac{17}{8}x^3y-\frac{85}{4}x^2y+\frac{315}{4}x^3-\frac{265}{2}y+\frac{825}{8}x-\frac{117}{4}$$

cuando (x, y) recorre la parábola $y = x^2$. Los extremos condicionados coinciden con los de la función:

$$f(x)=z(x,x^2)=\frac{17}{8}x^5-\frac{85}{4}x^4+\frac{315}{4}x^3-\frac{265}{2}x^2+\frac{825}{8}x-\frac{117}{4}$$

Su gráfica en el plano está en la figura 8 (realizada con el programa Scientific WorkPlace).

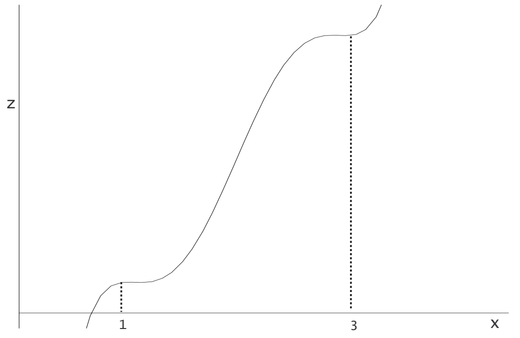


Figura 8

Esta función tiene un máximo relativo en el punto $x = 1$ de valor $f(1) = z(1, 1) = 1$, y un mínimo relativo en $x = 3$ de valor $f(3) = z(3, 9) = 9$. Por tanto en $(x, y) = (1, 1)$ hay un máximo condicionado, y en $(x, y) = (3, 9)$ un mínimo condicionado, y sin embargo, el valor en el máximo $z(1, 1) = 1$, es menor que el valor en el mínimo $z(3, 9) = 9$.

Paso 3: enunciamos correctamente el método de los multiplicadores de Lagrange (Burgos, 1995, p. 191).

Observaciones finales

Los ejemplos que se han expuesto muestran que las matemáticas van más allá de la simple aplicación de una fórmula. En los ejemplos 1, 2 y 3, vemos que la aplicación de un método, sin verificar si estamos en condiciones de aplicarlo, puede llevarnos a respuestas erróneas. En los ejemplos 4 y 8, observamos que las fórmulas de la derivada de la inversa y del plano tangente resultan demasiado tentadoras (nos basta con un simple cálculo de derivadas) como para preocuparnos de si se pueden aplicar o no. En los ejemplos 5, 6 y 7, vemos que una cosa son los métodos automáticos para soluciones generales y otra las condiciones particulares de un problema. Finalmente en el ejemplo 9, vemos que la excesiva simplificación en el enunciado de un teorema puede hacer que nos equivoquemos.

Resulta evidente que es imposible dar la versión más general de cada teorema que incluimos en nuestros temarios. El tiempo limitado o la escasa preparación de un sector de alumnos son factores que hacen que debamos buscar un necesario equilibrio entre los teoremas y las fórmulas. Quizás, a veces, no quede más remedio que sacrificar algunos aspectos teóricos o dar versiones más reducidas de ciertos teoremas. En ocasiones, conseguir el aprendizaje de ciertos métodos para la resolución de problemas cuesta tanto trabajo que nos damos por satisfechos con lograrlo. Aún en estos casos, en ocasiones especiales, podemos utilizar una de las propuestas de este artículo para hacer vislumbrar a nuestros alumnos la sutileza y belleza de las matemáticas.

En las referencias que se aportan, el lector interesado podrá encontrar un buen número de ejemplos relacionados con las cuestiones presentadas en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOVITZ, B., BEREZINA, M., BERMAN, A. (2002): "Incorrect but instructive", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 33, n.º 3, 465-475.

ABRAMOVITZ, B., BEREZINA, M., BERMAN, A. (2003): "Useful mistakes", Int. J. Math, *Educ. Science Technology*, vol. 34, n.º 5, 756-764.

BEREZINA, M., BERMAN, A. (2000): "Proof reading and multiple choise tests", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 31, n.º 4, 613-619.

BOAS, R. P. (1986): "Counterexamples of L´Hopital´s Rule", *Amer. Math. Monthly*, vol. 93, 644-645.

BURGOS, J. (1995): *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGraw-Hill.

CIPRA, B. (2000): *Misteakes... and how to find them before the teacher does*, A. K. Peters Ltd.

IONIN, Y. (1993): "On the derivative of the inverse function", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 24, n.º 1, 163-166.

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. (1995): *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2*, McGraw-Hill.

MARTÍNEZ, F., VINUESA, C. (2002): "A graphic study of the properties of real values functions of two variables", Int. J. Math. *Educ. Science Technology*, vol. 33, n.º 5, 733-739.

MOVSHOVITZ-HADAR, N., ZASLAVSKY, O. & INBAR, S. (1987): "An Empirical Classification Model for Errors in High Schools Mathematics", *J. Research Math. Educ.*, vol 18, n.º1, 3-14.

RICKERT, N. W. (1968): "A Calculus Counterexample", Amer. Math. *Monthly,* vol. 75.

SPIVAK, M. (1986): *Calculus*, Reverté.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Mabuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: -
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herranz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Albert Violant i Holz
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 41-50

El Tolmo de Minateda. Historia y Matemáticas

El presente artículo apunta, desde las matemáticas, distintas hipótesis para interpretar la composición de ciertos edificios de época medieval. En particular, los restos de una basílica visigoda situada en el yacimiento arqueológico del Tolmo de Minateda, Hellín(Albacete).

This article points, from mathematics, different theories to interpret the composition of some religious constructions from Middle Ages. Especially, the rests of a visigothic basilica, at the archaeological site of Minateda, Hellín(Albacete).

El Tolmo de Minateda, situado en las proximidades de Hellín(Albacete), es uno de los yacimientos arqueológicos más importantes de España. Se trata de un cerro amesetado, cuyas paredes actúan de muralla natural, cercano a una fuente de agua continua y en medio de lo que, hasta hace relativamente poco, ha sido un fértil valle.

Bajo dichas condiciones, no es de extrañar, que hayan dejado su testimonio particular prácticamente todas las culturas que han pasado por nuestra península: desde pinturas rupestres en sus inmediaciones, pasando por restos de la edad del bronce, necrópolis ibéricas, murallas romanas, almazaras rupestres islámicas, etc.

Pero fijémonos en una de las joyas de este yacimiento: los restos de una basílica visigoda, fechada en el s. VII de nuestra era. Son de gran relevancia, ya que quedan escasísimos ejemplos de esta entidad.

Nuestro objetivo, a partir de ahora, consistirá en ponernos en el lugar de aquel maestro de obra del s. VII, e intentar averiguar qué tipo de procedimiento pudo haber seguido para diseñar la basílica. Si deseamos indagar sobre su obra debemos tener presente su contexto cultural, que debió de estar muy influenciado por el imperio romano (todavía presente en Bizancio), o mejor dicho por la cultura greco-latina. Eran, dentro de los pueblos bárbaros, de los que tenían un mayor grado de romanización. Por otra parte, el hecho de que los visigodos hubieran ejercido como tropas auxiliares del imperio en la cuenca baja del Danubio, hace que su cultura también se vea impregnada de cierto orientalismo.

Figura 1. Basílica visigoda

Manuel García Piqueras
IES Aldonza Lorenzo
La Puebla de Almoradiel. Toledo

Figura 2. Vista del Tolmo de Minateda

La Escuadra Pitagórica

Pongámonos manos a la obra, y analicemos la planta de la basílica. En ella distinguimos tres naves principales, ábside en la cabecera, y un baptisterio a los pies (nave 14-C). Destacamos también, que el baptisterio está construido con un giro de unos 5º respecto a la perpendicular de las naves, debido posiblemente, a la existencia de una agujero a los pies, previo a la construcción del edificio (Cánovas, 2005).

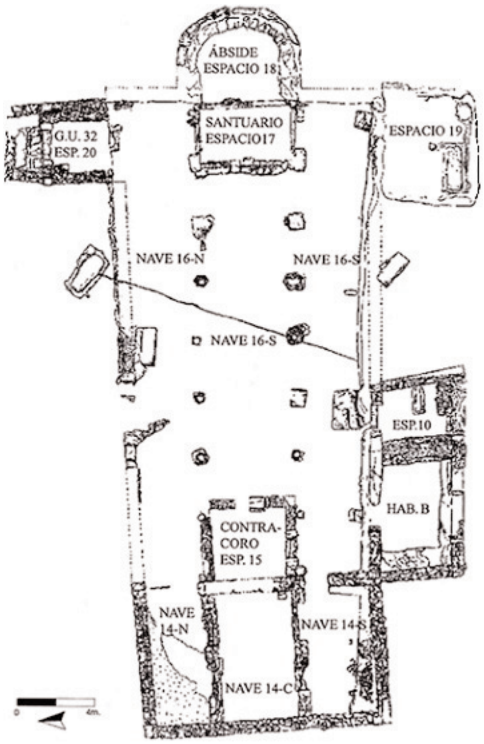


Figura 3. Planta de la basílica visigoda
(Abad, Gutiérrez, Gamo, 2000)

Sabemos que en la Antigüedad, y hasta la irrupción del sistema métrico decimal, la arquitectura seguía unos cánones de proporción puros. Veamos entonces qué método fué empleado para generar proporciones en dicho edificio. Para ello, probaremos con el método de la escuadra pitagórica que consiste en:

1. Tomar un cuadrado de lado la unidad y le adosamos otro cuadrado, cuya diagonal sea la unidad (figura 4).

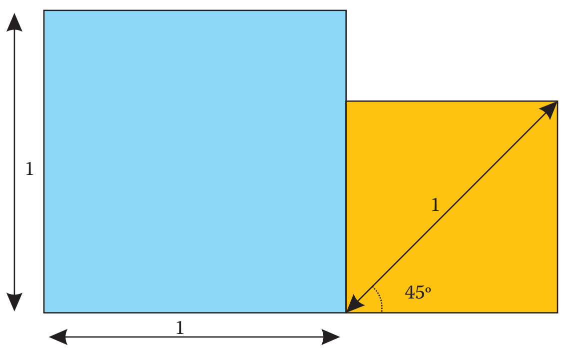


Figura 4

2. Así podemos construir un rectángulo, de lados 1 y $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (figura 5).

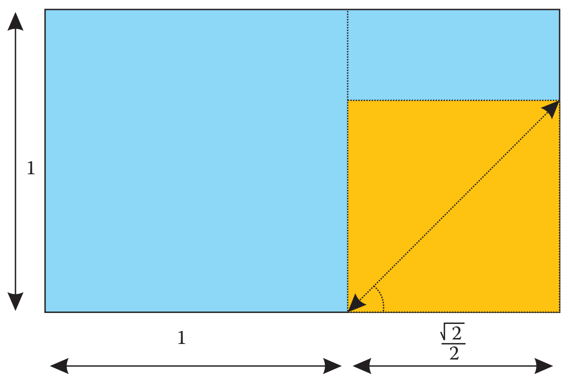


Figura 5

Éste método da lugar a nuestra primera noción.

Decimos que un rectángulo está en *proporción pitagórica*, cuando sus lados verifican

$$\frac{\text{LadoMayor}}{\text{LadoMenor}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En la figura 6, observamos cómo se aplica esta proporción a la planta de la basílica siendo éste un resultado aceptable (si tenemos en cuenta que de lo que se trata es de una aproximación).

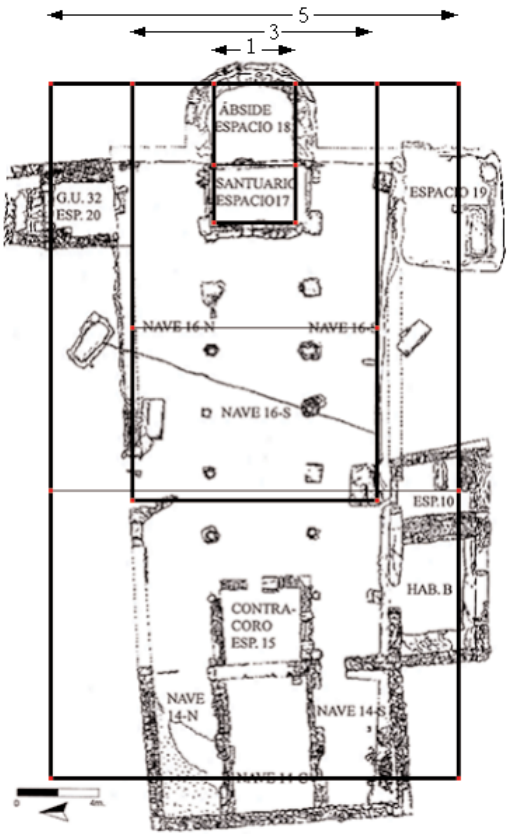


Figura 6. Composición de la basílica, según el método de la escuadra pitagórica

Hasta aquí hemos mostrado lo publicado hasta la fecha de escritura del presente artículo sobre la composición de la basílica (Cánovas, 2005). Partiendo de éste punto, se trató de aplicar estas ideas para elaborar una unidad didáctica que aprovechara las matemáticas presentes en dicha investigación arqueológica.

Sin embargo, nos asaltaba constantemente la siguiente duda: en una época de profunda espiritualidad, donde casi todo era utilizado como un símbolo, ¿encierra nuestra basílica algún secreto en la composición? Es obvio que estamos ante una planta cruciforme, aunque la simetría no se da exactamente, y a los pies aparecen unas estancias anejas que rompen la estructura cruciforme. Todo esto, parece indicar, que el hecho de ser cruciforme pasa a un segundo plano. Pero, ¿qué símbolo puede jugar el papel principal?

Buscando un símbolo

Iniciaremos nuestras indagaciones tomando un libro de Historia del Arte. Dentro del período dedicado al medievo, se pueden observar ilustraciones como las siguientes:

Figura 7. Pantocrator de San Isidoro de León

Figura 8. Frontal de la Seo de Urgell (M. del Arte de Cataluña)

Ambas figuras representan el *Pantocrator* que, generalmente, aparece situado entre el alfa y la omega, entre el principio y el fin, con su cabeza rodeada de una mandorla alusiva a la santidad, etc. Tenemos una representación cargada de simbología, pero, ¿de qué figura geométrica emerge el Pantrocrator de San Isidoro (figura 7)?, ¿tiene algún significado especial? Si todavía no tiene claro de qué figura se trata, el que exista en el frontal de la Seo de Urgell (figura 8) no ofrece dudas. Efectivamente, se trata de la intersección de dos figuras circulares y que formalizamos en nuestra siguiente noción.

Dadas dos circunferencias cuyos radios miden ambos una longitud r, y donde la distancia entre sus centros es también r, se llama *vésica* a la región comprendida entre ambas circunferencias.

Al segmento que une los centros de ambas circunferencias se le denomina *semieje menor* y al que une los puntos de intersección entre ambas *semieje mayor*.

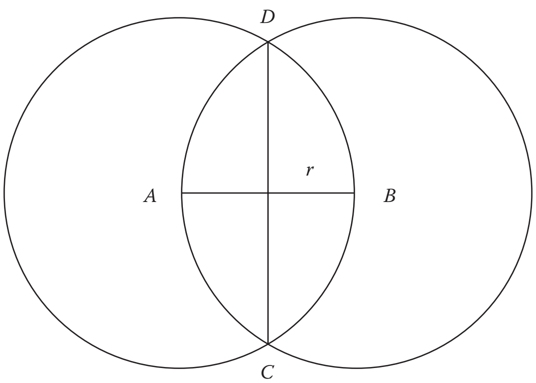


Figura 9. Construcción de la vésica

En cuanto a su posible significado, desde la Antigüedad ha sido utilizada por distintas culturas y religiones para expresar la intersección de dos opuestos; por ejemplo: lo divino y lo terrenal, el bien y el mal, etc. El catolicismo considera que Jesús de Nazaret es Dios hecho Hombre, de ahí que una figura ideal para representar algo perteneciente tanto a lo divino como a lo terrenal sea nuestra vieja conocida, la Vessica Piscis.

Pero no abusemos de interpretaciones y sigamos nuestra investigación. Para ello, nada mejor que estudiar las propiedades matemáticas de la vésica. No será materia banal puesto que no tardaremos mucho en aplicarlas.

Propiedad (Triángulos equiláteros circunscritos): La vésica circunscribe dos triángulos equiláteros que comparten un mismo lado.

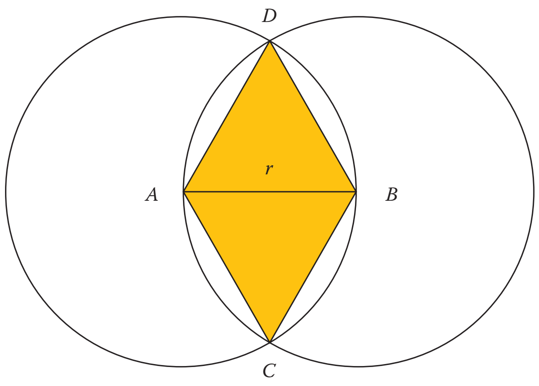


Figura 10. Triángulos equiláteros inscritos

Demostración: Puede comprobarse fácilmente, observando la figura 10 y teniendo en cuenta que por definición de vésica se ha de verificar

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{DA}$$

> *En una época de profunda espiritualidad, donde casi todo era utilizado como un símbolo, ¿encierra nuestra basílica algún secreto en la composición?*

Propiedad (Rectángulo en proporción $\sqrt{3}$): Todo rectángulo que circunscribe una vésica, está en proporción $\sqrt{3}$, es decir

$$\frac{LadoMayor}{LadoMenor} = \sqrt{3}$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos tomar la unidad como lado de los triángulos inscritos en la vésica, entonces aplicando Pitágoras es fácil ver que su altura es $\sqrt{3}/2$, de donde

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$$

Propiedad (Progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$): El proceso que consiste en tomar el semieje mayor de una vésica como semieje menor de una nueva, da lugar a una progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$.

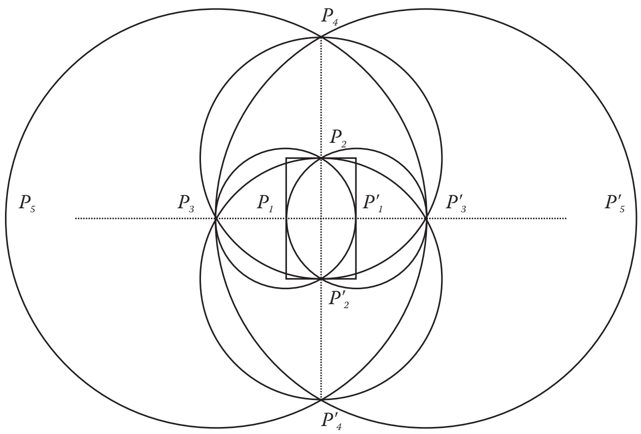


Figura 12. Vésicas encadenadas

Desde la antigüedad, la vésica ha sido utilizada por distintas culturas y religiones para expresar la intersección de dos opuestos: lo divino y lo terrenal, el bien y el mal, etc.

Demostración: Acabamos de ver que las medidas del rectángulo con ejes de simetría

$$\overline{P_1P_1'} \quad \text{y} \quad \overline{P_2P_2'}$$

(figura 12) están en proporción $\sqrt{3}$. Tenemos en ese caso que

$$\frac{\overline{P_2P_2'}}{\overline{P_1P_1'}} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{P_2P_2'} = \sqrt{3} \cdot \overline{P_1P_1'}$$

Razonando de manera análoga

$$\frac{\overline{P_3P_3'}}{\overline{P_2P_2'}} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{P_3P_3'} = \sqrt{3} \cdot \overline{P_2P_2'} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \overline{P_1P_1'}$$

En general podemos afirmar que

$$\overline{P_{n+1}P_{n+1}'} = \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot \overline{P_1P_1'}$$

Propiedad (La proporción $\sqrt{3}$ es dinámica): Todo rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, contiene a su vez, otros tres rectángulos en la misma proporción.

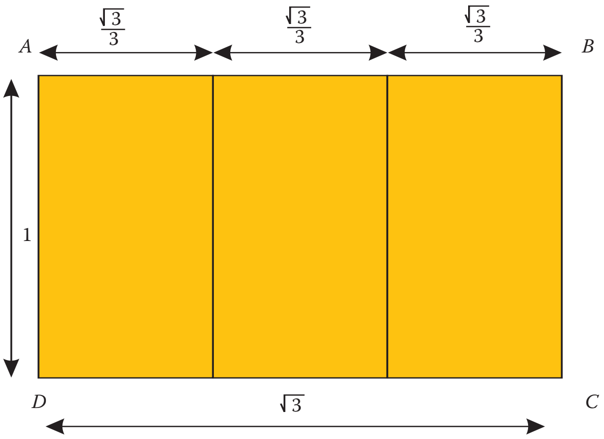


Figura 13. Proporción dinámica

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la unidad es la medida del lado menor del rectángulo

$$\overline{ABCD}$$

(figura 13) en proporción $\sqrt{3}$. Si dividimos el lado mayor, en tres partes iguales, obtenemos tres nuevos rectángulos donde se verifica que

$$\frac{LadoMayor}{LadoMenor} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Así, estamos ante tres nuevos rectángulos, con la misma proporción que el original.

Resumiendo, un rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, contiene tres nuevos rectángulos en la misma proporción, y cada uno de estos a su vez otros tres, también en la misma proporción. Este proceso podría prolongarse indefinidamente.

Aplicaciones

Todo este repaso geométrico de la vésica nos ofrece una nueva perspectiva en la composición de nuestra basílica visigoda (figura 14).

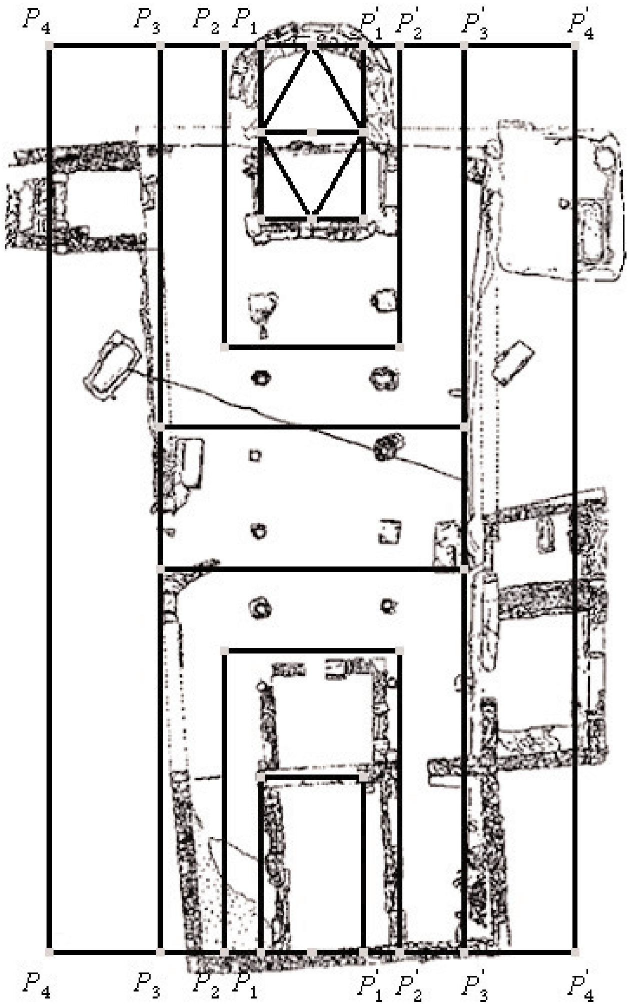


Figura 14. Composición según la proporción $\sqrt{3}$

Aparecen aquí encajados una serie de rectángulos en proporción $\sqrt{3}$, que marcan las estancias de una manera bastante aceptable.

Como vemos comparten eje de simetría, sus bases parten de la cabeza y los pies de la basílica, pero ¿cuál es la relación entre estos rectángulos? Como puede comprobarse, las bases de dichos rectángulos enlazan entre sí, sabiendo que están en progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$, comentada en el apartado anterior; es decir

$$\overline{P_4P_4^{'}} = \sqrt{3}\cdot\overline{P_3P_3^{'}} = \left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\overline{P_2P_2^{'}} = \left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\overline{P_1P_1^{'}}$$

Por otra parte, el arco de medio punto del ábside, tiene su centro en el del triángulo equilátero asociado a la vésica, como podemos observar en la figura 15.

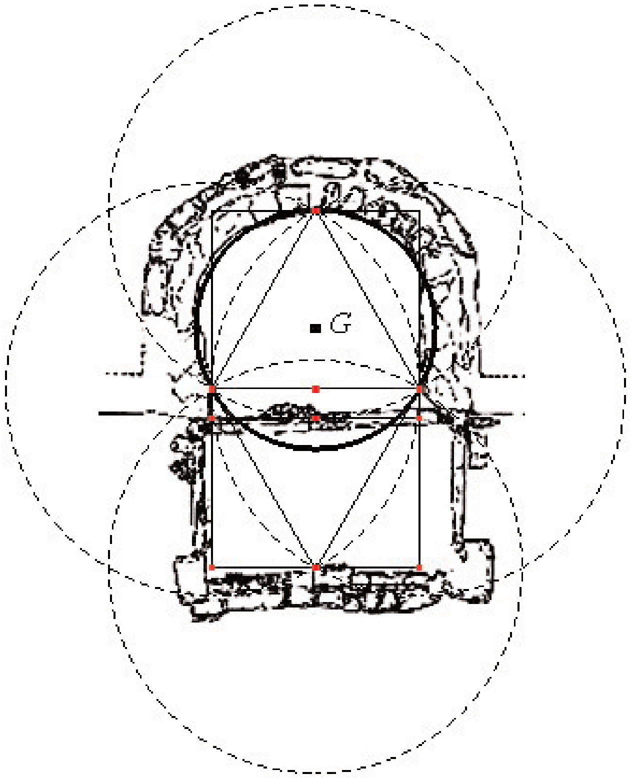


Figura 15. Arco del ábside con centro el del triángulo equilátero

El triángulo equilátero simboliza la *Trinidad* para el catolicismo y, bajo esta percepción, qué mejor candidato para ser centro de la circunferencia del ábside que aquel que equidista de los vértices de dicho triángulo.

Alguien podría pensar que esto parece estar en contradicción con la religión que profesaban los visigodos, el *arrianismo*, que podríamos decir que se trataba de una versión del cristianismo donde Jesús de Nazaret era considerado como *profeta* y no como *Hijo de Dios*. Sin embargo, nuestra basílica está fechada en el s. VII, posterior a la conversión al catolicismo de Recaredo en el año 587, es decir, todavía en el s. VI, por lo que no habría ningún problema político-religioso, para incluir un símbolo como el del triángulo equilátero.

Estamos, por tanto, en condiciones de afirmar que la composición de la basílica parece ajustarse de manera bastante aceptable a nuestro nuevo punto de vista.

Por otra parte, desde un punto de vista eminentemente práctico, marcar sobre el terreno las líneas necesarias, teniendo en cuenta los instrumentos disponibles en aquella época, es totalmente factible. Sólo necesitaríamos: cordel, postes, y una cuerda dividida en 12 partes iguales, para trazar perpendiculares (genera un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5). Este triángulo es llamado *sagrado* y es muy conocido por haber sido utilizado ya en la arquitectura egipcia.

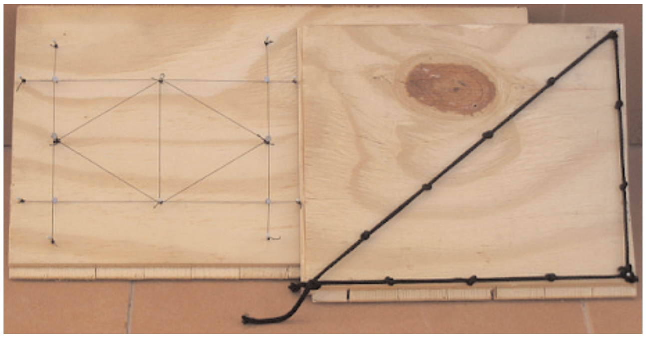


Figura 16. Construcción del rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, ayudado de la cuerda de 12 nudos

Parece evidente, que la construcción de las líneas maestras no debió revestir de una complicación extrema para aquella época. Además, variando la distancia entre los centros de las circunferencias que generan la vésica podemos aprovechar al máximo el solar disponible sin perder la proporción deseada.

Aún así, no podemos apartar la pregunta acerca de si todo esto es fruto de una feliz coincidencia geométrica.

La basílica del Tolmo está fechada en el s. VII, posterior a la conversión al catolicismo de Recaredo en el año 587, por lo que no habría ningún problema político-religioso para incluir un símbolo como el del triángulo equilátero.

Suponiendo esto último, ¿se repetirá en otras construcciones de la misma época? Para comprobar esta última cuestión, hemos analizado la composición de distintas construcciones visigóticas, tales como: Santa Comba de Bande (Orense), Recópolis (Guadalajara), San Juan de Baños (Palencia), San Pedro de la Nave (Zamora), Santa María de Melque (Toledo) y San Giao de Nazará (Nazaré. Portugal).

También en dichos edificios (figuras 17 a 21) podemos observar la proporción $\sqrt{3}$.

Santa Comba de Bande

Iglesia de difícil datación, al desconocerse el grado de remodelación producido en el s. IX. Planta en principio de cruz griega, con brazos de la misma longitud, aunque la prolongación del ábside y del atrio enfatiza el eje longitudinal.

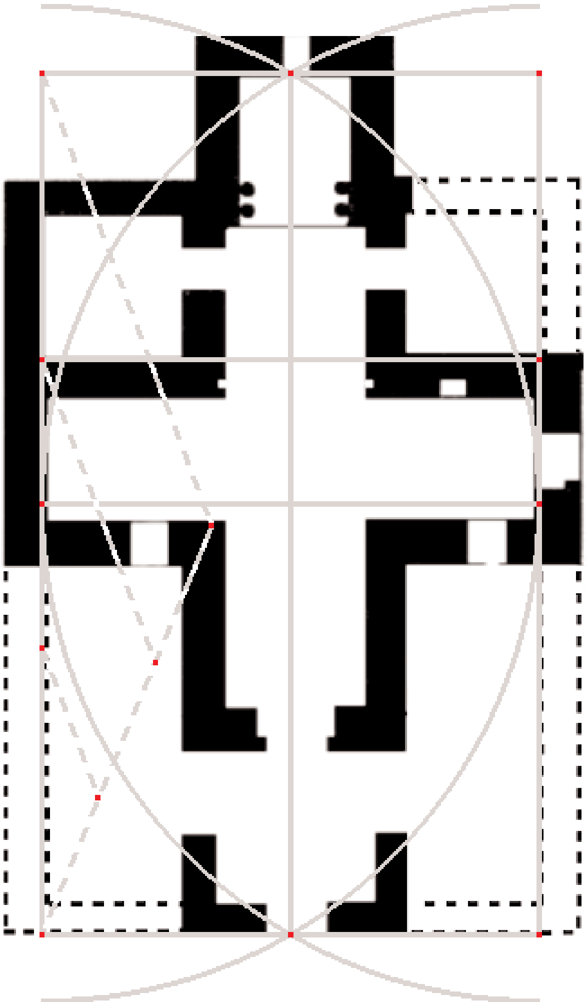


Figura 17. Santa Comba de Bande (Orense)

Recópolis

Su importancia radica en que es uno de los escasos núcleos urbanos que nos dejó la cultura visigoda. Tuvo una gran importancia como centro administrativo, político y económico.

Fue mandada construir por el rey Leovigildo en el año 578, en honor de su hijo Recaredo. Estamos, por tanto, en un período anterior al de su conversión al catolicismo. Se trata de la única iglesia que con seguridad puede decirse que fue de rito arriano. Observamos que, en esta ocasión, no se escogió como centro del ábside el centro del triángulo equilátero.

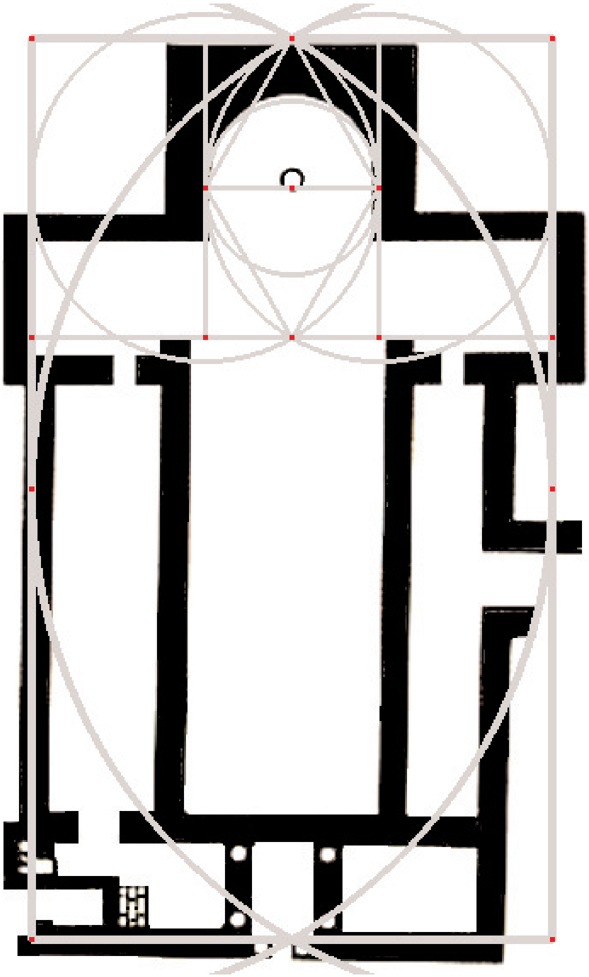


Figura 18. Recópolis (Guadalajara)

Las excavaciones arqueológicas han descubierto una cabecera bien distinta de la actual, aunque conserva el ábside central original.

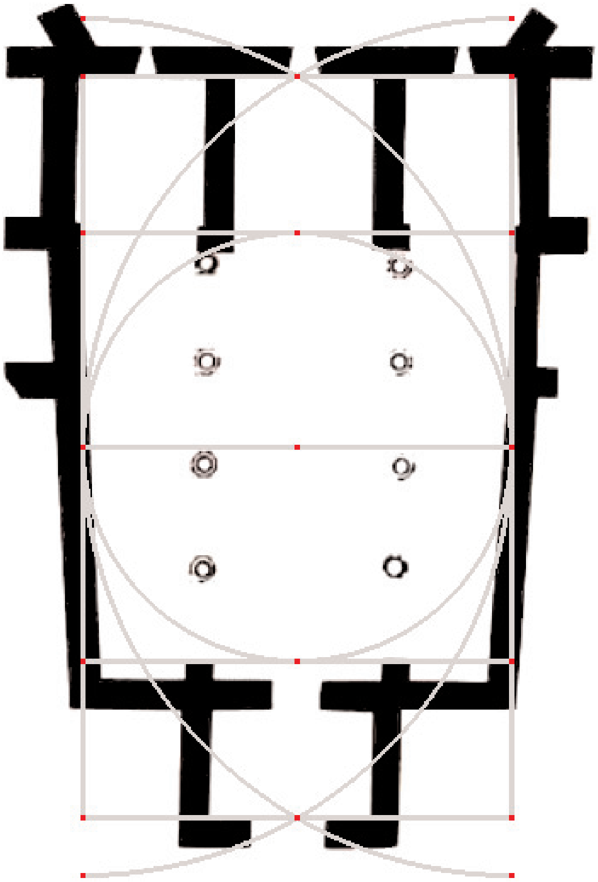


Figura 19. San Juan de Baños (Palencia)

San Juan de Baños

Su construcción puede ser fechada con exactitud en el año 661 debido a la inscripción situada en la parte superior del arco triunfal. Año en el que Recesvinto dedica la iglesia a San Juan Bautista.

San Juan de Baños (Palencia)

Figura 20. San Pedro de la Nave (Zamora)

San Pedro de la Nave
Construida en la segunda mitad del siglo VII, periodo en el que fueron construidos los edificios visigodos de mayor relevancia.

Planta de tres naves sobre la que se inscribe una cruz griega, todo ello encabezado por un ábside de la anchura de la nave central.

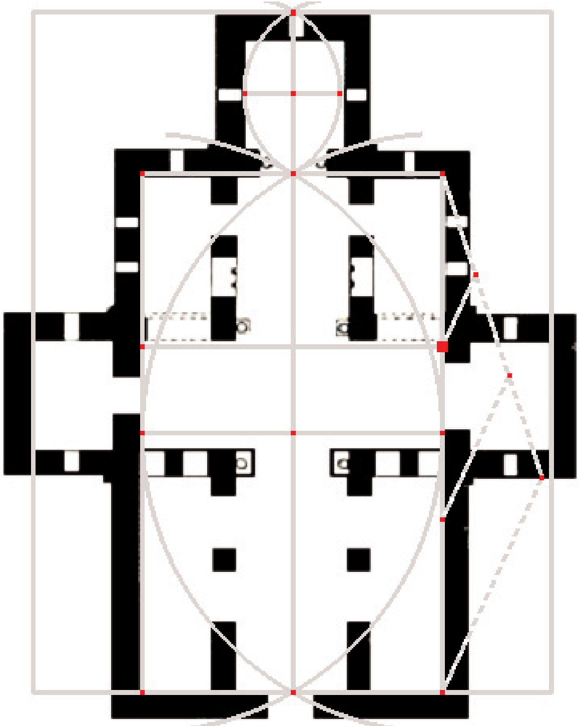


Figura 20. San Pedro de la Nave (Zamora)

La planta es claramente cruciforme, con los pies más alargados que el resto.

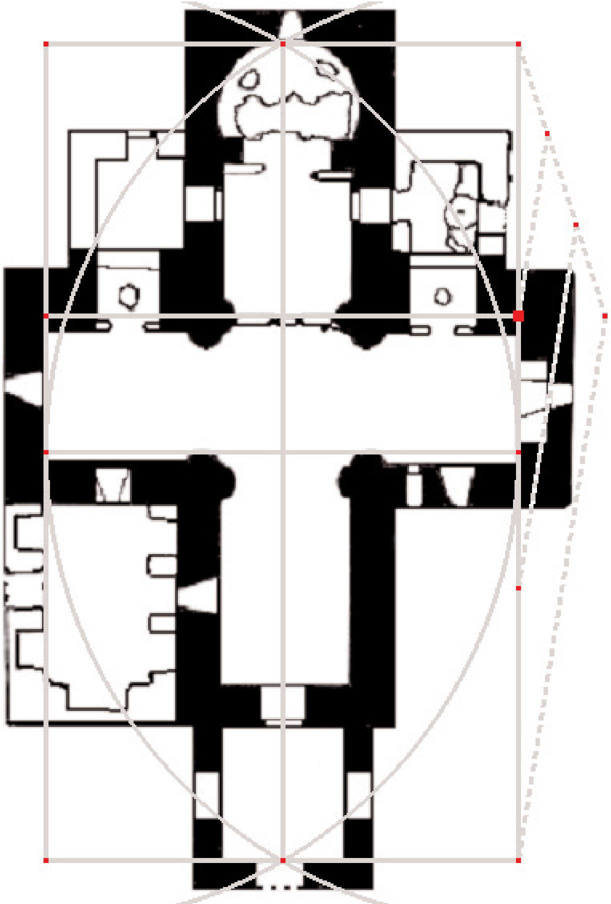


Figura 21. Santa María de Melque (Toledo)

Santa María de Melque
No se sabe prácticamente nada sobre su fundación, y es difícil de sintetizar su estilo arquitectónico.

Santa María de Melque (Toledo)

> *Cuando nos paramos a pensar que sus contemporáneos tenían a Isidoro de Sevilla (570-636) como el hombre más sabio de su época, podemos entender mejor el lamento de aquellos tiempos (...). Ésta fue verdaderamente la «Época Oscura» de la ciencia (...).*
> Boyer

San Giao de Nazaré

La iglesia de San Giâo de Nazaré, proporciona otra planta con solución de crucero. Se suele leer como una cruz inscrita en un cuadrado, del que sobresale la capilla mayor.

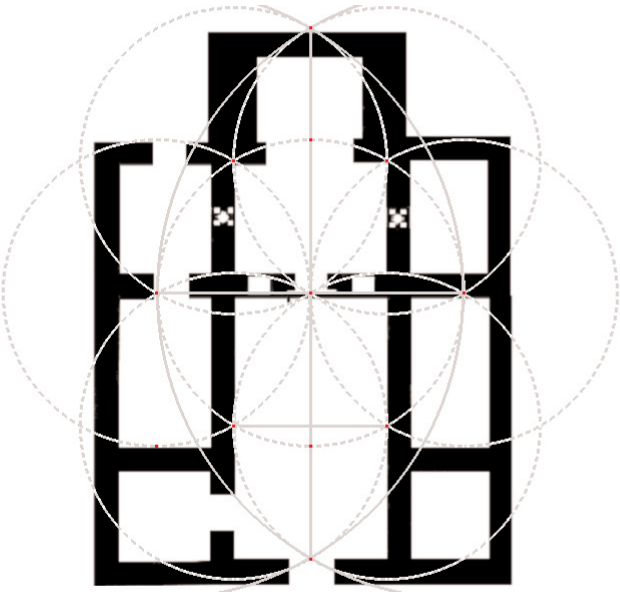


Figura 22. San Giao de Nazaré (Nazaré. Portugal)

Conclusión

¿Estamos viendo técnicas constructivas basadas en cánones geométricos donde no hay? Es posible. Sin embargo, la repetición del mismo concepto, en distintos edificios del idéntico período y condición, deja escaso margen para la duda. Todo parece indicar que, efectivamente, la Vessica Piscis es utilizada para darle al edificio un carácter *sagrado*.

> *¿Estamos viendo técnicas constructivas basadas en cánones geométricos donde no hay?*

Utilizando este aspecto y armado de imaginación, aquel maestro de obra pudo haber diseñado todas estas iglesias altomedievales. Bastaría con aplicar la misma receta e introducir pequeñas variantes en cada edificio, que es lo que le confería su personalidad particular a cada uno.

En cualquier caso, todo parece indicar que las construcciones seguían un diseño preestablecido de antemano y que aquella época oscura quizá no lo fuera tanto como se nos ha presentado:

> Cuando nos paramos a pensar que sus contemporáneos tenían a Isidoro de Sevilla (570-636) como el hombre más sabio de su época, podemos entender mejor el lamento de aquellos tiempos (…). Ésta fue verdaderamente la «Época Oscura» de la ciencia (…) (Boyer, 1986).

También es posible que no hayamos reparado en construcciones como las del Tolmo de Minateda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAD CASAL, L.; GUTIÉRREZ LLORET, S. y GAMO PARRAS, B. (2000): *La basílica y el baptisterio del Tolmo de Minateda (Hellín, Albacete)*, AespA.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza Ed., Madrid.

CÁNOVAS GUILLÉN, P. (2005): *El material cerámico de construcción en la antigüedad y la alta edad media: El Tolmo de Minateda (Hellín, Albacete)*, Instituto de Estudios Albacetenses Don Juan Manuel, Albacete.

HERGUEDAS LORENZO, M.A., GARCÍA TORRALBA, M.A. y ZAFRA CAMPS, J. (1992): *Historia del Arte*, Edelvives, Zaragoza.

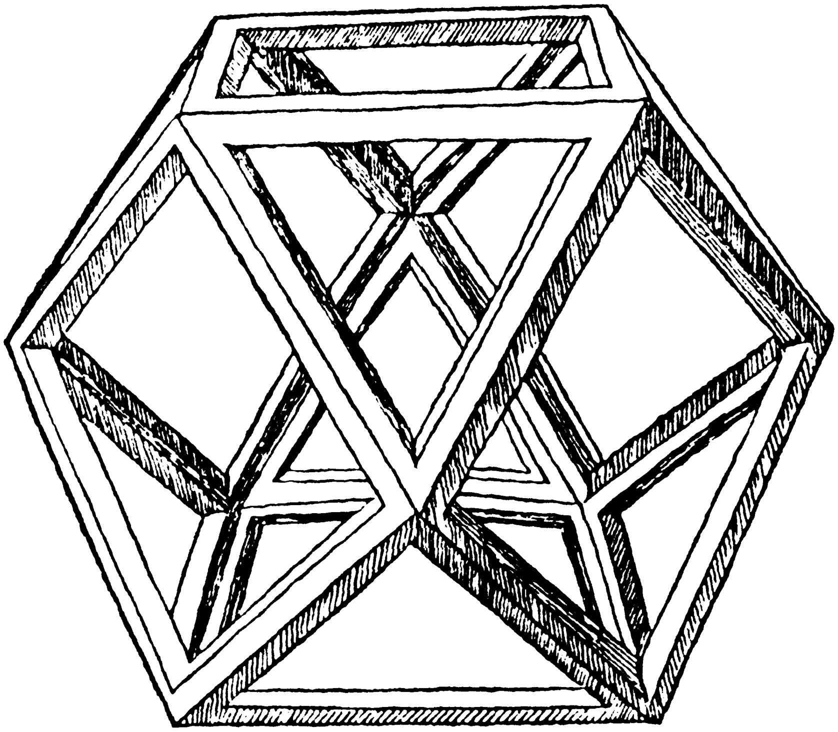
MANKIEWICZ, R., (2000): *Historia de las Matemáticas. Del cálculo al caos*, Paidós, Barcelona.

En Internet:

http://webs.ono.com/argopuebla

SUMA

poliedro



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 53-60

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV)

En el artículo anterior habíamos dejado a Ibn al-Banna (siglo XIII) en el Magreb, enunciando una fórmula que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al Triángulo, y a al-Farisi en Irán (ya a principios del XIV), utilizando esa herramienta matemática para determinar los órdenes numéricos y desarrollar una expresión combinatoria general de los números figurados[1]. En los tres artículos que siguen a continuación abordaremos las aportaciones del filósofo francés comparándolas con las obtenidas en clase. En los anteriores nos habíamos acercado al Triángulo Aritmético, a partir del álgebra y los recuentos, utilizando como recurso didáctico los problemas: *Coeficientes* y *El ratón Melquiades*. En este, *Bajo la atenta mirada de Alá* nos permitirá hacerlo de forma directa, analizando su estructura a través del estudio de sus propiedades. En los siguientes, la combinatoria será la protagonista.

Comenzaremos desarrollando como propuesta de trabajo una idea, presente también en la obra de Pascal: la de sembrar un 1 en un desierto de ceros.

Bajo la atenta mirada de Alá

Un día, recibió al-Mu'taman[2] un emisario del califa de Bagdad, era correspondencia habitual, nada fuera de lo común. Le hablaba de sus problemas y le informaba de rumores y certezas pero, sobre todo, le preguntaba por su obra, llamada a ser un compendio del saber matemático de la época en el oriente y occidente musulmán que, por aquel entonces era como decir en el mundo entero, si exceptuamos China e India. Pero había otra pregunta final que cerraba la misiva...

Billete de 500 FF, dedicado a Pascal

Hace mucho -decía el califa- que nuestros embajadores traen y llevan misivas de Saraqusta a Bagdag y siempre he querido pedirte que me cuentes cómo son tus desiertos, cómo tus oasis, tus ciudades, de dónde sopla el viento que arrastra las tormentas de arena... lo que me cuentan tus embajadores no me resulta creíble.

A lo que al-Mu'taman contestó: imagina el desierto como si fuera una página infinita de papel llena de ceros, ordenados

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

según el criterio de Alá, unos entre otros, una fila intercalada entre la otra. Imagina ahora que en esa estéril superficie se posa el dedo del creador e introduce un 1, un miserable 1. Pero los creyentes sabemos que la unidad en manos del Creador puede serlo todo. Por eso impone la condición de que se sumen ahora todas las filas de tal manera que la suma de dos elementos de una de ellas dé, como resultado, el valor intermedio de la siguiente... el fruto de esa sencilla operación es Al-Andalus.

El emisario tradujo con fervor quince propiedades de aquella fértil tierra, que Alá había bendecido, para ofrecer al califa como presente y quedó asombrado de la riqueza matemática de aquella estructura.

El Triángulo Aritmético (de Pascal)

Así titula el filósofo francés el breve tratado que dedica a esta *figura*, según su propia forma de designarlo. Allí, tras definir la estructura, va enunciando sus componentes una a una con objeto de poder referirse a ellas con posterioridad. En realidad trabaja con una "esquina" del rectángulo aquel que obteníamos al resolver el problema del ratón Melquiades.

No hace alusión alguna a la Combinatoria, lo que no le impide enumerar algunas de sus relaciones más características en función del trazado de filas (*rangos paralelos*) y columnas (*rangos perpendiculares*). Así, en su primera propiedad, enuncia: *En todo triángulo aritmético todas las células del primer rango paralelo y del primer rango perpendicular son iguales a la generatriz.*

Tras determinar como criterio de formación de cada célula la suma de las dos que le preceden en su fila y columna, aborda su demostración suponiendo, al igual que proponíamos en *Bajo la atenta mirada de Alá*, que las células "exteriores" del triángulo sean ceros. Si denotamos[3] con (n, m) el número que aparece en la intersección de la fila n con la columna m tendríamos que $(n, 1) = (n-1, 1) + (n, 0)$ y, como todos los dígitos de la fila y columna 1 son unos y los de la fila y columna 0 son ceros, tenemos que $(n, 1) = 1 + 0 = 1$. Con lo que

$$(n, 2) = (n\text{-}1, 2) + (n, 1) = n-1 + 1 = n.$$

Esta sencilla propiedad sintetiza el modelo argumentativo de Pascal cuyo Triángulo, en lo que se refiere a la disposición de los números, se aleja claramente de la tradición china y se sitúa mucho más cerca de la árabe.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Figura 1

Preocupado en exclusiva por *demostrar las verdades ya descubiertas y aclararlas de tal manera que la prueba resulte irrefutable* [...] *disponiendo las proposiciones en el orden más apropiado*[4], el filósofo francés se apoya habitualmente en un ejemplo, y en una notación semisintética, para generar un razonamiento, que en el caso que antecede, sería[5]:

1G	1σ	1π	1λ	1μ	1δ	1ε
1φ	2γ	3θ	4R	5S	6N	
1A	3B	6C	10ω	15ξ		
1D	4E	10F	20ρ			
1H	5M	15K				
1P	6Q					
1ν						

Figura 2

φ igual G + *cero, es decir, φ igual G*
Así, A *igual* φ + *cero, es decir,* φ
Así, σ *igual* G + cero, *y* π *igual a* σ + cero
y así para las demás.

Limitado por la ausencia de una buena notación, raramente se sale de este esquema, aborda la demostración de forma general o utiliza un proceso de inducción completa.

Pero, al margen de todo ello, lo que nos preocupa en este artículo es saber ¿cuáles son en realidad las propiedades que aporta Pascal en su tratado? Esas que, se supone, fueron mérito suficiente para que el eurocentrismo militante asociase su apellido al nombre de lo que él mismo denomina: Triángulo Aritmético.

La primera es señalar que no tiene por qué ser 1 su generador. En ese desolado desierto de ceros podríamos haber sembrado una cantidad cualquiera. El resultado hubiera sido otro triángulo, idéntico al que nos ocupa, pero en el que cada uno de sus términos quedaría multiplicado por ese número inicial.

En este artículo nos acercamos al Triángulo Aritmético analizando su estructura a través del estudio de sus propiedades.

La segunda[6], es la definición del propio criterio de formación: $(n, m) = (n, m\text{-}1) + (n\text{-}1, m)$. A partir de ahí se dedica a hacer un análisis empírico de las propiedades que va encontrando, en nada diferente del comportamiento de nuestros alumnos cuando les pedimos, en *Bajo la atenta mirada de Alá,* que busquen en él quince propiedades. Ausente por completo de su discurso el criterio de *inducción completa*, la aportación de una cantidad suficiente de ejemplos constituye tanto para Pascal como para la mayoría de nuestros alumnos y alumnas de 4º de ESO, esa prueba irrefutable a la que aludía el filósofo francés.

Así enuncia la *consecuencia II*[7]: *Cada célula es igual a la suma de todas aquellas del rango paralelo precedente comprendidas desde su rango perpendicular hasta el primero inclusive.* Carente, como hemos señalado antes, de una eficaz notación sintética, el enunciado resulta farragoso. Mucho más didáctica es la presentación de Adriana Muñoz y Diana Lorente en *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular,* un trabajo de búsqueda sobre el Triángulo Aritmético, que obtuvo un meritorio tercer premio en el XIV Congreso Nacional de Jóvenes Investigadores. Ellas sí poseen una notación precisa y sintética a la hora de expresar sus resultados.

- **Propiedad 4**

1
1 1
+1 2 1
1 +3 3 1
1 4 +6 4 1
1 5 10 +10 5 1
1 6 15 20 +15 6 1
1 7 21 35 =35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

Ellas necesitaron de los desarrollos factoriales para conseguir esa *prueba irrefutable* de la que habla Pascal:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{k!}-\frac{(n+k+1)(n+k)\ldots(n+2)}{k!}=0$$

Sacando factor común, entre los dos últimos miembros tenemos:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{k!}((n+1)-(n+k+1))=0$$

luego:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{k!}k=0$$

o sea:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)}{(k-1)!}-\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{(k-1)!}=0$$

y repitiendo todo el rato lo mismo llegamos a

$$1-1=0$$

La *consecuencia III* de Pascal es copia de la anterior: *Cada célula iguala la suma de todas aquellas del rango perpendicular precedente comprendidas desde su rango paralelo hasta el* *primero inclusive*. Un enunciado que podría haber evitado en base a la disposición simétrica de los números en el Triángulo. Una distribución evidente y que, sin embargo, enuncia como *consecuencias V y VI* a pesar de la ya referida autoexigencia de *disponer las proposiciones en el orden más apropiado*.

Nos preocupa en este artículo saber cuáles son en realidad las propiedades que aporta Pascal en su tratado. Esas que fueron mérito suficiente para que el eurocentrismo militante asociase su apellido al nombre de lo que él mismo denomina Triángulo Aritmético.

Siguiendo el modelo de Adriana y Diana, al que estamos más acostumbrados, la *consecuencia IV* del filósofo francés Pascal quedaría así:

+1
+1 +1
+1 +2 +1
1 +3 +3 +1
1 4 +6 +4 +1
1 5 10 +10 +5 1
1 6 15 20 +15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 =56-1 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\dots+\binom{n}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\dots+\binom{n+1}{1}+\dots$$

$$\dots+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n+k}{k}=$$

$$=\binom{n+k+2}{k+1}-1$$

Pascal, insistimos, sin recurrir al método de inducción completa ni a la combinatoria, hace un razonamiento de este tipo: La suma de las celdas de la primera diagonal (la de los unos) es igual a 5. La suma de la segunda es igual a 15 y la de la tercera a 35 pero, por la propiedad anterior 1+5+15+35=56 luego 5+15+35=56-1.

Un modelo perfectamente generalizable, a pesar de que se apoye en un ejemplo particular. Un tipo de razonamiento absolutamente habitual en clase, que alabamos en Pascal y censuramos con dureza en el aula, reclamando otro más riguroso (algebraico para ser más exactos) y completo. Hemos insistido muchas otras veces en este tema de exigir un rigor suficiente y adaptado a cada edad y momento, pero lo volveremos a hacer: ¿quién tiene necesidad de ese grado sumo de formalismo? El alumnado no, el profesorado tampoco, nosotros como seres humanos parece ser que mucho menos, ¿entonces?... Sí, no cabe duda que fue la tradición euclidiana y burbakista la que nos generó una urgencia tal. Grabada a fuego en nuestras mentes por las universidades que expidieron nuestros títulos y nos adoctrinaron en la disciplina, hemos sido sus más fieles vasallos. Convertida en objetivo único parecemos empeñados en perpetuar la historia de unos estudios que fueron incapaces de darnos vida como matemáticos.

Esta *cuarta consecuencia* del filósofo francés no apareció en clase ni la hemos encontrado en el excelente libro de D. Seymour [1986]. Quizás porque su formulación surge con mucha más facilidad si se estudia un “Rectángulo Aritmético” como el que utilizó Pascal, que si se colocan los números en la disposición de Chu, o incluso en las de al-Karagi o ibn Mun’im[8].

A Pascal de la mano del alumnado

Para mostrar las *consecuencias VII, VIII* y *IX* aprovecharemos igualmente la presentación que de ellas hacen Diana y Adriana, en las propiedades 3 y 10 de *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular*.

- **Propiedad 3**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
+1 +4 +6 +4 +1 2^4
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Analicemos la demostración de Pascal, dice así: *La primera es la unidad, la segunda es el doble de la primera, por lo tanto 2; la tercera el doble de la segunda, por lo tanto 4; y así al infinito.* Las alumnas, sin embargo descubren además que cada fila, leída como si fuera un único número[9], es una potencia de 11 (ver Propiedad 2) y que el resultado de multiplicar un número por 11 no es otro que el de sumar sus cifras, dos veces[10]. Resulta obvio entonces que cada fila sume el doble que la anterior y que esa suma haya de ser una potencia de dos.

- **Propiedad 10**

+1
+1 +1
+1 +2 +1
+1 +3 +3 +1
+1 +4 +6 +4 +1 2^5-1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{1}{1}+\ldots+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n+1}-1$$

Aquí, el exordio de Adriana y Diana es, en todo, coincidente con el de Pascal. Dicen ellas: *La demostración resulta evidente puesto que es la suma de la progresión geométrica de las diferentes potencias de 2 que habían salido en la propiedad 3.*

Enuncia ahora Pascal una serie de *consecuencias* que merece la pena reseñar por su originalidad. La que enumera como *X* se podría enunciar así[11]: Si tomamos un número cualquiera de células consecutivas de una fila, desde su inicio, su suma es igual al doble de la suma de otras tantas de la fila anterior, después de restarle la última. Es decir:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}=$$
$$=2\cdot\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{k}\right)-\binom{n-1}{k}$$

Un análisis superficial de las filas pares permite observar que, sus células centrales son, todas ellas, múltiplos de dos. Una consecuencia que se deduce de forma evidente del hecho de cada una de esas células centrales es suma de otras dos de la fila precedente que, por simetría del Triángulo, han de ser iguales. Esta es la que Pascal enuncia como *consecuencia XI.*

Las que siguen son propiedades mucho más ajenas, si cabe, a nuestra experiencia docente, puesto que aluden a los cocientes entre diferentes términos del triángulo. La *consecuencia XII*, expresada en notación combinatoria, dice:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}=\frac{k+1}{n-k}$$

Y, efectivamente,

$$\frac{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}}=\frac{k+1}{n-k}$$

Pero Pascal razona de otro modo y, por primera vez, hace uso del proceso de inducción completa, apoyándose, una vez más, en la propia definición de las células del Triángulo como suma de las dos que le preceden.

Las *consecuencias XIII, XIV* y *XIX*, expresadas también en forma combinatoria, serían:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n-k+1}{n+1}\quad,\quad\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}=\frac{k+1}{n+1}\quad\text{y}\quad\frac{4\cdot\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}$$

Pascal, como cualquier alumno o alumna que se acerca al Triángulo Aritmético, parece haber sacado la impresión de que el número de propiedades que encierra es ilimitado y que cada nueva regularidad que encuentras parece más bonita que la anterior. Advierte: ...dejo muchas más de las que doy; es una cosa extraña hasta qué punto es fértil en propiedades. Todo el mundo puede ejercitarse en ello.

Las que llevan los números *XV, XVI, XVII* y *XVIII* son corolario de las numeradas como *II* y *XII*. Quizás por ello, Pascal termina esta descripción diciendo: *Se pueden extraer de ahí muchas otras propiedades que suprimo puesto que cada uno puede concluirlas fácilmente, y aquellos que desearan hacerlo* *encontrarán algunas más bellas que las que yo pudiera dar*[12]. Como prueba de sus palabras recogemos la *propiedad 11* del trabajo de Adriana y Diana.

• **Propiedad 11**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Si vamos dividiendo ordenadamente los números alternos en azul vamos obteniendo el cociente de los consecutivos, en rojo. Con lo que tenemos que

$$\frac{\binom{n}{n-1}}{\binom{n+2}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-1}}{\binom{n+2}{n}}$$

que se puede demostrar porque

$$\frac{n}{n+2}=\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

pero, podemos pasar a comparar el resto de las filas y entonces ***¡¡¡oh sorpresa!!!****, entre la segunda y la tercera también funciona una cosa parecida:*

$$\frac{\binom{n}{n-2}}{\binom{n+3}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n+3}{n}}$$

que se puede demostrar por el mismo razonamiento y que nos lleva, de forma general, a que se tendría que cumplir que

$$\frac{\binom{n}{n-k}}{\binom{n+k+1}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-k}}{\binom{n+k+1}{n}}$$

Y, efectivamente, con su acostumbrado método factorial, demuestran que se cumple.

No podemos saber si esa emoción que destilan Adriana y Diana fue compartida por el estudioso francés; ahora bien, de lo que no cabe duda es de que Pascal, como cualquier alumno o alumna que se acerca al Triángulo Aritmético, parece haber sacado la impresión de que el número de propiedades que encierra es ilimitado y que cada nueva regularidad que encuentras parece más bonita que la anterior. Cuando hace referencia a sus distintos usos advierte: *...dejo muchas más de las que doy; es una cosa extraña hasta qué punto es fértil en propiedades. Todo el mundo puede ejercitarse en ello*[13].

Y es cierto, cada nueva manera de asomarse a él encierra un filón interminable de propiedades. Una bonita colección de ellas podemos ver en D. Seymur [1986] aunque nosotros seguimos prefiriendo el minucioso análisis de Adriana y Diana.

• **Propiedad 2**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 **14641=11^4**
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$(10+1)^n$

Es decir: cada fila contendría los dígitos de una potencia de 11 si no hubiera llevadas: $11^0=1$; $11^1=11$; $11^2=121$; *etc. En base 11 serían los números 1, 10, 100, etc.*

• **Propiedad 5**

1
−1 +1 =0
−1 +2 −1 =0
−1 +3 −3 +1 =0
−1 +4 −6 +4 −1 =0
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$(1-1)^n = 0$

• **Propiedad 6**

Aquí vamos cogiendo los números intercalando la filas, como si miráramos por los huecos que dejan filas y columnas o sea, al “bislai” o, como dicen los viticultores de nuestra tierra, “al tresbolillo”. Cada color representa el resultado de esa mirada y todo lo que se ve en una misma línea se suma. El resultado es la sucesión de Fibonacci.

1 **1** 1 **2**
1 1 **3** **5**
1 2 1 **8** **13**
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

• **Propiedad 7**

1
1 1
1^2 $+2^2$ 1^2
1 3 3 1
1 4 **=6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

• **Propiedad 8**

1
1 1
×1 **×2** 1
×1 3 **×3** 1
1 **×4** **×6** 4 1
1 5 **×10** **×10** 5 1
1 6 **×15** 20 **×15** 6 1
1 7 21 **×35** **×35** 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+2}\cdot\binom{n+2}{k+1}\cdot\binom{n+2}{k+2}$$

es un cuadrado perfecto

• **Propiedad 9**

1
1 1
1 2 1
1 **+3** **+3** 1 **$=4^2$**
1 **+4** **+6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 **+6** **+15** 20 15 6 1 **$=7^2$**
1 **+7** **+21** 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{1}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=$$
$$=X_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$$

Donde X_{n+1} es el (n+1)-ésimo número cuadrado.

Acerca de los órdenes numéricos

En cualquier caso, debemos señalar que el primer acercamiento de Adriana y Diana al Triángulo se fraguó en el estudio de los *números con forma, números figurados* o, como dirá el propio Pascal, *órdenes numéricos*. A las aportaciones que hiciera el sabio francés en este campo dedicaremos el próximo capítulo de esta larga serie de entregas que venimos agrupando en torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Antes debemos aclarar que el verdadero interés que motivó la investigación de Diana y Adriana, hoy estudiantes de medicina y fisioterapia respectivamente, la clave que les hizo persistir en su búsqueda fue la distribución fractal, en esta estructura matemática, de los múltiplos de un número cualquiera (para ellas primo o potencia de primo). Aunque, quizás, lo que las hizo merecedoras del galardón fue el haber sido capaces de generar Triángulos Aritméticos diferentes y tratar de buscar en ellos las propiedades que compartían con el de Pascal. Pero de eso hablaremos en otro momento.

Llegados a este punto y a estas alturas del discurso, si algo resulta evidente es: por una parte, su interés didáctico y por otra que ni sus orígenes ni el estudio que el sabio francés hizo de su estructura justifican que el Triángulo Aritmético lleve su nombre. Más bien al contrario, tanto por la diversidad de usos que se le ha dado como por las propiedades que encierra, si de algo es símbolo es de universalidad.

NOTAS

1 La misma época en que Chin Chiu Shao realiza un estudio en profundidad del mismo y Chu Shih Chieh lo utiliza para resolver ecuaciones de orden superior en El precioso espejo de los cuatro elementos.

2 No tenemos datos para afirmar que al-Mu'taman escribiera acerca del Triángulo Aritmético. Son las afirmaciones de Ahmed Djebbar (1995), acerca de que estaba informado de los aspectos esenciales de la producción científica árabe de su época y de épocas anteriores, y la influencia que su obra parece haber tenido en la de Ibn al-Banna e Ibn-Muncim, a tenor de sus propios testimonios, las que nos sugirieron la idea de novelar esta historia que nos permite reflexionar en clase sobre la producción científica del magreb y al-Andalus entre los siglos VIII y XV.

3 Pascal no recurre a esta notación que hoy nos resulta tan familiar y asociamos a la geometría cartesiana.

4 Reflexiones sobre la geometría en general en PASCAL, B., 1996, *Ensayos. Correspondencia. Pensamientos*, Ediciones 29, San Cugat del Vallés (Barcelona)

5 Pascal introduce letras para designar los distintos elementos del triángulo, pero con ello no aporta ningún tipo de generalidad. Sirven, exclusivamente para designar, de forma diferente, números que pueden ser iguales.

6 En realidad introduce otras propiedades relacionadas con la posición de las cifras. Sin respetar en rigor el enunciado del autor, serían las siguientes:

a. Una célula y su recíproca tiene sus rangos, vertical y horizontal, invertidos, es decir si una es (n, m) la otra es (m, n) .
b. Dada una célula (n, m) todas las que conforman con ella una misma base (líneas punteadas en figura 2) verifican que la suma de sus rangos es $n+m$ y sobrepasa en una unidad al de la base.
c. Cada base contiene una célula más que la anterior y el número de células que contiene coincide con su rango.

7 Así denomina Pascal los resultados que va obteniendo: consecuencia I, II, III, etc. Adriana y Diana utilizarán: Propiedad 1, 2, etc.

8 Ahmed Djebbar [2001].

9 $1= 11^0$, $11= 11^1$, $121= 11^2$, $1331= 11^3$, etc.

10
$$\begin{array}{r} 1331 \\ \underline{\times 11} \\ 1331 \\ \underline{1331} \\ 14641 \end{array}$$

11 Hemos modificado su redacción adaptándola a un modelo expositivo mucho más actual.

12 Concluye el párrafo con el siguiente aserto: *Termino por tanto con el problema siguiente, que completa este tratado: Dados los exponentes de los rangos perpendicular y paralelo de una célula, encontrar el número de la célula sin utilizar el Triángulo Aritmético*. Que nosotros traduciríamos como: encontrar el término que ocupa lugar $k+1$ de la fila n sin hacer uso de la combinatoria, y que nos devuelve al Magreb, al siglo XIII y a la figura de Ibn al-Banna.

13 Hacerle caso es una apasionante aventura didáctica, que es posible disfrutar gracias a que los libros de texto nos han hurtado esas propiedades de forma sistemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a la ya citadas en los artículos anteriores:

SEYMOUR, D., 1986, *Visual Patterns in Pascal's Triangle*. Dale Seymour Plublications. Palo Alto (California).

DJEBBAR, Ahmed, 1995, "La contribution Mathématique d' Al-Mu'taman et son influence hors d'Al-Andalus" en *Actes du colloque international sur «Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat»*, pp. 35-46. Edita CIHSO (J. Cassinet), Toulouse.

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 61-63

La carrera de caballos

En la enseñanza matemática correspondiente a los niveles no universitarios, especialmente en Secundaria, el Azar y la Probabilidad representan, sin lugar a dudas, la hermana pobre. Los temas de ese bloque, estratégicamente colocados siempre al final de los libros de texto, son obviados con frecuencia por compañeros que no suelen sentirse a gusto en esa parte de la matemática. Dado que los temarios son muy amplios, en cuanto nos encontramos con algún tropiezo que nos ralentice la marcha de la asignatura, quien sale perjudicada es la probabilidad. Muchos profesores que se llevan las manos a la cabeza si sus alumnos no saben resolver inecuaciones en Secundaria, no tienen ningún reparo en no explicar nunca el bloque de probabilidad, a pesar de que la Estadística y el Azar están entre las partes de la matemática más utilizadas en la vida cotidiana que nos rodea.

Muchos profesores, especialmente el Grupo Cero de Valencia, han estudiado y desarrollado juegos que sirven para introducir de una forma lúdica esta parte. Algunos de ellos los repasaremos en esta sección.

Dentro de la clasificación que realiza la profesora Ana García Azcarate en juegos preinstrucionales, coinstrucionales y postinstrucionales, la mayoría de los juegos de probabilidad puede incluirse en el primer grupo, es decir no se necesita haber impartido ningún contenido probabilístico para poder comenzar a utilizarlos. Son juegos en los que el alumno puede comprobar fácilmente que aunque en un fenómeno probabilístico antes de realizar el experimento no pueda saberse a ciencia cierta qué va a salir, la actividad aleatoria se rige por unas reglas que es posible conocer.

La carrera de caballos

Este juego es quizás el más conocido pues aparece en muchos libros de texto utilizando todo tipo de elementos: caballos, motos, caracoles, etc. Aunque la versión más conocida utiliza la suma de dados, existe otra versión donde se trabaja con la diferencia que también veremos aquí. Esas dos modalidades suelen utilizar tableros distintos, uno con dorsales del 1 al 12 para la suma y del 0 al 6 para la diferencia, sin embargo nosotros preferimos utilizar un solo tablero ampliado.

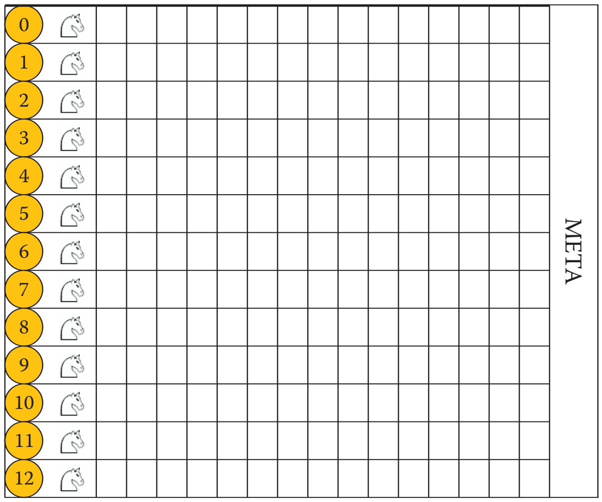


Figura 1

Carrera con la suma
Material: Dos dados cúbicos, una ficha (de colores distintos) para cada alumno y un tablero como el de la figura 1.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

Forma de jugar:

a. Cada jugador elige un caballo y coloca su ficha en el redondel con el número correspondiente. No puede haber dos jugadores con el mismo caballo. Si no se ponen de acuerdo se lanzan primero los dos dados y eligen según la puntuación que hayan sacado.
b. Por turno, cada jugador lanza los dos dados y suma los números que salen. El caballo cuyo dorsal coincide con esa suma avanza una casilla (aunque no sea el del jugador que ha lanzado los dados).
c. Gana la partida el jugador cuyo caballo llega primero a la meta.

Carrera con resta

Es igual en todo a la anterior con la salvedad de que en el apartado b) se realiza la diferencia entre los valores que han salido en los dados y avanza el caballo con el dorsal que corresponde a esa resta.

Aspectos educativos:

1. Nosotros preferimos utilizar un solo tablero para los dos juegos ya que de esa forma dejamos abierta la posibilidad de que algún alumno, sin pararse a pensar, elija un dorsal no válido, lo que descubre cuando comienza a jugar.

2. El número de jugadores puede variar, aunque es aconsejable que no sea superior a seis, sobre todo en la segunda opción porque si no algún jugador debe elegir un caballo que no se moverá.

3. Si juegan tres o cuatro jugadores en la versión de la suma, se encontrarán que muchas veces sale un valor de la suma correspondiente a un caballo que no ha elegido nadie, por lo que bastantes tiradas no servirán para que avance ninguno de los caballos seleccionados. Una forma de solucionar lo anterior es que en ese caso cada jugador elija dos caballos distintos, con lo cual al participar seis u ocho caballos la partida es más dinámica.

4. Es interesante que los alumnos vayan anotando los valores que van saliendo en las tiradas (aunque no haya ningún caballo que avance) para que al final tengan recogido estadísticamente todo lo que ha salido, y de esa manera puedan ver claramente qué sumas tienen más probabilidad de salir.

5. Muchas veces a los alumnos les gusta seguir jugando aunque ya haya ganado uno de ellos, para ver en qué orden van llegando sus caballos. Como todos van lanzando los dados, ninguno se aburre (aunque haya llegado su caballo) por lo que se les puede dejar que terminen la partida cuando todos hayan llegado.

6. Si se juegan varias partidas, antes de comenzar cada una de ellas, deben elegir de nuevo los caballos. En estos casos (en que ya han visto los valores que más salen) es conveniente que lancen los dados para seleccionar el orden en que van a hacer la elección pues si no suele haber piques entre quien elige uno u otro caballo.

7. El orden en que presentamos este juego en clase es primero utilizar la suma; cuando ya han jugado varias veces entonces se plantea el de la diferencia. Una vez acabados los dos, lo más importante es hacer el estudio matemático de por qué un caballo u otro avanza más rápido. Este análisis es fácil de hacer por los alumnos pues sólo tienen que construir dos tablas de valores con los posibles resultados, tanto para la suma como para la resta.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

8. Al hacer el estudio anterior se puede observar que el 7 tiene ventaja (se puede aprovechar para hacer ver la razón por la que en las películas de casinos, quienes lanzan los dados siempre quieren un 7) en el caso de la suma. Sin embargo los resultados previstos teóricamente se pueden ver alterados por el azar. Por ello cuando se lanzan los dados, en algunos grupos puede ser que gane el caballo con dorsal 6 u 8 o incluso más alejados del 7. Lo mismo ocurre con el 1 en la diferencia, aunque en este caso al haber dos puntos de diferencia entre ese valor y el siguiente (que es el 2), es más raro que no gane el caballo de dorsal 1.

El asalto al castillo

Este juego está pensado para grupos de entre tres y seis jugadores.

Material: Una moneda, dos fichas por cada jugador (de colores distintos para los jugadores) y un tablero como el de la figura 2.

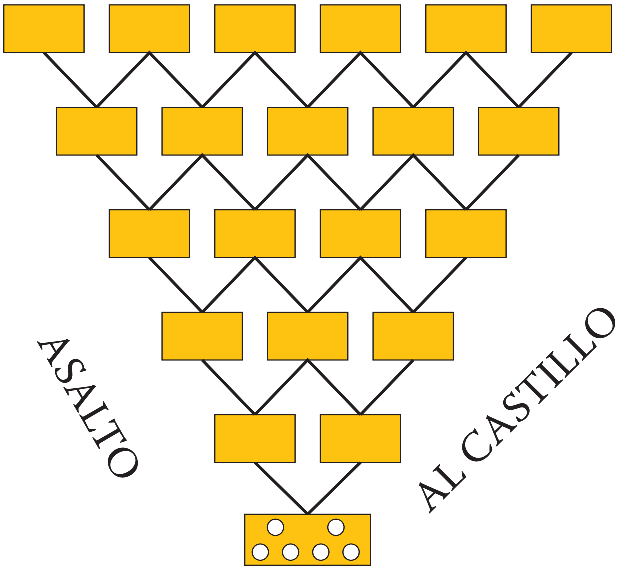


Figura 2

Forma de jugar:

a. Se sortea el orden para escoger casilla y cada jugador coloca una de sus fichas en una de las casillas superiores (no puede haber dos fichas en una casilla) que se mantendrá fija y su otra ficha en la casilla inferior que es la de salida (donde se acumularán una ficha por jugador) que será la que se vaya moviendo a lo largo de la partida.
b. Cada jugador, por turno, lanza la moneda y avanza su ficha al nivel superior. Si le sale cara coloca la ficha en la casilla superior izquierda, si sale cruz en la derecha.
c. Se repite el proceso hasta que las fichas llegan a la última fila de casillas. Si la ficha de un jugador acaba en la casilla que había elegido previamente (y que había señalado con su otra ficha) se anota un punto. Si cae en otra casilla distinta no se anota nada.
d. Se repite el juego diez veces y gana la partida el jugador que al final tenga mayor puntuación.

Aspectos educativos:

1. Las partidas son muy rápidas de realizar (sobre todo con tres o cuatro jugadores), por eso hemos indicado que se repita el juego diez veces. Este número es indicativo. Si se quiere puede reducirse y jugar varias partidas. En este último caso, antes de cada partida, los jugadores deben elegir de nuevo la casilla a la que esperan llegar.

2. Si se observa bien el tablero y la dinámica del juego, puede verse que estamos jugando en una máquina de Galton aunque visualmente esté invertida.

3. Para estudiar la casilla que tiene ventaja elegir, se puede hacer un estudio del número de caminos que llega a cada casilla. Si se hace sistemáticamente comenzando por el principio nos aparecerá sin dificultad el Triángulo de Tartaglia, por lo que el número de caminos que llegan al final son 1, 5, 10, 10, 5 y 1 respectivamente. Como cada camino tiene una probabilidad de 1/2, es fácil hallar la probabilidad de conseguir acertar.

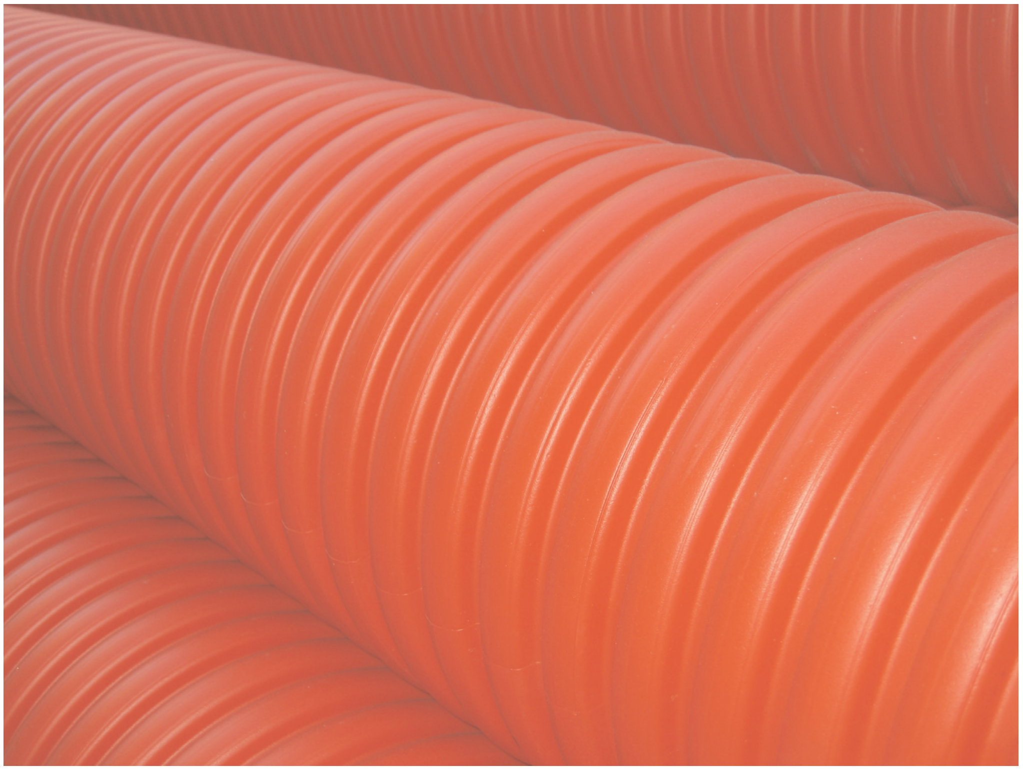
4. En este juego, a diferencia del anterior, hay dos elecciones que tienen la mayor probabilidad de acertar, por eso no hay un ganador claro. Si se elige la casilla 3, hay la misma probabilidad de que la ficha acabe en la 4, con lo que no obtendremos ningún punto. Lo que se ve evidente es que mientras más nos alejemos del centro menos posibilidades hay de acertar, aunque como en cualquier experimento aleatorio, el azar nos puede dar sorpresas en casos puntuales.

5. Como en el juego anterior, es interesante que los alumnos vayan anotando las casillas en las que van terminando las fichas, independientemente de si se han conseguido puntos o no, de tal manera que igual que la Máquina de Galton, al final se vea dónde se acumulan las terminaciones de las fichas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GRUPO CERO (Valencia) (1995): *Matemáticas para la Educación Secundaria*, 3 vol. MEC y Edelvives, Madrid.

MARTÍNEZ, P.; BAENA, J. y GUERRERO, S. (1994): *Estadística*, Octaedro, Barcelona.



Tubos Foto: CTB

Palais Royal. Autoretrato. Foto: CTB

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 65-72

iMÁTgenes 22, 23 y 24

Los había de hasta ocho marcas distintas; envasados en vidrio y en plástico; con mayor o menor porcentaje de nata y grasa (normales, semidesnatados, desnatados y 'bio', o sea, con un 0% de grasa, es decir, sin grasa); los había sin azúcar, azucarados y edulcorados; de diferente textura; con sabor a fruta y con trocitos de fruta (fresa, melocotón, plátano, limón, manzana, frutas del bosque, macedonia, piña); otros tenían por fondo una gruesa capa de mermelada (con sabores ya mencionados); otros, en lugar de fruta, llevaban cereales, fibras, bífidus, calcio y algo muy raro llamado 'saciactiv'; los había también con aroma de té; y 'griegos'; y unos especiales para comerse en un par de días como mucho; otros... Mohamed no pudo acabar el inventario. La gama de características de los yogures le parecía infinita.

Mohamed tenía entonces diez años y llevaba poco tiempo en nuestro país. Su madre le había mandado a por yogures y él la había obedecido entusiasmado porque sería la primera vez que haría algo él solo. Nunca había entrado en el supermercado, sólo lo había visto de pasada. Por eso nada más entrar se quedó pasmado por la cantidad y variedad de cosas apiladas en los larguísimos estantes. Tan extensos que formaban pasillos más largos y amplios que muchas calles de su pueblo. ¿Habría compradores para tantos productos?, se preguntó. Tras recorrer la avenida de la pasta y el arroz, justo al doblar la última esquina, se encontró en una calle muy iluminada y gélida. Sus estantes estaban repletos de pequeños envases, cada uno pegado al vecino. Fue entonces cuando comprendió a lo qué se refería su padre cuando en casa le oía hablar de La Vía Láctea. Se refería a la calle mayor del supermercado, la de los yogures.

Su madre le había dado el dinero, pero no le había dicho qué yogures quería. Tendría que elegirlos él. ¿Pero cuál escoger? ¿De qué marca? ¿Qué era el bífidus? Decidió escoger al azar porque estaba convencido de que si lo hacía a su gusto no acertaría con lo que quería su madre y ésta se lo recriminaría. 'El azar es inocente', pensó.

Cerró los ojos y empezó a dar vueltas sobre sí mismo. Sus brazos fueron abriéndose hasta que su mano golpeó algo, un abrigo, cuyo dueño le espetó palabras de las que sólo comprendió las últimas: '... a tu país!'. Eso le hizo detenerse, pero mantuvo los ojos cerrados. Dio unos pasos hacia donde se oía menos barullo y extendió la mano derecha. Las puntas de sus dedos rozaron algo y lo palpó. Con los ojos aún cerrados percibió una forma cilíndrica de cuyo tacto duro y frío se imaginó un yogur en frasco de cristal. Lo agarró y tiró de él, pero no se movió. Al abrir los ojos vio que su mano asía la columna metálica del estante. Su elección aleatoria no había tenido éxito. ¿Por qué aquí las cosas más simples resultaban tan complicadas? En su pueblo sólo había un tipo de yogur. El problema se reducía a tomarlo o dejarlo.

Diez años después, Mohamed está sentado en un aula de la facultad de Matemáticas. El profesor habla del problema de elegir un elemento de un conjunto infinito. Mientras escucha, Mohamed se acuerda de La Vía Láctea de los yogures, un conjunto finito, pero tan grande y él tan pequeño entonces que la situación vivida le resultaba muy parecida a aquella de la que hoy les habla el profesor. Piensa que no es lo mismo elegir que seleccionar. La selección es exclusiva y para realizarla es preciso conocer bien todos los objetos. Cuando nos quedamos con una de varias manzanas porque tiene mejor color o porque posee el grado de madurez que nos gusta, la seleccionamos. Al tomar una sin preocuparnos por nada de eso, la elegimos. A diferencia de la selección, la elección puede hacerse a ciegas, con sólo alargar la mano. Pero, ¿qué mano matemática es la que elige un elemento de un conjunto infinito?

El profesor dice que una solución es confiar el asunto al azar, como hace Godement en su Álgebra (1978, pág. 75), pero ¿acaso el azar no puede ser improductivo? Mohamed se imagina experimentos cotidianos en otros ambientes. Lanzamos una moneda al aire esperando que sus volteretas en el suelo acaben cesando. En su reposo leemos cara o cruz, pero esta es una concepción situada del azar, dependiente del contexto. La gravedad de nuestro planeta limita el suceso en el tiempo y en el espacio haciéndolo finito, haciéndolo posible. Si la moneda se lanzase en ingravidez, ¿cuánto tardaría en detenerse? ¿Se detendría? ¿Qué leeríamos en ella si conceptos como 'arriba' y 'abajo' ya no tienen el mismo significado? Mohamed sabe que hay situaciones en las que el azar es estéril y que quienes le confían sus elecciones las basan, de hecho, en un axioma previo, el de que el azar es fecundo y ofrece siempre resultados.

Miquel Albertí Palmer
imatgenes.suma@fespm.org

En la iMATgen n.º 19 hablé de la más corriente, de la más esencial de las curvas espaciales: la hélice. Su pariente bidimensional, la superficie helicoidal también es de lo más común. En la avenida de la pasta de cualquier supermercado encontrarás hélices empaquetadas, aunque en prácticamente todos los casos figuren bajo el nombre de 'espirales', haciendo referencia al hecho de tratarse de formas retorcidas. La inmensa mayoría son el resultado de retorcer tres cintas unidas longitudinalmente. Los fabricantes Gallo y Dalla Costa retuercen una única cinta o tallarín obteniendo una hélice auténtica (de una sola cinta). Que yo sepa, sólo Gallo las llama así, pero quizá tu, estimado lector o lectora, sepas de otros fabricantes que también lo hagan. Tal vez incluso te las hayas comido.

Marca	*Nombre*	*Cintas en el eje*
Barilla	espirales	3
Ardilla	espirales	2
El Pavo	espirales	3
Gallo	hélices	3
Dalla Costa	fusilli	2
Nomen	espirales	3
Carrefour	espirales	3

La iMATgen n.º 20 hacía referencia a la mirada, al punto de vista, al hecho de ver con un par de ojos y a la zona del espacio de visión tridimensional que se abre delante de nuestro rostro. Tal vez más de uno haya envidiado al camaleón por disponer de ojos tan móviles y, sobre todo, tan independientes. Sí, el camaleón puede girar a su antojo y con libertad casi absoluta cada uno de sus ojos de huevo, pero debemos tener presente que, de acuerdo con el asunto principal de la iMATgen n.º 20, esta independencia va en perjuicio de la visión en tres dimensiones. Una opción podrá ser preferible a la otra, pero en cualquier caso lo que más ayuda a comprender aquello que miramos, lo que nos ayuda a 'ver' realmente lo que contemplamos (me acuerdo otra vez de Miguel de Guzmán) es la posibilidad de contemplarlo en tres dimensiones. De otro modo perdemos perspectiva, profundidad, claridad y no podemos valorar con precisión a qué distancia se encuentran las cosas.

Dos enemigos acechan al camaleón, uno por la izquierda y otro por la derecha. Con sus ojos independientes es capaz de detectarlos. Los ve, pero no sabe cuál de los dos tiene más cerca porque no puede verlos al unísono en el mismo campo visual. El camaleón no puede huir corriendo y alejarse del peligro a toda velocidad. En breves instantes cambia de color, se confunde con el entorno que lo rodea y se disipa en las miradas tridimensionales de quines le acosan.

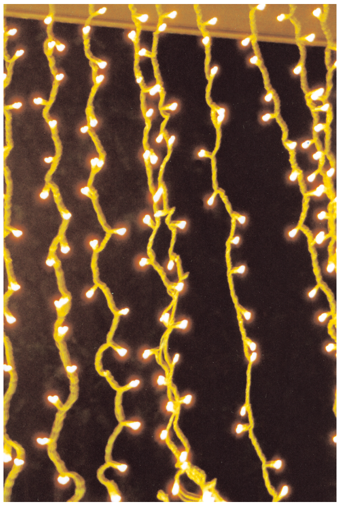
La Fotografía es un arte que, como muchos otros, se basa en una tecnología detrás de la cual se esconden un sinfín de Matemáticas. Una cámara es un artefacto óptico extraordinario construido a partir de sus leyes y de las de la Física. La fotografía de la iMATgen nº. 21 destacaba un aspecto fundamental de toda imagen: el enfoque. Enfocar consiste en separar las lentes a la distancia correcta según nuestro punto de interés, buscar la intersección de un plano, el de la película, con el vértice de un cono, el de la luz que tamiza la lente del objetivo.

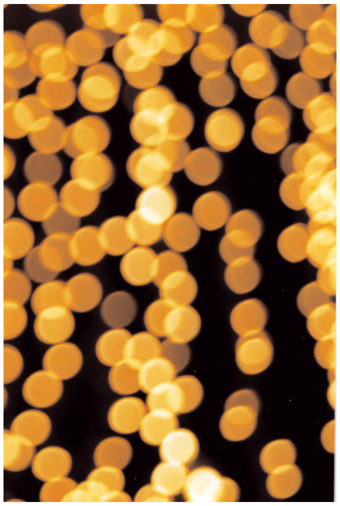
Durante las pasadas navidades las noches de las ciudades se iluminaron con millones de lucecitas en las que pudo apreciarse esa tendencia al círculo del desenfoque.

Si las hélices y las superficies helicoidales constituyen la esencia de las curvas suaves del mundo, el cono es la base de la mirada con la que lo observamos todo. También de lo que leemos, escribimos o dibujamos. ¿Qué sería de las Matemáticas sin la mirada? ¿Puede haber Matemáticas sin luz? De ser así, ¿serían las que conocemos?

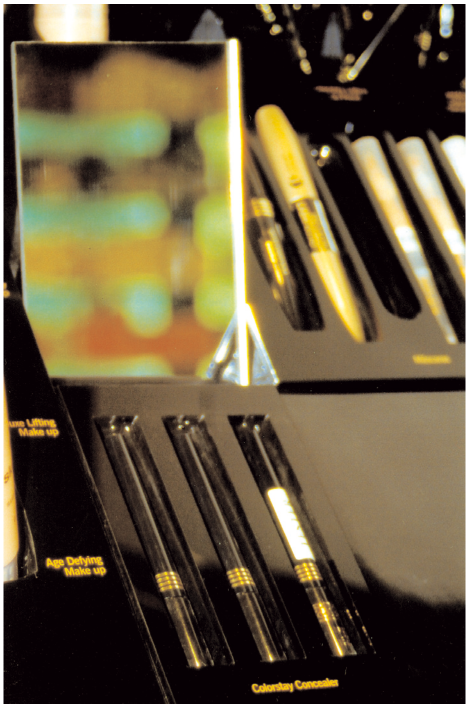
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

GODEMENT, R. (1978): *Álgebra*. Editorial Tecnos. Madrid.





iMATgen 22

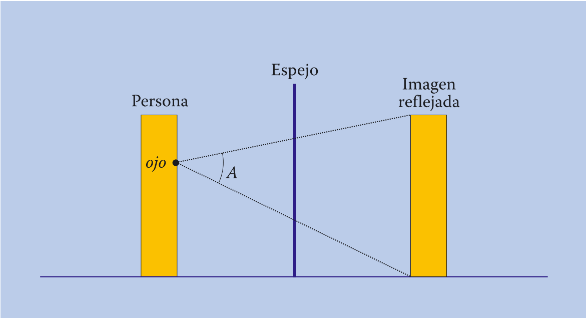


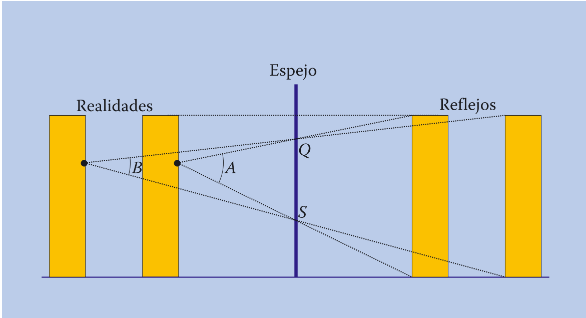
Cada vez que entro en una perfumería me siento aturdido como hice sentir al pobre Mohamed en la introducción a estas tres iMÁTgenes por la cantidad de cosméticos, estilos y marcas disponibles. Todo distribuido en estantes repletos de frasquitos de tamaño inversamente proporcional a su valor. Me siento perdido, desorientado, y no sólo entre tanta cantidad y variedad, también entre tanto número. Muchos productos se identifican con uno, especialmente las diferentes gamas de pintalabios. Aunque eso no detiene a la mujer que va a escoger uno de ellos. Ella nunca se detendrá pasmada ante cantidad y variedad semejantes. Ni ante tanta numeración, la cual, por cierto, cambia de una marca a otra. Una mujer sabe perfectamente el lápiz de labios que quiere, el color y tonalidad precisos, la textura más adecuada y que más le agrada y el grado de brillo que más le favorece. Por eso entre cien tonalidades de carmines tardará sólo unos segundos en decidirse por una. Su elección es, de hecho, una selección breve y certera aún cuando lo que haga en ese momento sea decidirse por un cambio a otro tipo de tono, color, textura o brillo. Utilizará el número impreso en el tubito del lápiz escogido para abreviar futuras repeticiones del proceso.

Se dice que todos los hombres, en mayor o menor medida, son daltónicos. No hay mejor sitio para comprobarlo que una perfumería. Cuando ella te pregunta cuál de los dos tonos, etiquetados con los números 910 y 911, que tú ves idénticos te parece más adecuado, tú te quedarás absorto entre dudas. No te parece extraño que no puedas distinguir a simple vista entre un color y otro. ¿Cómo vas a hacerlo si su diferencia se reduce a una unidad entre 910? Casi una milésima. ¿Existe alguien capaz de apreciar semejante sutileza? ¿Tanto pueden afinar los fabricantes? Ella sigue esperando tu respuesta y se está impacientando. Así que abandonas tus dudas optando por escoger al azar (tu azar) y te decides por el 911. Si eres matemático tal vez tu azar no sea tal y tu subconsciente te haya traicionado (911 es primo). En cualquier caso tampoco importa demasiado porque, sea cual sea tu elección, siempre te equivocarás. Si eres matemático posiblemente te preguntes si Peano, Hilbert y sus colegas pensaron en esta posibilidad. Al oír tu respuesta, ella replicará: *¿Estás tonto?*, el 910 me va mucho mejor'. La observas mientras se lo aplica y al terminar tienes que admitir que tenía razón. Seas matemático o no te sentirás como un inepto y le envidiarás esa capacidad visual tan sutil que hace que siempre dé en el clavo.

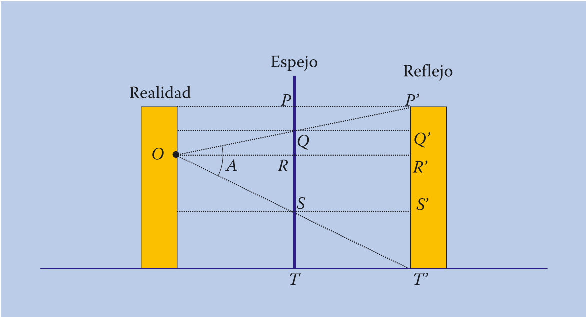
Para aplicarse el color ella habrá usado uno de esos espejitos que hay entre los paneles de las diferentes marcas de lápices. La imagen muestra uno de esos espejos. Así que el centro de atención será precisamente la parte más desenfocada de la fotografía, la que refleja ese rectángulo erguido entre los artículos de maquillaje. El espejo debe ofrecer a quien se mira en él no solamente la boca o los ojos, sino el rostro entero para así poder apreciar como asimila la cara ese matiz perceptible sólo por la mirada femenina.

Comprender esa imagen es entender por qué el tamaño de este espejo es el que es y no otro. Es decir, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de un espejo para que quien se mire en él se vea todo el rostro? ¿Y el cuerpo entero? ¿Depende ese tamaño de la distancia a la que nos situamos de él? Si el espejo fuese tan solo un cuadrado de un par de centímetros, podría alguien verse la cara alejándose lo suficiente? Pongámonos delante de un espejo y llamemos A al ángulo visual necesario para vernos por completo (ya sea la cara o el cuerpo):





Añadiendo determinadas líneas auxiliares a esta figura veremos cuál es la cuestión esencial:



Puesto que el original y su reflejo equidistan del espejo, *OR*=*RR'*. Eso hace que los triángulos *OQR* y *OP'R'* sean semejantes con razón de semejanza 2. Y lo mismo para los triángulos *ORS* y *OR'T'*:

$$PR=P'R'=2\cdot QR$$
$$RT=R'T'=2\cdot RS$$

Por tanto,

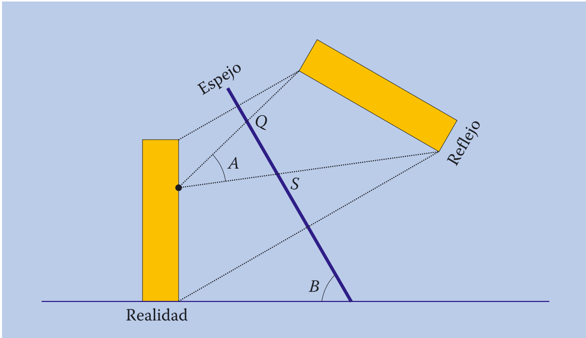
$$QS=QR+RS=PR/2+RT/2=PT/2$$

Es decir, para que la visual dirigida desde *O* abarque por completo el objeto reflejado es necesario que el espejo se reduzca a, como mínimo, la mitad de *PT*, esto es, la mitad de la estatura de la persona que se mira en él. *O* la mitad de su cara, según el caso. El ancho verificaría la misma propiedad.

Por muy cerca o muy lejos que nos situemos del espejo, *QS* seguirá siendo siempre la mitad de *PT*. En tal caso, cambiará el ángulo de visión, pero no *QS*:

Un espejo de cuerpo entero o de rostro entero será, por tanto, independiente de la distancia a la que se sitúa el sujeto que refleja. El punto *S* determina la altura a la que deberá colgarse en la pared, la cual será también la mitad de la estatura ocular del sujeto: *ST*=*RT*/2.

¿Y si el espejo no es vertical? Inclinándolo un ángulo *B*, la amplitud del espejo se reduciría a $QS=(x\cdot \text{sen}B)/2$, siendo x la estatura de la persona que se mira en él:



Para $B=90^o$ tenemos que $QS=x/2$; para $B=30^o$, será $QS=x/4$. Cuanto mayor sea el valor de *B* comprendido entre 0º y 90º, menor será *QS*. Pero si $B>90^o$, es justamente al revés. De todos modos, al inclinar el espejo modificamos la perspectiva.

En fin, que tildar a un espejo de ***Espejo de cuerpo entero*** o de rostro entero, como en el caso de la fotografía, no depende de él, sino de quien en él se mira. Y no hay ninguno universal.

Quiero cerrar esta iMATgen con mi agradecimiento a la perfumería *GOTTA* de la avenida de Aragón de Alcañíz (Teruel) por permitirme tomar la fotografía que la abre.

iMATgen 23

Hace unos años, en primavera, hice esta fotografía sin tener la más remota idea de que la utilizaría del modo en que voy a hacerlo ahora. La perspectiva cenital no es la más corriente y, sin embargo, es la que nos da una idea más clara del terreno en el que nos movemos. Esa es la perspectiva de los mapas y de gran parte de la Geometría.

No serían más de las once de la mañana de un domingo de primavera, pero ese grupo de turistas ya se disponía para la comida en uno de los restaurantes que hay junto a los edificios más altos de Barcelona. Ellos se disponían a comer y yo aún tenía en la boca el sabor del café del desayuno. Eran del norte de Europa, venidos de allí donde amanece al mismo tiempo que aquí, pero donde se empeñan en acortar el día. Desayuno y comida casi seguidos, cena a media tarde y retiro al anochecer. En el Mediterráneo es diferente. Quizá la culpa la tenga el frío. Aquí lo posponemos todo, o casi todo. De hecho, no posponemos, sino que intercalamos. Si desayunamos a las ocho y comemos a las dos, solemos intercalar un almuerzo de bocata y uno o varios cafetitos. Siempre que sea posible, claro está. Y si lo es, mejor aún preludiar la comida con un aperitivo. Mientras tanto, disfrutaremos del calor, de la luz, del buen tiempo y de conversación. Así las cosas, una mañana da para mucho. Por ejemplo, para plantearse cuestiones matemáticas como las que me voy a plantear unas líneas más abajo. Para nosotros la comida es la excusa para un encuentro y una charla. Para los nórdicos, no. Es otra cosa. Es un intervalo en el que reina el silencio, al menos cuando nos visitan. Hasta sus hijos se callan y sus bebés dejan de llorar. El porqué no lo sé. Algún día se lo voy a preguntar.

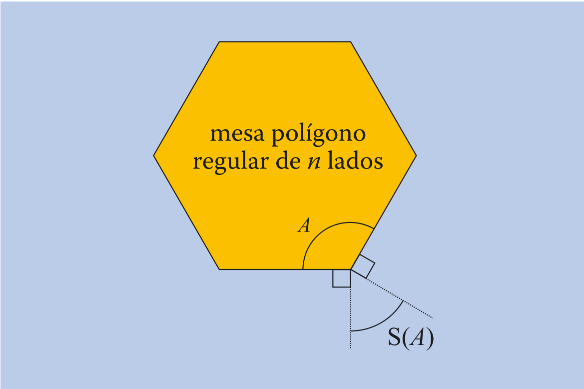
No hay duda de que todo eso es necesario si uno quiere comprender la imagen, aunque no sea suficiente para comprenderlo todo. Entenderla mejor significa fijarse en toda la parafernalia necesaria para comer: platos, cubiertos, vasos y copas, servilletas, mantel y, también, la disposición de los comensales sentados a la mesa. Pero no voy a centrar mi atención en la perfecta distribución de mesas que se ven cubiertas con manteles (cuatro de cuatro y dos de dos). Tampoco me fijaré en la también exquisita distribución (¿la habrán hecho los camareros con regla y compás?) de los cubiertos y servilletas, estas últimas trazando la diagonal del rectángulo casi cuadrado determinado por aquellos. Me voy a detener en el mantel que viste la mesa y preguntarme algo sobre la tela sobrante. Es evidente el porqué sobra tela. Porque es mayor que la superficie que debe cubrir. Sin embrago, no es tan evidente cuánto sobra. Y ya se sabe, cuando nos preguntamos por el *cuánto* entramos en terreno matemático. Comprender la imagen pasa por ahí. Así se crea la iMATgen.

Aún sin verlo por completo, puedo asegurar que los manteles blancos son rectangulares. Ésta es una afirmación basada en la experiencia, no en la observación visual de la fotografía. La visualización de la imagen tampoco muestra mesas rectangulares, sino cuadriláteras. Pero la experiencia nos dice que esos cuadriláteros son consecuencia del punto desde el que se observa un rectángulo. Además, las mesas de ese restaurante son cuadradas (otra afirmación experimental) y las cuatro que se ven rectangulares se han obtenido juntando dos mesas cuadradas. El resultado es un rectángulo de doble longitud que anchura.

El caso es que tan acostumbrado estoy a ver cómo son las arrugas que deja un mantel rectangular extendido sobre una mesa también rectangular que me atrevo a asegurar que este lo es. ¿Cuánto mide el ángulo sobrante $S(A)$ de un mantel en la esquina de ángulo A de una mesa? Entiendo por sobrante aquella parte de la tela que no produciría arrugas al caer, es decir, la que cubre el ángulo A de la esquina de la mesa más los dos ángulos rectos que forman las aristas de dicha esquina con la plomada hacia el suelo:

$$S(A)=360^\circ-A-2\cdot 90^\circ=180^\circ-A$$

Sobra el suplementario del ángulo del vértice en cuestión. En el caso de una mesa rectangular, $S(A)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$; si la mesa es hexagonal, sobra S(120º)=60º. Para el caso general de una mesa con forma de polígono regular convexo de N lados:



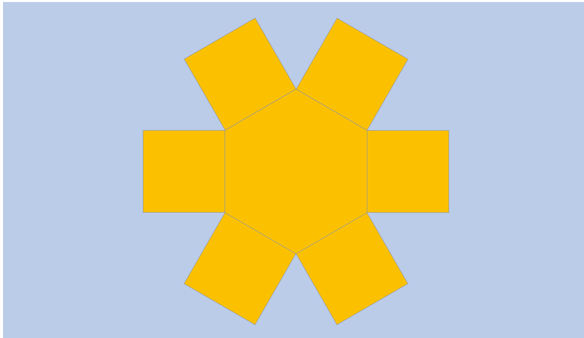
$$A = 180'' - \frac{360''}{N} \Rightarrow S(A) = \frac{360''}{N}$$

¿Qué sucede si la mesa es circular? Una mesa circular puede interpretarse como caso límite del polígono regular convexo de N lados. Entonces:

$$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A \to 180'' \\ S(A) \to 0'' \end{cases}$$

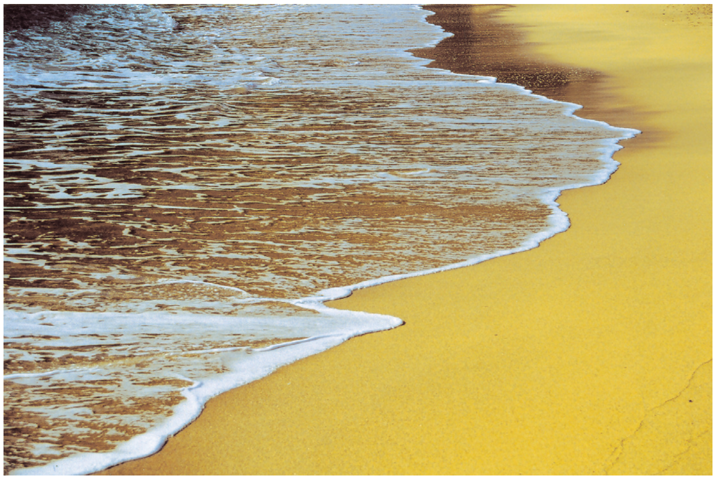
¡No sobra nada! Esto significa que los manteles que cubren una mesa circular siempre quedan bien, sin arrugas en el borde. Pero las arrugas se crean más abajo. Cuanto más excede su perímetro al de la mesa, más tela cuelga de su perímetro. Esa tela colgante queda a merced de la gravedad, que provoca en ella una serie de ondas entrantes y salientes con las que se compensa la diferencia entre el perímetro del mantel (circular o no) y el de la mesa. Por una cuestión de simetría el número de esas ondas será siempre un número par (si la tela con que está hecho es homogénea). Véase la fotografía de esta página.

Los manteles sin excedentes de tela deberían confeccionarse reproduciendo la forma de la mesa y añadiendo en cada uno de sus lados una pieza rectangular según la altura a la que se desea que caiga. Para una mesa hexagonal, una solución sería coser en cada uno de los lados del mantel hexagonal diseñado para ella, es decir, de sus mismas dimensiones, un cuadrado:



¿Cómo debería ser el mantel de una mesa circular? En conclusión, en la esquina de ángulo A de una mesa poligonal la parte excedente del mantel es S(A)=180º-A mientras que en una mesa circular el excedente es nulo. Eso sí, en condiciones normales, el número de vueltas de la tela excedente en la parte inferior de un mantel circular extendido sobre una mesa también circular será siempre un número par. Esto es ***Lo que sobra del mantel.***

iMATgen 24



Una ola llega a la playa de Tamariu, en la Costa Brava. La espuma asciende por la suave pendiente de arena hasta desaparecer escurriéndose entre sus granos. Una maravilla inmovilizada en el breve instante que transcurre entre la apertura y el cierre de un diafragma fotográfico. Un fragmento diminuto de la costa catalana, línea de encuentro entre el mar Mediterráneo y el noreste de la península ibérica. El vaivén del oleaje nunca cesa y por eso mismo todos los mapas son falsos. Su única aproximación a la certeza es la que les da la inmensa lejanía cenital. Tanta, que impide apreciar ese incesante vaivén. Desde allá arriba un litoral es el límite entre dos masas de distinto color y textura, una línea tan irregular como irreal. La realidad es que tu vienes aquí, pones los pies en el agua y estás o no estás en tierra catalana según intervalos de diez segundos. O tal vez no. Quizá cuando el agua te cubre los pies sigue siendo catalana la tierra que pisas. ¿Recogen los mapas parte de la tierra sumergida?

Los litorales naturales son muchos pero no muy diversos. Esa ola bien podría ser otra cualquiera que alcanzara una playa cualquiera de otra costa cualquiera de cualquier otro continente. El mar parece más responsable de la forma que adquiere el litoral playero porque en él es el mar el que se sube a la tierra y su frente de agua determina la línea de ese litoral. En cambio, en un litoral de acantilados la tierra es una barrera que detiene al mar y lo hace estallar rompiendo su frente en mil espumas y salpicones. Ahí manda la tierra y es ella la que determina la curva de la costa abrupta. Pero esas son solo apariencias, el mar hiere los acantilados afectando su forma tanto como la tierra desvía el frente de la ola y la hace irregular.

Comprender la imagen significa comprender la forma de una ola que llega a una playa. ¿Es ese frente de agua una línea? ¿Es esa línea una curva? ¿De qué tipo? ¿Es una curva de las que estudia el cálculo tradicional que, contemplada muy de cerca, acaba por verse rectilínea? ¿Cuánto mide? ¿Es su longitud la suma de sus fragmentos? Responder a todas esas preguntas no resulta fácil.

La longitud de una curva puede medirse de modo práctico tomando un paso o abertura de compás de longitud p. Para cada valor de p se obtiene una longitud $L(p)$ de la curva. Si la curva es un segmento, su longitud $L(p)$ será constante e independiente del valor p escogido. En este caso $L(p)=n{\cdot}p$, siendo n el número de pasos efectuados para recorrer el segmento. Si la curva es una circunferencia, cuanto menor sea el paso más cerca se estará de la longitud real de la curva y $L(p)$ se acercará al valor de su longitud L a medida que p tienda a cero. Sabemos que el resultado será $L(p)\to 2\pi r$, para $p\to 0$. Sin embargo, y contrariamente a lo que pueda parecer, es posible que las longitudes de diferentes costas no tiendan a un valor concreto cuando $p\to 0$ y que $L(p)$ crezca indefinidamente.

Richardson (1961), observó que esto sucedía en diversos litorales y según Mandelbrot (1988), de los datos de Richardson se desprende que la longitud $L(p)$ de una costa es proporcional a p^{-a}, siendo a un parámetro dependiente de la costa, pero independiente del método elegido para estimar la longitud. Este es un aspecto fundamental para comprender la imagen. Un litoral no es una curva tradicional. La longitud de una costa depende de la distancia desde la que se observa o, dicho de otro modo, de la longitud del paso con el que se recorre.

Observando la fotografía nos damos cuenta de que el perfil de la masa de agua no posee esquinas ni tramos rectilíneos. Su irregularidad parece más aguda en la parte superior de la imagen, pero es a causa de la perspectiva. En general, es bastante suave, tanto como la espuma de burbujas apelotonadas que la forman. Su perfil no es tan irregular como el de un acantilado abrupto, aunque ambos son *autosimilares*. Esto quiere decir que trazados sendos fragmentos suyos sobre el papel no podemos saber a qué escala corresponden. La auto similitud es una propiedad de la que adolecen las curvas tradicionales del Cálculo. Esas se ven más rectilíneas cuanto más de cerca se observan. Ampliar o reducir un tramo del frente de la ola de la imagen no revelará diferencias significativas mientras no lleguemos al punto de aislar una única burbuja. Las masas de espuma menores serán también cúmulos de otras burbujas antes invisibles, pero cuyo perfil será muy parecido al de la ola entera. Su forma, aunque diferente, seguiría presentando las mismas anomalías y estarían, además, similarmente distribuidas.

Estas irregularidades y su distribución hacen de una costa un objeto 'fractal', pero a diferencia de los primeros objetos fractales conocidos en los que la auto semejanza homotética del fragmento con el todo era idéntica, una fragmento de costa o un fragmento del perfil de una ola no es idéntico al total. La cuantificación de su irregularidad conduce al concepto de dimensión fractal y puede no ser un número entero, como por ejemplo, las de algunas fronteras terrestres y perfiles costeros según Richardson (1961):

Costa oeste de Gran Bretaña:	1,25
Frontera terrestre de Alemania:	1,15
Frontera entre España y Portugal:	1,14
Costa australiana:	1,13
Costa de África del Sur:	1,02

Los objetos euclidianos de la geometría tradicional son útiles para interpretar la realidad física de nuestro entorno a un nivel elemental, pero las nubes no son esferas, ni las montañas conos, ni los relámpagos se desplazan en línea recta (Mandelbrot, 1982). Hoy en día reducir la geometría de estos objetos al ámbito de las curvas y objetos de la geometría euclidiana tradicional resulta casi pueril. Esos modelos geométricos no describen adecuadamente la realidad física que nos rodea. Comprender la imagen supone un cambio de interpretación de nuestra percepción. La curva de un litoral es fragmentaria, no es el vestigio dejado por un lápiz en un papel, está hecha de pedacitos rotos, de fragmentos de otras curvas fragmentadas y auto similares. Y esta semejanza homotética no responde a una pauta numérica determinada de modo absoluto como ocurre en las curvas fractales más simples (curva de von Koch, curva de Peano), sino que es variable.

Un litoral o el perfil de una ola no son así. Para recrear en el laboratorio curvas tan reales Mandelbrot introdujo en su elaboración la participación controlada del azar. Eso produjo excelentes resultados cuyas aplicaciones alcanzan campos muy diversos. Y en esa intervención controlada del azar se basan los programas que recrean modelos fractales de fenómenos naturales. Las páginas web sobre ese tema son innumerables. En la siguiente, además de ver cómo el azar facilita la construcción de modelos de litorales, puedes descargarte los programas que las realizan (para sistemas Mac OS 7.x y Windows 95, 98 o 2000) o trabajar *online* con los applets en *Java* que se ofrecen:

http://polymer.bu.edu/ogaf/html/software.htm

Nuestra ola llega a la playa y se encuentra con un banco de arena de superficie suave pero irregular. La pendiente de la playa no es la misma en todos sus puntos ni la fuerza que empuja la ola tampoco es la misma en todos los puntos de su frente. La pendiente variable de la arena, al menos en parte, depende del subsuelo. La fuerza de la ola depende de múltiples factores que se fraguaron mar adentro. El resultado final es similar al que produciría el azar, pero no es fruto del azar. Cuando una parte de la masa de agua asciende por la pendiente y se topa con el obstáculo (una zona algo más empinada) esa masa de agua se frena y busca una salida bifurcándose a ambos lados del obstáculo, sumándose a aquellas masas de agua que ascienden por sus flancos. De este modo el perfil del frente espumoso es el resultado de la fragmentación de un todo en una serie de sumas.

Hace más de dos mil años, mientras olas del mismo mar llegaban también a la costa que dos mil años después se llamaría *Costa Brava*, Arquímedes construyó la parábola siguiendo un método iterativo conocido como desplazamiento del punto medio. Alrededor de 1900, Takagi, añadiéndole una variante interesante, recuperó esa idea para construir una curva irregular, autosemejante y continua, pero que en ninguno de sus puntos era derivable. Yo la llamo *función suflé* y se parece tanto a la línea del frente de la ola de esta iMATgen que podría tomarse como modelo matemático suyo (véase en Tall, 1982). De ahora en adelante cada vez que vuelva a la playa y vea acercárseme a los pies un frente espumoso le diré: ***¡Hola, ola de sumas!*** ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MANDELBROT, B. (1982): *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co. New York.

MANDELBROT, B. (1988a): *Los Objetos Fractales*. Tusquets editores. Barcelona.

RICHARDSON, L. F. (1961): *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*. General Systems Yearbook 6, 139-187.

TALL, D. (1982): "The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere". *The Mathematical Gazette* 66, 11-22.

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 73-76

Taxis, bares, sex-shops y farmacias

Homenaje a Maurice Fréchet en el centenario del concepto general de distancia

Para medir efectivamente distancias ciudadanas podemos disponer de diversos aparatos y estrategias. Para distancias cortas entre puntos accesibles cintas métricas, pasos humanos, el rueda-metro de la Guardia Urbana, el cuentakilómetros del coche... y para situaciones más complicadas disponemos de aparatos topográficos de precisión, magníficos mapas a escala, tecnología GPS, etc.

Lo que les propongo en este *clip* es pues una reflexión sobre las distancias vistas desde la realidad de la ciudad, teniendo en cuenta no solo las medidas sino las calles, las direcciones, las casas, etc. No somos personas invisibles que puedan atravesar muros, ni conductores locos dispuestos a tomar calles en dirección prohibida, así que la distancia euclídea no siempre es la mejor métrica.

Taxis

La distancia del taxista es una distancia clásica en el plano. Trabajando con coordenadas tiene la expresión:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

Si se considera el origen (0,0), la *bola* cerrada de radio 1 es el rombo

$$\{(x,y) \mid |x|+|y|\leq 1\}.$$

Maurice Fréchet (1878-1973)
Matemático francés conocido principalmente por sus contribuciones al Análisis Real. Se le considera el fundador de la teoría de los espacios abstractos.
Autor de *Espaces abstraits* (1928)
Récherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités (1937–38)

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

Si se consideran puntos de una cuadrícula entonces muchas trayectorias entre dos puntos tienen igual distancia al combinar trozos horizontales y verticales, lo cual *modeliza* trayectorias de taxis en zonas urbanas con calles distribuidas en cuadrículas (Ensanche de Barcelona, Manhattan en Nueva York...).

En general la distancia del taxista puede definirse como la trayectoria mínima circulable entre dos puntos del territorio.

Bares

Si en el plano se considera la distancia

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\mathrm{Max}(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|),$$

entonces *la bola* cerrada de centro el origen y radio 1 es el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$

$$\{(x,y) \mid \mathrm{Max}(|x|,|y|) \leq 1\}.$$

Por ejemplo, en el Ensanche de Barcelona para limitar la repetición cercana de determinados bares, comercios, etc. (densidad) se exigen no sólo unas distancias mínimas sino que en el cuadrado con centro *el punto medio de la zona de fachada del local* y lado 100 m no debe haber más de una determinada cantidad del mismo servicio (por ejemplo cinco en hostelería) (Figura But. Of. Prov. Barcelona 297 Pg. 37 – 12/12/2002).

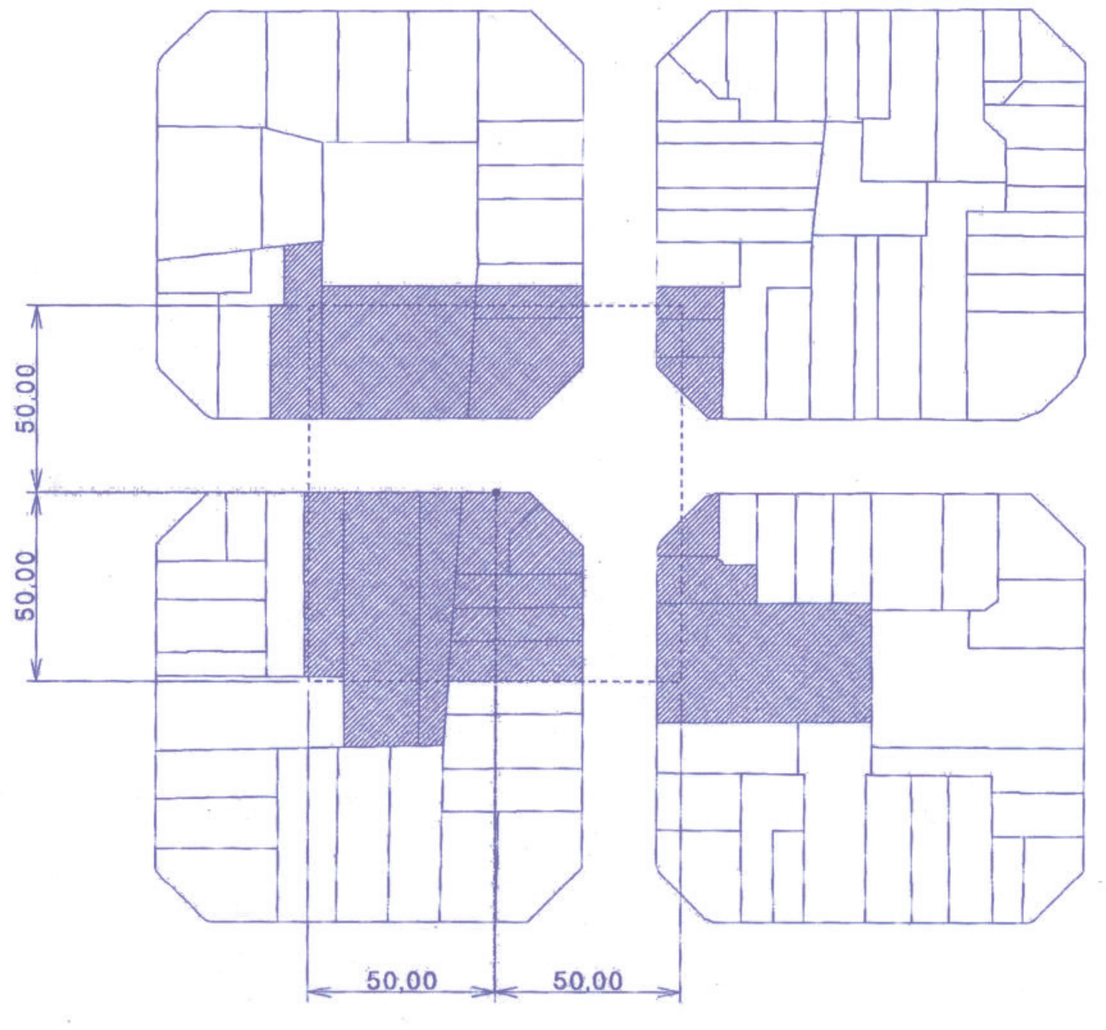


Figura 1

Bingos, Relax y Sex-shops

Si desean montar en el Ensanche de Barcelona una sala de máquinas recreativas, un bingo, un relax, una sex-shop, un club… (no creo que sea preciso que entre en más detalles y no deseo que los lectores de SUMA se vean implicados en estos negocios) entonces deberán buscar un local cuya "distancia mínima" a otro de la misma clase sea de 400 metros (Artículo 15.2 ORMM/2002) y supere en 100 metros la distancia a centros con menores, sedes institucionales, hospitales, etc. Para hacer efectivo el cálculo sobre mapa de los 100 m y de los 400 m se aplica el Artículo 28 de la OEPC y el gráfico de la Figura 2 adjunto donde los puntitos ejemplifican una medición correcta:

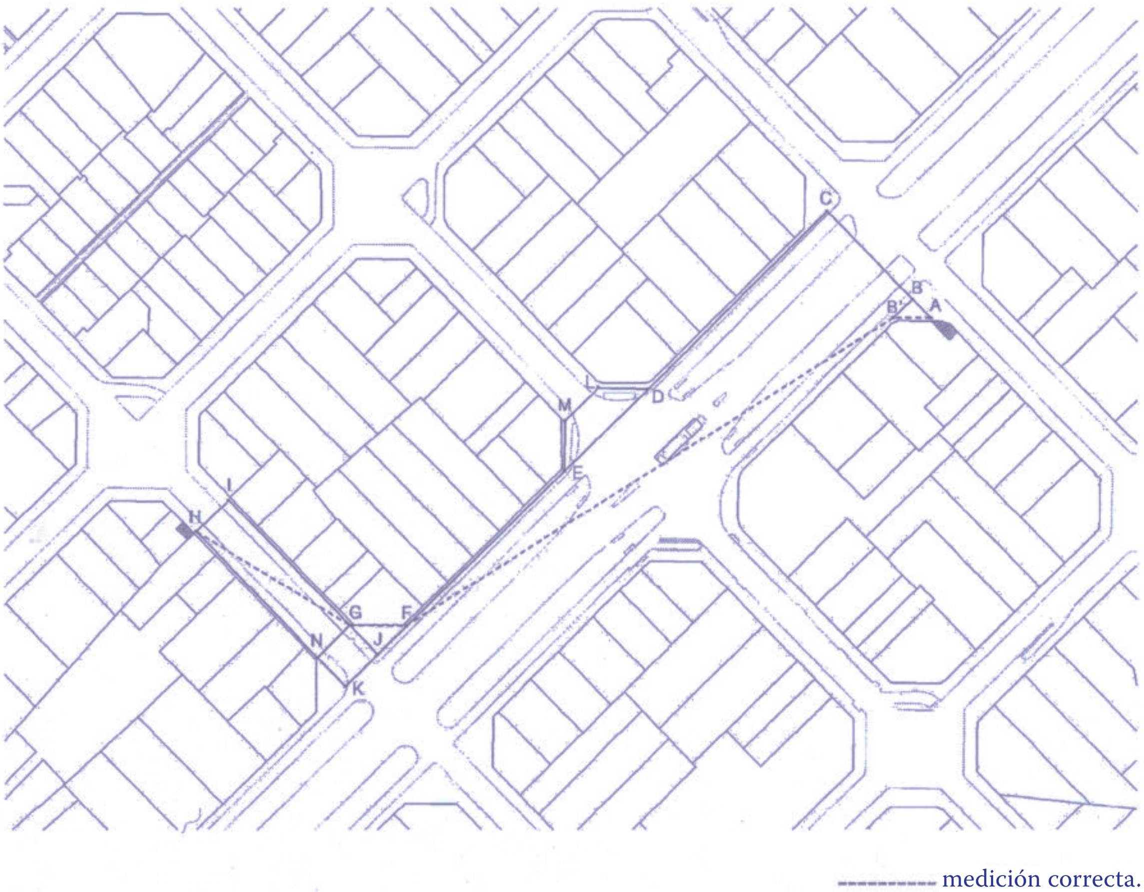


Figura 2

La distancia se calcula pues sobre plano y sobre la proyección horizontal del itinerario mínimo *utilizable* por el público (calle, jardín, plaza…) pero con independencia de los posibles obstáculos urbanos o de regulación del tráfico, es decir pasando la regla sobre el mapa por encima de parterres, semáforos, aceras, etc. Nótese que esta distancia puede formalizarse como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas uniendo los puntos dados y contenidas en la zona viaria (complementaria de la edificable). En la figura 2 podemos apreciar que la normativa es más restrictiva que la que resultaría de aplicar la distancia del taxista. No obstante cabe observar que la norma protege más el negocio de las sex-shops (al alejarlas) que el tema de la proximidad de colegiales pues diversos colegios podrían estar en la misma manzana (a más de 100 metros).

El caso estrella: las farmacias

Desde hace muchos años el corporativismo de los farmacéuticos españoles ha asegurado a los colegiados de la profesión con más años el privilegio de mantener a los nuevos colegiados sin posibilidad de abrir nuevos establecimientos. Por motivos de población a atender hay lugares con solo una o unas pocas farmacias y en grandes núcleos criterios métricos restrictivos (por ejemplo: *a más de 200 metros*) superpuestos a criterios demográficos y otros impedimentos, consagran la imposibilidad de expansión del sector, siendo las listas de espera de los jóvenes licenciados en Farmacia monumentales. Vaya, todo muy europeo.

Lo comentado hasta aquí sugiere que el tema de las distancias tiene mucho más interés si se aplica a problemas reales de normativas en contextos reales que en el reino teórico de las coordenadas cartesianas. El amigo René nos dio un poderoso instrumento para aritmetizar la geometría pero en el caso de distancias nos alejó de los temas reales métricos. Por eso hay que agradecer que Maurice Fréchet en 1906, hace ahora cien años, con su definición general de espacio métrico nos permitiera ir más allá de las distancias entre vectores. A los propios matemáticos (Hausdorff, A. Weil, Nachbin, Efremovič, Császar...) les facilitó establecer métricas en espacios abstractos fundamentales para el desarrollo del Análisis. La idea de Fréchet nos ha de permitir hoy, un siglo después, recuperar a nivel docente el interés por las distancias reales.

Para pensar un rato

Es interesante localizar las normativas o leyes estatales, autonómicas y locales que se formulan en términos métricos y observar sobre planos a escala los problemas concretos de su aplicación. En cada caso la determinación de "las mediatrices" (puntos a igual distancia de dos puntos dados) o de "los puntos entre dos dados" (igualdad en la desigualdad triangular) pueden llevar a descubrimientos sorprendentes. Si lo hace y quiere compartirlo ya lo saben elclip.suma@fespm.org ■

PARA SABER MÁS

BOE 26.04.1997. LEY 16/1997 de regulación de Servicios de las Oficinas de Farmacia.

VVAA (2005). Normas Urbanísticas de Cataluña, Ed. Aranzadi, Madrid.

GONZALEZ-VARAS, S. (2005). Urbanismo y ordenación del territorio, Ed. Aranzadi, Madrid.

BOMBAL, F. (2000). *Los Espacios Abstractos y el Análisis Funcional en la Matemática del siglo XX*, En A. Martín (Ed.) Madrid, Ed. Nívola pp. 205-210.

En INTERNET:

En Google: *Normas urbanísticas*

http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_m%C3%A9trico

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 77-87

mathExpo ¿Por qué las Matemáticas?

http://www.mathex.org/MathExpo/EsHomePage?setskin=es

mathExpo ¿Por qué las Matemáticas? es una exposición internacional iniciada y realizada con el patrocinio de la UNESCO.

Contenido

Para que sea accesible a un público joven, la exposición se limita, en su primera versión, a una docena de temas tratados bajo la forma de experiencias interactivas, objetos, imágenes, vídeos, simulaciones numéricas y demostraciones comentadas.

Los textos que acompañan la exposición se redactan en dos lenguas, francés e inglés (u otras opciones dependiendo el país donde se presente la exposición, como por ejemplo, español, portugués, etc.).

Talleres, conferencias, debates, catálogos, referencias bibliográficas e históricas completan la exposición.

Los temas

Formas de la naturaleza
¿Cómo pavimentar?
¿Cómo llenar el espacio?
Puntos, líneas y colores
Números y códigos secretos
¿Qué se puede calcular hoy?
Las casualidades de la vida
Orden y caos
¿Cómo optimizar?
De Pitágoras a Wiles...
Arte y Matemáticas
Asombroso, ¿no?

Público a quien va dirigida

La exposición está particularmente dirigida a un público joven y a su entorno inmediato, padres y profesores, pero por su propia concepción debería interesar al gran público que demanda información sobre las ciencias en general y sobre las Matemáticas en particular.

Jacinto Quevedo Sarmiento
museos.suma@fespm.org

Formato propuesto

La exposición está concebida para ser presentada de forma homogénea en una sala de entre 200 y 400 m^2. Consta de paneles, experiencias y objetos manipulables creados por el Centre Sciences, el Palais de la Découverte y el laboratorio del profesor Jin Akiyama, animaciones interactivas sobre pantalla y folletos. La exposición es fácilmente transportable y a adaptable a distintas ubicaciones.

Origen del Proyecto

Para continuar las acciones emprendidas en el año 2000 por la UMI –Unión Matemática Internacional– con el apoyo de la UNESCO, Madame Minela Alarcón, encargada de las Ciencias de la UNESCO, ha propuesto un proyecto de exposición internacional itinerante sobre las Matemáticas.

Las Matemáticas forman parte de nuestra vida cotidiana: la utilización de un teléfono, de una tarjeta de crédito, de un medio de transporte, así como la previsión del tiempo y muchas otras actividades esconden Matemáticas que han perdido su visibilidad. Las Matemáticas pertenecen al patrimonio cultural de la humanidad, como testimonian los programas escolares y universitarios. Partiendo de estas reflexiones se han hecho esfuerzos (Sociedad Matemática Europea y muchas sociedades nacionales de Matemáticas), por mejorar la imagen de las Matemáticas entre el gran público: los carteles sobre las *Matemáticas en la naturaleza* y *Las Matemáticas en la vida cotidiana* destacan entre estas acciones.

Esta serie de carteles y los folletos asociados, así como las acciones desarrolladas en Japón en el ámbito de la popularización de las Matemáticas está en el origen de este proyecto. A partir del material existente, un equipo formado por animadores del Año Mundial de las Matemáticas y por un grupo de matemáticos japoneses bajo la dirección del profesor Jin Akiyama comenzó a definir los objetivos de la exposición. De los trabajos de este grupo, al que se unió el *Centre Sciences* de Orleáns, surgió a la idea de una gran exposición internacional sobre las Matemáticas, exposición que naturalmente se inscribe dentro del marco de misiones culturales y científicas de la UNESCO.

Grupo de Trabajo

La dirección científica está a cargo de Minella Alarcon, responsable de las Ciencias de base en la Unesco y Mireille Chaleyat-Maurel, vicepresidente del Comité Rpamath de l'EMS.

En colaboración con Michèle Artigue, Vicepresidente ICMI; Jin Akiyama, Universidad Tokai, Tokyo; Mari-Jo Ruiz, Universidad de Manila, Filipinas; Jean Brette, Palais de la Découverte; Michel Darche, Centre Sciences; Gérard Tronel, Año Mundial de las Matemáticas. Y el *Centre Sciences*, Ccsti de la región Centro (Francia), que se encarga de la implementación y coordinación de las diferentes acciones.

Las referencias

Centro de Ciencias, CCSTI de la región Centro
Ha concebido y realizado numerosas exposiciones interactivas, entre ellas *Horizontes matemáticos* (premio D'Alembert de Matemáticas 1984 y que circuló por varias Comunidades Autónomas españolas) y *Maths 2000*, dos series de carteles, *Matemáticas en la Naturaleza* y *Matemáticas en la vida cotidiana*, presentados en cuarenta países y un folleto realizado con el apoyo de la Sociedad Matemática Europea y la Comisión Europea.

Laboratorio de investigación sobre la Educación, Universidad Tokai (Tokyo-Japón)
Dirigido por el profesor Jin Akiyama, que ha realizado una colección importante de objetos matemáticos y manipulaciones presentadas en dos exposiciones en Manila (Filipinas) y Seúl (Corea). En estas obras se basan los equipamientos de los museos japoneses de Matemáticas, especialmente el museo de Shizuoka (Fuji).

Sociedad Matemática Europea
Ha realizado, para el Año mundial de las Matemáticas, una serie de carteles difundidos, en 400 ejemplares, en más de una veintena de países. La participación activa y el apoyo del Comité - RPMAMath - han permitido al grupo de animación del Año Mundial de las Matemáticas realizar y difundir, en más de 10000 ejemplares, un folleto sobre *Las Matemáticas*

de la vida cotidiana. Este comité ha organizado un concurso de carteles sobre las Matemáticas en el año 2000; con los premiados se ha hecho una exposición que se ha exhibido en las grandes ciudades de Europa.

Grupo de animación del Año mundial de las Matemáticas
Entre las acciones realizadas por Mireille Chaleyat-Maurel, Catherine Goldstein, Jean Brette y Gérard Tronel destacan los carteles expuestos en el metro de París, el diseño y difusión de carteles y el folleto sobre *Matemáticas de la vida cotidiana*. Por el conjunto de sus actividades desarrolladas en el año 2000 el grupo obtuvo el premio D'Alembert 2002.

¿Por qué una exposición de Matemáticas?

La exposición propone mostrar que las Matemáticas son asombrosas, interesantes y útiles, son accesibles a todos, están muy presentes en la vida diaria, desembocan en numerosos oficios, y juegan un importante papel en nuestra cultura, desarrollo y progreso.

Actualidad de la Exposición
Durante el año 2005 la exposición se ha presentado varias veces. Hubo una presentación en Pekín entre los meses de mayo y junio. Después circuló por África Austral: Sudáfrica en Sci-Bono Discovery Center Johannesburgo, Kimberley, Ciudad del Cabo, Potchefstroom, Richards Bay. Y después en Mozambique en octubre y noviembre 2005 y Namibia en febrero y marzo 2006.

Presentaciones previstas en 2006
Madrid, durante el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM2006) desde junio a septiembre. Lyon, ENS-Lyon en Octubre-Noviembre. Se prevén otras presentaciones en los países de la Comunidad Europea, en el Magreb, en Sudamérica, Asia y Oceanía.

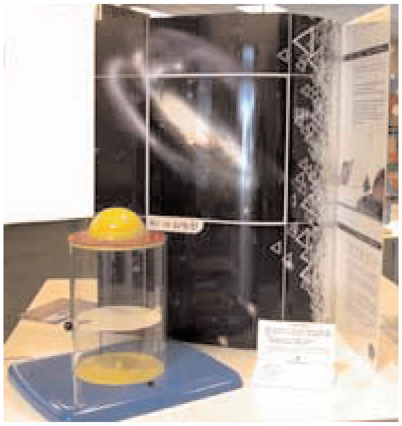
Presentamos aquí más información sobre cada tema y cada experiencia de la exposición.

Leer la naturaleza

Pautas en la naturaleza
¿Por qué una burbuja de jabón flota en el aire con una forma de esfera perfecta? ¿Por qué la naturaleza crea estructuras regulares y movimientos tan predecibles como la gravedad? Los matemáticos y los físicos utilizan modelos sencillos: círculos y esferas, cuadrados y cubos, hélices, conos... Sin embargo, el telescopio y el microscopio revelan que tanto en lo infinitamente grande como en lo infinitamente pequeño, la naturaleza tiene formas más complejas: espirales, fractales... Las Matemáticas, los números, las ecuaciones diferenciales, nos permiten entender mejor la vida en la Tierra o la estructura del Universo.

¿Es el mundo fractal?
¿Cómo se puede representar la forma de un río serpenteante o de una costa escarpada? ¿La forma de una nube, una llama o una soldadura? ¿Es posible determinar las dimensiones de las galaxias en el Universo? ¿Podemos modelar la ramificación intrincada de la actividad en la web mundial? Observa una hoja de helecho; está construida sobre una repetición del mismo motivo a escalas cada vez más pequeñas. Este tipo de estructura, que aparece a menudo en la naturaleza, llevó a Benoît Mandelbrot a desarrollar la Geometría Fractal. Un fractal es una forma similar a sí misma cuyas partes reproducen una versión más pequeña del todo.

¡Todo en órbita!
¿Como se podría describir las órbitas de los planetas?¿Son satélites naturales o artificiales? Kepler demostró que estas órbitas eran conos, elipses, parábolas, hipérbolas. Los cometas que aparecen cada cierto tiempo tienen también órbitas elípticas. Un satélite se puede librar de la atracción del sistema solar dejando que su órbita elíptica siga una trayectoria hiperbólica. Con el fin de seguir y dirigir los movimientos de muchos satélites artificiales que rodean la Tierra, utilizamos rosarios de antenas parabólicas.

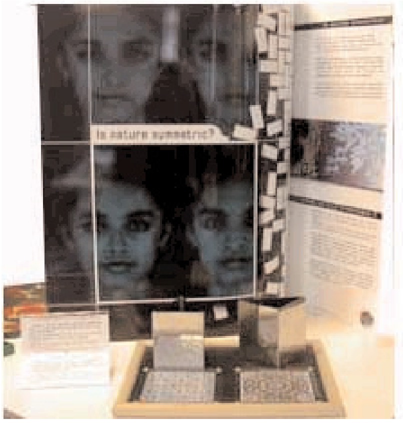


Teselados y simetrías

Técnicas de teselación
¿Se puede cubrir un suelo con baldosas de cualquier forma sin dejar ningún hueco o superposición? Podría funcionar con muchas formas, como por ejemplo con el pentágono regular, pero no con todas. Los modelos de embaldosados que se repiten por translación son los que mejor conocemos y sus simetrías permiten la creación de 17 tipos diferentes de modelos. La investigación de estos tipos de embaldosados y sus simetrías se basan en la *Teoría de Grupos* concebida por Evariste Galois. Si queremos embaldosar más libremente y no periódicamente, la investigación se halla todavía lejos de estar acabada. Entonces, ¿es posible embaldosar utilizando sólo una forma? ¡Es un misterio! Los modelos de embaldosados encuentran aplicaciones Matemáticas, cristalografía, códigos, física de partículas ...

¿Es la naturaleza simétrica?

¿Por qué la doble hélice del ADN siempre gira en la misma dirección? ¿Por qué un rostro humano y su reflejo en el espejo no son superponibles? Desde lo infinitamente pequeño hasta lo infinitamente grande, las simetrías aparecen en muchos modelos matemáticos. Sin embargo, la naturaleza raras veces presenta simetrías perfectas. Algunas se nos escapan y otras son idóneas para asumirlas como perfectas. Son mucho más frecuentes las formas vivas que giran hacia la derecha. Esta tendencia a la asimetría se debe al azar o a la propia asimetría de las fuerzas físicas: la pregunta sigue sin respuesta.



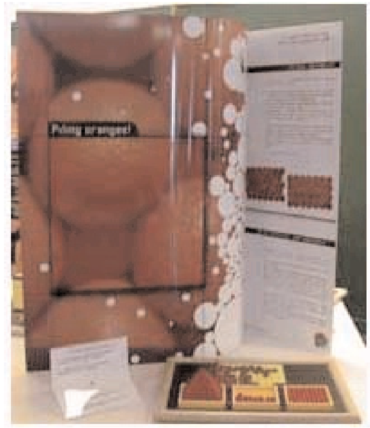
¿Dónde estoy?

¿Cuántos satélites necesitamos alrededor de la Tierra para saber donde estamos en todo momento? Tres son suficientes. Miden la distancia entre ellos y el objeto que siguen (un cuarto satélite ofrece una corrección temporal que mejora la precisión). El objeto por localizar está equipado con un receptor portátil que comunica con los satélites mediante ondas electromagnéticas. Su posición se encuentra en la intersección de 3 esferas centradas cada una en uno de los satélites y su radio es la distancia desde el objeto. El GPS (Sistema de Posicionamiento Global), los sistemas rusos –y pronto el sistema Europeo Galileo– nos permiten saber dónde nos encontramos en todo momento.

Llenar el espacio

Apilar naranjas

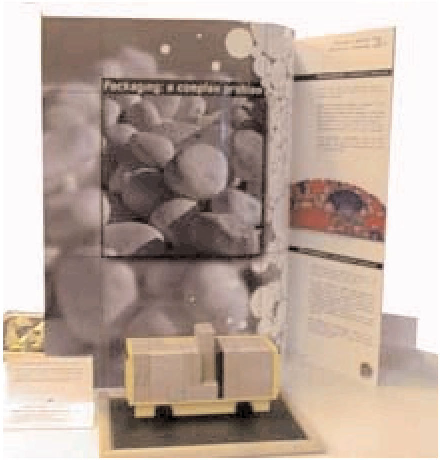
¿Cómo apilar naranjas ocupando el mínimo volumen posible? En los mostradores, las naranjas ocupan el 74% del espacio. Se trata del empaquetado cúbico de cara centrada bien conocido por los cristalógrafos. Kepler consideró, cuatro siglos atrás, que este enfoque era el mejor. No se pudo probar hasta 1998, mediante el estudio de más de 5.000 casos diferentes con la ayuda de ordenadores. Este problema de la vida cotidiana cuenta con aplicaciones que incluyen el estudio de estructuras cristalinas y la teoría de los códigos. Pero, si deseamos llenar una caja de una forma determinada, el problema continúa sin tener una solución general.



De los átomos a los cristales

El cielo, la tierra, los átomos y las partículas elementales... ¿Por qué se utiliza a menudo la esfera (entera o en parte) para representar formas naturales? A escala microscópica, los fenómenos naturales pueden representarse mediante esferas indeformables, que se mueven libremente o chocan sin que se produzca una pérdida de energía. Si los átomos se representan en forma de esferas, los cristales se consideran como capas de átomos ordenadas, y casi siempre periódicas. Estos fenómenos parecen elementos de un juego infinito de billar en tres dimensiones y permiten el estudio de gases, líquidos y determinados sólidos.

El empaquetado: un problema complejo
¿Qué ocupa menos volumen, un kilo de granos de café o un kilo de café molido? Este pequeño problema pasa a ser importante cuando lo que se quiere es transportar muchas toneladas de café. El problema se convierte en complejo cuando los artículos son de diferentes tamaños y formas y deben transportarse en contenedores muy definidos. A la inversa, ¿de qué manera se pueden encontrar las mejores dimensiones para que los objetos ocupen un volumen determinado? Estos problemas, que dependen también del peso de los objetos, del coste del transporte, del gasto de almacenamiento, etc., aún no han sido resueltos.



Unir mediante una línea

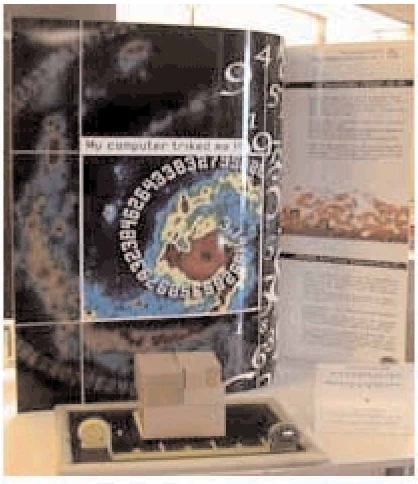
Puntos y líneas
Königsberg, 1736. ¿Es posible atravesar una ciudad cruzando cada uno de sus siete puentes tan sólo una vez? Para solucionar este problema, Euler proporciona una información fundamental: la ciudad está dividida en cuatro distritos representados por cuatro puntos, unidos mediante siete líneas que simbolizan los siete puentes. El problema entonces es el siguiente: en este mapa, ¿existe una carretera que pase sólo una vez por cada línea? Se trata del principio de la teoría de los grafos. La respuesta de Euler fue: depende de cuántos puntos existan en los que concurren un número impar de líneas. Sólo existe una solución si dicho número es igual a cero o dos.

¿Cuatro colores bastan?
¿Cuántos colores necesitamos para colorear un mapa de manera que dos países adyacentes tengan colores distintos? La teoría de Grafos nos permite representar este problema y reducir el número de casos por estudiar. Gracias a los ordenadores podemos analizar un gran número de este tipo de situaciones. La Teoría de Grafos se utiliza para representar y estudiar situaciones muy complejas tales como redes de telecomunicaciones, circuitos electrónicos, redes de distribución –agua, gas, electricidad, correos...– y otros numerosos problemas de logística, transporte y producción.

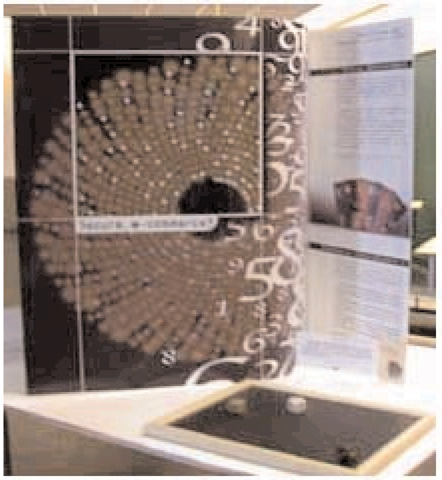
¡Hola! ¿Eres tú?
¿Cómo se realizan tus llamadas telefónicas? Viajan de repetidor a repetidor hasta la central más cercana a tu interlocutor que será avisado por un tono. En una ciudad, estas centrales de la red telefónica están ubicadas de la mejor manera posible teniendo en cuenta la topología irregular de las calles. Cada central define una zona de proximidad de la llamada en forma de polígono conectado con sus vecinos. Estas zonas delimitan una división en regiones de la ciudad, denominada Mosaico de Voronoï. Si se conectan las centrales de áreas vecinas, se obtiene un gráfico determinado aleatoriamente que representa los cables por los que viaja la llamada. Los gráficos, la teoría de la probabilidad y la geometría se unen para permitir que te comuniques.

Por qué calcular

¡Mi ordenador me ha engañado!
¿Qué números utilizamos en la vida cotidiana? Para contar utilizábamos números enteros, después decimales, números reales y complejos. ¿Qué pasa hoy en día? ¿Qué pasa si utilizamos una calculadora o un ordenador? En el supermercado es preferible saber hacer cálculos mentales rápidos. El propio ordenador sólo utiliza números decimales hasta un número limitado de decimales. Las leyes Matemáticas ya no se respetan. Tanto el contable como el ingeniero aeronáutico, deben controlar los errores de aproximación, desde el infinitesimal (infinitamente pequeño) hasta el infinito (infinitamente grande). En este ámbito es donde los ordenadores ya no son del todo fiables.



Comercio-e: ¿Seguridad?
¿Se puede comprar en Internet de manera totalmente segura? Con el desarrollo de la web, la criptografía –la ciencia de la codificación– ha pasado a constituir una herramienta fundamental para la protección de los bancos y de las compras online. El secreto de nuestras tarjetas de identificación bancaria se basa en números de más de 100 cifras, producto de 2 números primos. Pero, hoy en día, el avance de la tecnología de la información permite descubrir, cada vez más rápido, los divisores de números cada vez mayores... Los matemáticos, los físicos y los ingenieros informáticos buscan nuevos códigos indescifrables, utilizando, en particular, las extrañas leyes de la física cuántica.



Restauración en Corfú

¿Cómo recuperar imágenes digitales dañadas debido a problemas con la cámara, con la transmisión o la recepción? ¿Cómo enviar o recibir imágenes de buena calidad por Internet y a alta velocidad? Para ello, los matemáticos crean algoritmos de restauración de imágenes que se pueden ilustrar fácilmente mediante métodos cartográficos: la intensidad luminosa de cada píxel de la imagen se traduce por una *cota*. La imagen se traduce mediante un mapa de relieve donde el ruido produce un relieve desigual; éste último se regulariza conservando las principales *líneas de nivel*, y así se puede recuperar una imagen bonita.

Construir

Curvas para una conducción suave

En los cruces a distinto nivel de las autopistas, ¿cómo se puede construir una vía que resulte más suave y segura para una conducción eficaz? Al circular en un automóvil, cuando se viaja a velocidad constante y el volante se gira de manera uniforme, el rastro que deja el vehículo se denomina *espiral de Cornu*. Este rastro reduce las fuerzas centrífugas y une suavemente líneas rectas en una curva. Mediante la utilización del diseño de la espiral de Cornu se consigue una conducción más sencilla y eficaz. Esta curva también se utiliza en las líneas ferroviarias, las líneas de metro, las montañas rusas, etc.

La genialidad de los puentes

¿De qué manera se pueden construir puentes más largos y audaces? Los primeros puentes utilizaron madera y piedra. Los puentes de hierro, acero y hormigón aparecieron más tarde. Surgieron nuevos problemas: el comportamiento dinámico de los puentes colgantes, la complejidad de gestionar la construcción de carreteras. En la actualidad, los ordenadores y su capacidad de calculo permiten resolver estos problemas, paso a paso, consiguiendo unos puentes que superan todos los récords. El puente Storeboelt East Bridge en Dinamarca (con un vano central de 1624 m de luz), el viaducto de Millau en Francia (343 m de altura)...

El motor rotativa: ¡revolucionaria !

Los motores de pistón funcionan con un movimiento ascendente y descendente. En el caso de los motores rotativos, la energía se produce mediante rotación. ¿Cómo se producen la compresión y combustión en estos tipos de motores? El volumen de gas en cada cámara varía enormemente a medida que se mueve el rotor, provocando eventualmente la combustión en el motor. La carcasa tiene forma de una *epitrocoide*, una curva trazada por un punto dentro de un círculo que gira alrededor y en el exterior de un círculo fijo. Un rotor triangular gira dentro de una carcasa especialmente diseñada, estando uno de sus vértices en contacto constante con la carcasa. El espacio entre la carcasa y el rotor se divide en tres cámaras.

Estimando

¿Estamos la mayoría de la gente en la media?

Observa la campana de Gauss: ¿Por qué es tan conocida la forma de esta curva? ¿Por qué resulta fundamental para la estadística? Si clasificamos los habitantes de una ciudad, las hojas de un árbol..., de acuerdo con una característica (tamaño, peso, CI, nivel de competencia...) cuanto más nos aproximemos a la media para cada criterio, más individuos se encontrarán. Cuanto más nos alejemos de la media, menos individuos habrá. En los extremos, prácticamente no encontraremos ningún individuo. La representación gráfica de este hecho se conoce como curva Gaussiana. El carácter universal de la curva lo atribuyó Laplace, el cual afirmó que la distribución Gaussiana es la acumulación de muchos pequeños factores independientes.

¿Cómo pedir un préstamo?

Deseamos solicitar un préstamo de 10.000 € a nuestro banco. ¿Resulta más ventajoso solicitar un préstamo a tipo fijo o a tipo variable? Sin el álgebra, ¿cómo podemos saberlo? Las Matemáticas nos ayudan a comprender e interpretar estos contratos financieros. Ignorarlas sería quedarse indefenso frente a las prácticas comerciales. La situación es idéntica, pero más complicada, en el caso de las inversiones. Depositamos 10.000 € en el banco: a cambio éste se compromete a devolvernos dicha suma con intereses –eventualmente– que dependerán del índice monetario y del mercado bursátil. ¿Quién sale ganando?

¡Bingo!

Receta: Coger un avión a Alemania

1º Hágase con una guía telefónica de ese país
2º Suba al avión
3º Cuando cruce la frontera, abra la guía telefónica
4º Escoja un nombre al azar, anote el número de teléfono y guárdeselo en el bolsillo
5º Póngase un paracaídas
6º Abra la puerta del avión y... ¡salte!
7º Tras tomar tierra, eche a andar en línea recta al azar
8º Pregunte a la primera persona con la que se encuentre cómo se llama y cuál es su número de teléfono
9º Compárelos con el nombre y el número de teléfono anotados en su bolsillo
10º ¡Vaya suerte ha tenido! ¡Son iguales!
Acaba usted de ganar el Eurobingo.

Alemania tiene unos 82 millones de habitantes. Así que existe una probabilidad entre 76.275.360 de ganar el premio gordo.

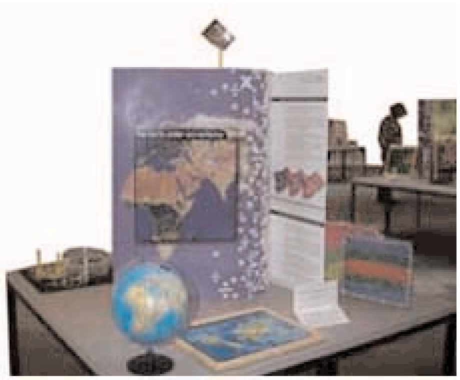
Optimización

La naturaleza es ahorradora

Una pompa de jabón es esférica; los cuerpos estelares son prácticamente esféricos. ¿Por qué? A perímetro constante, un círculo define la superficie con el área más pequeña. A volumen constante, la esfera posee la superficie más pequeña. La naturaleza escoge el camino más fácil. Una masa líquida en equilibrio relativo, una gota de aceite suspendida o girando en un líquido, los planetas al formarse, adoptan todos ellos formas esféricas, sean únicas o múltiples. Estas formas poseen la mínima energía potencial que es proporcional a su superficie física.

La tierra bajo vigilancia

¿Cómo puede uno encontrar una buena representación de la tierra? Eso depende del uso que quiera hacerse de ella. Después de haber elaborado proyecciones cartográficas adaptadas, por ejemplo, a la navegación, hoy tratamos de utilizar las imágenes tomadas por los satélites o desde el aire para optimizar las labores de reconocimiento o la gestión de recursos. Y es que cada uno de los píxeles de una imagen está diciéndonos cómo es el terreno: rocoso, oceánico, fluvial, boscoso, de cultivo... Combinando los datos suministrados por los instrumentos de medición (sensores espaciales y espectrales de alta resolución), es posible obtener algoritmos de aprendizaje. Los modelos así construidos son luego validados por observaciones hechas sobre el terreno.



Las formas más eficientes

¿Por qué se usa cada vez más la estructura de panal de abejas? ¿Acaso porque las abejas han encontrado la mejor solución? Los materiales diseñados a partir de la estructura de panal poseen propiedades llenas de ventajas, como ser livianas, sólidas y rígidas. Se utilizan estructuras de panal fabricadas en aluminio en la construcción del Airbus A380, del TGV, de las paredes de los satélites, etc. Papel o materiales con estructura de panal de polivinilo se emplean habitualmente en la construcción de puertas y paletas. Con todo, la celda de un panal no es la forma que más eficientemente ocupa un volumen dado. Desde entonces se ha encontrado un camino mejor, pero la forma más eficaz sigue aún sin conocerse.

Demostrando

3000 años de investigaciones

¿Existe la duda en las Matemáticas? ¿Es posible darse por satisfecho con una serie de hipótesis cuando éstas son correctas en un 99%? Las demostraciones constituyen la base de la actividad de los matemáticos y, de hecho, es lo que verdaderamente distingue a la suya de otras actividades. Las primeras demostraciones eran sencillas, estaban escritas en unas pocas líneas y podía comprenderlas todo aquél que tuviera estudios medios. Hoy en día, existen demostraciones que ocupan cientos de páginas, para las que hay que hacer uso de ordenadores y de las que sólo pueden emitir un dictamen un reducido grupo de especialistas. La complejidad del mundo plantea cada vez más preguntas a los matemáticos. Para responderlas, éstos tienen que construir modelos y demostrar a continuación lo adecuado de los mismos.

De Pitágoras a Wiles

¿Cómo puede uno demostrar las hipótesis que le parecen verdaderas? ¿Existen números enteros como $x^2 + y^2 = z^2$? ¿O como $x^n + y^n = z^n$, cuando n es mayor que 2? Los griegos fueron los primeros que trataron de resolver estos problemas. Fue entonces cuando Pitágoras dio su nombre al teorema sobre "el cuadrado de la hipotenusa..." o cuando Euclides formuló la demostración más antigua que se conoce. Más tarde, Fermat afirmó que este resultado no se podía generalizar. ¡Y Wiles demostró esta hipótesis en 1994! Para ello, se sirvió de los últimos trabajos de investigación realizados en un gran número de ámbitos de las Matemáticas. Por lo común, los matemáticos se esfuerzan en llamar nuestra atención sobre los grandes problemas aún por resolver.

Verdadero ... pero indemostrable

¿Podemos siempre probar una cosa de la que sabemos que es verdadera? En 1931, en un genuino 'golpe de efecto', Kurt Gödel dio una respuesta negativa a esta pregunta con su famoso teorema de la *incompletitud*. Gödel demostró que las nociones de verdad y probabilidad no son coincidentes, al descubrir una fórmula sobre números enteros que como tal es verdadera, pero de la que sin embargo no es posible ofrecer una demostración en la aritmética elemental. Para mayor sorpresa de todos, Gödel mostró también, impulsado por el mismo espíritu, que dentro de la aritmética no es posible ni refutar ni probar que jamás vaya a llegarse a una contradicción. La aritmética elemental es además indecidible. Por consiguiente, resulta imposible, por ejemplo, crear un programa informático capaz de comprobar si una determinada fórmula sobre números enteros es o no verdadera.

Colaboradores y participantes

El comité de patrocinadores agrupa a:

UNESCO
Unión Matemática Internacional (IMU)
Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI)
Sociedad Matemática Europea (EMS)
Ministerio Japonés de Educación (Monbusho)
Universidad Tokai de Tokyo, Japón
Ateneo de Manila, Filipinas

Día Escolar de las Matemáticas

Mirar el Arte con ojos matemáticos

12 de mayo de 2006

www.dem2006.fespm.es

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 89-92

Jakob Bernoulli: La geometría y el nuevo cálculo

Hace 300 años, moría en Basilea, el 16 de agosto de 1705, Jakob Bernoulli, el primero de una familia de científicos que había regentado ininterrumpidamente la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea durante 105 años, mientras que, en el total de cátedras, la Universidad siempre había contado con algún representante de la familia durante un cuarto de milenio, hasta mediados del siglo XX.

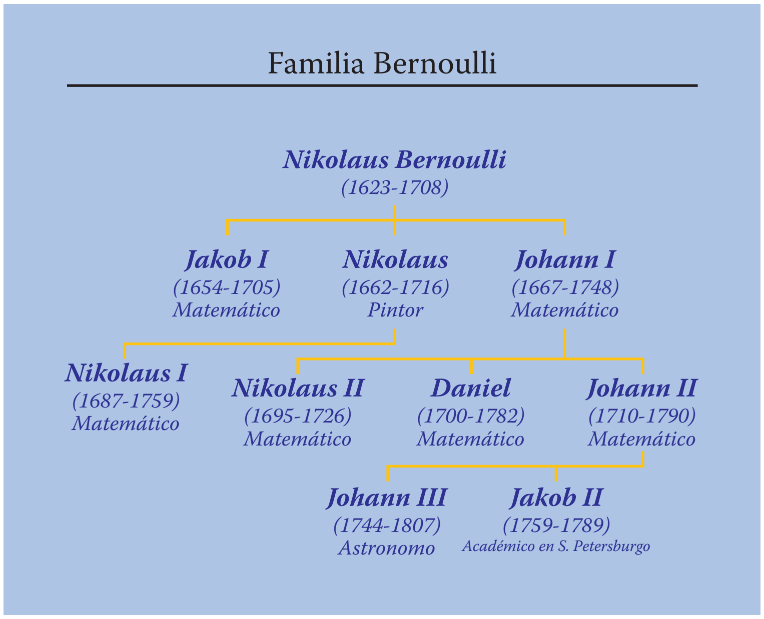
Jakob Bernoulli (1654-1705)

Los Bernoulli procedían originariamente de los Países Bajos. Se trataba de una familia protestante dedicada al comercio que se vio obligada a escapar de la persecución religiosa española. Después de pasar por Frankfurt, un tal Jakob Bernoulli se estableció definitivamente en Basilea, en el año 1622. Su hijo Nikolaus, que se había casado con la hija de un comerciante suizo, era padre de una familia numerosa, entre cuyos hijos se contaban Jakob y Johann, los dos matemáticos más eminentes de la familia y de los más influyentes en la Matemática del siglo XVII.

Jakob había nacido en Basilea, el 27 de diciembre de 1654,. Su padre lo había orientado a los estudios de Teología, cosa que realizaba a disgusto, llegando a graduarse no obstante en 1676. Durante todo este tiempo se dedicaba, en secreto y de forma autodidacta, al estudio de las matemáticas, la física y la astronomía, que es lo que verdaderamente constituía el centro de sus intereses.

De 1676 a 1682 viajó por Suiza, Francia, los Países Bajos e Inglaterra, donde tuvo ocasión de conocer a destacados científicos de la época, como R. Hooke y R. Boyle. Durante sus viajes, comenzó a escribir un cuaderno científico en el que iba anotando todas las ideas que se le ocurrían. Daba clases particulares y entre sus alumnos tuvo a una chica ciega, cuya experiencia le sirvió para escribir el libro *Método para enseñar matemáticas a los ciegos*.

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org



Árbol genealógico de los Bernoulli

A partir de la aparición de un cometa en 1680, elabora y publica en 1681 su primer trabajo científico donde expone una teoría, no totalmente correcta, sobre las leyes que rigen la trayectoria de estos cuerpos, afirmando que su aparición es predecible. Con ello, se opone a la creencia general de la época, según la cual los cometas eran fenómenos de origen divino.

Jakob escribe a Leibniz planteándole algunas cuestiones de su cálculo que los dos hermanos no acababan de comprender, pero Leibniz está de viaje y cuando le contesta, tres años más tarde, Jakob y Johann ya las habían resuelto por su cuenta.

De regreso a Basilea, en 1682, Jakob se dedica intensamente al estudio de sus materias preferidas. Estudia algunas de las obras matemáticas más significativas del momento, como la *Geometría* de Descartes, la *Aritmética infinitorum* de Wallis y las *Lecciones de geometría* de Barrow.

En 1684, contrae matrimonio con Judith Stupan, del cual nacieron dos hijos, una niña y un niño, pero éste no siguió los pasos de su padre y se dedicó al arte. Fue su hermano Johann el que originó una descendencia más numerosa de científicos.

En 1687, Jakob obtiene la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea, que no dejaría hasta su muerte. Ese mismo año, conoce los dos trabajos de Leibniz, sobre el *nuevo cálculo* (que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral), publicados en la revista *Acta eruditorum,* en 1684 y 1686. Llegados a su conocimiento estos trabajos estudia las ideas de Leibniz, junto con su hermano Johann, trece años más joven que él, estudiante de medicina por consejo de su padre, y al que Jakob había iniciado en los misterios de la Matemática. Escribe a Leibniz planteándole algunas cuestiones de su cálculo que los dos hermanos no acababan de comprender, pero Leibniz está de viaje y cuando le contesta, tres años más tarde, Jakob y Johann ya las habían resuelto por su cuenta. Comienza entonces una colaboración tan fructífera entre los hermanos y Leibniz que en menos de veinte años logra sentar las bases del tratamiento, mediante el nuevo cálculo, de los problemas geométricos y mecánicos.

Parece ser que Johann era más brillante y rápido en dar con la solución de los problemas que se planteaban. Jakob, sin embargo, más lento, procuraba dar mayor profundidad tanto a sus planteamientos como a sus soluciones.

Entre 1689 y 1704, publica Jakob cinco memorias en las que trata de desarrollar en serie determinadas funciones, sin demasiado rigor, al objeto de poder diferenciarlas e integrarlas, calcular sus longitudes y las áreas encerradas por ellas. De este modo, enriqueció notablemente la teoría de series, junto a Mercator, Gregory, Newton y Leibniz, a los que consideraba como fundadores. Entre otros resultados, consigue demostrar la divergencia de la serie armónica, cosa que, según él mismo señala, había logrado antes su hermano Johann.

Las curvas mecánicas

Uno de los problemas que más ocupaban a los matemáticos del siglo XVII era el de la determinación de curvas. Hasta entonces, se consideraba determinada una curva cuando se podía describir un procedimiento geométrico para construirla, pero el método de coordenadas desarrollado por Descartes y Fermat permitía trasladar el problema al de encontrar su ecuación mediante el uso de los polinomios. De ahí que las curvas correspondientes se denominasen algebraicas. Sin embargo, ya el propio Descartes consideraba importante desarrollar otros métodos que permitieran determinar y estudiar las curvas no algebraicas, a las que él mismo denominó mecánicas. Y precisamente el objetivo de Leibniz con su nuevo cálculo era el de poseer un método general que permitiera abordar el estudio de todo tipo de curvas, incluidas las no algebraicas.

El problema de la catenaria enorgulleció sumamente a Johann que se ufanaba de haber resuelto un problema para el que su hermano Jakob se había mostrado incapaz. A partir de este momento, se origina una rivalidad entre los dos hermanos tan fructífera en el terreno científico como penosa en el ámbito personal.

Es así como Jakob, junto con su hermano Johann, se dedica a ello intensamente. En 1690, Jakob publica en el *Acta Eruditorum* la solución al problema, propuesto por Leibniz en 1686, de la isócrona, esto es, de la determinación de la curva descrita por un móvil que desciende con velocidad constante. En la resolución de este problema, que Jakob reduce a la solución de una ecuación diferencial, aparece por primera vez el término *integral*, en el sentido que le asignamos actualmente como proceso inverso al de diferenciación. El propio Leibniz lo consideró más adecuado que el término *sumatorio*, utilizado hasta entonces.

En ese mismo trabajo, propone Jakob el problema de determinar la forma que adopta una cuerda, flexible y homogénea, fijada por sus extremos, sometida tan solo a la acción de su propio peso, que es el caso de la forma adoptada por un cable de la luz entre dos postes de la misma altura y sobre terreno llano. Este viejo problema no da lugar a una parábola, como Galileo creía, pues ya Huygens había sido capaz de demostrarlo a los diecisiete años. A raíz del reto formulado por Jakob, encuentra Huygens la solución correcta por métodos geométricos, denominando a la curva resultante *catenaria*. Corresponde a Johann y a Leibniz, sin embargo, resolverlo mediante el uso del cálculo infinitesimal.

El problema de la catenaria enorgulleció sumamente a Johann que se ufanaba de haber resuelto un problema para el que su hermano Jakob se había mostrado incapaz. A partir de este momento, se origina una rivalidad entre los dos hermanos tan fructífera en el terreno científico como penosa en el ámbito personal.

Dentro de este clima de rivalidad entre ambos hermanos, hay que situar el problema de la braquistócrona, propuesto por Johann en junio de 1696 a través del *Acta eruditorum*, como era costumbre en la época. Se trataba de encontrar la curva descrita por un cuerpo que se mueve, entre dos puntos fijos situados a distinta altura, desde el más alto al más bajo, sometido solamente a la acción gravitatoria, en el menor tiempo posible. La solución del propio Johann solo se ajustaba a un caso particular. Jakob, en cambio, lo resolvía por un método capaz de ser generalizado y que contenía en ciernes lo esencial del *Cálculo de variaciones*. Titulaba su trabajo *Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro:*

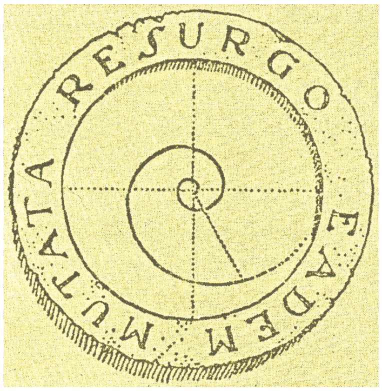
> Pero en particular él podría, si desea tomarse la revancha, intentar resolver el siguiente problema general. De entre todas las figuras de igual perímetro sobre la base común BN, determínese la curva BFN que aunque ella misma no contenga la máxima área, en cambio haga que sí la tenga otra curva BZN cuya ordenada PZ es proporcional a una potencia o raíz del segmento PF o del arco BF... Y como es injusto no compensar a una persona por un trabajo que emprenda en beneficio de otra, con menoscabo de su propio tiempo y en detrimento de sus propios asuntos, por eso deseo garantizar a un hombre del que yo salgo fiador, mi hermano, si resolviese el problema –aparte del merecido elogio– una gratificación de cincuenta ducados con la condición de que en el plazo de tres meses a partir de esta publicación prometa intentarlo y presente antes del fin de año la solución por cuadraturas, lo cual es posible.

Por cierto que Johann aceptó el reto y tan solo tres días después comunicaba a Leibniz que no había necesitado más que unos pocos minutos para resolverlo. Sin embargo la solución era errónea. Por su parte Jakob, después de preguntarle repetidas veces si estaba seguro de su solución, a lo que Johann respondía una y otra vez que sí, le demostró su error sometiéndolo a una crítica demoledora.

La ironía con que se desarrolló este episodio basta para hacerse una idea de cómo estaban las relaciones entre los dos hermanos.

Las espirales

Jakob se sentía especialmente atraído por las espirales. La primera espiral que estudia es la espiral *parabólica*, y es en este estudio donde utiliza por primera vez, de forma un tanto embrionaria, lo que hoy entendemos por coordenadas polares.



Pero la que más llama su atención es la conocida como espiral *logarítmica*. Esta curva aparece en el siglo XVI relacionada con la navegación, debido a su propiedad de equiangularidad, o lo que es lo mismo, a que en cualquiera de sus puntos la tangente a la curva forma un ángulo constante con el radio vector. Analizó Jakob la evoluta de la espiral logarítmica y se encuentra con la sorpresa de que es otra espiral logarítmica. Y no solo eso, ve además que son numerosas las transformaciones que aplicadas a la espiral logarítmica dan como resultado otra espiral logarítmica. Este hecho provocó en él tal admiración que la denominó *spira mirabiles* (espiral admirable) y dejó escrito que la curva fuese grabada en su tumba con la inscripción *Eadem mutata resurgo* (aún modificada resurjo), como un símbolo de resurrección.

Las probabilidades

La muerte sobrevino a Jakob en 1705, como consecuencia de una tuberculosis, sin haber logrado acabar la que sería su obra más difundida: *Ars conjectandi* (Arte de las conjeturas), que se publicó en 1713, ocho años después de su muerte, por su sobrino Nikolaus I. En la primera parte de esta obra resuelve varios problemas relacionados con el azar para lo cual introduce, entre otras herramientas de cálculo, la distribución binomial, también conocida por ello como distribución de Bernoulli. Al final, en una última parte, introduce, como no era por menos de esperar, el cálculo infinitesimal para tratar de las probabilidades. Así, enuncia y demuestra con rigor el teorema al que Poisson denominó ley de los grandes números. Esta parte, considerada como la más valiosa comienza con cuestiones acerca de la *certeza, probabilidad, necesidad y contingencia de las cosas.* Así, se dice:

> La probabilidad no es más que un grado de la certeza y se distingue de ella lo mismo que una parte se distingue del todo.

La aportación de Jakob Bernoulli a la matemática ha sido ampliamente reconocida por toda la comunidad científica de la época, como lo demuestra su elección por la Academia de París, en 1699, como uno de los ocho miembros extranjeros que entraron a formar parte de la misma, junto a Newton y Lebniz, además de su hermano Johann. Por su parte la Academia de Berlín eligió también a los dos hermanos, en 1701, como miembros extranjeros de la misma.

Este sello se emitió en Suiza el año 1994 con motivo del **Congreso internacional de Matemáticas** celebrado en Zurich durante ese año. Reproduce la imagen de Jakob Bernoulli, junto con la fórmula que expresa la *Ley de los grandes números* y una representación gráfica de las oscilaciones que experimenta la frecuencia relativa de un suceso en torno a la probabilidad teórica del mismo, a medida que crece el número, *n*, de casos del experimento.

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 93-97

Gauss y Goya: Los dos gigantes que se acercaron a las cosas

El Museo Thyssen Bornemisza es el único museo en Madrid que nos permite seguir de forma continuada la evolución que ha seguido la pintura occidental desde el siglo XIV hasta bien entrado el XX. El propio edificio, uno de los más antiguos de Madrid, refleja, también, el paso del tiempo. El primer palacio fue construido en el siglo XVI, y Pico de la Mirándola lo arregló cien años después al gusto italiano de la época, llenando la fachada de todo tipo de decoraciones y adornos. Los españoles de entonces eran mucho más sobrios que los italianos (no tenemos más que pensar en los edificios de esa época construidos por arquitectos españoles, como la Puerta de Alcalá, el Observatorio Astronómico, la sala de Exposiciones del Botánico, el Prado o el Reina Sofía), y tanta decoración en la fachada les parecía una cursilada. En cuanto una familia española, los Villahermosa, lo compró en el siglo XVIII, se le quitaron los adornos a la fachada y se dejó como le vemos ahora. Durante el siglo XX fue pasando de entidad bancaria a entidad bancaria y casi lo destrozan. En 1990, una vez se había decidido convertirlo en Museo para albergar la colección de cuadros Thyssen, el arquitecto Moneo se encargó de arreglarlo y restaurarlo, llevando a cabo una obra muy importante y actual desde el punto de vista museístico y convirtiéndole en uno de los museos actuales de referencia obligada.

Como juego teórico, tras recorrer la colección permanente del museo, elegimos un lienzo del siglo XIV en la primera sala de la colección Thyssen y otro del siglo XX en la primera sala de la colección Cervera: *Cristo y la Samaritana*, pintado por Duccio de Buoninsegna en 1311, y *New York con luna*, llevado a cabo por Georgia O'Keeffe en 1925. En ambos cuadros, los protagonistas son los edificios. En ambos cuadros, los edificios parecen hechos sobre cartón pintado y recortado, como si fuesen decorados de teatro. En ambos cuadros, lo que está más lejano aparece más pequeño y lo que está cerca más grande. Sin embargo, y pese a todos estos parecidos, ¡qué efectos tan distintos producen uno y otro!

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

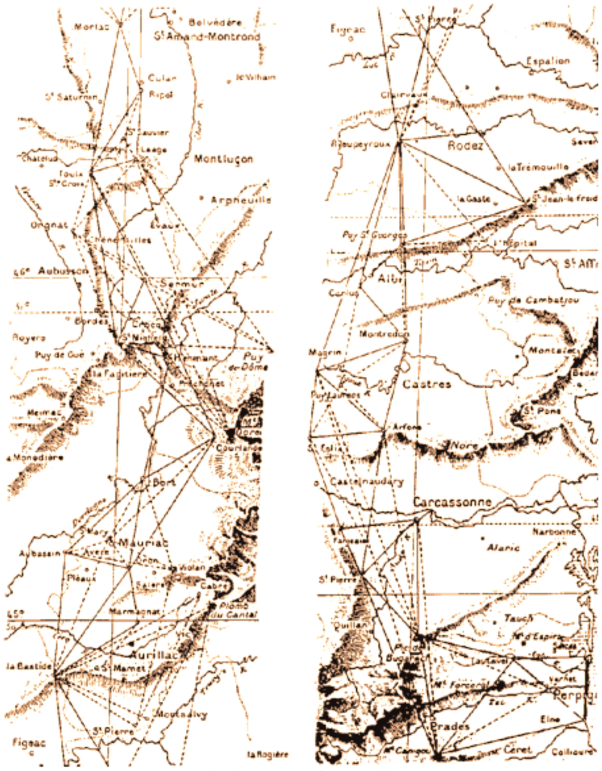
Cristo y la Samaritana,
Duccio de Buoninsegna, 1311

New York con luna,
Georgia O'Keeffe, 1925

Duccio de Buoninsegna es un observador externo que dibuja la ciudad desde fuera. Georgia O'Keefe no sólo se coloca dentro de la ciudad, sino que, además, compara su propio tamaño con el de los rascacielos que hay a su alrededor, y al hacerlo establece una relación –de tamaño– entre ella misma –y, consecuentemente, el observador– y los edificios. Algo que no ocurre en el cuadro de Buoninsegna: ni él, ni el observador, aparecen relacionados de manera alguna con la escena representada. ¡Menudo salto en seiscientos años! Reflexionando sobre él, salgo del Thyssen y camino hacia la fuente de Neptuno.

Georgia O'Keefe

A mitad de camino entre el observador externo del siglo XIV y la observadora involucrada del XX, está Velázquez. ¿Cómo lograr meterse a sí mismo en la escena de *Las meninas*, y a la vez pintar exactamente lo que ve, si él a sí mismo no se ve? Como el mago que es, jugando con espejos. Pero lo cierto es que, aunque con su truco de espejos logre con genial maestría crear la impresión de que no es así, Velázquez sigue estando fuera. *Las meninas* es un cuadro pintado según el punto de vista del rey y la reina, observadores externos de la escena que tiene lugar dentro de la habitación. ¿Quién dio el salto? ¿Quién se colocó sobre las cosas, entre las cosas, quién abrió el camino a O'Keefe y sus contemporáneos? Levanto los ojos y mi mirada cae sobre el Museo del Prado, ante mí. Estoy en la puerta Norte, la puerta de Goya, contemporáneo de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el descubridor, entre otras

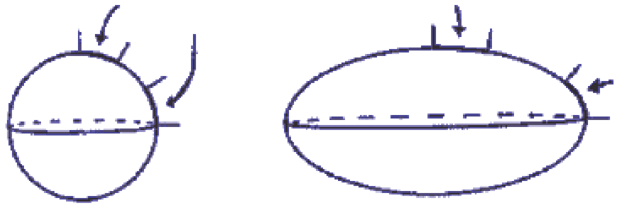


Ejemplo de triangulación de Gauss.

cosas, de la geometría intrínseca, el primer matemático que consideró las superficies como cuerpos y no como contornos de cuerpos... Pensando en Gauss entro en el museo y busco a Goya.

En 1818 Gauss, director del Observatorio Astronómico de Göttingen desde 1807, llevó a cabo un estudio topográfico del terreno abarcado por el reino de Hannover. El proceso usual que se sigue para llevar a cabo este tipo de estudio se llama triangulación, y consiste en marcar puntos estratégicos sobre el terreno a estudiar, y medir la distancia entre cada uno de ellos y los demás. De esta manera la región queda cubierta por una red de triángulos con los lados y ángulos determinados con la mayor precisión posible. Puesto que los triángulos se trazan directamente sobre la Tierra, que no es plana, los lados no serán rectos, ni los triángulos obtenidos serán triángulos usuales, sino lo que se conoce como *triángulos geodésicos*, esto es, triángulos directamente dibujados sobre una superficie, en este caso la superficie de la Tierra.

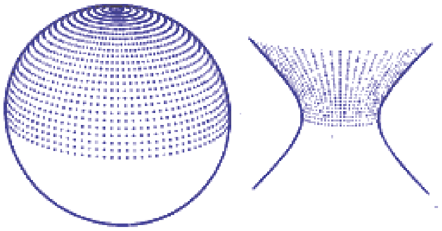
Uno de los primeros problemas a los que Gauss tuvo que enfrentarse a la hora de interpretar los datos recogidos al tomar medidas sobre el terreno, fue no conocer con exactitud la forma real de la Tierra, achatada unos 20 km en los polos, y más parecida a un elipsoide que a una esfera. A la hora de interpretar los datos de un estudio geodésico, es necesario tener en cuenta sobre qué tipo de superficie han sido tomadas las medidas. Por ejemplo, en una superficie esférica el cambio con respecto a la dirección vertical es uniforme, cosa que no ocurre si la superficie es elíptica.



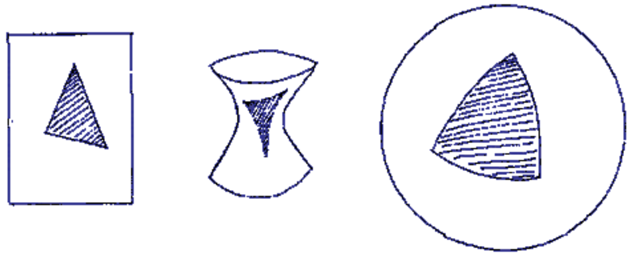
Secciones elípticas y esféricas

Detalles como este pedían conocer de antemano la forma precisa de la Tierra para poder interpretar las medidas obtenidas sobre ella. La gran contribución de Gauss consistió en dar la vuelta a la situación, como si fuese un calcetín: ya que a principios del siglo XIX no se contaba con información precisa de la forma de la Tierra que le permitiese entender los datos obtenidos en su estudio geodésico, Gauss decidió seguir la dirección contraria, y utilizar su estudio geodésico para deducir la forma de la Tierra. Hasta ese momento, la forma de la Tierra se había deducido siempre desde fuera de ella, concretamente observando el sol y las estrellas. Gauss demostró que esto no es necesario, que basta con tomar medidas sobre la propia superficie de la Tierra para poder determinar su forma exacta, y que la misma estrategia puede seguirse con cualquier superficie. Concretamente, Gauss demostró que medidas tomadas sobre la propia superficie bastan para calcular su *curvatura*, y esta curvatura determina con toda precisión su forma, su geometría. Esto es exactamente lo que significa la expresión *geometría intrínseca de una superficie*: la geometría –la forma– de una superficie no sólo la caracteriza, sino que, además, puede ser descrita desde la propia superficie, sin necesidad salirse de ella. La mejor manera de entender qué es la curvatura, y cómo la curvatura nos indica la forma de una superficie, es con un ejemplo.

Supongamos que queremos plantar olivos en un huerto. Podríamos utilizar una cuerda con nudos hechos a intervalos equidistantes, estirarla sobre el terreno y plantar los árboles en los lugares marcados por los nudos. Llevando primero la cuerda a lo largo de una dirección cualquiera y después en direcciones verticales a partir de la línea de árboles plantados, obtendríamos el olivar, cuya forma dependería de la curvatura del huerto.



Olivares con curvaturas distintas



Triángulos sobre superficies con distintas curvaturas

La Tierra y cualquier esfera son superficies con curvatura positiva, un cilindro tiene curvatura cero, y un diábolo o una silla de montar son ejemplos de superficie con curvatura negativa. Es un hecho que en la geometría plana los ángulos de cualquier triángulo suman 180°. Sin embargo, los ángulos de triángulos geodésicos dibujados sobre una superficie esférica suman siempre más de 180°, mientras que si la superficie tiene la forma de una silla de montar los ángulos del triángulo sumarán menos de 180°. Supongamos ahora que queremos determinar la forma de una superficie. Podemos triangularla y medir los ángulos en cada triángulo. Allá donde los triángulos tengan ángulos que sumen 180°, la superficie tendrá curvatura cero y será plana o cilíndrica; allá donde los ángulos de los triángulos sumen menos de 180°, la curvatura será negativa y la superficie será parecida a una silla de montar; y dónde los ángulos de los triángulos sumen más de 180°, la curvatura será positiva y tendremos una forma parecida a un trozo de esfera o elipsoide.

En todas las situaciones, la cantidad en que la suma de los ángulos el triángulo excede, o no llega, a los dos rectos es proporcional a su área. Este hecho es similar a un teorema clásico de la geometría esférica que ya había sido puesto de manifiesto por los astrónomos y matemáticos árabes de la casa de la Sabiduría de Bagdad. Lambert extendió el resultado en el siglo XVIII a todos los triángulos, y a mediados del XIX Riemann demostró que la constante de proporcionalidad involucrada es la curvatura de Gauss.

En 1828 Gauss publicó sus reflexiones en *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, un texto muy famoso que dio origen a la geometría diferencial moderna, en el que Gauss abrió el camino al estudio de las superficies como cuerpo en sí mismas, esto es, desde un punto de vista intrínseco, y en el que demostró que no es necesario describir el espacio ambiente que rodea a una superficie para describirla con toda precisión.

Fusilamientos del 3 de Mayo, Goya

Reflexionando sobre estas cuestiones llegamos ante *Las ejecuciones del 3 de mayo* y *las pinturas negras* de Goya, cuadros todos ellos en los que Goya describe la guerra que estaba teniendo lugar a su alrededor.

La escena en las ejecuciones es sobrecogedora. Los soldados a un lado y de espaldas, pintados como formas planas de color oscuro, ceden todo el protagonismo a las victimas, sobre todo al hombre que en el centro, enfundado en una camisa blanca y brillante, se enfrenta a los fusiles.

> El tema es tan actual ahora como en 1814 cuando Goya pintó *El 3 de mayo de 1898.* Muchos de los pintores del siglo XX de todo el mundo han vuelto su mirada a Goya a la hora de describir el horror de la guerra. Uno de ellos fue Picasso, que utilizó el mismo tema para describir la guerra civil española, Incluso los disturbios de Irlanda del Norte, los movimientos estudiantiles en Pekín en 1989 y la guerra en la antigua Yugoslavia han sido descritos con la imagen del cuadro de Goya *in mente*.
>
> Linköping TV-guiden, Suecia, 3 de Mayo de 2005

Dando un paso más allá, en las pinturas negras Goya no sólo se centra en las víctimas, sino que se coloca directamente sobre sus cuerpos, sobre sus caras, nuestra única referencia en su brutal descripción del terrible efecto de la guerra.

Al contrario que en *Las ejecuciones del 3 de mayo*, en estos cuadros no encontramos soldados ni armas. No hay cadáveres ensangrentados, ni tomate, ni efectos especiales. Como Carl Friedrich Gauss, Francisco de Goya no necesita del ambiente para describir con precisión y claridad la tragedia y desesperación que leemos en sus cuadros.

Goya y Gauss nos enseñan a abandonar nuestra atalaya, a colocarnos directamente sobre la superficie de los cuerpos que queremos describir. Una vez los tenemos frente a nosotros, acabar comparándonos con ellos, como hace Georgia O'Keefe con los edificios en su lienzo, será sólo cuestión de tiempo.

Auqelarre, Goya

Cursos formación a distancia Matemáticas 2006

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*

Cursos convocados:

Producción, de forma sencilla, de actividades multimedia para el alumnado: JCLIC, Hot Potatoes

Materiales y recursos en el aula de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato

Recursos para el área de Matemáticas: Cálculo simbólico con MATHEMATICA

Actividades lúdicas para el aula de Matemáticas

Información general:

El periodo de preinscripción: del 15 de febrero al 6 de marzo de 2006.

Número de plazas: todos los cursos se convocan con un número máximo de 100 plazas.

Orden de preinscripción: Si para un curso se reciben más preinscripciones que el número máximo fijado, se utilizará el orden de recepción de la preinscripción para seleccionar los/as alumnos/as admitidos/as.

Preferencias: En la preinscripción, cada alumno/a podrá seleccionar hasta 3 cursos, indicando el orden de preferencia.
La asignación de cursos se realizará teniendo en cuenta las prioridades y preferencias indicadas por el/la solicitante en la preinscripción. Se permitirá que un/a alumno/a se matricule en más de un curso, siempre que queden plazas en alguno de los cursos solicitados.

Periodo lectivo: desde el 10 de marzo al 20 de mayo de 2006.

Matrícula: Una vez finalizado el periodo de preinscripción, se publicarán las listas de admitidos/as por curso.
Para la realización de cada curso, los/as alumnos/as admitidos/as deberán abonar las siguientes cantidades en concepto de matrícula:

Socios de la SAEM *Thales*, socios de sociedades integradas en la FESPM o en la FISEM: 15 €
Restantes: 25 €

Una vez realizado este abono, a los/as alumnos/as se les facilitará la clave de acceso al sistema para el seguimiento de los cursos, así como un documento emitido por los organismos convocantes de los mismos (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y Centro de Informática Científica de Andalucía) conteniendo la matrícula de cada alumno/a para cada curso.

Certificación: Para los/as alumnos/as que superen los cursos, se emitirá certificado por un total de 40 horas lectivas. Para estas actividades se solicitará la correspondiente homologación a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Más información: sobre contenidos y procedimientos de inscripción en la página web:

http://thales.cica.es

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 99-105

De cabeza

El azar y sus problemas

El incierto mañana nunca nos pertenece
Goza del hoy. Y bebe a la luz de la luna,
de esa luna que en vano, milenio tras milenio,
nos buscará fielmente para darnos su brillo

Omar Jayyam

Contamos en este número con la inestimable colaboración de Santiago Fernández, responsable de la magnífica revista de matemáticas SIGMA, asesor de matemáticas del centro de profesores de Bilbao, autor de libros de historia de las matemáticas, agudo articulista y hombre cabal y entrañable, que nos plantea unos retos que tienen sus raíces en los orígenes de la matematización del azar. Un viaje en el tiempo para pasar un rato agradable con Pascal y Fermat.

Antonio Pérez Sanz

Estamos en la Francia del siglo XVII. Su sociedad gira en torno a una vigorosa monarquía. Allí viven grandes pensadores y literatos: Descartes, Fermat, Pascal, Moliere, Racine, etc. Los juegos de dados, cartas y tableros con fichas son los entretenimientos más frecuentes. Pero, los juegos, cada vez más complicados, y las apuestas cada vez más elevadas crean la necesidad de calcular sus probabilidades de manera racional.

Uno de los cortesanos del rey Luis XIV, llamado Antoine Gombauld, señor de Baussay, y más conocido con el sobrenombre de caballero De Méré, es un apasionado por el juego de los dados y las cartas, considerado como un jugador profesional, además de ser un hombre ilustrado e inteligente. Su ambición por mejorar los resultados en los juegos que él participa le llevan a plantearse una serie de preguntas que no

Un problema sobre juegos de azar propuesto a un austero jansenista por un hombre de mundo fue el origen del cálculo de probabilidades.

Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

Santiago Fernández Fernández
Asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao
santiagofer@berritzeguneak.net

sabe resolver. Busca aliados para resolver sus dudas, un amigo suyo, el duque de Roannez, le sugiere proponer tales cuestiones a un personaje de mente sagaz y penetrante: Blaise Pascal.

La historia es más o menos la siguiente: durante cierto viaje en carruaje, hacia el año 1652, camino de Poitou, el espiritual Pascal coincide con el mundano A.Gambauld (caballero de Méré) y sus amigos: el duque de Roannez y Damien Mitton. Al calor de la conversación el caballero propone sus cuestiones al joven Pascal. El primero de los problemas estaba enunciado, en los siguientes términos:

PROBLEMA 1: Se lanzan n veces dos dados cúbicos. Calcular el número de veces que es preciso lanzar los dados para apostar con ventaja al suceso de obtención del seis en los dos dados.

Meré le hace saber a Pascal que para él dos respuestas son posibles: 24 y 25. La primera obtenida mediante una regla teórica y la segunda mediante su experiencia de jugador profesional. Posteriormente le plantea otro problema que ya Luca Pacioli y Girolamo Cardano habían planteado un siglo antes, conocido como el problema *des partis* o *del reparto*.

Blaise Pascal, (1623-1662)

Pierre Fermat, (1601- 1665)

El problema en cuestión era el siguiente:

PROBLEMA 2: Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?

Durante dos años Pascal ponderó las cuestiones, especialmente la segunda, y finalmente comunicó sus resultados al jurista francés Pierre Fermat. En una de las primeras cartas, de la extensa correspondencia matemática que mantuvieron a lo largo de dos años, Pascal narra a Fermat el encuentro con De Méré y le hace saber cómo ha resuelto el problema del reparto en la partida interrumpida:

> He aquí aproximadamente como lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en el juego 32 monedas. Supongamos que el primero tenga dos y el otro una; ahora juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retiren cada uno lo que han puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de éstos las 32 monedas que me corresponden con seguridad". Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16.

La carta concluye con una frase muy conocida

> El caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis un gran defecto.
>
> *Carta De Pascal a Fermat,*20 de julio1654

Casi al unísono Fermat resolvió el problema por *un* método completamente distinto, lo cual fue para Pascal muy estimulante. *Ya ve,* escribió Pascal, *que la verdad es la misma en Toulouse que en París.*

A lo largo de la correspondencia puede verse no sólo la evolución de los problemas sino la admiración creciente de Pascal por el ingenio de Fermat, como lo demuestra la siguiente carta:

> Señor:
>
> Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío, y llega fácilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha establecido.
>
> Pero Señor, si en esto he competido con Vd., deberá buscar en otra .parte quien le siga en sus intervenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho Vd. el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; sólo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es fácil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables. Piense pues en ello, si le place y esté Vd. seguro de que soy, etc.
>
> *Carta de Pascal a Fermat*, 27 de octubre de 1654

Aclaraciones y pistas

Primer problema

El famoso caballero De Méré había hecho fortuna considerable a lo largo de los años apostando a obtener un seis en cuatro lanzamientos de un dado (si bien su conocimiento era empírico, también hay una razón matemática, ya que la probabilidad de que no salga el seis en ninguno de los cuatro lanzamientos es igual a $(5/6)^4 = 0{,}48225$ mientras la de que salga el seis en alguno de los cuatro lanzamientos será por tanto 0,51775. Basándose en este conocimiento, De Méré razonaba que en el caso de tirar dos dados para sacar doble seis y jugar con ventaja habría que tirar 24 veces los dados (utilizando un razonamiento proporcional simple).

En términos actuales podemos razonar de la siguiente manera: la probabilidad de obtener un seis doble en una tirada es 1/36, mientras que la probabilidad de NO obtener un seis doble en una tirada es 35/36. Sabiendo estos resultados y aplicando las leyes de la probabilidad podemos calcular la probabilidad de NO obtener un seis doble en n tiradas que será $(35/36)^n$. De dónde se deduce que la probabilidad de obtener al menos un seis doble en n lanzamientos será igual a:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Para que se cumplan las condiciones del problema se ha de verificar que:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 > 2\left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Tomando logaritmos decimales y despejando tenemos que :

$$n > \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$$

$$n > 24{,}6$$

Por tanto se han de efectuar, como mínimo, 25 lanzamientos de los dos dados cúbicos.

Merece consideración que unos 60 años más tarde el matemático A. de Moivre (1667-1754) encontró una regla para resolver este problema de manera aproximada:

$$n = N \cdot \ln 2$$
$$n = 36 \cdot \ln 2 = 24{,}85 \simeq 25$$

Dónde N coincide con el número de casos posibles.

Segundo problema

Este problema tiene más enjundia que el problema anterior y ha sido uno de los principales escollos en el nacimiento de la probabilidad.

Ya hemos visto una solución al mismo en una de las cartas remitidas por Pascal al jurista P. Fermat. Para ejemplificar mejor el problema supongamos la siguiente situación:

> **Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; Supongamos que al Jugador *A* le faltan 2 puntos para ganar la bolsa y al jugador *B* le faltan 3, ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?**

Evidentemente el vencedor absoluto quedará decidido como máximo en cuatro juegos más. Enumeremos todos los casos posibles resultados de estos cuatro juegos, usando A y B para denotar al vencedor de cada partida

AAAA	*AAAB*	*AABB*	*ABBB*	*BBBB*
	AABA	*ABAB*	*BABB*	
	ABAA	*ABBA*	*BBAB*	
	BAAA	*BAAB*	*BBBA*	
		BABA		
		BBAA		
Casos en los que gana *A*			**Casos en los que gana *B***	

Como vemos hay un total de 16 casos posibles de los cuales en 11 casos gana el A el premio y en 5 gana el B. Esta solución fue dada, también por Pascal en una carta remitida el 24 de agosto de1654 a Fermat. En este caso los 16 eventos son equiprobables, y por razones de simetría Pascal ha razonado de la manera anterior. Además se dio cuenta de la relación que tenían estos números con su famoso triángulo de Pascal. En efecto si observamos el triángulo numérico:

1	1	1	1	**1**	1	1
1	2	3	**4**	5	6	
1	3	**6**	10	15		
1	**4**	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Los valores obtenidos por Pascal se pueden obtener a través del esquema anterior, como el mismo Pascal explica en una de sus cartas.

En efecto : 1+4+6 =11, mientras que 1+4 =5.

Conviene notar que la manera de resolver este problema en la actualidad no sigue los pasos dados por Pascal, ya que únicamente estudiamos los siguientes casos:

AA	*ABBB*
ABA	*BABB*
ABBA	*BBAB*
BAA	*BBB*
BABA	
BBAA	
Casos en los que gana *A*	**Casos en los que gana *B***

Sin embargo, hemos de señalar que estos 10 casos *no son equiprobables*; sus respectivas probabilidades se pueden calcular, obteniendo:

$$P(AA)= {}^1/_4$$
$$P(ABA)=P(BAA)= P(BBB) = {}^1/_8$$
$$P(ABBA)=P(BABA)= \dots\ {}^1/_{16}$$

Por tanto,

$$P(A \text{ gane la partida}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$
$$P(B \text{ gane la partida}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

Si quieres resolver más problemas de este tipo consulta la bibliografía.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURSIN, J. L. (1958): *Las Estructuras del Azar*, Ediciones Martínez Roca, S.A., Barcelona

DE MORA CHASLES, M.S.(1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII*, Serv. Ed. Universidad del País Vasco, Bilbao

GARCÍA CRUZ, J. A.(2000): "Historia de un problema: el reparto de una apuesta". Revista *SUMA*

Alguien hay ahí...

Con SUMA alegría, y alguna incidencia por culpa del servidor de Internet de la FESPM que dilató el tiempo de recepción convirtiendo en meses lo que debían ser días, hemos podido comprobar que sí hay alguien que lee lo que en estas páginas se escribe. No sólo que lo lee, sino que pleno de entusiasmo y desafiando los duros calores de la estepa castellana brinda su pluma, además en un buen tono cervantino, y su mente para ayudar a don Quijote y a Sancho a deshacer sus entuertos matemáticos.

¡Si! Nos ha escrito desde la Universidad de Valladolid, brindando sus respuestas y sus atinadas observaciones Alfonso J. Población Sáez, profesor del Departamento de Matemática Aplicada y una de las personas que más sabe del extraño binomio cine-matemáticas.

Sólo una puntualización a las atinadas sorpresas que Alfonso pone en boca de don Quijote. Cosa del diablo sería, como bien dice don Quijote en la respuesta, que fuesen 4 chorizos y cada uno pesase 10 kg, y también que fuesen 8 chorizos de $^{30}/_{7}$ kg. ¡Mire bien, vuestra merced que aquellos que allí se parecen no son kilos, sino onzas castellanas...! Kilos y metros...Aún tardarán varios siglos en aparecer tan extrañas unidades en nuestros pagos. Sin duda don Quijote y Sancho hablarían de varas y de onzas, medida harto extendida en aquella época y que para los amantes de las unidades de peso francesas equivalía a 28,75 gramos. Así que cada chorizo pesaría unos 123 gramos y los 8 juntos casi un kilo.

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

De cómo nuestros amigos resolvieron sus enigmas tras una agitada vigilia.

Respuesta a los *...Entuertos matemáticos* del n.º 48 de *SUMA*

Ensimismados en sus cuitas y cavilaciones, escudero y caballero viéronse sorprendidos por la noche, por lo que de nuevo tuvieron que dormir al raso. No tardaron en conciliar el sueño, aunque a eso de las cuatro de la madrugada, despertose Sancho a consecuencia de un fuerte estruendo, que al instante descubrió como ronquido propio. Después de paliar sus más elementales necesidades, percatose de que su señor parecía presa de una tan feroz batalla, a tenor de las voces y aspavientos que profería, que, preocupado, determinó despertarlo en ese mismo instante:

—¡Señor, mi señor! ¿Qué le sucede a vuesa merced, que parece lidiar con los más pavorosos monstruos de todo el averno?

—(Gritando) ¡No puede ser! ¡Es imposible! ¿eh?¿Qué sucede? ¿Quién osa distraer la mente de...? (Despertando) ¡Ah, Sancho, eres tú! Me temo que los chorizos no me han sentado tan bien como su sabor barruntaba.

—No miente ahora tan suculenta pitanza, que ya son horas desde que este infortunado tragadero no tiene sino vagos recuerdos.

—¡Siempre pensando en lo mismo! Deberías aprender de mí, que dándole vueltas y requiebros al día pasado, aparecióseme en sueños un extraño personaje ataviado con una especie de bata blanca y un puntiagudo objeto con el que trazaba signos en un papel, que no paraba de llamarme zoquete. Me habló de los albañiles de la venta diciéndome que si a fueran las hileras de cinco bloques de adobe de uno, y b las de a siete del otro, entonces en vista de los bloques sobrantes tendríamos que

$$5a + 2 + 7b + 4 = 100$$

o sea que

$$5a + 7b = 94,$$
$$\text{y de ahí } a = (94 - 7b)/5.$$

Alfonso Jesús Población Sáez
Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
http://gauss.mat.eup.uva.es/~alfonso

Como los adobes son cantidades enteras, los posibles valores para (a, b) sólo podrían ser (16, 2), (9, 7) y (2, 12). Entonces le comenté que, aunque ninguno de ellos parecía muy despierto, tampoco eran tan torpes como para tomar cantidades muy desiguales de bloques de adobe, pudiendo así descartar la primera y la tercera opción, ya que corresponden respectivamente a 12 y 89 adobes, y 82 y 18. Así que, uno cogió 47 adobes y el otro 53, que es lo que corresponde al segundo par indicado. Y lo curioso, Sancho, es que lo entendí perfectamente.

—¿Cuál era entonces el motivo de vuestra penosa inquietud?

—Ya te lo dije, Sancho, que no me escuchas. ¡Los chorizos, pardiez, eran los chorizos!

—Cuénteme, cuénteme, pero como vos mismo dijisteis no hace mucho (ver cap. XXI, 1ª parte), *sed breve en vuestros razonamientos que ninguno hay gustoso si es largo*.

El Quijote, Dalí

—El tal espectro, que no podía ser sino pariente del muy ruin Alifanfarón de la Trapobana, merced a su suficiencia y a su superior conocimiento (aunque él lo llamó “supremo conocimiento”, pero no entendiéndolo como nosotros lo hacemos, sino como “el menor de los conocimientos superiores”), al mencionarle lo de “la suma de todos los pesos de todas las parejas o ternas posibles”, después de insultarme de nuevo, me dijo que no estaba claro que quería decir. ¿Se refería a que iba pesando los n chorizos a pares y luego a tríos y los iba apartando después de cada pesada pudiendo sobrar uno o ninguno en las parejas, y uno, dos o ninguno en las triadas? Si tal fuera me probó que era imposible, básicamente porque la diferencia de pesos de pares a tríos era muy elevada. Entonces dijo que a lo mejor se refería a ir pesando todas las posibles parejas y tríos que se pudieran hacer con los n chorizos (lo cual le pareció, con todos los respetos, una gilipollez).¿Habría entonces que pesar la pareja 1–2, y luego la 2–1, hablándome de no sé qué variaciones? Entonces tendríamos 4 chorizos, ¡de 10 kg cada uno! ¡No, no y no, exclamé! Entonces me dijo que lo mejor sería considerar las parejas y ternas repetidas como una sola, hablando de no sé qué combinaciones, y escribiendo $n(n-1)p = 240$, $n(n-1)(n-2)\ p = 1440$. Colocó entonces la segunda encima de la primera separadas por una raya, y empezó a tachar expresiones iguales, terminando por decir 8 chorizos de peso 30/7 cada uno. Cosa del diablo me pareció, profiriendo entonces que eso tampoco podía ser, y en esas estaba cuando me despertaste.

—¿Recuerda mi señor que tras despedirnos de los pastores estuve cavilando, a mi manera, el número de ovejas que tendrían?

—¡Cómo no lo voy a notar, si estuviste extrañamente en silencio largo rato!

—Pues háceme que eran 8 ovejas señor, con la finca cuadrada de 4 m de lado (16 m^2 de superficie y 8 postes separados entre sí 2 m) y la rectangular de 8 × 2, con 10 postes con idéntica separación.

—Pero Sancho, eso no sirve, que paréceme que has llegado a esa idea casualmente, o por la cuenta que dicen “de la vieja” (que era sin duda lista) o merced a algún demonio vespertino que pasara por el camino. Que no te oiga el súcubo ese que a mí me vino, que no hay cosa que más le cabree que las cosas sin demostrar.

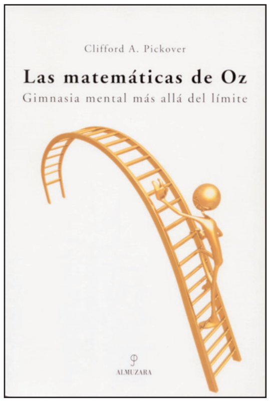
—Pues sabed (herido en su amor propio) que me da igual lo que diga ese Alifanfa lo que sea, y por ende lo que digáis vos, que a mí la cuenta me cuadra. Y además observad (e hizo en el suelo el siguiente dibujo).

o	o	o	o	o	o
X	o	X	o	o	o
o	o	o	o	o	o
X	X	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	X	X	o	o	o

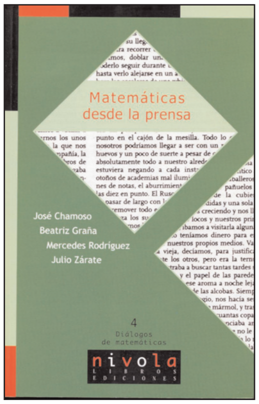
Las cruces son las coles que la tendera pudo coger (esas u otras en similar distribución). Y me da igual lo que digáis, resuelto está.

Y en esto diose media vuelta para intentar recuperar el sueño perdido que en tal disputa ya oyeron algún gallo madrugador. El día volvería a ser largo y quizá lleno de nuevos enigmas, quebrantos y conflictos. Sin embargo nuestro caballero no logró conciliar el sueño, (recordaba otra expresión inexplicable para él que la aparición le había mostrado, algo así como $xn + yn = zn$, con $n>2$), lamentándose de no haber tenido a bien leer en su momento algún tratado más algebraico o geométrico en lugar de alguno de los muchos de caballerías que Dios puso en sus enjutas y torpes manos.

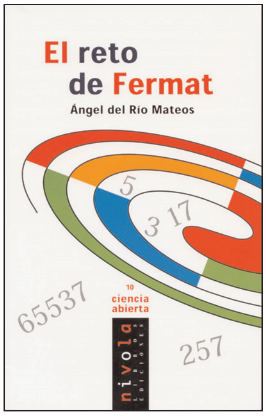
Publicaciones recibidas



Las Matemáticas de OZ. Gimnasia mental más allá del límite
Clifford A. Pickover
Traducción: Richard Ley
Editorial Almuzara
Córdoba, 2005
ISBN: 84-96416-96-8
446 páginas

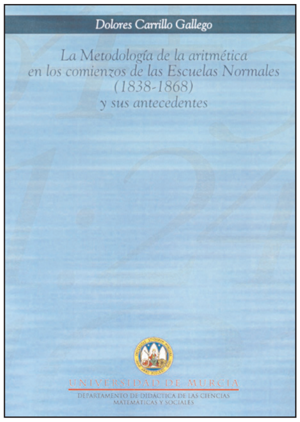


Matemáticas desde la prensa
J.Chamoso, B. Graña, M. Rodríguez y J. Zárate
Editorial Nivola
Diálogos de matemáticas/4
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-94-5
328 páginas



El Reto de Fermat
Ángel del Río Mateos
Editorial Nivola
Ciencia abierta/10
Madrid, 2005
ISBN: 84-96566-04-8
165 páginas

Frabbriche, sistemi, organizzazioni. Storia dell'ingegneria industriale
Ana Millán Gasca
Springer
Milán, 2006
ISBN: 88-470-0303-2
293 páginas



La metodología de la aritmética en los comienzos de las escuelas normales (1838-1868) y sus antecedentes.
Dolores Carrillo Gallego
Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia
Murcia, 2005
ISBN: 84-608-0245-0
469 páginas

(Ver recensión en este mismo número de SUMA)

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 107-122

Biblioteca

Mi biblioteca particular

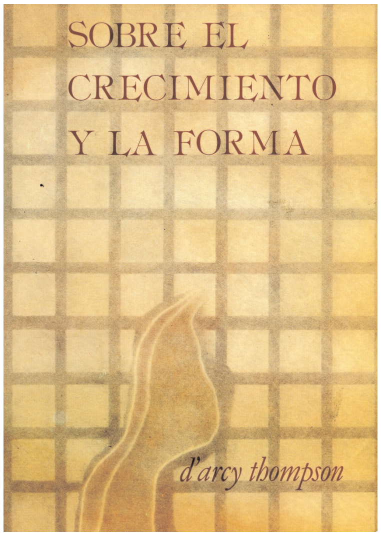
Antonio Pérez Sanz

Destaca unos pocos libros de matemáticas o de su enseñanza que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial. Cita algún párrafo que nos permita apreciar su sentido y nos induzca a leerlos.

Es complicado reducir a sólo dos las lecturas matemáticas que de una u otra forma han ejercido una marcada influencia en tu vida. Yo con permiso del coordinador de esta sección voy a ampliar el número un poco aunque prometo ser más breve en la explicación de los motivos. Utilizaré un criterio cronológico por aquello de los conjuntos bien ordenados.

He de empezar diciendo que ninguno de los escasos libros específicos de matemáticas recomendados a lo largo de la carrera dejó en mí una huella imborrable. Los de historia de las matemáticas y filosofía de esta ciencia, menos aún; mis profesores no me recomendaron ninguno que yo recuerde...

Quizás el primer libro que vino a cambiar mi percepción sobre el sentido, la funcionalidad e incluso la estética de las



H. Blume Editores,
Madrid, 1980,
330 páginas

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

matemáticas fue un clásico de principios de siglo que cayó en mis manos de forma casual allá por los años 80, se trata de *Sobre el Crecimiento y la Forma* de D´Arcy Thompson, en versión abreviada (330 páginas) editada por H. Blume Editores en 1980. Por desgracia nunca he podido conseguir la primera edición íntegra de 1917 (793 páginas) o la revisada de 1942 (1116 páginas).

Alguien podrá objetar que no se trata de un libro de Matemáticas... ¿Cómo que no? Una cosa es que no tenga muchas fórmulas, realmente casi ninguna, y otra muy distinta que no trate de conceptos, aplicaciones y procesos matemáticos y precisamente en uno de los campos en que la Matemática aparece como herramienta lejana: en el desarrollo y la estructura de los seres vivos. El libro es una explosión, preciosa por otra parte, de matemáticas aplicadas al mundo de la biología.

La característica más notable de este libro es el análisis de los procesos biológicos desde el punto de vista matemático y físico. (Curiosamente D´Arcy Thompson deja la química de lado). Aunque seguramente la mejor explicación del carácter excepcional del libro la encontramos en la introducción de Jhon Tyler Bonner:

> Otro hecho significativo que contribuye a la importancia y carácter único de *Sobre el Crecimiento y la Forma* es que no sólo es buena ciencia sino también buena literatura; se trata de un ensayo científico con el estilo de un ensayo de humanidades. El nobel Medawar la considera “incomparablemente, la mejor obra de literatura en todos los anales de la ciencia escrita en lengua inglesa.

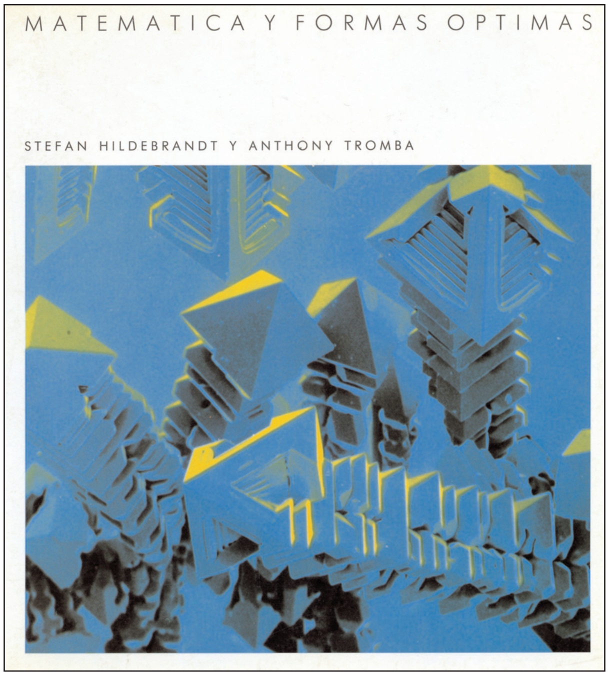
Y en mi opinión no exagera.

La Naturaleza no tolera la ineficiencia. Y la eficacia está marcada por unas leyes físicas y matemáticas que todo ser vivo que pretenda perdurar tiene que respetar. ¿Puede un pino crecer indefinidamente?, ¿cuál es la altura máxima que puede alcanzar? No parece un problema matemático sino biológico y sin embargo lo es, por cierto, fue resuelto por Euler y Lagrange hacia 1777. La magnitud, el tamaño es el primer problema matemático de los seres vivos y el tema del segundo capítulo de los diez que tiene el libro. En un viaje de lo pequeño a lo grande, D´Arcy nos plantea reflexiones y soluciones matemáticas a los problemas físicos que tienen que vencer las células, los tejidos celulares, las espinas y los esqueletos para lograr ese nivel de eficiencia natural... En otro capítulo y de una forma atractiva, mediante una presentación histórica nos sumerge en el fabuloso mundo de las espirales y las hélices en la Naturaleza, tanto en el reino vegetal como en el mundo de los moluscos y en las formas de los cuernos de los rumiantes o de los dientes y colmillos de los mamíferos.

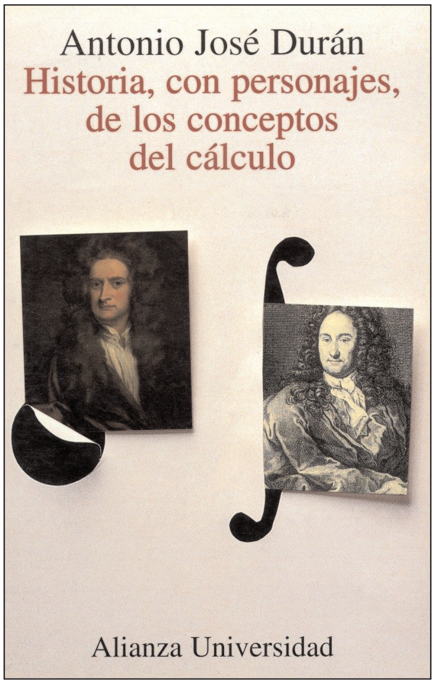
El capítulo VIII trata de la relación entre la forma y la eficiencia mecánica. Hace un estudio comparativo entre las estructuras artificiales de puentes, para optimizar las tensiones, con la respuesta natural de los huesos y esqueletos de las más variadas especies animales. En el IX aborda la Teoría de las transformaciones o la comparación de formas relacionadas con un estudio preciso de las deformaciones de los diferentes cráneos de especies relacionadas. En él comencé a entusiasmarme por la matematización de las formas de las hojas y las flores. En el epílogo está la mejor justificación de mi elección de este libro; dice D´Arcy Thompson:

> Y al mismo tiempo he pretendido demostrar al naturalista cómo puede encontrar ayuda y guía en unos cuantos conceptos matemáticos. También he tratado de mostrarle al matemático un campo de trabajo, un campo en el que pocos han entrado y que nadie ha explorado. Aquí podrá encontrar problemas familiares, del tipo de los que suelen poner a prueba la habilidad del matemático y constituyen una grata recompensa para la mente pura por sus triviales asociaciones y su aparente sencillez.
> (...) El número y la Forma manifiestan la armonía del mundo, y el corazón, el alma y toda la poesía de la filosofía natural están inmersos en el concepto de belleza matemática(...).

En 1985 Stefan Hildebrandt y Anthony Tromba realizaron el epílogo perfecto a la obra de D´Arcy Thompson con otro libro que comparte espacio en el mismo anaquel de mi biblioteca, se trata del libro *Matemáticas y Formas Óptimas* de Biblioteca de Scientific American, editado en castellano por Prensa Científica, S.A. en 1990.



Habitualmente un buen alumno se cree casi todo lo que su profesor le dice en clase. Si nuestros alumnos de bachillerato y de los primeros cursos universitarios hicieran un caso excesivo a la secuencia en que los profesores le van presentado las ideas vertebrales del cálculo diferencial y del cálculo integral acabarían, acaban de hecho, con una visión deformada de la historia del cálculo. En la década de los 90, un libro preciso, precioso, inteligente y al mismo tiempo sensual – si alguien no se lo cree que lea su "delantal" – me abrió los ojos sobre la realidad de la evolución de los conceptos matemáticos y, más importante aún, modificó de forma sustancial y permanente la manera de dar el Análisis a los alumnos de bachillerato. Se trata de *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, de Antonio José Durán, Alianza Universidad, Madrid, 1996.

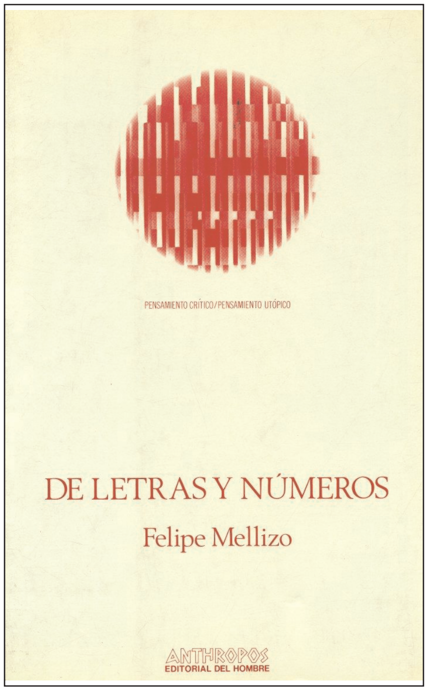


Antonio J. Durán, profeta entusiasta de la importancia de la historia de las matemáticas en la enseñanza en todos sus niveles, se plantea, y lo consigue de forma brillante, no sólo aclarar las peripecias de los orígenes y la fundamentación del cálculo, sino sobre todo mostrar rostros humanos delante y detrás de los conceptos matemáticos, porque como él mismo dice en su particular prólogo:

> Y puesto que las matemáticas son obra del hombre, hemos añadido a la historia de los conceptos, la biografía de los principales matemáticos implicados en su invención y desarrollo. Estos apuntes biográficos [...] servirán para humanizar los propios conceptos. Las matemáticas forman una entidad viva y excitante, pero que a menudo parece fría a quien la estudia; todo esfuerzo para hacerla cálida y acogedora será poco.

Pero el libro no sólo habla de números reales, funciones, límites, derivadas, series...Gracias a él podrás desmontar uno de los grandes bulos del folklore matemático: la ausencia del premio Nóbel de matemáticas. En contra de lo que opina la mayoría de los especialistas en esa especie de Salsa Rosa matemática, no se debe a los celos de Alfred Nóbel y al intento de no beneficiar jamás al amante de su mujer, prestigioso matemático sueco según las malas lenguas... ¡No, imposible!. Nóbel podría tener manía a Mittag-Leffler, pero no por acostarse con su mujer... simplemente por el pequeño detalle de que Nóbel no se casó nunca....

Lecturas ajenas –o no tan ajenas– a las matemáticas en los que éstas jueguen un papel destacado



Dos libros muy distintos y distantes en el tiempo pero ambos muy entrañables.

El primero es un raro ejemplar, *De letras y números*, de Felipe Mellizo, (Anthropos, Barcelona, 1986). Se trata de una recopilación de textos a medio camino entre el ensayo y el artículo periodístico publicados en las revistas más inverosímiles. En ellos Felipe Mellizo realiza unas profundas reflexiones sobre temas filosóficos y científicos, incluyendo las matemáticas, con un toque irónico y un saber renacentista, riéndose sin rubor de los sempiternos voceras, que tanto abundan en nuestro país, del enfrentamiento entre "ciencias" y "letras". Los matemáticos le estamos especialmente agradecidos por algo más que sus originales y documentados artículos de divulgación matemática. Si todos sus proyectos en TVE fueron originales y exóticos –llegó a presentar unos telediarios muy personales y nada ortodoxos o a narrar las aventuras de *Al filo de lo imposible*–, la palma se la lleva sin duda una serie de programas de matemáticas titulada *¿Un mundo feliz?*, realizada en 1983 y donde Felipe nos hablaba en la sala de nuestras casas en plena sobremesa de Descartes, de Rey Pastor o Bertrand Russell, de las geometrías no euclídeas, de la Teoría de las Catástrofes o del Álgebra de Boole. La primera vez en la historia que TVE incluía en su programación una serie completa de divulgación matemática.

Como muestra del espíritu de sus artículos y sus programas de televisión sobra con esta cita:

> Alguna vez he dicho que, o cualquier otra afirmación de esa índole, son poemas expresionistas en los que la emoción no está omitida, sino reducida a su más vertiginosa y significativa brevedad. La "notación" matemática y la vasta simbología de la química o la física constituyen, por sí mismas, una rama poderosa y atractiva de la historia de la expresión literaria.[...]. Pueden llegar a cimas de belleza.

El otro es una extraña y conmovedora novela que se ha convertido en dos años en un éxito mundial: *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, Ediciones Salamandra, Barcelona 2004 [ver también la subsección 'En campo ajeno'].

El protagonista es un joven alumno de un centro de educación especial, con una discapacidad psíquica que le dificulta el trato con otras personas, y moverse fuera de su casa y su calle y le hace ver la realidad bajo un prisma muy especial. La aparición del perro de su vecina asesinado una noche le coloca en la situación de hacer de detective al más puro estilo inglés para desentrañar el misterio. Su afición a las matemáticas y a aplicar una lógica formal aplastante en las situaciones cotidianas le meterán en auténticos problemas, aunque también le ayudarán a salir de ellos.

Una hermosa reflexión sobre el sentido común, la percepción y la interpretación del mundo que nos rodea.

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas y que hayas incorporado a tus referencias vitales?

Soy un enamorado de las citas, al menos de las literarias. Me parecen pequeñas píldoras que presentan en pocas palabras una forma de entender la vida. Y he descubierto y utilizado en mi vida un buen número de citas que tienen que ver con las matemáticas. De hecho en mi serie de TV *Más por menos* cada uno de los programas se introducía con una cita matemática.

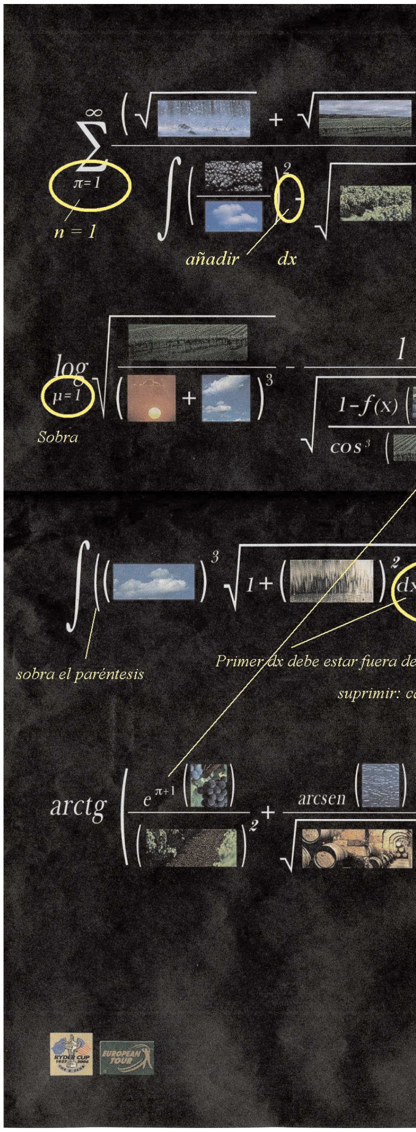
Seguramente la que más ha impregnado si no mi vida al menos sí mi práctica docente ha sido esta de G. H. Hardy, en su *Apología de un matemático*, (Nivola, Madrid, 1999).

> Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser hermosos; las ideas como los colores o las palabras, deben ensamblarse de una forma armoniosa. La belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay lugar permanente para unas matemáticas feas.

Pienso que es una de las pocas cosas que deberían tener claras todos los profesores y sobre todo aquellos que se ponen a elaborar currículos de matemáticas que luego van a sufrir miles o millones de jóvenes.

Señala alguna afirmación chocante referida a las matemáticas en tus lecturas

Curiosamente no se trata de un texto. Es un anuncio de un prestigioso vino que apareció el 25 de septiembre de 2005 en El País y después en alguna revista especializada. La idea, desde el punto de vista publicitario, era fabulosa y además, cosa rara, dejaba en un buen lugar a las matemáticas.



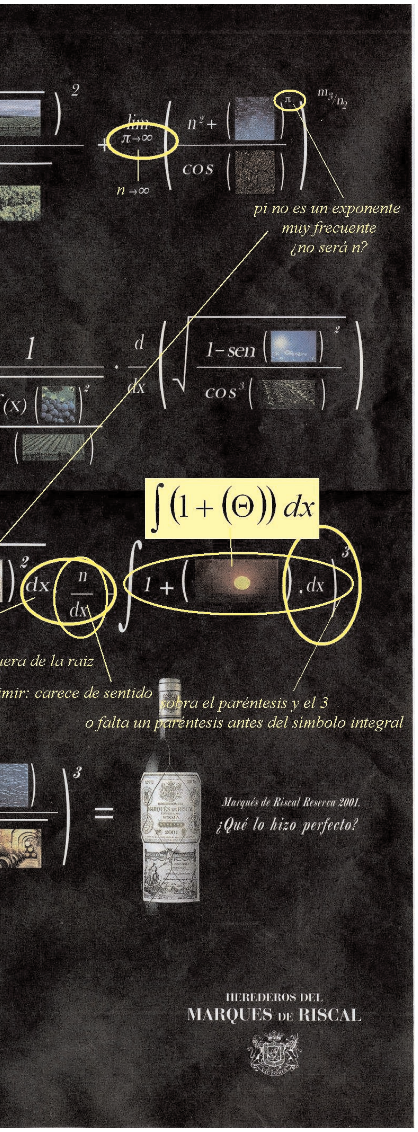
El anuncio sugiere que utilizando las matemáticas, en forma de una serie de fórmulas aplicadas a los elementos naturales: el sol, la tierra, el agua, la viña... que permiten la elaboración de un buen vino, el vino se convierte en perfecto. Por fin, una aparición pública de la excelencia de las matemáticas aplicadas a un objeto tan sensual como un vino reserva de 2001.

Por desgracia los publicistas no eran matemáticos, ni consultaron con ninguno, pues el anuncio contenía un buen número de errores de *ortografía* matemática.

Tengo que reconocer la fabulosa respuesta de los responsables de las bodegas. Porque me puse en contacto con ellos y para mi sorpresa, no solo acogieron bien mi crítica sino que me propusieron, al principio, que les marcara los errores para proceder a corregirlos y, al final, tras un intercambio de correos con gráficos como éste, proponer los cambios en el anuncio. Así, sin perder su sana intencionalidad de dejar en buen lugar al vino y a las matemáticas, quedó libre de componentes extraños.

El último libro destacable que he leído sobre matemáticas...

Es un libro ligero, 175 páginas, que en 65 capítulos a guisa de pequeños flashes de un par de páginas, nos hace viajar, como si de un anuncio televisivo se tratara, por la historia de las matemáticas hasta la demostración de Wiles del Último teorema de Fermat. En él desfilan Fermat y Wiles, pero también se asoman a sus páginas desde los babilonios y la tablilla Plimpton 322, pasando por Pitágoras, Arquímedes, Diofanto, Al-Khuwarismi, Fibonacci, Euler, Gauss, Sophie Germain, Dedekind... hasta Weil, Shimura, Taniyama, Ribet, Frey, Flach, Katz... y todos salpicados con nociones sobre funciones periódicas, ideales, formas modulares, curvas elípticas...



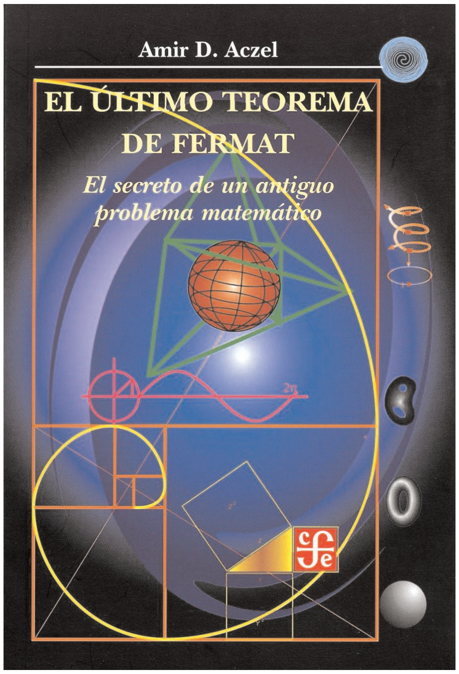
Se trata de El *Último Teorema de Fermat. El secreto de un antiguo problema matemático.* De Amir D. Aczel, (Fondo de Cultura Económica, México, 2003), editado en inglés en 1996 aún caliente la demostración de Wiles.

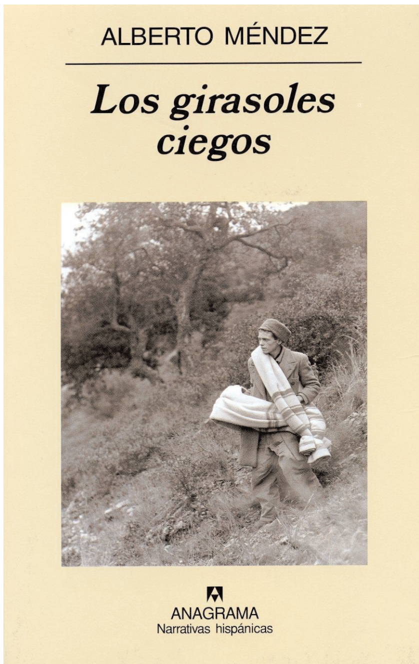
Al final no conocerás la demostración pero habrás realizado un espléndido viaje vertiginoso por las ideas matemáticas y los personajes que de una u otra forma han participado en el reto más famoso de la historia de las matemáticas. Y hablando de citas, no tiene desperdicio la de Andrew Wiles con la que comienza el libro:

> Tal vez la mejor manera de describir mi experiencia de hacer matemáticas sea comparándola con la exploración de una mansión a oscuras. Entras en la primera habitación, que está en tinieblas. Avanzas dando traspiés y tropezando con los muebles, hasta que poco a poco, te familiarizas con la ubicación de cada uno. Por fin, al cabo de unos seis meses, encuentras el interruptor y enciendes la luz. De pronto todo se ilumina, y puedes ver con exactitud dónde estabas. Y entonces entras en la siguiente habitación oscura...

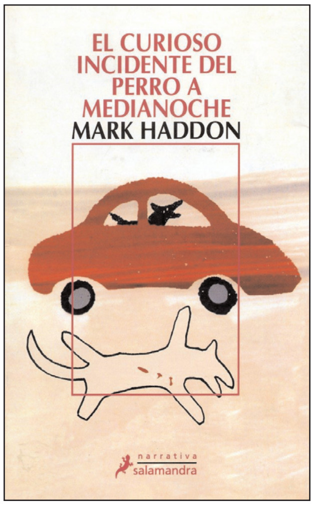
Mi último libro no matemático destacable

Los girasoles ciegos, de Alberto Méndez (Anagrama, Barcelona 2004). Son cuatro historias breves, cuatro derrotas como las titula el autor, ya fallecido, que tiene lugar entre los años 1939 y 1942. Cuatro relatos impresionantes, que contaron en voz baja, como indica la contraportada, narradores que no querían contar cuentos sino hablar de sus amigos, de sus familiares desaparecidos, de ausencias irreparables. Historias de tiempos de silencio obligado y de miedo. Un libro emotivo que va directamente al corazón y a la memoria. Imprescindible en esta época de revisionismo interesado de nuestra historia por parte de algunos. Un libro que en voz baja, casi desde el silencio dispara las alarmas contra la crispación, la intransigencia, el grito y el insulto que últimamente tanto proliferan en nuestras latitudes.





En campo ajeno



El curioso incidente del perro a medianoche
Mark Haddon
Ediciones Salamandra
Barcelona 2004.
ISBN 84-7888-910-8
272 páginas

Todos nosotros conocemos a colegas y quizás más fácil es que hayan sido profesores nuestros (tal vez algunos de nuestros conocidos piensan eso de nosotros) bien dotados para las matemáticas, pero no tanto para los demás aspectos de la vida, en los que pueden llegar a ser auténticos desastres cuando no nulidades perfectas. Personas con una perplejidad total en cuanto se les saca de la perfecta armazón de las matemáticas, en la que vislumbran cosas que no vemos el común de los mortales. De tal manera que esos estereotipos del matemático despistado (que tan bien retrata Polya en su *Cómo plantear y resolver problemas)* para buena parte de los que se tropiezan con ellos fuera del terreno profesional son algo así como un ACNEE (por utilizar el término políticamente correcto).

Pues un personaje así, pero adolescente y catalogado y encuadrado en la categoría de los auténticos acnees es el tierno imaginario protagonista y narrador del libro que nos ocupa (ver también la sección 'Mi biblioteca particular' de este mismo número), que además es un apasionado cultivador de las matemáticas, territorio en el que es brillante y no se siente agredido, al contrario de lo que le sucede en el resto de los aspectos de la vida:

> El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las mate-

El protagonista podría ser el perfecto alumno, capaz de saber los más abstrusos e inútiles conocimientos académicos, pero no es capaz de relacionarse de forma normal *con quienes le rodean. Aunque desde su punto de vista siempre por razones claras y nítidas.*

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

> máticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir era que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas.

Pero no todas las matemáticas son así, incluso hay partes que son como metáforas de la realidad:

> Los números primos son lo que queda después de eliminar todas las pautas. Yo creo que los números primos son como la vida. Son muy lógicos pero no hay manera de averiguar cómo funcionan, ni siquiera aunque pasaras todo el tiempo pensando en ellos.

El protagonista podría ser el perfecto alumno, capaz de saber los más abstrusos e inútiles conocimientos académicos, pero no es capaz de relacionarse de forma *normal* con quienes le rodean. Aunque desde su punto de vista siempre por razones claras y nítidas. Y ahí reside otro de los atractivos de la novela: la visión de la 'anormalidad' no se hace desde fuera, desde los ciudadanos normales que se encargan de ellos (los padres o familiares próximos, a quienes habitualmente conocemos y que tanta pena nos dan), sino desde el punto de vista también muy padecido del diferente. Lo que nos hace conocer y entender mejor que ellos también sufren, porque se trasgreden sus reglas, incluso cuando se dice que se respetan por los adultos, por los que creen e intentan quererles bien.

Y todo ello con un aroma de verdad que debe provenir del trabajo y la relación del autor con personas con deficiencias físicas y mentales, que le ha hecho conectar con lectores de todo el mundo. Y también en nuestro país, donde se han realizado ocho ediciones en los ocho primeros meses de su lanzamiento (y el libro continúa vivo). Y que nos sirve para cuestionarnos muchas seguridades, y para mirar de otra forma a los diferentes que nos rodean (y que a poca atención que pongamos veremos que todos somos diferentes en uno u otro aspecto).

Puesto que estamos en una revista de enseñantes, señalar que también proporciona algunos conocimientos y puntos de vista matemáticos interesantes, que no sólo nos servirán como personas, sino también en nuestras clases. Me permito señalar tres. En primer lugar (pg 92) una cercanía con el cálculo mental:

> —¿Cuánto es 251 por 864?
>
> Y lo pensé y contesté:
>
> —216.864— porque era un cálculo realmente fácil, porque sólo hay que multiplicar 864×1000 que da 864.000. Entonces lo divides por 4 que da 216.000 y eso es 250×864. Entonces sólo hay que sumarle otro 864 para conseguir 251×864. Y eso da 216.864.

En segundo lugar aparece el problema de 'Los soldados de Conway' (pg. 181-183), un bonito juego que nos permite ver que no siempre hay regularidades en todas las situaciones, aunque los humanos (y más los 'deformados' por las matemáticas) las veamos hasta donde no existen. Y por fin una sugerente explicación del problema tan poco evidente que él llama de 'Monty Hall' (pp. 87-90): el del concursante de TV que tiene una puerta elegida entre tres posibles una sola de las cuales tiene premio; el presentador le abre otra que no tiene premio y le pide si quiere seguir con la puerta que ya eligió o cambiar a la tercera puerta. Como se sabe, aumentas tu probabilidad de tener premio cambiando de puerta.

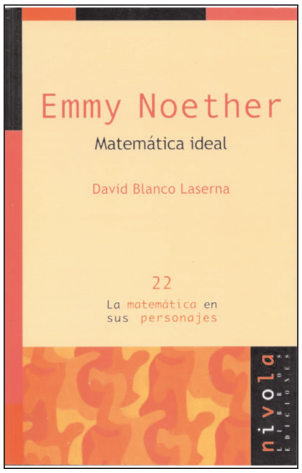
Puesto que estamos en una revista de enseñantes, señalar que también proporciona algunos conocimientos y puntos de vista matemáticos interesantes, que no sólo nos servirán como personas, sino también en nuestras clases.

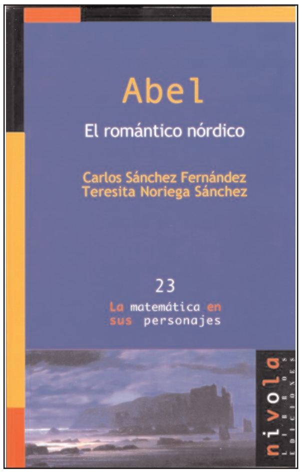
Y acabamos con una profunda reflexión sobre el tiempo y el espacio.

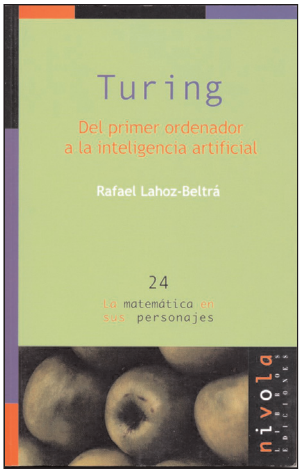
> Porque el tiempo no es como el espacio. Cuando dejas algo en algún sitio, como un transportador o una galleta, puedes tener un mapa en la cabeza para decirte dónde lo has dejado, pero incluso aunque no tengas un mapa seguirá estando allí, porque un mapa es una representación de cosas que existen en la realidad, así que puedes volver a encontrar el transportador o la galleta. Y un horario es un mapa del tiempo, solo que si no tienes un horario, el tiempo no está ahí como el rellano y el jardín y la ruta del colegio. (...) Y por eso, si te pierdes en el tiempo es como perderse en un desierto, solo que no puedes ver el desierto porque no es una cosa. Y por eso a mí me gustan los horarios, porque son la garantía de que no te vas a perder en el tiempo.

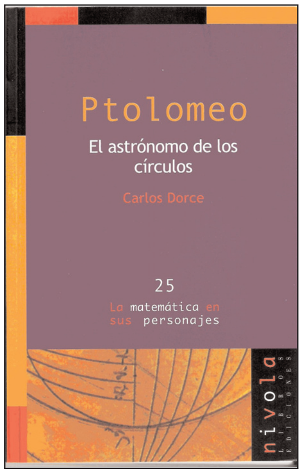
Absolutamente recomendable para cualquiera que tenga algo de humanidad, es decir, para todo el mundo.

Escaparate: 25 volúmenes de la colección ‘La matemática en sus personajes’ de la editorial Nivola









Acaba de aparecer *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*, de Carlos Dorce, que es el número 25 de la colección ‘La matemática en sus personajes’ de la editorial Nivola, lo que nos da pie a una reflexión sobre la misma y su significación en el panorama cultural y matemático de nuestro país.

Cuando en septiembre de 1999 aparece *Arquímedes. Alrededor del círculo*, el primer número de la serie, estábamos abocados al inicio de Año Mundial de las Matemáticas con su intento, entre otros objetivos, de mostrar que las matemáticas eran parte fundamental de la cultura. Y, en nuestro país, era evidente la falta de biografías asequibles de los matemáticos destacados de la historia, que la colección venía a intentar llenar. Nadie apostaba mucho por su persistencia; incluso hubo agoreros que solo vieron en ella una manera de ganar dinero fácil y rápido con volúmenes elaborados a toda prisa y con poca exigencia científica. Pero poco a poco las nuevas entregas han ido saliendo y seis años después se alcanza un número destacable, superada ya con amplitud la mayoría de edad legal.

‘La matemática en sus personajes’ en su conjunto tiene una cuidada presentación, moderna y bien ilustrada, que hace de los libros objetos deseables. Encierran un contenido atractivo que enlaza al autor y a su actividad vital y matemática con el resto de los aspectos sociales del lugar y de la época en que se desarrollan. Lo que hace que aparezcan los diferentes biografiados como lo que fueron la mayoría de los matemáticos, y tan mal se ha sabido transmitir: seres de carne y hueso, personas con sus grandezas y sus miserias, progresistas o reac-

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

cionarios, pero imbricados en las preocupaciones de su época, inmersos en los problemas de todos y eso sí, tocados por la varita mágica del genio matemático. O sea que, excepto en la última de las características, homologables a los cultivadores destacados de cualquier otra disciplina intelectual, que aparecen en las series de biografías o en las novelas históricas tan al uso. Por resumir, una colección con unos libros de destacable diseño de continente y de contenidos.

Conforme avanza la colección su valor se refuerza, porque va formando un retablo de referencias históricas y de influencias mutuas entre épocas y personas, aportando una visión global del largo desarrollo matemático. Cada vez más se enlazan unos y otros de los personajes tratados en otros libros anteriores. Por ejemplo, en el de *Abel* se hacen referencias a los de *Galois*, *Cardano y Tartaglia*, *Legendre*, *Euler* y *Lagrange*. Y eso tanto de épocas lejanas –en los que los números 1 y 25 cierran como un círculo– como de los genios más recientes, como Emmy Noether y Alan Turing, que son el 22 y 24 respectivamente.

Y ha permitido sacar a la palestra a una serie de autores hispanos (algunos ya repetidos), sin recurrir al recurso fácil (al menos habitual) de tantas editoriales de traducir libros de otros idiomas, lo que permite una proximidad del autor a las preocupaciones e intereses de los potenciales lectores y una labor de edición de los libros que posibilita la adecuación del producto final. El único traducido (el dedicado a Euler, de W. Dunham) es de una calidad tal que no necesita explicaciones. Sólo queda lamentar que todavía no haya la biografía de ningún matemático hispano, lo que no deja de ser una laguna, que, aunque constate la ausencia histórica de grandes personajes, debería ser llenada por alguno de los de primera fila (que de paso quizás permitiría reflexionar sobre esa carencia). Y aunque sea obvio y tópico hablar de la desigualdad de méritos de unas y otras entregas, que también aquí se dan, hay que desear que continúe con impulsos renovados, rellenando algunas faltas y acercándose a la época actual. En cualquier caso, la persistencia y la regularidad de esta colección es una muestra de que nuestro país entra a pasos agigantados en la normalidad cultural matemática (como lo es que nuestra revista *SUMA* sobrepase con esta vitalidad los 50 números, ¡alguna flor nos tenemos que echar!).

Los últimos números

Emmy Noether. Matemática ideal, de D. Blanco Laserna, es el número 22, y además de acercarnos esa figura fundamental de la matemática más reciente, se abre con una espléndida introducción que hace una panorámica de lo que ha venido significando (y no ha finalizado) ser mujer (y judía) en la historia –general y de la ciencia–, que finaliza con:

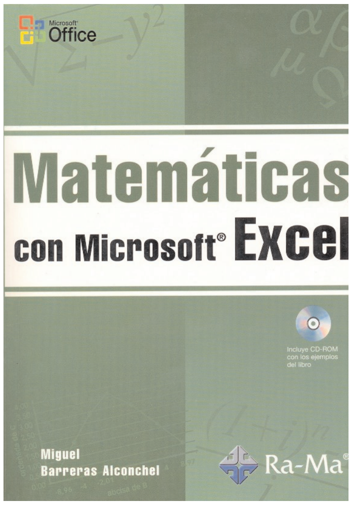
> "(…)pese a que su carácter matemático ha podido revestirla de un cierto incógnito, la obra de Noether constituye, junto al teatro de Brecht, las novelas de Thomas Mann, el cine de Fritz Lang o Billy Guilder, la música de Schönberg o Kurt Weill, o la arquitectura de Mies van der Rohe, una de las más intensas luces de una sociedad que eligió el eclipse. Y como la literatura o el arte de su tiempo, el álgebra de Noether nos enfrenta a una reflexión profunda sobre alguna faceta esencial de nuestra condición humana, es el fruto de una poderosa imaginación y posee una perdurable belleza que enriquece a quien llega a descubrirla.

C. Sánchez Fernández y T. Noriega firman el n.º 23, *Abel. El romántico nórdico*, que inicia el cierre del álgebra clásica que completaría Galois, dando paso a la *matemática moderna*. Además de desarrollar sus aportaciones, hacen hincapié en algo no siempre tenido en cuenta: que los países ricos hoy no lo han sido siempre (ni tienen por qué continuar siéndolo). Así la Noruega de principios del siglo XIX se parecía poco en niveles de bienestar a la puntera nación de nuestros días y en ella tuvo que bregar Abel. Y la riqueza actual permite dotar el Premio que lleva su nombre, cuya memoria intenta perpetuar.

Si hay una persona cuya influencia es universal en nuestra vida de cada día, y del cual no es conocido casi ni el nombre, ese es Alan Turing, a pesar de que haya sido incluso el protagonista (bien que con seudónimo) de películas de éxito como la reciente 'Enigma'. Y es que si se es *diferente* en algún aspecto de la vida (y él era homosexual) es difícil sobrevivir hasta en los sofisticados y tolerantes ambientes universitarios ingleses de la primera mitad del siglo XX. Y como recoge R. Lahoz-Beltrá en *Turing. Del primer ordenador a la inteligencia artificial*, eso le llevó, tras un proceso por su *desviación* y su tratamiento para volverle a la *normalidad*, a una muerte prematura, en 1954, a los 42 años, cuando sus fecundas ideas aún tenían un amplio potencial de desarrollo. Una muestra más de la forma en que muchas patrias pagan el trabajo de sus hijos verdaderamente ilustres.

Pocas teorías han durado tanto tiempo como la de Ptolomeo sobre el movimiento circular de todos los cuerpos celestes: casi quince siglos. Durante los cuales a la vez supone una guía y un corsé que impide romper los movimientos perfectos: los circulares. En *Ptolomeo. El astrónomo de los círculo*, Carlos Dorce nos lleva por los antecedentes y el desarrollo de sus teorías, su influencia en los pensadores posteriores, sobre todo árabes, hasta que la aparición de nuevos instrumentos como el telescopio (de nuevo las matemáticas insertadas en los avatares sociales) puso poco a poco fin a su paradigma, alumbrando nuevas teorías sobre el universo. Y en alguna medida el libro concluye una completa visión de la matemática griega que inauguró la colección con *Arquímedes* y la amplió con *Euclides* (n.º 19).

Hoja de cáculo, herramienta para la clase de matemáticas



Matemáticas con Microsoft Excel
Miguel Barreras Alconchel
Editorial RA-MA, 2005
ISBN 84-7897-674-4
241 páginas, incluye CD-ROM

Miguel Barreras es profesor de Matemáticas y desde hace años viene mostrando gran preocupación e interés por el aprendizaje de esta disciplina en el nivel de Secundaria, en el que realiza la mayor parte de su quehacer profesional. Algunos de sus trabajos y propuestas han aparecido en diferentes revistas especializadas y fue galardonado con el premio Ada Byron de coeducación matemática en su edición del año 2003. En la actualidad enseña en el IES de Valderrobres (Teruel).

Este libro, si bien recoge propuestas didácticas dirigidas a alumno de ESO, es deudor de la curiosidad de su autor por extender la aplicación de Excel a una gran variedad de contenidos y muestra su preocupación por ampliar y mejorar el tipo y la complejidad de los problemas a los que uno puede enfrentarse. Por ello, aunque en un primer vistazo puede verse como un curso práctico sobre Excel aplicado al aprendizaje de las Matemáticas y a la resolución de problemas, se trata de mucho más que eso.

Durante los últimos años mucho se ha hablado y escrito sobre los ordenadores como recurso didáctico. Son numerosos los artículos sobre el tema desde una perspectiva más o menos global y desde un punto de vista fundamentalmente teórico. Sorprendentemente –¿o no tanto?– son escasas las publicaciones que llevan el tema hasta su último nivel de concreción y aportan ejemplos prácticos elaborados para resultar de uti-

Lo relamente novedoso es que la validez de la hoja de cálculo como herramienta didáctica en matemáticas no se argumenta con disquisiciones teóricas, sino con gran cantidad de ejemplos prácticos completamente elaborados.

Manuel Sada Allo
IES de Zizur Mayor / Zizur Nagusiko BHI

lidad más o menos inmediata para el aula. En particular de Excel siempre se han pregonado sus enormes posibilidades no sólo para la obtención de resultados sino también como herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

El libro de Miguel y las más de 180 hojas de cálculo distintas que se incluyen en el CD anexo, vienen a demostrar esas posibilidades como no se había hecho hasta ahora en ninguna otra publicación. Este libro puede ser útil para iniciar o afianzar al lector en el uso de las herramientas básicas y avanzadas de Excel (incluso los usuarios expertos pueden descubrir usos insospechados) y por ello se puede describir como un curso práctico. Pero además, la obra presenta la hoja de cálculo como un recurso para potenciar el conocimiento matemático y para facilitar su enseñanza y aprendizaje.

La validez de Excel como herramienta didáctica no se argumenta con disquisiciones teóricas, sino que se demuestra con una gran cantidad de ejemplos prácticos completamente elaborados. Esto es lo realmente novedoso y ahí radica su mayor interés. Cualquiera podría esperar que la mayoría de las aplicaciones prácticas de Excel correspondan a la Estadística, dada la idoneidad de una hoja de cálculo para trabajar con tablas de datos y la facilidad de generar los correspondientes gráficos, o a la Probabilidad, por la sencillez de generar números aleatorios y simular, a partir de ellos, cualquier experimento aleatorio tantas veces como se desee. Pero además, el libro recoge gran cantidad y variedad de temas matemáticos:

- *Aritmética*: desde problemas tratados con las herramientas básicas de Excel hasta otros que incluyen macros y pueden servir al lector de asequible introducción a Visual Basic.
- *Álgebra*: desde resoluciones gráficas de ecuaciones y sistemas de primer y segundo grado hasta problemas de programación lineal, pasando por el trabajo con matrices o problemas de optimación.
- *Análisis*: representación gráfica de no sólo funciones sino también familias de funciones dependientes de un parámetro, interpretaciones gráficas de la derivada, la integral de Riemann, etc.
- *Geometría*: Transformaciones en el plano, Cónicas, Resolución de triángulos...
- *Estadística*: parámetros estadísticos para una distribución unidimensional, distribuciones bidimensionales, correlación y recta de regresión, la binomial y la normal, Ley de D'Hont, etc.
- *Probabilidad*: simulaciones de numerosos y variados problemas, visualización de la Ley de los grandes números, Teorema de Bayes, etc.

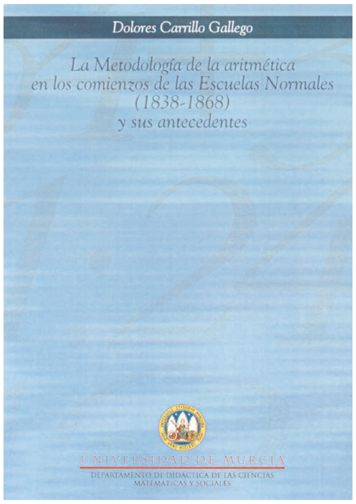
La mayoría de los problemas y ejemplos están tratados a un nivel de Educación Secundaria, pero en la segunda parte se abordan también temas de Matemáticas superiores como las Ecuaciones diferenciales, Teoría de números, Representación de superficies en el espacio, Ecuaciones en paramétricas, etc.

En cada capítulo se explica la elaboración paso a paso de varios ejemplos (resueltos en el CD) introduciéndose, sobre la marcha, el uso de diversas herramientas de Excel (algunas pueden ser novedosas para el lector), con diversas sugerencias, comentarios y reflexiones de interés para los profesores de Matemáticas. Y propone ejercicios, también resueltos en el disco.

Tanto los textos como las hojas de cálculo elaboradas evidencian que la clave para abordar un problema matemático y encontrar estrategias de solución, bajo la perspectiva de una hoja de cálculo, estriba casi siempre en la capacidad de imaginación, antes que en un dominio exhaustivo del programa. En ese sentido, el autor hace todo un derroche de imaginación a la hora de abordar problemas muy diversos, con planteamientos y estrategias sorprendentes, facilitando pequeños (y no tan pequeños) trucos de gran utilidad.

La calidad y variedad de los ejemplos elaborados suponen, además de la constatación de que la hoja de cálculo puede ser idónea para abordar problemas de todos los bloques del currículo, una fuente de ideas y una referencia o modelo a seguir para cualquier profesor de Matemáticas con interés por el uso didáctico de los ordenadores. Algo nada desdeñable pues la escasez de esos modelos o referentes para el profesorado es quizás una de las principales causas de que el aprovechamiento didáctico de las TIC siga siendo una asignatura pendiente para la mayoría de nosotros. En definitiva, un trabajo que hará disfrutar de las Matemáticas al lector y útil para quien haga de él una herramienta para sus clases. ■

La Aritmética en las Escuelas Normales en el XIX



LA METODOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA EN LOS COMIENZOS DE LAS ESCUELAS NORMALES (1838-1868) Y SUS ANTECEDENTES
Dolores Carrillo Gallego
Dpto. de Didáctica de las C. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia.
Murcia, 2005
ISBN: 84-608-0245-0
469 páginas

Esta publicación es la tesis doctoral realizada por la profesora Dolores Carrillo Gallego que fue defendida el 1 de febrero de 2005 y obtuvo la máxima calificación de sobresaliente *cum laude*.

Su trabajo se ha centrado en la Historia de la enseñanza de las Matemáticas. Su contenido ha sido muy valorado, tanto por historiadores de la educación como por profesores de matemáticas, ya que ha incardinado en la historia de la educación la enseñanza de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales y los conocimientos de esta materia que debería tener un maestro para poder impartirla.

En un primer bloque hace un estudio de los antecedentes y comenta distintas leyes y disposiciones que desarrollaron la enseñanza de la aritmética siguiendo el método de la enseñanza mutua y el de Pestalozzi. De ambos se expone el proceso seguido. Se detiene después en el matemático José Mariano Vallejo, autor de textos para todos los niveles educativos.

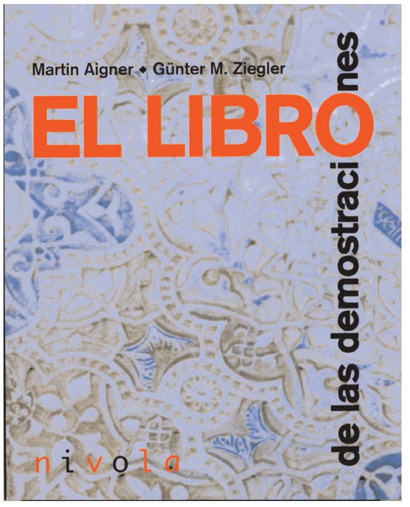
Un segundo bloque va dedicado casi exclusivamente al aspecto legislativo. Se destacan los requisitos para el ingreso (tanto para hombres como para mujeres), reglamento de exámenes y características, para centrarse en los estudios en la Escuela Normal y terminar con un seguimiento más detallado de la aritmética y su metodología en la legislación.

En un tercer bloque, la autora pasa de las leyes al aula. Hace un repaso de profesores de Escuelas Normales, masculinas y femeninas, para después ver el método de enseñanza y pedagogía de Pablo Montesino con una referencia a la aritmética recogida en el *Manual de párvulos* y a su enseñanza, según el Boletín Oficial de Instrucción Pública. También aborda el tratamiento de la aritmética y su enseñanza en otros manuales pedagógicos y por último analiza algunos libros para la enseñanza de la aritmética en las Escuelas Normales. Se completa la tesis, y por tanto el libro, con un capítulo de conclusiones.

La tesis considerada, cuya publicación comentamos, puede ser calificada como muy buena tanto por la importancia del tema como por el grado de innovación y por la metodología seguida en su desarrollo. Los objetivos planteados y las conclusiones obtenidas tienen gran coherencia y en toda la tesis se destaca una abundante bibliografía consultada, una meticulosa aportación de citas y datos, una secuenciación de acontecimientos en distintas provincias, una claridad de exposición, un sentido histórico de lo tratado y una madurez en su exposición. Aporta luz para conocer la enseñanza de la aritmética en el periodo estudiado, tanto en lo referente a los conocimientos necesarios para ser maestros como de los alumnos en periodo escolar. En definitiva, un trabajo amplio, muy detallado, con gran cantidad de material leído, con cientos de anotaciones y con bibliografía amplia y variada.

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia

Las demostraciones del *Libro*



EL LIBRO DE LAS DEMOSTRACIONES
Matin Aigner, Gunter M.Ziegler
Editorial Nivola
Madrid, 2005
ISBN 84-95599-95-3
240 páginas

Según Paul Erdos, inspirador de este libro, Dios recopila demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos, en un Libro, con mayúsculas como la Biblia, en el que todos los matemáticos deberían *creer.*

Paul Erdos (1913-1996), prolífico matemático hebreo de origen húngaro, es una de las personalidades más curiosas y excéntricas de las Matemáticas del siglo XX. Dedicó diecinueve horas diarias durante 25 años a la búsqueda de la verdad a través de las matemáticas. No estaba interesado en ningún otro placer de la vida. Célibe, sin trabajo fijo, nómada, viajaba de un continente a otro, de casa en casa… cuando murió su epitafio decía: *finalmente he acabado por ser más estúpido*.

Sus discípulos y colaboradores Martín Aigner y Gunter M. Ziegler, ambos profesores de la Universidad Técnica de Berlín, dedicaron este libro a su memoria en la primera edición publicada en 1998 por Springer-Verlag. Ha sido traducido a un buen número de idiomas y Nivola ha asumido la primera traducción al castellano en junio del 2005. El libro –con minúsculas– pretende revelar una pequeña porción del *Libro* y queda a juicio de cada lector decidir si lo consigue.

Lo esencial de las matemáticas es demostrar teoremas, y por tanto a ello se dedican los matemáticos podemos leer al inicio del capítulo 25. Pero, de entre todas las demostraciones que nutren las matemáticas, ¿cómo definiríamos una demostración merecedora de estar en el Libro del que hablaba Erdos?

Existe una creencia compartida por la comunidad matemática, no siempre explicitada, de lo que es una demostración perfecta. Esta creencia, muy marcada por las ideas de Erdos es la que ha guiado la selección de las demostraciones hecha para el Libro que recoge temas de teoría de números, geometría, análisis, combinatoria y teoría de grafos.

Para empezar, una buena demostración debe **responder a una pregunta** formulada por el investigador y, por tanto, muchos de los capítulos del libro comienzan con una pregunta. Algunas simples: ¿cuántos números primos existen?, ¿qué enteros se pueden escribir como suma de dos cuadrados?, ¿cuántas pendientes diferentes determinan n puntos no alineados del plano? Otras requieren conocimientos previos de los términos utilizados: ¿puede siempre encontrarse una partición en a lo sumo d+1 partes de menor diámetro de cualquier conjunto acotado de $\mathbf{R}^d$?, ¿cuál es el tamaño de la anticadena más grande de un conjunto de n elementos?, ¿en qué condiciones puede completarse un cuadrado latino parcial para obtener un cuadrado latino del mismo orden?, ¿cuál es la tasa máxima de transmisión para que el receptor de un mensaje a través de un canal pueda recuperar el mensaje sin errores? Erdos también tenía sus preguntas favoritas: ¿existen dos números divisores uno del otro en cualquier subconjunto de n+1 elementos del conjunto A={1, 2, 3, 4, … 2n}?

Elena Gil
Colegio Sagrado Corazón, Zaragoza

La respuesta a esta pregunta es mejor cuánto más **sorprendente, asombrosa e inesperada** sea. ¿No es inesperada la fórmula de Euler que relaciona los vértices, aristas y caras de un grafo finito en el plano?, ¿o que el conjunto de los números racionales sea tan numerable como el de los enteros a pesar de parecer mucho más grande?, ¿o que la probabilidad de que una aguja caiga en una posición tal que corte una de las líneas de un papel pautado tenga que ver con el número π? ¿o todas las identidades inesperadas que aparecen cuando estudiamos la teoría de los productos infinitos? ¿o que haya teoremas que se cumplen en el mundo finito que dejan de hacerlo cuando nos trasladamos al infinito? Sorprendentes son siempre las afirmaciones que los matemáticos llaman lemas, aplicables a gran variedad de circunstancias y a problemas sin conexión aparente.

Para que un resultado y su demostración sean valorados por los matemáticos por encima de otros, debe ser **simple**, **sencilla**, **elemental**, **elegante**. Simple es el resultado de la suma de la serie de Euler:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

y elegantes algunas de sus demostraciones que han pasado a la historia de las matemáticas. Resultados profundos como alguno atribuido a Polya, o la fórmula de Cayley se pueden demostrar de forma asombrosamente simple si se combinan ingeniosamente las ideas adecuadas. Encontrar un contraejemplo explícito, puede ser una forma sencilla de refutar una conjetura, como hizo la matemática A. Nilli con la conjetura de Borsuk. Asociar la elegancia a la brevedad es propio de las matemáticas y por ello en el Libro estos dos conceptos aparecen casi siempre unidos: puede bastar media página para demostrar que π es irracional; se valora la demostración corta y elegante de cuál es el tamaño de la anticadena más grande de un conjunto de *n* elementos; se muestran modelos elegantes sencillos y naturales para estudiar una mezcla por imbricación.

Pero lo que realmente comparten todos los teoremas y demostraciones del Libro es que son **bellas**, **bonitas**, **hermosas**, **preciosas**… adjetivos que no son ajenos a ningún conocedor de las matemáticas, pero que pueden resultar sorprendentes para las personas que no se dedican a ellas.

Puede ser bonito saber que cualquier anillo de división finito es conmutativo. Cualquier matemático encuentra bellas y singulares *aquellas maravillosas desigualdades* de las que habla el Libro (Cauchy-Schwarz, relación entre la media armónica, geométrica y aritmética…). Es un placer intelectual pero también estético descubrir fórmulas que involucran funciones elementales como:

$$\pi\cot\pi x=\lim\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$$

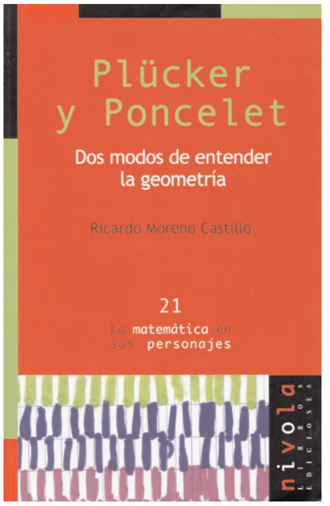
Se puede vibrar con la belleza de la fórmula de Cayley (*hay* n^{n-2} *árboles etiquetados diferentes con* n *vértices*) y algunas de sus demostraciones –hasta cuatro igualmente bellas muestra el libro–.

Algunas de las demostraciones que aparecen son clásicas. Otras son pruebas nuevas y brillantes de resultados clásicos. Tampoco faltan resultados recientes. Muchas de ellas utilizan el principio de inducción, forma privilegiada que tienen las matemáticas para formalizar una generalización hecha a partir de casos particulares. Mi resultado favorito, de entre los que aparecen en el libro, sería el lema de Sperner. Aúna todas las características que avalan los teoremas elegidos para estar en el Libro: fue descubierto de forma sorprendente por un joven de 23 años en 1928; es un sencillo e ingenioso resultado combinatorio: potente, a pesar de su sencillez, pues de él se pueden deducir teoremas tan importantes como el teorema del punto de fijo de Brouwer. Está, además, acompañado de una bella demostración de no más de veinte líneas.

Una última reflexión. Los autores han intentado que todas las demostraciones "resulten comprensibles para los lectores con un dominio básico de las técnicas y conceptos matemáticos e incluso para los mejores alumnos de Bachillerato". Más de un docente de Matemáticas estará conmigo, en que hay pocos alumnos de Bachillerato de nuestro sistema educativo capaces de entender los resultados y demostraciones de este libro, menos aún de apreciar los motivos por los que se han elegido. Sin embargo, puede ser muy motivador para muchos profesores de Secundaria y Bachillerato, redescubrir que *lo esencial de las matemáticas es demostrar teoremas* y que la capacidad de apreciar la belleza de muchos resultados teóricos y sus pruebas es lo que nos ha hecho a muchos de nosotros amar las matemáticas.

Esta capacidad, como la de disfrutar con la música o con el arte, no son innatas y nuestra responsabilidad de docentes es ayudar a los alumnos a crecer aprendiendo a combinar ideas lógicas, es decir aprendiendo a pensar. Conseguir vencer su sordera para las matemáticas es nuestro reto y este libro nos muestra un camino. Suscitar preguntas interesantes, no rutinarias. Asombrar siempre con las respuestas. Huir de los cálculos farragosos que impiden ver las ideas brillantes utilizando si es necesario los medios tecnológicos a nuestro alcance. Valorar, no sólo la potencia de las matemáticas en sus aplicaciones, sino fundamentalmente su belleza intrínseca como construcción del pensamiento humano. Y finalmente, ¿por qué no? Mostrar las matemáticas como una forma de acercarse a Dios, supuesto autor del Libro de Erdos.

Hacia la geometría proyectiva



PLÜCKER Y PONCELET.
DOS MODOS DE ENTENDER LA GEOMETRÍA
Ricardo Moreno Castillo
Nivola
La matemática en sus personajes/21
Madrid, 2005
ISBM 84-95599-92-9
122 páginas

La colección *La matemática en sus personajes* de la Editorial Nivola, nos propone un viaje a través del tiempo, que nos muestra la evolución de las matemáticas de una forma clara y amena.

El libro de *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría,* nos sugiere un paseo hacia la geometría proyectiva, desde los estudios de perspectiva de los pintores renacentistas hasta el siglo XIX, época en que la geometría impregna toda la matemática y *la geometría proyectiva es toda la geometría* (Cayley). Sus protagonistas son Jean-Victor Poncelet (1788-1867) y Julius Plücker (1801-1868) como abanderados de los dos bandos, sintético y algebraico, en que se fragmentaron los geómetras de la época.

Los métodos cartesianos, permitieron prescindir del uso de figuras y agrupar en una misma ecuación entes geométricos diferentes. Se logra con ello un carácter abstracto y general que atrajo la atención de numerosos matemáticos a lo largo del siglo XVIII, de manera que el desarrollo y consolidación de la geometría analítica, como rama independiente de las matemáticas, se basa en el uso de las coordenadas cartesianas. Estos métodos presentan, sin embargo, algunos inconvenientes: el desarrollo de los cálculos se hace a veces penoso y poco intuitivo; por ello se acabó generando una reacción en contra que propició el impulso de los métodos sintéticos –donde el empleo de las coordenadas llegó a ser considerado una deshonra (Bourbaki)–. *Pero la geometría analítica también podía ser útil a la geometría proyectiva, de modo que ésta albergó en su seno la brecha entre los reticentes y los entusiastas de aquella. En el siglo XIX casi no había geómetra que no estuviera adscrito a uno de los dos bandos.* (R. Moreno).

El autor es el profesor Ricardo Moreno Castillo, licenciado en filosofía y matemáticas, que imparte esta última disciplina en el instituto Gregorio Marañón de Madrid y en la Universidad Complutense. Sabemos de su interés por la historia de las matemáticas –en la misma colección podemos encontrar otros dos libros suyos– y de su preocupación por la didáctica de la matemática –mi primer contacto con su obra, fue la lectura de un interesante y esclarecedor *Panfleto antipedagógico* que circula por la Red.

Tanto su formación matemática como filosófica se encuentran reflejadas en este libro. Así encontramos, un boceto de la evolución de la geometría proyectiva, a través de teoremas y propiedades enlazados lógicamente con una visión platónica e internalista de la ciencia. Se trata también de un texto de geometría, en mi opinión dedicado a un público con una formación matemática, a caballo entre la enseñanza media y la universidad, que debe leerse con calma, atención, y con la

José Javier Escribano Benito
IES Valle del Cidacos, Calahorra

regla y el compás a mano o, si se prefiere, con algunos de los nuevos programas de ordenador. En todo caso, el esfuerzo merece la pena, ya que el texto recoge una serie de resultados atractivos para todos los que gustamos de *una ciencia nacida del arte que resultó ser ella misma un arte* (Kline).

El libro, consta de 122 páginas y está estructurado en siete capítulos, cuyo contenido pasamos ahora a describir:

Índice:

El capítulo uno, *Algunos preliminares geométricos*, se justifica dado el carácter divulgativo de la obra. En él se resumen algunos resultados geométricos básicos y los teoremas de Menelao y de Ceva, que permiten demostrar numerosas propiedades de tipo proyectivo.

En el capítulo dos, Ricardo Moreno señala como núcleo de la geometría proyectiva, los esfuerzos de los pintores del Renacimiento (Brunelleschi, Alberti, Durero...) para representar el espacio sobre una superficie plana. También destacan las aportaciones de Desargues: la adición de un punto impropio común a todas las rectas de un mismo haz de rectas paralelas, el teorema de los triángulos homológicos, el de invarianza de la razón doble en las proyecciones y la posibilidad de estudiar las cónicas de forma unitaria. Del mismo modo, menciona el teorema del hexágrama místico de Pascal y un teorema de Phillippe de La Hire, dos de los escasos seguidores de Desargues. Así, queda descrito el escenario para que en él irrumpan los dos protagonistas de la obra.

El tercer capítulo está dedicado a los defensores de la geometría sintética. En él, se describe brevemente las ideas que sustentan la obra de Poncelet (*homología, principio de continuidad* y *principio de dualidad*) y los esfuerzos de Steiner, Chasles y Von Staudt por desarrollar la geometría proyectiva, sin hacer ninguna referencia a consideraciones métricas.

Después de hablar de los que hicieron progresar la geometría proyectiva con métodos sintéticos, les toca el turno a los que lo hicieron usando procedimientos analíticos: Möbius y Plücker. A Möbius se debe la introducción de las coordenadas baricéntricas –que, como todas las coordenadas homogéneas son independientes de todo concepto métrico y, por tanto, adecuadas para tratar problemas proyectivos– y el concepto de correspondencia biunívoca o transformación de un plano o un espacio en otro y, en particular, el de colineación, única que conserva las relaciones gráficas, ya que no altera la incidencia o pertenencia.

Plücker introdujo un sistema de *notaciones abreviadas*, que simplifica los cálculos algebraicos, y un sistema de coordenadas homogéneas, más manejable que el creado por Möbius, que permite incorporar los puntos del infinito y las rectas que pasan por el punto límite. El propio Plücker extendió las coordenadas homogéneas al campo complejo y resaltó la importancia de los puntos cíclicos. El capítulo termina con un esbozo del modelo para la geometría proyectiva propuesto por Klein.

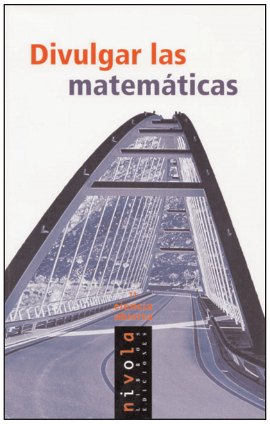
Los tres últimos capítulos, están dedicados al estudio de las curvas algebraicas. En el primero de ellos, se introducen las curvas algebraicas desde el punto de vista de la geometría analítica del siglo XVIII, para poder entender lo que hicieron después Plücker y Poncelet con ellas en el siglo XIX. Este quinto capítulo se centra fundamentalmente en el estudio de la clasificación de las cúbicas con coeficientes reales establecida por Newton en 1704, lo que da pie para introducir algunos conceptos fundamentales como diámetro, puntos singulares, inflexión, asíntotas, polar…

El capitulo sexto, que exige una formación matemática del nivel de un primer curso de facultad, aborda las curvas algebraicas con métodos proyectivos. En él podemos encontrar, entre otras cuestiones, el concepto de curva dual, de hexiano y las fórmulas de Plücker para clasificar curvas algebraicas.

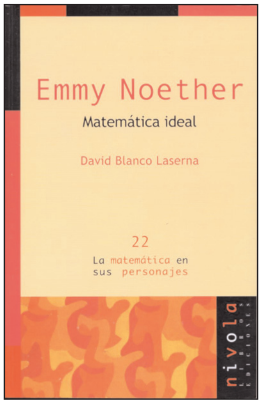
El libro se cierra con un capitulo, dedicado a mostrar una serie de curvas algebraicas notables. Algunas, como la cisoide de Diocles o el astroide, son muy conocidas; otras, como la cuártica de Durán Lóriga, no lo son tanto. Pero todas, son particularmente atractivas. Tal vez si las incluyéramos en los programas de bachillerato, al conocerlas algún joven pudiera hacer suya la cita de Bertrand Russell con la que comienza el libro:

> Jamás había imaginado que pudiera haber algo tan delicioso en el mundo.

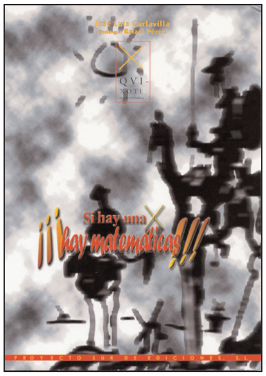
Publicaciones recibidas



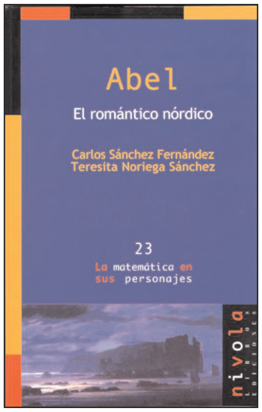
Divulgar las Matemáticas
Raúl Ibáñez (Editor-Coord.)
Editorial Nivola
Ciencia abierta /11
Madrid, 2005
ISBN: 84-96566-07-2
237 páginas



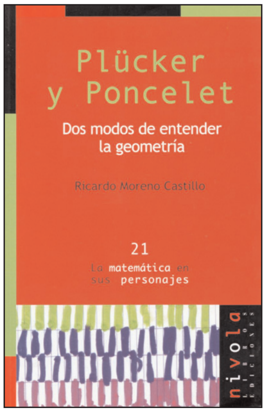
Emmy Noether. Matemática Ideal
David Blanco Laserna
Editorial Nivola
La matemática en sus personajes/22
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-93-7
249 páginas



Si hay una *x* ¡¡¡hay matemáticas!!!
José Luis Carlavilla
Proyecto Sur de Ediciones, S.L.
Granada, 2005
ISBN: 84-8254-298-2
143 páginas

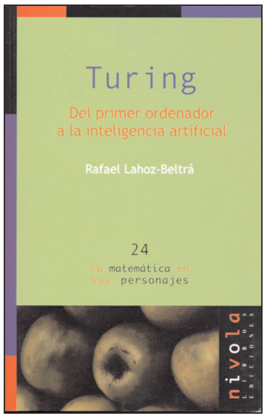


Abel. El romántico nórdico
C. Sánchez y T. Noriega
Editorial Nivola
La matemática en sus personajes/23
Madrid, 2005
ISBN: 84-96566-00-5
222 páginas



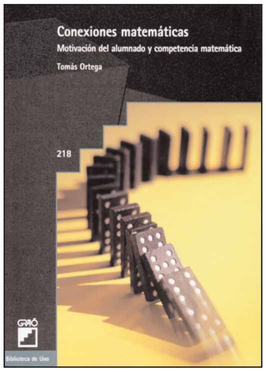
Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría
Ricardo Moreno Castillo
Editorial Nivola
La matemática en sus personajes/21
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-92-9
122 páginas

(Ver recensión en este mismo número de SUMA)

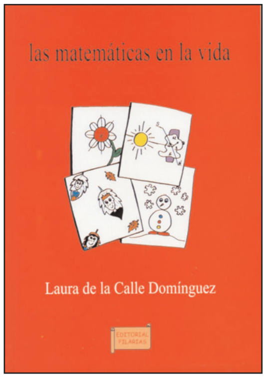


Turing. Del primer ordenador a la Inteligencia Artificial
Rafael Lahoz-Beltrá
Editorial Nivola
La matemática en sus personajes/24
Madrid, 2005
ISBN: 84-96566-01-3
142 páginas

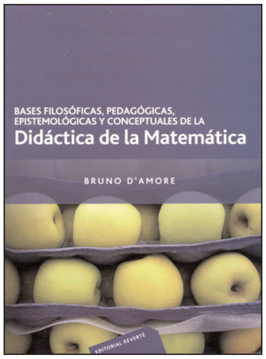
Publicaciones recibidas



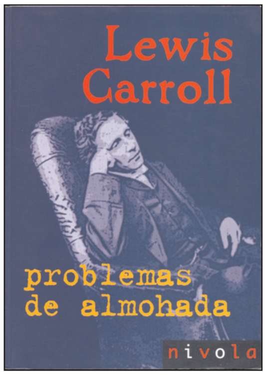
Conexiones Matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática
Tomás Ortega
Editorial Graó
Biblioteca de Uno/218
Barcelona, 2005
ISBN: 84-7827-415-4
213 páginas



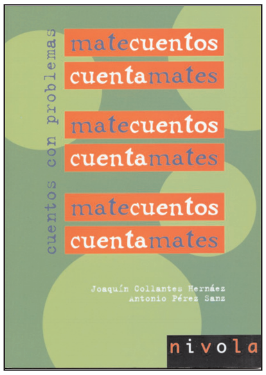
Las Matemáticas en la vida
Laura de la Calle Domínguez
Editorial Filarias
Calamonte (Badajoz), 2005
ISBN: 84-932488-9-4
190 páginas



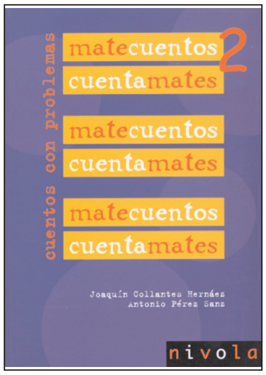
Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática
Bruno D'Amore
Traducción de M.I. Fandiño
Editorial Reverté
Mexico, 2005
ISBN: 968-6708-58-8
83 páginas



Problemas de almohada
Lewis Carroll
Traducción de G.Rojas y J.Fernández
Editorial Nivola
Colección Violeta/3
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-97-X
172 páginas



Matecuentos cuentamates
J. Collantes y A. Pérez
Editorial Nivola
Colección Violeta/1
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-96-1
127 páginas



Matecuentos cuentamates 2
J. Collantes y A. Pérez
Editorial Nivola
Colección Violeta/2
Madrid, 2005
ISBN: 84-95599-98-8
127 páginas

SUMA 51
Febrero 2006, pp. 125-132

Literatura del número de oro

Presentación

Comenzamos una nueva sección titulada *Matemáticas y Literatura*. En ella iremos presentando diferentes obras literarias, unas de plena actualidad y otras más clásicas, con un denominador común: las numerosas posibilidades que nos ofrecen para su aprovechamiento didáctico en clase de Matemáticas.

En todas ellas hemos seguido un proceso muy parecido: en una primera lectura, como lector aficionado, hemos descubierto las posibilidades didácticas para la clase. Más tarde, en una segunda lectura como profesor de matemáticas, hemos ido concretando las cuestiones de interés que se podrían llevar al aula. Posteriormente, con las notas recogidas, las terceras cuartas... o enésimas lecturas de determinados pasajes y la consulta de la necesaria bibliografía, se va dando forma a la propuesta de trabajo para los alumnos. Después de este *viaje* podemos estar seguros de que hay muchas conexiones entre las dos: muchos aspectos de la cultura matemática pueden tratarse en clase teniendo como punto de partida y desencadenante una obra literaria.

Trataremos, esencialmente, de proporcionar unas propuestas concretas de trabajo para poder llevarlas, casi directamente, al aula; de propiciar la reflexión sobre algunos conocimientos matemáticos diferentes a los del currículo, con un enfoque basado en el planteamiento de retos, búsquedas e indagaciones; de aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos, a través de la lectura y el trabajo posterior sobre una obra literaria.

¿Qué libros abordaremos? La respuesta no está cerrada, aunque podemos adelantar varios títulos: *El Número de Dios,* de José L. Corral, con el que iniciamos esta sección; *La Incógnita Newton,* de Catherine Shaw; *El tío Petros y la Conjetura de Golbach,* de Apostolos Dioxadis; *Los crímenes de Oxford,* de Guillermo Martínez; *El curioso incidente del perro a medianoche,* de Mark Haddon; *El hombre que sólo amaba los números. La historia de Paul Erdös y la búsqueda de la verdad matemática,* de Paul Hoffman; *La Ciudad rosa y roja,* de Carlo Frabetti.

El tiempo nos dirá, con su implacable paso, cuántos títulos más añadiremos a esta pequeña lista; como muchos lectores pensarán... "no está ese que tanto me ha gustado" o "¿se puede sacar algo de matemáticas de ese...?". Sí, hay muchos más y siempre podremos sorprender a los lectores con algún libro deseado.

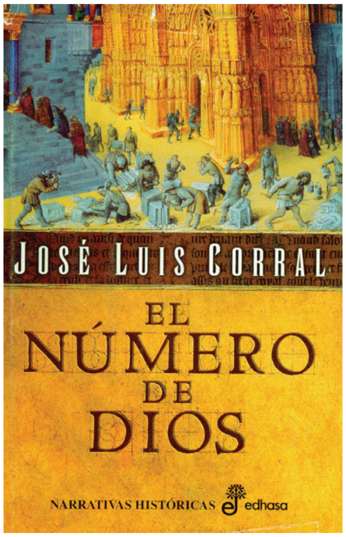
El guión de trabajo de cada obra puede llevarse al aula según la opción que cada profesor decida. A este respecto pueden tenerse en cuenta algunas indicaciones:

- Nivel al que se plantea. Todos los guiones son factibles en el nivel de Bachillerato y en los últimos de la ESO. Pero esto, como todos sabemos, puede está condicionado por el contexto concreto en que se lleve a cabo. Siempre es cada profesor quien decide en función de su saber profesional.
- Número de alumnos que lo realizan. Puede ser toda la clase de forma individual, o en pequeños grupos; también se puede plantear solamente a determinados alumnos, con un carácter voluntario u obligatorio.
- Desarrollo total o parcial del guión. Se puede plantear la realización total o parcial del trabajo, en función de la temática de algunas preguntas y del nivel educativo del alumnado.
- Uso posterior del trabajo. Una idea interesante puede ser la elaboración, por el alumnado, de una presentación en power point con las contestaciones a algunas o a todas las preguntas del guión, con las imágenes y los datos recogidos. Esto podría servir para visualizar las ideas en clase, debatiendo su contenido, y también para hacer una presentación en otros grupos del centro, como una actividad de matemáticas, etc.

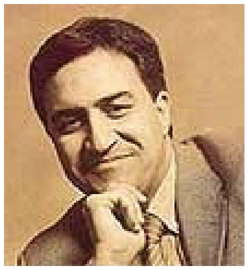
Como el final de esta presentación debe ser el principio... pasamos a presentar el primero de los libros con su propuesta de trabajo.

Constantino de la Fuente Martínez
literatura@revistasuma.es

El número de Dios



El Número de Dios
José Luis Corral
Edhasa
Barcelona, Noviembre de 2004 (1ª Edición)
ISBN: 84-350-6111-6
505 páginas



José Luis Corral, es profesor de Historia Medieval en la Universidad de Zaragoza, ha escrito numerosos libros, artículos, guiones para radio y televisión y es uno de los autores de mayor éxito en el género de la novela histórica.

En la contraportada podemos leer la siguiente presentación:

En la Edad Media, el siglo XIII fue el siglo de la mujer y de las catedrales, una época de culto a la poesía, al amor y a la inteligencia que encuentra una de sus expresiones más acabadas en el arte gótico, que permite el maridaje entre la belleza artística y el homenaje a la deidad cristiana. Sin embargo, es también una época de persecuciones religiosas, que obligan a la clandestinidad y al silencio a personajes como la protagonista de "El número de Dios", Teresa Rendol. Hija de un maestro pintor y pintora ella misma desde muy joven, su azarosa historia la lleva a ser protagonista de la construcción de las catedrales de Burgos y León, y a entrar en contacto con uno de los secretos mejor guardados, transmitidos de generación en generación entre el gremio de arquitectos, el número de Dios, el secreto sobre el que se sustentan las catedrales del nuevo estilo importado de Francia.

Nuestro comentario

El libro es una recreación histórica de la situación de los reinos de Castilla y León en el siglo XIII. Como en los arcos góticos, su argumento gira en torno a dos centros: la construcción sucesiva de las catedrales de Burgos y León, y la historia de amor entre los dos protagonistas, él constructor de catedrales y ella pintora.

El desarrollo de la acción nos permite conectar, por una parte, con algunas de las ideas clave del estilo gótico, sobre todo con el papel simbólico que representan en estos templos casi todos sus elementos: la luz, la planta, las proporciones, los arcos, el laberinto, el claustro, etc. Por otra parte, también nos presenta algunas ideas de la época: el papel de la mujer en la sociedad, las distintas formas de entender la religión, y el control omnipresente de la ciudadanía por los poderes políticos y religiosos.

En cuanto al secreto de las proporciones, celosamente guardado por el gremio de los constructores o arquitectos, éste tiene su concreción en el "número de Dios", que da título a la obra, y que no es más que una aproximación realista y manejable, $1 + 2/3 = 1{,}666...$, del número irracional que subyace en la proporción áurea: el número de oro.

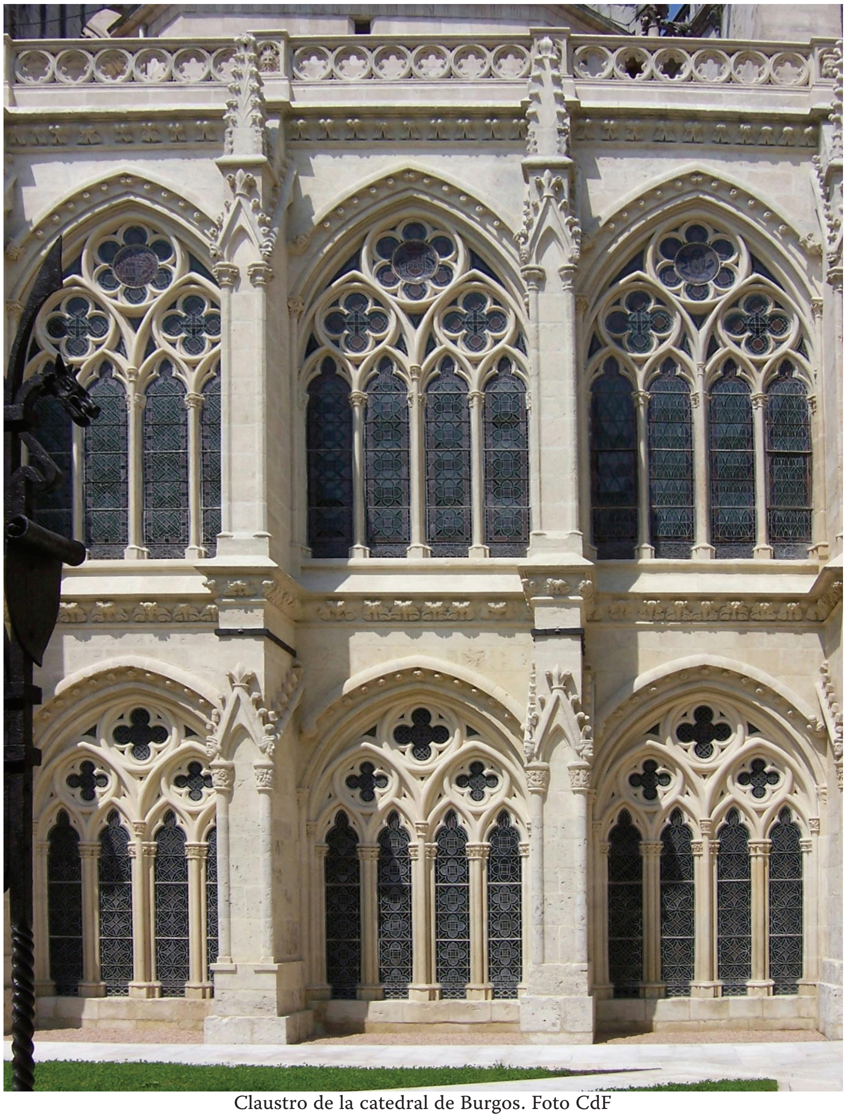
La lectura de la novela con ojos de matemático o profesor de matemáticas, deja en evidencia el tratamiento superficial que tienen las cuestiones relacionadas con esta ciencia. Dejando volar la imaginación, creemos que esta laguna podía haberse llenado con la creación de un personaje que, de manera sencilla y sin romper los secretos al uso, comunicara a los personajes principales la diferencia entre el verdadero valor del número de oro y la aproximación utilizada en la vida real. Aún así, esto puede aprovecharse desde el punto de vista didáctico y dar juego para plantear alguna cuestión sobre el tema.

En resumen, la obra no la podemos calificar como *novela matemática*, objetivo éste que tampoco lo pretende, sino como una bonita historia de amor... Pero sí nos puede proporcionar numerosos elementos de trabajo para la clase de matemáticas, ya que su lectura es fácil, sencilla y bastante aprovechable.

Una propuesta de trabajo para el aula

En el caso que nos ocupa, el guión de trabajo que proponemos va desarrollando, desde el punto de vista matemático, algunas de las ideas que nos proporciona la novela: el número áureo y todo un mosaico de cuestiones, desde el arco ojival hasta las unidades de medida tradicionales, pasando por otras no menos interesantes como los rosetones, laberintos, otros números irracionales interesantes, etc.

Su planteamiento puede ser adecuado para cualquier nivel a partir de 2º o 3º de ESO, y puede desarrollarse de forma individual o en pequeño grupo, ya que la cantidad de cuestiones planteadas lo permite.


Claustro de la catedral de Burgos. Foto CdF

Para empezar... algunos nombres

En esta novela aparecen algunos nombres de matemáticos o de personas relacionadas con las matemáticas: *Pitágoras*, *Ptolomeo*, *Alperagio* y *Abenragel.* Repasando los nombres anteriores, vemos que falta uno; es italiano y vivió entre los siglos XII y XIII. ¿Quién es? Describe sus principales aportaciones a las Matemáticas.

El arco ojival

El arco ojival es una de las características fundamentales del estilo gótico:

> (...)la nueva arquitectura introdujo el arco ojival de dos centros, de forma apuntada, y el arbotante. (pág. 33)

A) Dibuja dos circunferencias tales que el centro de cada una de ellas sea un punto por el que pasa la otra. La zona común a las dos se llama *vesica piscis* y contiene el arco ojival. Compruébalo en el dibujo.

B) Construye con regla y compás un triángulo equilátero sabiendo la longitud del lado. Comprueba que así también se puede obtener un arco ojival.

C) ¿Por qué crees que se dice en el libro *el arco ojival de dos centros?* ¿Cuáles son los dos centros? ¿Qué otro famoso arco es de un solo centro?

D) A veces, los arcos ojivales van superpuestos unos sobre otros, adornados con circunferencias tangentes.

Construye uno con regla y compás. Para ello puedes suponer conocida la longitud del lado del triángulo equilátero principal (mayor). Averigua los otros datos esenciales en función del conocido. Es decir, los centros y los radios de las circunferencias, lados de los demás triángulos equiláteros, etc.

Las proporciones matemáticas

A lo largo del libro se habla de la proporción en muchas ocasiones:

> Todas las medidas, todas las proporciones [de la catedral] están regidas por el número de Dios. (pág. 104)
>
> Ese es el secreto de esta catedral: está construida siguiendo las proporciones del número áureo, el que Dios eligió para construir el universo... (pág. 134).
>
> La belleza (...) está en la proporción. (pág 207)
>
> Hemos conseguido que en la nueva catedral se refleje la proporción matemática del número de Dios, lo que significa copiar la proporción numérica con la que Dios, el gran arquitecto, construyó el universo.
>
> Las proporciones que ese número representa son las mismas que rigen el orden del mundo(...) (pág. 208).
>
> Y el número de Dios era la proporción perfecta que había sido revelada al hombre (...) (pág 365).

A) En todas estas citas se habla de proporciones matemáticas. ¿Qué es una proporción? Pon ejemplos de proporciones en las que intervengan cuatro números y otras en las que intervengan tres, siendo uno de ellos medio proporcional.

B) También se habla del número de Dios, del número áureo... ¿Cuál es, según el libro, ese número? Escribe su valor en forma de fracción y en forma decimal.

El número de oro lo podemos encontrar desde el conocimiento matemático, viendo su origen, las proporciones que lo originan... :

C) Partiendo de un rectángulo áureo, encontrar el número de oro y explicar el proceso desarrollado para su obtención.

D) Hacer lo mismo que en la pregunta anterior, pero partiendo de un segmento que se desea dividir en dos partes *a* y *b*, de forma que se cumpla proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

Una vez que conocemos el número de oro, surge una cuestión de forma natural:

E) Compara el número de oro obtenido matemáticamente con el número de Dios de la novela. ¿Qué ocurre? ¿A qué puede deberse?

Manejando el número de oro

El número de oro, que se denota habitualmente por la letra griega Φ es un número de los llamados irracionales.

A) ¿Qué significa ser un número irracional?

B) Demuestra que se verifican los siguientes resultados:

$$\Phi + 1 = \frac{1}{\Phi}$$

$$\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi + \Phi^2 = \Phi \cdot \Phi^2$$

C) Investiga la relación que hay entre el número de oro y la sucesión que lleva el nombre del matemático italiano que has estudiado en la primera pregunta del cuestionario.

D) Demuestra que la sucesión de números

$$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4...$$

es una progresión geométrica en la que cada término, a partir del tercero, es igual a la suma de los dos anteriores, es decir, que

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}$$

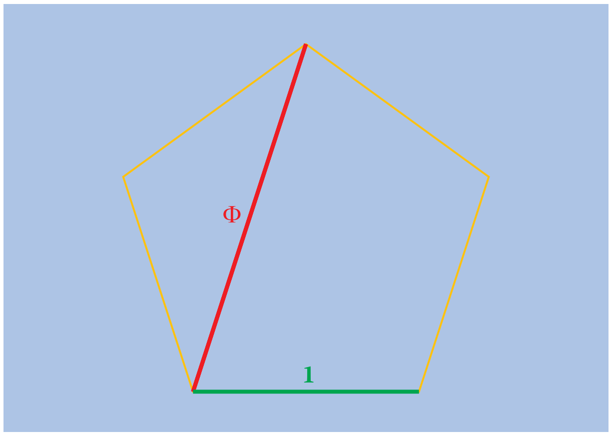
siendo *n* un número natural cualquiera.

E) Demuestra que si una sucesión de números es una progresión geométrica y cada término (a partir del tercero) es suma de los dos anteriores, entonces es de la forma

$$a, a\Phi, a\Phi^2, a\Phi^3, a\Phi^4...$$

siendo *a* el primer término de la sucesión.

F) Demuestra que en un pentágono regular, el cociente entre las longitudes de una diagonal y un lado es igual a Φ.



Medidas tradicionales

En varios momentos, los personajes hablan de distintas medidas y sus correspondientes unidades:

> Para la construcción de la nave mayor y sus dos laterales desde el crucero hasta la que sería portada principal, emplearía como medida el pie de París, una medida que equivalía a exactamente a la longitud de su palmo de la mano, con los dedos totalmente extendidos, más la anchura de cuatro dedos. (pág. 307).
>
> Seguiré aplicando el pie de París para las medidas pequeñas, pero para las proporciones totales usaré el codo de Chartres, dos palmos míos más cuatro dedos. Es la medida que utilizó mi padre en la catedral de mi ciudad: viente codos de anchura, cincuenta de altura, cien de longitud, y la longitud del crucero una quinta parte de la longitud de la nave central (...). (pág 308).
>
> La medida principal de longitud era el pie, pero el pie de París no era el mismo que el de Chartres o que el de Castilla.

A) Expresa, en unidades de medida tradicionales, las dimensiones de las catedrales de Burgos y de León. ¿Dónde aparece el número de Dios?

B) Recopila unidades de medida tradicionales de longitud, superficie y volumen, usadas en la península ibérica en la Edad Media.

C) ¿Cómo se medían en esa época los ángulos? Aprovecha esta ocasión para explicar el error que hay en la construcción de la catedral de Burgos.

Los rosetones...

En las catedrales góticas sobresalen por, su belleza, los rosetones de las distintas fachadas. Esto también podemos observarlo en el libro:

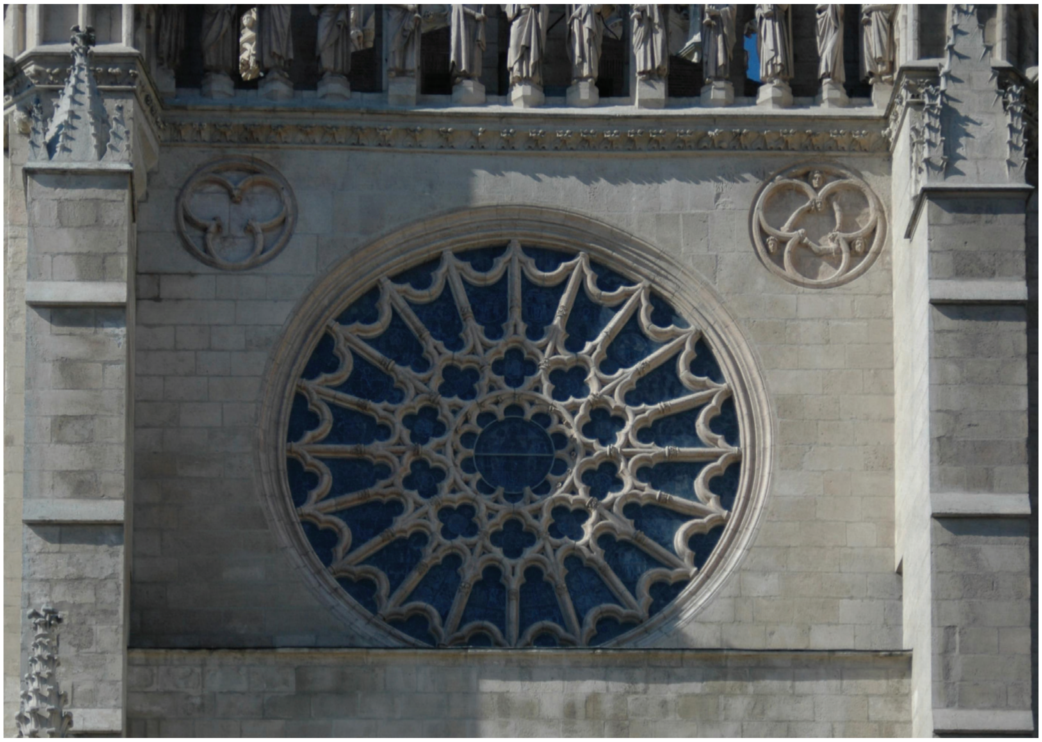
> Enrique quiso destacar el gran rosetón de la fachada sur, de ahí que lo convirtiera en un elemento casi exento, rodeado tan sólo por sillares carentes de cualquier decoración. A finales de 1235 ordenó que se comenzaran a esculpir las piezas de la trama de piedra del rosetón del Sarmental(...) (pág 257)

A) Escribe el proceso de construcción del rosetón hasta su colocación en la fachada.

B) Observa el rosetón de la puerta del Sarmental y averigua cuántos ejes de simetría tiene. En general, un rosetón de n lados, pétalos o sectores, ¿cuántos ejes de simetría tiene?

C) Las figuras geométricas con regularidades suelen tener ejes de simetría. Busca los ejes de simetría de un cuadrado y los de un triángulo equilátero.

D) Busca los planos de la planta de algunos edificios históricos y encuentra sus ejes de simetría.



Rosetón del Sarmental,
Catedral de Burgos.
Foto FMC

Entremos en el laberinto

Algunas catedrales poseen lo que se denomina un laberinto. Este elemento también aparece en el libro:

> Se trata de una línea trazada en piedra azul y blanca que da vueltas y más vueltas sobre sí misma. (pág 268)
>
> La gente lo llama el laberinto, pero no es eso. Se trata del camino hacia la luz. (pág 268)
>
> Todas las grandes iglesias de Francia tienen un laberinto, que en realidad no es tal, sino una representación del camino de la vida. (pág 399)

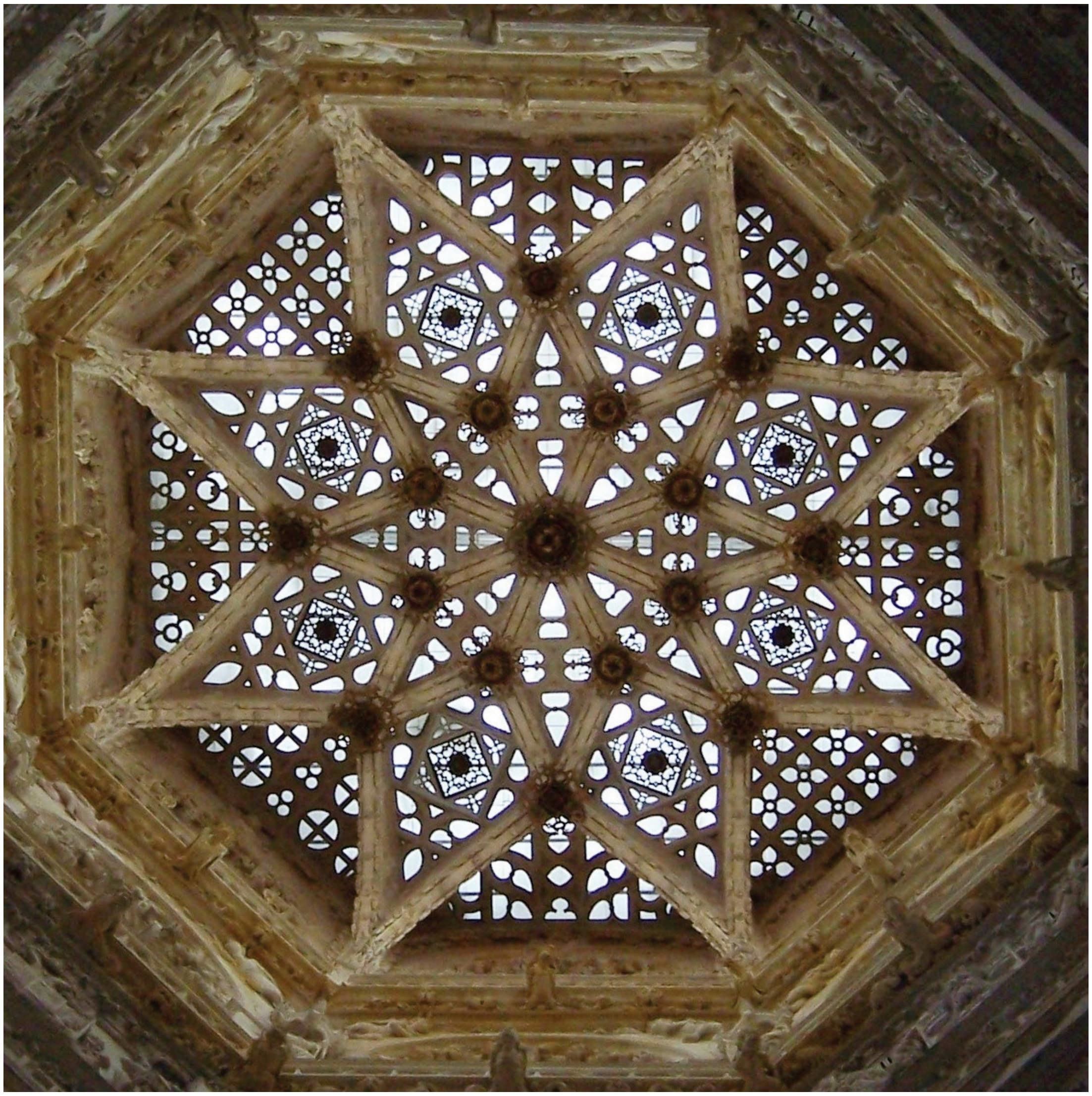
A) Averigua las medidas del laberinto de la catedral de Chartres y dibújalo. Haz lo mismo con otros laberintos de catedrales o de jardines.

B) ¿Cuál es el laberinto más famoso de la Grecia Clásica? Explica el mito en el que aparece.

C) ¿Qué se quiere simbolizar con la colocación de un laberinto? Relaciónalo con el conocimiento matemático o la resolución de problemas de matemáticas.

D) Haz una clasificación de los distintos tipos de laberintos.

E) ¿Hay algún método útil para tratar de encontrar la salida de un laberinto? Explica alguno.



Cimborrio de la catedral de Burgos. Foto CdF

El octógono maravilloso

Admira el cimborrio de la catedral de Burgos y averigua:

A) El área del octógono principal (suponiendo que fuera regular).
B) El área de la estrellas de ocho puntas.

Los datos reales que necesites debes buscarlos por tu cuenta.

Otros números escondidos

> A partir del cuadrado, del triángulo equilátero y de la proporción áurea, el número de Dios, construir un edificio se convertía en un ejercicio matemático basado en los números, en la geometría y en la simbología divina (pág. 365).
>
> La lectura de ese tratado le hizo reflexionar sobre la perfección de las figuras geométricas y la presunta irracionalidad y contradicción de que las medidas más perfectas, como el círculo, la diagonal de un cuadrado o la extensión infinita de la proporción áurea, eran precisamente las más fáciles de dibujar (pág. 368).

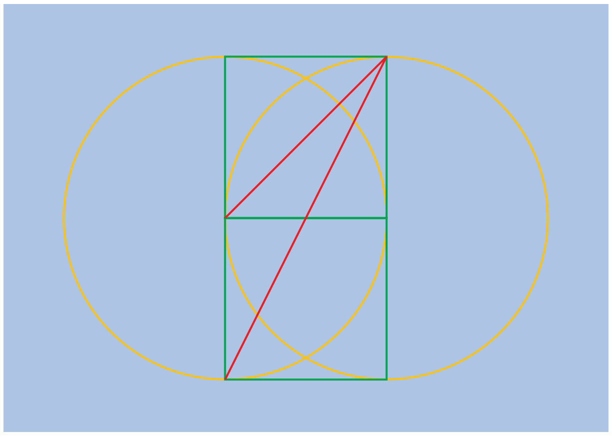
En las figuras geométricas elementales podemos descubrir números irracionales con mucho significado y simbolismo; por ejemplo el número de oro en un rectángulo particular.

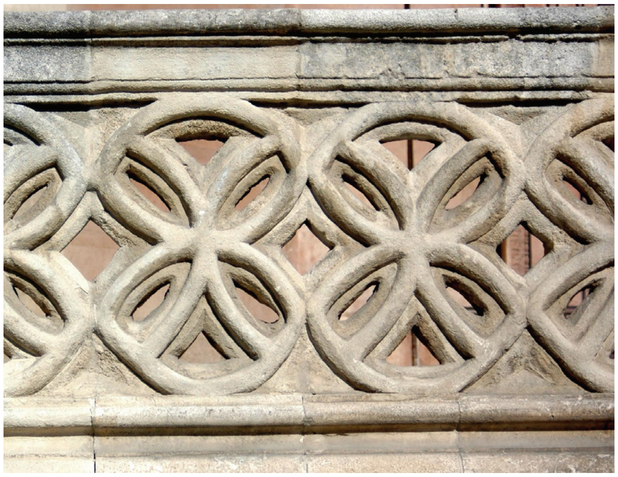
A continuación, te vamos a proponer varias figuras y números para que encuentres el proceso mediante el cual se relacionan:

a) La circunferencia y el número π .
b) El cuadrado y $\sqrt{2}$.
c) El triángulo equilátero y $\sqrt{3}$.
d) ¿Qué rectángulo sencillo nos puede dar $\sqrt{5}$? ¿Cómo se hace?
e) En la figura siguiente (las circunferencias son de radio 1 y el centro de cada una es un punto de la otra) aparecen casi todos los números anteriores

$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ y } \sqrt{5}$$

como longitudes de determinados segmentos o arcos. ¿Qué longitudes son? Averigua el número que falta y señala en el dibujo su línea correspondiente.





Baranda, catedral de Burgos. Foto FMC

La catedral y los teoremas

> Esta catedral es un teorema, sólo un teorema que ha sido elegantemente resuelto: geometría y matemáticas, nada más.(pág. 485)

La palabra teorema tiene un significado muy importante en el conocimiento matemático. Tanto es así que algunos llevan el nombre de la persona que lo enunció o lo demostró por primera vez.

A) Explica lo que es un teorema matemático.

B) Enuncia y demuestra algún teorema que conozcas.

Los planos y los dibujos de la realidad

Los constructores de catedrales tenían que usar representaciones manejables de lo que querían construir: dibujos, maquetas o cualquier otra estrategia.

> (...) desplegó un enorme pergamino en el que había dibujado la planta de la futura catedral(...) (pág 104)

> (...) les presentaba un dibujo en el que con unas rayas se expresaba la forma de la planta en un tamaño cuyas medidas estaban proporcionalmente reducidas. (pág 104)

A) ¿Qué significa la expresión proporcionalmente reducidas?

B) La relación de semejanza entre un dibujo y la realidad que representa puede venir dada por un número. ¿Cómo se llama ese número?

C) Averigua la escala de los dibujos de las plantas de las catedrales de Burgos y León, que están al principio del libro.

D) Con la escala calculada anteriormente, averigua las dimensiones aproximadas del claustro de la catedral de Burgos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

DOMÍNGUEZ MURO, M.J. (1999): *El número de oro.* Ed. Proyecto Sur. Granada.

GHYKA, M. C. (1968): *El número de oro,* Vol. I y II. Ed. Poseidón, Barcelona.

GHYKA, M. C. (1983): *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Ed. Poseidón, Barcelona.

VV.AA. (1995): *Grandes matemáticos.* Temas 1". Investigación y Ciencia, Ed. Prensa Científica, S. A., Barcelona.

LAWLOR, R. (1996): *Geometría sagrada*, Ed. Debate, Madrid.

SUMA 51

Febrero 2006, pp.133-140

Antonio Roldán Martínez, Premio “Gonzalo Sánchez Vazquéz” a los valores humanos, 2005

El pasado día 7 de julio, en la última jornada de las XII JAEM celebradas en Albacete, Antonio Roldán, socio de la SMPM desde su creación, recibía de manos del Presidente de la FESPM el IV Premio Gonzalo Sánchez Vázquez.

No es un premio con una gran dotación económica, como algunos premios literarios, de hecho no tiene ninguna. Sin embargo es el premio de más valor que pueda recibir en la actualidad un profesor de matemáticas en nuestro país. Vienen aquí muy a cuento las palabras con las que Johann Bernoulli lanzó a la comunidad matemática el reto de la braquistócrona:

> Indudablemente este premio no es de oro ni de plata, porque éstos solo atraen a almas ruines y venales de las que no podemos esperar nada laudable para la ciencia. De esta forma coronaremos con honra y excelencia, pública y privadamente, oralmente y por escrito, la perspicacia de nuestro gran Apolo.

Aunque el premio no se otorga por haber realizado un gran descubrimiento o haber demostrado un importante teorema. Se premia algo quizás mas importante: la labor docente de toda una vida y los valores humanos manifestados en esa labor: la entrega desinteresada, el cariño a los alumnos, la tolerancia, la paciencia, la buena disposición, las ganas de enseñar, y las de aprender de y con los alumnos, el apoyo a los compañeros... En fin, el amor a la enseñanza de las matemáticas. Y si de premiar esos valores se trataba Antonio Roldán se ha hecho digno acreedor del mismo a lo largo de una dilatada vida docente de más de medio siglo.

Pinceladas de una vida

Antonio es andaluz, nació en Lucena (Córdoba) el primero de diciembre de 1941, dentro de una familia dedicada a la agricultura, de grandes inquietudes culturales, y con la economía ajustada propia de aquellos tiempos. Estudió Enseñanza Primaria y Bachillerato en el Colegio *Nuestra Señora de Araceli* de su localidad de nacimiento, regido por los Hermanos Maristas. Durante toda su permanencia en el mismo fue alumno becario.

A los trece años comenzó a impartir sus primeras clases particulares de Matemáticas, actividad que le duró, como apoyo económico, durante toda su vida estudiantil. Una buena proporción de las clases las impartió gratuitamente.

Cursó los estudios de maestro de Enseñaza Primaria totalmente por libre, simultaneado sus estudios con sustituciones de maestros y clases particulares. Obtuvo el título en 1959 en

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid

la Escuela Normal de Córdoba, con 18 años. Por su edad, no pudo presentarse a oposiciones de Maestro Nacional hasta 1961. En las mismas obtuvo el número 2 de la provincia de Córdoba, siendo destinado a la aldea de Zambra (Córdoba).

En sus tres primeros años profesionales, de 1960 a 1963, fue nombrado maestro interino en su ciudad natal. De 1963 a 1969 fue Maestro Nacional en la mencionada aldea de Zambra, junto a otros cuatro compañeros, formando un equipo muy unido y lleno de inquietudes. Ayudó a muchos chicos del pueblo a estudiar el Bachillerato y Magisterio. Dentro de un entorno rural, en el que algunos alumnos venían desde cortijos situados hasta a siete kilómetros, el equipo de docentes experimentó técnicas educativas de corresponsabilidad (jefaturas ejercidas por los alumnos: de limpieza, de disciplina, de relaciones públicas…) y nuevas técnicas de aprendizaje de lectura y escritura. Se creó un museo arqueológico escolar formado por los abundantes restos romanos de la zona, gestionado por los propios alumnos, y se obtuvo una Mención Honorífica por la gestión del comedor escolar, ya que se daba comida a 35 alumnos disponiendo sólo de 20 becas. La esposa de Antonio colaboró en la adaptación, decoración y gestión del comedor, así como en el seguimiento de los muchos problemas que estos niños y niñas tenían para poder asistir a la escuela.

En estos años, su gran afición por las Matemáticas le hizo plantearse el intentar estudiar la Licenciatura correspondiente por libre, única forma de lograrlo, dada la imposibilidad de hacerlo oficialmente. Para ello debía aprobar el preuniversitario, cosa que hizo en 1963, mientras simultaneaba el estudio con su labor docente en la aldea.

Comenzó sus estudios de Matemáticas, siempre por libre, en 1965, año en que aprobó el curso llamado entonces Selectivo, en la Universidad de Granada, con la calificación de Notable en todas las asignaturas. Con muchas dificultades y simultaneando también con el Servicio Militar cumplido entre 1965 y 1966, fue aprobando asignaturas en las convocatorias de libres, no pudiendo asistir a las clases presenciales nada más

que tres meses; la necesidad de cursar las prácticas en un Instituto de Granada, estando ya casado y con un hijo, le obligó a pedir un préstamo para costear su estancia en dicha ciudad. Obtuvo el título de Licenciado en Matemáticas en Junio de 1969. A pesar de sus particulares circunstancias, había empleado los cinco años mínimos requeridos.

Desde 1969 hasta 1971 fue profesor interino de Matemáticas en el Instituto "Marqués de Comares" de Lucena. En 1971 se presentó a las oposiciones a Agregados de Instituto. Aprobó estas oposiciones con el número 1 (en ese tiempo las oposiciones tenían carácter nacional), por lo que pudo elegir el Instituto *Quevedo* de Madrid. En Septiembre de ese año de 1971 se trasladó a la capital, donde ha desarrollado el resto de su vida docente.

Desde su incorporación a este Centro y hasta 1978 fue Secretario del mismo, durante unos años, que debido a la última etapa del Régimen de Franco y primeros de la Transición, estuvieron llenos de problemas y contradicciones, además de la inseguridad ciudadana existente en el entorno del instituto. Como consecuencia de esta situación tuvo que salvar situaciones muy comprometidas, como por ejemplo negociar el solo, en ausencia del Director, con unas patrullas de policía que querían entrar a disolver por la fuerza una asamblea ilegal, o controlar a un gran número de alumnos que cercaron literalmente el aula del Director profiriendo insultos contra él. En esos años, todo el equipo directivo era visitante habitual de la comisaría de San Blas.

En 1973 pasó de agregado a catedrático en su mismo instituto, por haber obtenido el número 2 en la oposición correspondiente, logrando con ello poder elegir el mismo Centro en el que trabajaba. Siempre procuró, hasta el fin de su actividad docente, olvidarse de esa condición de catedrático, presentándose siempre como "profesor de instituto", salvo que tuviera que hacer frente a alguna descalificación de esa condición.

En 1978 fue nombrado Director del Instituto Quevedo, a su pesar, mediante orden directa de la Inspección, en una época en la que era muy difícil contradecir a los superiores. Fue de los primeros directores que impulsó los Consejos Asesores, antes de que tuvieran carácter oficial. Autorizó las asambleas de alumnos, a pesar de que todavía se consideraban ilegales. Su defensa de las condiciones de seguridad de sus alumnos le llevó incluso a encabezar una manifestación no autorizada y a sufrir amenazas muy serias de formación de expediente disciplinario por parte de sus superiores, debido a un cierre del Centro acordado como protesta por la inseguridad. Después de 12 años en el equipo directivo, solicitó su cese en la Dirección en 1983. Detrás dejaba una de las mejores bibliotecas escolares de su entorno y un aula de Informática equipada con los primeros IBM PC que se usaron en la enseñanza. En su último año como director participó y apoyó totalmente el trabajo interdisciplinar sobre Quevedo que obtuvo el Premio Nacional "Giner de los Ríos", que recogió, a petición de sus compañeros, cuando ya no era director, de manos del ministro José María Maravall y el entonces presidente de la entidad bancaria que concedía el premio, Francisco Fernández Ordóñez. El Instituto que encontró en 1971, en el que en un solo mes se tuvieron que denunciar hasta veinte robos y asaltos a personal del Centro, se había convertido, gracias al esfuerzo coordinado de muchos profesores entusiastas, en un Centro con fama de innovador y en el que se podía trabajar muy bien.

En la década de los ochenta, se dedicó a promover el uso de los ordenadores en la enseñanza, especializándose en las aplicaciones didácticas de las hojas de cálculo y en la programación. Colaboró en cursos y publicaciones con el Proyecto Atenea y posteriormente con el Programa de Nuevas Tecnologías, coordinó el aula de Informática y ayudó a formar un grupo de profesores ilusionados por el uso didáctico de las nuevas tecnologías.

En 1988 obtuvo por concurso de traslados la plaza en el IES Salvador Dalí, Centro en el que ha permanecido hasta su jubilación. Su primer curso allí coincidió con la convocatoria de premios a programas de ordenador efectuada por el Centro de Investigación y Documentación Educativa y el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación, logrando cuatro premios consecutivos por los programas SISTEMAT, APUNTES, PRIMER (en colaboración con su hijo Antonio Javier, que estudiaba computación) y COMBIMAQ, programas todos de aplicación de los ordenadores a la enseñanza de las Matemáticas. Toda su labor en este aspecto ha estado centrada en la Informática como instrumento, y no como fin, convirtiendo siempre la renovación tecnológica en

Sus ideas

Al cabo de tantos años de enseñanza, aparte de mis fallos y defectos, que me los conozco muy bien, te podría destacar tres constantes positivas que creo han sido mi motor como profesor:

Tesón: *Yo he sido siempre corredor de fondo y trabajador a pie de obra. Nunca he sido persona de grandes declaraciones, sino de trabajo callado. Incluso más de un amigo me ha reprendido por mi poco afán de "saber vender lo que hago". Creo que no me he desanimado y he seguido luchando a lo largo de mi vida a pesar de los problemas y contradicciones que he sufrido para lograr algunos objetivos. En este sentido, creo que la Licenciatura en Matemáticas ha sido mi logro más representativo. Yo no estaba predestinado por mi niñez a ser profesor de Matemáticas.*

Pasión por el conocimiento: *Desde pequeño, que aprendí los números contando al derecho y al revés las numeraciones de los postes de teléfono en mis trayectos al cortijo (subido en un mulo y dirigido por mi padre), he tenido una gran curiosidad y pasión por el conocimiento. Salvo el teatro y el deporte, he participado en todas las actividades culturales: guitarra clásica, rondalla, orquesta de pulso y púa, poesía, literatura, clubes de conferencias, dibujo…Aún hoy conservo esta pasión, que lo mismo me lleva a estudiar el Prerrománico español que a discutir sobre Mecánica cuántica.*

Empatía con mis alumnos: *Yo, siempre que he explicado algo, he estado más pendiente de lo que sentía mi alumnado que del rigor o belleza de la teoría explicada. Entre el teorema y el alumno, yo siempre he elegido a este último. He sido más comunicador que teórico. He pretendido adaptarme, y no sé si lo he conseguido, a la edad y circunstancias de mis alumnos. Aún hoy en día, que nadie me demanda clases de Matemáticas, sino de Informática, a veces mi labor consiste en estudiarme un tema que no domino para después comunicarlo a mis alumnos. Yo creo que es lo mejor que he hecho en mi vida: comunicar conocimientos.*

reflexión metodológica, y promoviendo la espontaneidad de sus alumnos para llegar a los conocimientos mediante la experimentación.

En su permanencia en este Centro coincidió con compañeros que compartían sus inquietudes, por lo que siguió participando en diversos trabajos de experimentación e innovación, grupos de trabajo y seminarios del Centro de Profesores de Ciudad Lineal realizados en el instituto, proyectos de innovación de la Comunidad Autónoma de Madrid *Materiales audiovisuales, informáticos y manipulables para las Matemáticas en la ESO*, premio de la Comunidad Autónoma de Madrid en el curso 2000-2001, actividades del Año Mundial de las Matemáticas...

Hasta el mismo momento de su jubilación continuó experimentando y diseñando materiales informáticos tanto para su aplicación en el aula como para formación del profesorado. Entre ellos hay que destacar el Curso de formación a distancia *Hoja de Cálculo* diseñado para el CNICE y que en la actualidad se está impartiendo en varias comunidades autónomas, entre ellas Madrid

En el año 1989 se incorporó a la UNED como tutor de Matemáticas en los estudios de Psicología. Durante ocho años desarrolló esta tutoría mostrando mucho interés por sus alumnos, a gran número de los cuales les salvó la continuación de sus estudios, ayudándoles a superar su bloqueo con la Estadística. Su éxito con los alumnos produjo tal cantidad de asistentes a sus explicaciones, que en los tres Centros que recorrió se tuvieron que habilitar los salones de actos o las aulas polivalentes para poder acoger a los asistentes y a los turnos de resolución de dudas.

Se jubiló en el año 2002, después de más de 40 años de enseñanza oficial y casi cincuenta desde su primera clase, sin haber dejado de participar en proyectos y estudios junto a sus compañeros de departamento hasta el momento de su jubilación. Actualmente sigue colaborando con el CNICE y algunos Centros de Profesores en cursos presenciales y a distancia sobre el uso de la Hoja de Cálculo en la Enseñanza. En el último año ha diseñado un segundo curso a distancia de carácter más elemental junto con dos otros dos compañeros, uno de los cuales es su hijo Juan Luís.

El cariño a los alumnos, la dedicación de tiempo y esfuerzo en la enseñanza de las matemáticas, el entusiasmo de seguir innovando y experimentando con nuevos materiales y recursos le han acompañado hasta el mismo día de su jubilación y aún después.

Actividades solidarias

Desde el principio de su actividad profesional ha querido siempre reservar una parte de su tiempo para ayuda a los demás. Ya en su etapa de estudiante ayudó a muchas personas a terminar sus estudios, de forma gratuita, y a veces aportando además alguna ayuda económica. Como maestro rural colaboró con el párroco y otros compañeros en una pequeña academia gratuita de la que salieron como bachilleres y maestros algunos chicos y chicas de la aldea que de otra forma estaban condenados a un trabajo agrícola precario.

Durante los años ochenta colaboró intensamente con el Grupo de Parados de su barrio, iniciándolos en la Informática, y aportando para ello su propio ordenador Spectrum que trasportaba para cada clase. Se matriculó con ellos como alumno de Contabilidad para así conseguir un mayor acercamiento y cohesión del grupo. En años sucesivos otros profesionales del barrio siguieron su ejemplo, y actualmente aún se mantienen esas clases.

Con otros miembros de su familia participó en la formación del grupo Mundo Cero, dedicado a la ayuda al tercer mundo, especialmente en los aspectos de reflexión, sensibilización y acción solidaria. Este grupo, formado por personas de distintas generaciones, fue determinante en la concienciación de muchas personas de su entorno respecto a las desigualdades económicas mundiales. Como fruto de estas reflexiones, Antonio y su esposa se integraron en la ONG Manos Unidas, voluntariado en el que participaron diez años, creando y manteniendo el archivo de material gráfico.

Actualmente pertenece como voluntario al Departamento de Formación de Entreculturas, ONG que promueve las escuelas populares en Hispanoamérica. Su principal tarea es enseñar a los nuevos voluntarios los conocimientos informáticos mínimos para realizar su labor. Además participa como profesor en un grupo de Enseñanza de la Informática para adultos en su Parroquia, intentando completar la formación tecnológica a personas a las que les preocupa haber llegado tarde a las Nuevas Tecnologías.

Para todos los que hemos tenido la fortuna de tenerte como compañero y amigo trabajar contigo ha sido un honor y un verdadero placer. La verdadera calidad de la enseñanza de las matemáticas la hacen posible personas como tú.

Gracias Antonio.

Lo que he aprendido enseñando

La tarea de enseñar es una aventura sin guión previo. En una larga vida profesional como la mía se han sucedido muchos cambios sociológicos, de metodologías y aún de modas. Yo he pasado de enseñar (y después olvidar) la raíz cúbica a obsesionarme por el rigor en las propiedades de los límites, a sufrir después las Matemáticas Modernas y a aterrizar por fin en una visión lúdica, experimentadora y algo desenfadada del aprendizaje matemático.

Después de vivir la enseñanza de las Matemáticas durante cincuenta años, de todos esos cambios, modas y dogmas pedagógicos, sólo me quedan algunas ideas e impresiones muy sencillas que, como parte de mi agradecimiento por el premio concedido, deseo compartir con todos mis compañeros.

Mis alumnos preferidos

Cuando yo ejercía de maestro nacional en la aldea de Zambra, me vino en noviembre un niño de siete años, despierto y simpático, pero sin ningún conocimiento escolar, porque sus padres vendían turrones en las ferias y sólo podía asistir a clase en los meses de invierno. Durante tres cursos comenzó a aprender a leer en los inviernos y a olvidar lo aprendido en los veranos. Era angustioso ver su cara de frustración cuando regresaba en otoño, con las botas llenas de barro después de kilómetros de malos caminos, y se daba cuenta de que sus compañeros progresaban hasta leer correctamente, y él ya había olvidado las letras, y que su aprendizaje se volvería a interrumpir con la primera feria de primavera. Cuando ya tenía diez años, casi aprendió por fin a leer, pero a mí me trasladaron y nunca supe si al tercer verano habría olvidado de nuevo todo lo aprendido. Siempre tengo la imagen de ese niño como ejemplo de lo que me esperaría después en mi vida profesional. Por puro azar, y a veces por elección propia, he tenido que atender a muchos alumnos que necesitaban más ayuda que los demás. Yo he sido siempre el profesor de los alumnos con dificultades de aprendizaje.

En los años ochenta leí unas palabras de Gandhi en las que venía a decir que cuando emprendía alguna acción política siempre pensaba en qué ayudaría o perjudicaría a los parias más pobres de su tierra. Esto me impresionó, y desde entonces he procurado actuar de esa forma. En parte, mis inquietudes por innovar en la enseñanza iban en esa dirección. Mis alumnos favoritos no han sido los genios que aprenden solos, sino los que tienen que dar vueltas y más vueltas a un concepto para entenderlo. Ellos son los que nos justifican como profesores. No sé si mi alumno turronero aprendió a leer por fin, pero sé que yo hice lo posible para que lo lograra.

Solos no podemos

Aunque por mi historia personal tuve que abordar muchas tareas totalmente solo, la vida me ha enseñando que necesitamos el apoyo de otros cada vez que intentamos alcanzar cualquier objetivo. Desde que mis padres comenzaron a luchar para conseguirme becas y libros que me permitieran estudiar, ha habido siempre una serie de personas apoyándome. Recuerdo a la que me regaló su único libro de Matemáticas, a los profesionales que nos salvaron el Bachillerato sacrificando su tiempo, a aquel catedrático de universidad que me convirtió en licenciado perdonándome el último examen... y otros muchos más. Pero muy especialmente a mi familia.

Cuando yo estaba en la aldea, en una mesa camilla calentada por un camping-gas, luchando con las ecuaciones diferenciales, no estaba solo. Había una persona, mi mujer, que asumía mientras tanto toda la intendencia de la casa, la crianza de nuestro primer hijo Antonio Javier, la tarea de conseguir que yo no me desanimara, y aún le sobraba tiempo para ayudarme copiando apuntes que ella no entendía. Por eso he afirmado con energía que es suya la mitad del premio con que se me ha distinguido.

Después, durante muchos años de trabajos intensivos, no sólo ella, sino también mis hijos soportaron con elegancia el tener un padre eternamente estudiante y ensimismado en cuestiones que ellos no comprendían aún. Después estudiaron también Matemáticas e incluso llegaron a colaborar conmigo en algunas creaciones, y siguen siendo actualmente mis compañeros de inquietudes.

Mi hijo Juan Luis dice en un poema que "amar es izar una bandera extranjera". Creo que mi familia supo izar esa bandera, y colaborar en tareas que eran más mías que suyas, en tener paciencia con mis despistes, cuando sabían que mi cabeza vagaba por "tierra extranjera". Cuando después yo cogía la tiza en mi instituto y explicaba un teorema, traía detrás todo un apoyo que los alumnos no veían, pero que me permitía intentar ser mejor profesor.

Valor del grupo

Cuando llegué a Madrid en los años setenta, venía como un lobo solitario, acostumbrado a ganarme por mí mismo las cosas que las circunstancias me negaban, un poco desconfiado y poco acostumbrado a los trabajos en grupo. Sin embargo, la calidad humana de mis compañeros, su profesionalidad, me hicieron cambiar positivamente, hasta poder afirmar ahora que no podemos conseguir nada importante en la enseñanza si no trabajamos en grupo.

Yo he visto cambiar un instituto que sólo era famoso por sus problemas de orden público en un Centro pionero en Nuevas Tecnologías y en Proyectos Interdisciplinares, llegando a recibir un premio nacional de manos del ministro. Esto lo lograron veinte profesionales que no se conformaron con adaptarse a las circunstancias y lucharon por cambiar las cosas.

En los años ochenta nos concedieron el Proyecto Atenea a un grupo de profesores antes de que fuéramos titulares de nuestro instituto. Por teléfono, por referencias y conocimientos de unos u otros, formamos un equipo antes de conocernos personalmente, y hubo un claustro que pidió el proyecto en nuestro nombre, sin saber quiénes éramos, con sólo el aval de un compañero interesado. También ellos izaron una bandera extranjera.

Detalles como estos y otros muchos que no tienen cabida en este texto, me han llevado al convencimiento del valor del grupo. Creo que no es tiempo perdido todo el que se gasta en los Departamentos en reuniones de trabajo, en discutir objetivos y en planificar las tareas. No es tiempo perdido, sino muy valioso. Es preferible adaptarse a los compañeros más remisos, cohesionar el grupo, antes que intentar volar solos a alturas que a otros no interesan.

No hay dos alumnos iguales

La vida a veces da vueltas como una rueda. Yo, que comencé a dar clases en escuelas unitarias con dos o tres niveles de alumnos, me encontré en mis últimos años como profesor con grupos de secundaria con tantos niveles como en aquellos años, desde el alumno pakistaní que no entendía nuestro idioma hasta otro premiado dos veces en concursos matemáticos. Por casualidad participé en esos años en estudios sobre la atención a la diversidad. Mi jubilación no me permitió profundizar más en esa cuestión, pero me convenció de la necesidad de adaptación de nuestra enseñanza a la gran variedad actual del alumnado.

Ya he afirmado en otra parte que yo, entre el teorema y el alumno, he elegido siempre a este último. En este momento me reafirmo en esa opinión. Las Matemáticas serán un edificio perfectamente construido, pero los alumnos no. Cada uno nos viene con unos aprendizajes y conceptos previos que no tienen nada que ver con lo que nosotros presuponemos. Un mismo teorema es visto de forma distinta por treinta cerebros. No puedo dejar de evocar aquí tantas ocasiones en las que yo, como casi todos mis compañeros, he explicado algo con la mejor voluntad, lo mejor posible, pero con el convencimiento de que algunos alumnos sólo se estaban enterando de una parte de lo explicado. ¿No podría haber hecho un esfuerzo mayor para adaptarme a todos?

Creo que actualmente no se puede abordar la enseñanza de las Matemáticas sin intentar atender a la diversidad de nuestros alumnos. Si el rigor sufre con ello, que espere, que ya se podrá desarrollar en los estudios superiores.

Las Matemáticas son para divertirse

Parecerá una afirmación superficial, pero al recorrer mi vida profesional desde la jubilación presente, el detalle que más destaco es lo bien que lo he pasado dando clase. Recuerdo que cuando era tutor de Psicología Matemática en la UNED, los alumnos, ya adultos, me comentaban que les gustaba asistir a mi tutoría porque se notaba lo que yo me divertía mientras explicaba.

Siempre me ha llamado la atención, en los muchos trabajos de experimentación e innovación en los que he participado, la gran cantidad de tiempo que empleamos en evaluar objetivos y metodología, en desarrollar estadísticas y gráficos, y que nadie se plantee nunca la sencilla pregunta de "¿Cómo lo has pasado, te has divertido?"

Nos hemos creído demasiado lo de las Matemáticas como Ciencias Exactas, inmutables y aburridamente rigurosas, perdiendo su carácter de aventura y juego, que es como produjeron sus mejores resultados. Los momentos más divertidos y creativos de mis clases han sido aquellos en los que yo ignoraba totalmente cuál sería su final, porque la ruta la marcaban los alumnos. Recuerdo cuando intentábamos razonar alguna propiedad en grupo, y aparecían "el teorema de Nuria", o "la conjetura de Pablo", que se iban puliendo en la discusión hasta llegar a la "afirmación del grupo", que normalmente coincidía con la versión de los manuales más serios.

En esa Matemática es en la que creo actualmente. Después de sufrir las Matemáticas Modernas, todos los inacabables métodos de integración elemental y la *epsilon* de los límites, y, lo que es peor, haber martirizado a algunos alumnos con ellos, hace ya un par de décadas que decidí dar un poco de aire a mi enseñanza y derivarla parcialmente a las actividades de investigación, discusión en grupos y uso de las Nuevas Tecnologías.

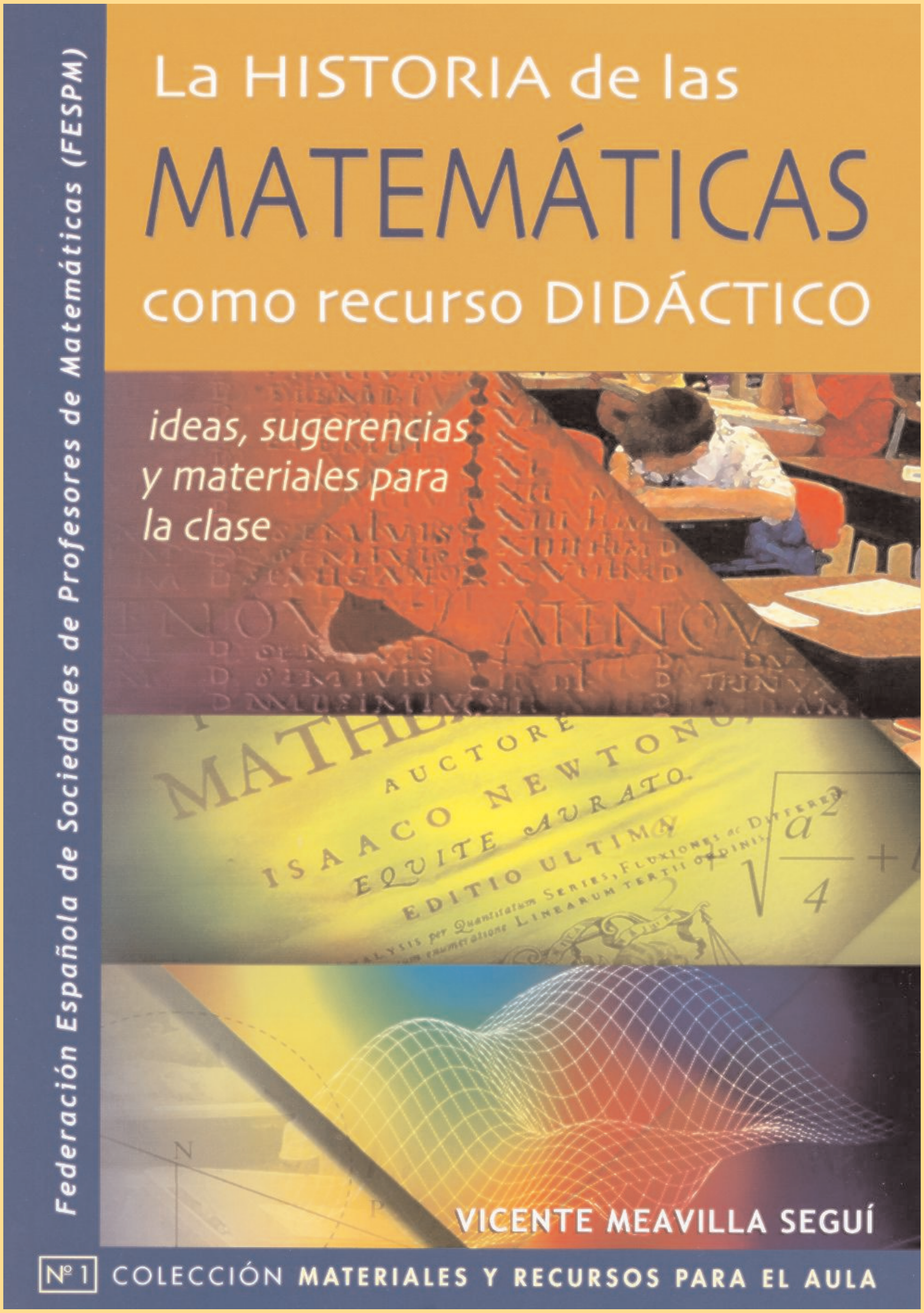
Cada vez que veo en el metro a gente resolviendo *sudokus*, pienso en lo mucho que nos hemos equivocado haciendo de las Matemáticas un *coco*. Creo que debemos divertirnos más, mientras abrimos las mentes de nuestros alumnos a tantas cuestiones apasionantes como nuestra asignatura contiene. Quizás, para llegar al *Teorema de Gauss*, debamos pasar, entre juegos, retos y conjeturas, por el *teorema de Nuria* y el *teorema de Pablo*, y más, si Nuria y Pablo, como mi alumno turronero, traen los zapatos llenos del barro de los difíciles caminos del aprendizaje.

Antonio Roldán Martínez
Premio Gonzalo Sánchez Vázquez *2005*

Convocatoria del V Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el V Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*, en homenaje de quien fue su Presidente de Honor, de acuerdo con las siguientes bases:

1. El objetivo es premiar la labor docente y los valores humanos: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de *Socio de Honor* de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas, dirigidas al Presidente de la FESPM, podrán ser presentadas por cualquiera de las sociedades federadas. Los promotores presentarán el curriculum vitae y los informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios que promuevan la propuesta.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de diciembre de 2006.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, la candidatura deberá aprobarse por mayoría absoluta. De no alcanzar ninguna candidatura la mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda y si en esta segunda votación ninguna candidatura obtuviera mayoría absoluta el Premio se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.) constatados por los promotores de la candidatura.
   - Currículum viate del candidato realizado por los promotoores en el que se pongan de manifiesto los valores humanos del candidato.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en un acto protocolario durante las XIII JAEM, que se celebrarán en Granada en julio de 2007.



Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

La historia de las matemáticas como recurso didáctico. Ideas, sugerencias y materiales para la clase
Vicente Meavilla Seguí
Colección Materiales y recursos para el aula / 1
Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Badajoz, 2005
ISBN 84-934488-0-X
268 páginas

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID

por Fax al: 912 911 879

por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ____________

☐ N.os sueltos ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

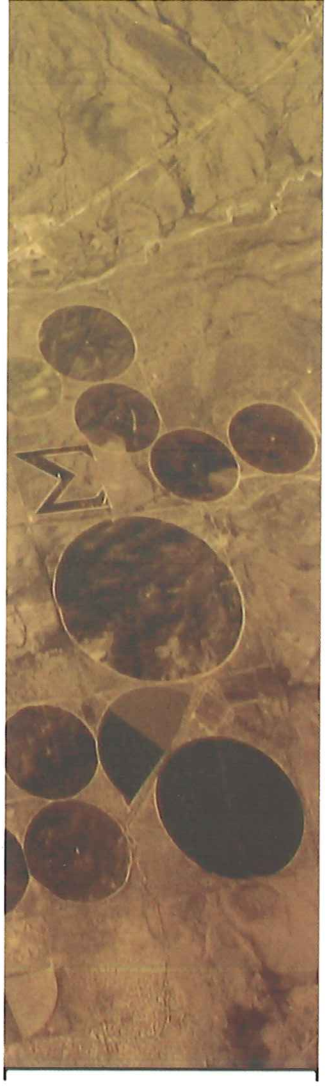
Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00051

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS