SUMA 51
Febrero 2006, pp. 107-122

Biblioteca

Mi biblioteca particular

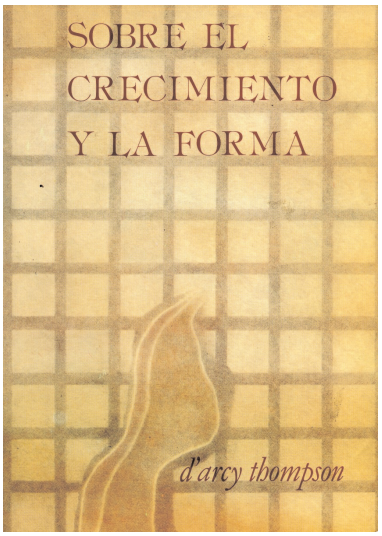
Antonio Pérez Sanz

Destaca unos pocos libros de matemáticas o de su enseñanza que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial. Cita algún párrafo que nos permita apreciar su sentido y nos induzca a leerlos.

Es complicado reducir a sólo dos las lecturas matemáticas que de una u otra forma han ejercido una marcada influencia en tu vida. Yo con permiso del coordinador de esta sección voy a ampliar el número un poco aunque prometo ser más breve en la explicación de los motivos. Utilizaré un criterio cronológico por aquello de los conjuntos bien ordenados.

He de empezar diciendo que ninguno de los escasos libros específicos de matemáticas recomendados a lo largo de la carrera dejó en mí una huella imborrable. Los de historia de las matemáticas y filosofía de esta ciencia, menos aún; mis profesores no me recomendaron ninguno que yo recuerde...

Quizás el primer libro que vino a cambiar mi percepción sobre el sentido, la funcionalidad e incluso la estética de las



H. Blume Editores, Madrid, 1980, 330 páginas

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

matemáticas fue un clásico de principios de siglo que cayó en mis manos de forma casual allá por los años 80, se trata de *Sobre el Crecimiento y la Forma* de D´Arcy Thompson, en versión abreviada (330 páginas) editada por H. Blume Editores en 1980. Por desgracia nunca he podido conseguir la primera edición íntegra de 1917 (793 páginas) o la revisada de 1942 (1116 páginas).

Alguien podrá objetar que no se trata de un libro de Maemáticas... ¿Cómo que no? Una cosa es que no tenga muchas fórmulas, realmente casi ninguna, y otra muy distinta que no trate de conceptos, aplicaciones y procesos matemáticos y precisamente en uno de los campos en que la Matemática aparece como herramienta lejana: en el desarrollo y la estructura de los seres vivos. El libro es una explosión, preciosa por otra parte, de matemáticas aplicadas al mundo de la biología.

La característica más notable de este libro es el análisis de los procesos biológicos desde el punto de vista matemático y físico. (Curiosamente D´Arcy Thompson deja la química de lado). Aunque seguramente la mejor explicación del carácter excepcional del libro la encontramos en la introducción de Jhon Tyler Bonner:

> Otro hecho significativo que contribuye a la importancia y carácter único de *Sobre el Crecimiento y la Forma* es que no sólo es buena ciencia sino también buena literatura; se trata de un ensayo científico con el estilo de un ensayo de humanidades. El nobel Medawar la considera "incomparablemente, la mejor obra de literatura en todos los anales de la ciencia escrita en lengua inglesa.

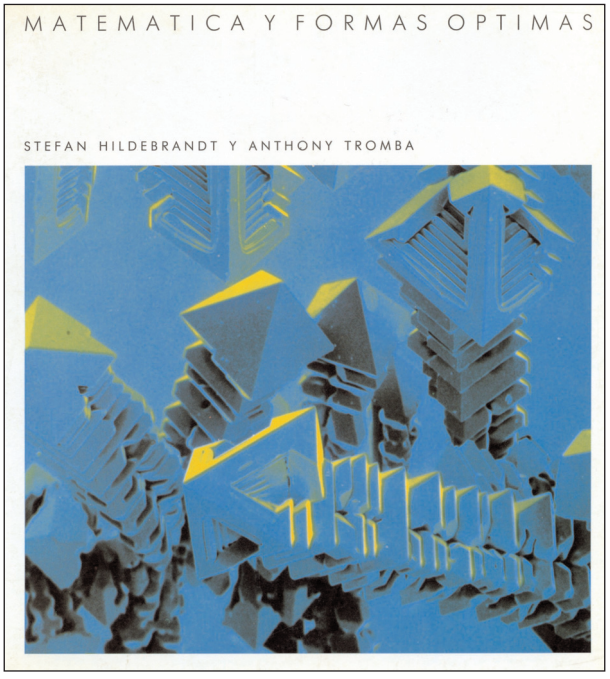
Y en mi opinión no exagera.

La Naturaleza no tolera la ineficiencia. Y la eficacia está marcada por unas leyes físicas y matemáticas que todo ser vivo que pretenda perdurar tiene que respetar. ¿Puede un pino crecer indefinidamente?, ¿cuál es la altura máxima que puede alcanzar? No parece un problema matemático sino biológico y sin embargo lo es, por cierto, fue resuelto por Euler y Lagrange hacia 1777. La magnitud, el tamaño es el primer problema matemático de los seres vivos y el tema del segundo capítulo de los diez que tiene el libro. En un viaje de lo pequeño a lo grande, D´Arcy nos plantea reflexiones y soluciones matemáticas a los problemas físicos que tienen que vencer las células, los tejidos celulares, las espinas y los esqueletos para lograr ese nivel de eficiencia natural... En otro capítulo y de una forma atractiva, mediante una presentación histórica nos sumerge en el fabuloso mundo de las espirales y las hélices en la Naturaleza, tanto en el reino vegetal como en el mundo de los moluscos y en las formas de los cuernos de los rumiantes o de los dientes y colmillos de los mamíferos.

El capítulo VIII trata de la relación entre la forma y la eficiencia mecánica. Hace un estudio comparativo entre las estructuras artificiales de puentes, para optimizar las tensiones, con la respuesta natural de los huesos y esqueletos de las más variadas especies animales. En el IX aborda la Teoría de las transformaciones o la comparación de formas relacionadas con un estudio preciso de las deformaciones de los diferentes cráneos de especies relacionadas. En él comencé a entusiasmarme por la matematización de las formas de las hojas y las flores. En el epílogo está la mejor justificación de mi elección de este libro; dice D´Arcy Thompson:

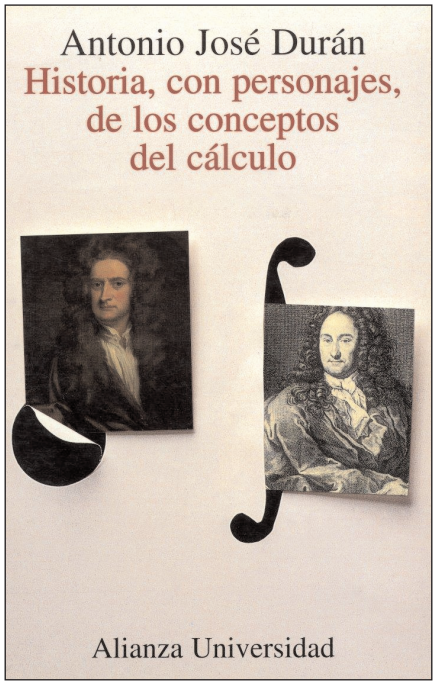
> Y al mismo tiempo he pretendido demostrar al naturalista cómo puede encontrar ayuda y guía en unos cuantos conceptos matemáticos. También he tratado de mostrarle al matemático un campo de trabajo, un campo en el que pocos han entrado y que nadie ha explorado. Aquí podrá encontrar problemas familiares, del tipo de los que suelen poner a prueba la habilidad del matemático y constituyen una grata recompensa para la mente pura por sus triviales asociaciones y su aparente sencillez.
> (...) El número y la Forma manifiestan la armonía del mundo, y el corazón, el alma y toda la poesía de la filosofía natural están inmersos en el concepto de belleza matemática(...).

En 1985 Stefan Hildebrandt y Anthony Tromba realizaron el epílogo perfecto a la obra de D´Arcy Thompson con otro libro que comparte espacio en el mismo anaquel de mi biblioteca, se trata del libro *Matemáticas y Formas Óptimas* de Biblioteca de Scientific American, editado en castellano por Prensa Científica, S.A. en 1990.



Habitualmente un buen alumno se cree casi todo lo que su profesor le dice en clase. Si nuestros alumnos de bachillerato

y de los primeros cursos universitarios hicieran un caso excesivo a la secuencia en que los profesores le van presentado las ideas vertebrales del cálculo diferencial y del cálculo integral acabarían, acaban de hecho, con una visión deformada de la historia del cálculo. En la década de los 90, un libro preciso, precioso, inteligente y al mismo tiempo sensual – si alguien no se lo cree que lea su "delantal" – me abrió los ojos sobre la realidad de la evolución de los conceptos matemáticos y, más importante aún, modificó de forma sustancial y permanente la manera de dar el Análisis a los alumnos de bachillerato. Se trata de *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, de Antonio José Durán, Alianza Universidad, Madrid, 1996.

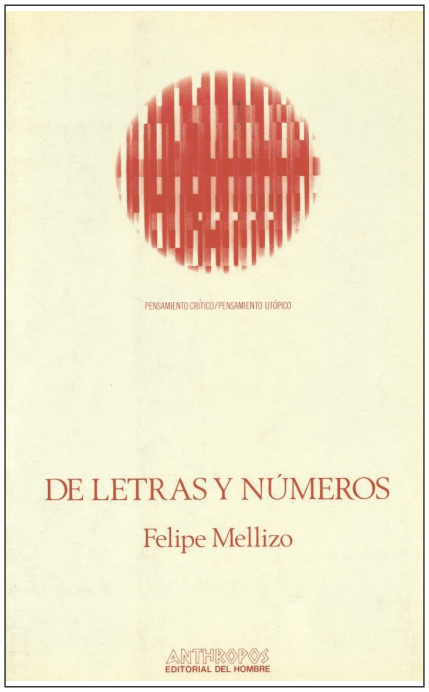


Antonio J. Durán, profeta entusiasta de la importancia de la historia de las matemáticas en la enseñanza en todos sus niveles, se plantea, y lo consigue de forma brillante, no sólo aclarar las peripecias de los orígenes y la fundamentación del cálculo, sino sobre todo mostrar rostros humanos delante y detrás de los conceptos matemáticos, porque como él mismo dice en su particular prólogo:

> Y puesto que las matemáticas son obra del hombre, hemos añadido a la historia de los conceptos, la biografía de los principales matemáticos implicados en su invención y desarrollo. Estos apuntes biográficos [...] servirán para humanizar los propios conceptos. Las matemáticas forman una entidad viva y excitante, pero que a menudo parece fría a quien la estudia; todo esfuerzo para hacerla cálida y acogedora será poco.

Pero el libro no sólo habla de números reales, funciones, límites, derivadas, series...Gracias a él podrás desmontar uno de los grandes bulos del folklore matemático: la ausencia del premio Nóbel de matemáticas. En contra de lo que opina la mayoría de los especialistas en esa especie de Salsa Rosa matemática, no se debe a los celos de Alfred Nóbel y al intento de no beneficiar jamás al amante de su mujer, prestigioso matemático sueco según las malas lenguas... ¡No, imposible!. Nóbel podría tener manía a Mittag-Leffler, pero no por acostarse con su mujer... simplemente por el pequeño detalle de que Nóbel no se casó nunca....

Lecturas ajenas –o no tan ajenas– a las matemáticas en los que éstas jueguen un papel destacado



Dos libros muy distintos y distantes en el tiempo pero ambos muy entrañables.

El primero es un raro ejemplar, *De letras y números*, de Felipe Mellizo, (Anthropos, Barcelona, 1986). Se trata de una recopilación de textos a medio camino entre el ensayo y el artículo periodístico publicados en las revistas más inverosímiles. En ellos Felipe Mellizo realiza unas profundas reflexiones sobre temas filosóficos y científicos, incluyendo las matemáticas, con un toque irónico y un saber renacentista, riéndose sin rubor de los sempiternos voceras, que tanto abundan en nuestro país, del enfrentamiento entre "ciencias" y "letras". Los matemáticos le estamos especialmente agradecidos por algo más que sus originales y documentados artículos de divulgación matemática. Si todos sus proyectos en TVE fueron originales y exóticos –llegó a presentar unos telediarios muy personales y nada ortodoxos o a narrar las aventuras de *Al filo de lo imposible*–, la palma se la lleva sin duda una serie de pro-

gramas de matemáticas titulada *¿Un mundo feliz?*, realizada en 1983 y donde Felipe nos hablaba en la sala de nuestras casas en plena sobremesa de Descartes, de Rey Pastor o Bertrand Russell, de las geometrías no euclídeas, de la Teoría de las Catástrofes o del Álgebra de Boole. La primera vez en la historia que TVE incluía en su programación una serie completa de divulgación matemática.

Como muestra del espíritu de sus artículos y sus programas de televisión sobra con esta cita:

> Alguna vez he dicho que, o cualquier otra afirmación de esa índole, son poemas expresionistas en los que la emoción no está omitida, sino reducida a su más vertiginosa y significativa brevedad. La "notación" matemática y la vasta simbología de la química o la física constituyen, por sí mismas, una rama poderosa y atractiva de la historia de la expresión literaria.[...]. Pueden llegar a cimas de belleza.

El otro es una extraña y conmovedora novela que se ha convertido en dos años en un éxito mundial: *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, Ediciones Salamandra, Barcelona 2004 [ver también la subsección 'En campo ajeno'].

El protagonista es un joven alumno de un centro de educación especial, con una discapacidad psíquica que le dificulta el trato con otras personas, y moverse fuera de su casa y su calle y le hace ver la realidad bajo un prisma muy especial. La aparición del perro de su vecina asesinado una noche le coloca en la situación de hacer de detective al más puro estilo inglés para desentrañar el misterio. Su afición a las matemáticas y a aplicar una lógica formal aplastante en las situaciones cotidianas le meterán en auténticos problemas, aunque también le ayudarán a salir de ellos.

Una hermosa reflexión sobre el sentido común, la percepción y la interpretación del mundo que nos rodea.

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas y que hayas incorporado a tus referencias vitales?

Soy un enamorado de las citas, al menos de las literarias. Me parecen pequeñas píldoras que presentan en pocas palabras una forma de entender la vida. Y he descubierto y utilizado en mi vida un buen número de citas que tienen que ver con las matemáticas. De hecho en mi serie de TV *Más por menos* cada uno de los programas se introducía con una cita matemática.

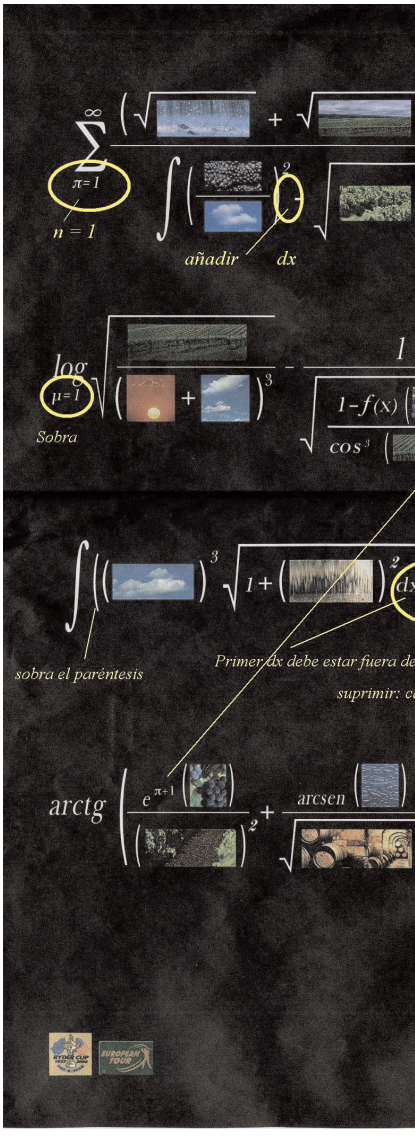
Seguramente la que más ha impregnado si no mi vida al menos sí mi práctica docente ha sido esta de G. H. Hardy, en su *Apología de un matemático*, (Nivola, Madrid, 1999).

> Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser hermosos; las ideas como los colores o las palabras, deben ensamblarse de una forma armoniosa. La belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay lugar permanente para unas matemáticas feas.

Pienso que es una de las pocas cosas que deberían tener claras todos los profesores y sobre todo aquellos que se ponen a elaborar currículos de matemáticas que luego van a sufrir miles o millones de jóvenes.

Señala alguna afirmación chocante referida a las matemáticas en tus lecturas

Curiosamente no se trata de un texto. Es un anuncio de un prestigioso vino que apareció el 25 de septiembre de 2005 en El País y después en alguna revista especializada. La idea, desde el punto de vista publicitario, era fabulosa y además, cosa rara, dejaba en un buen lugar a las matemáticas.



El anuncio sugiere que utilizando las matemáticas, en forma de una serie de fórmulas aplicadas a los elementos naturales: el sol, la tierra, el agua, la viña... que permiten la elaboración de un buen vino, el vino se convierte en perfecto. Por fin, una aparición pública de la excelencia de las matemáticas aplicadas a un objeto tan sensual como un vino reserva de 2001.

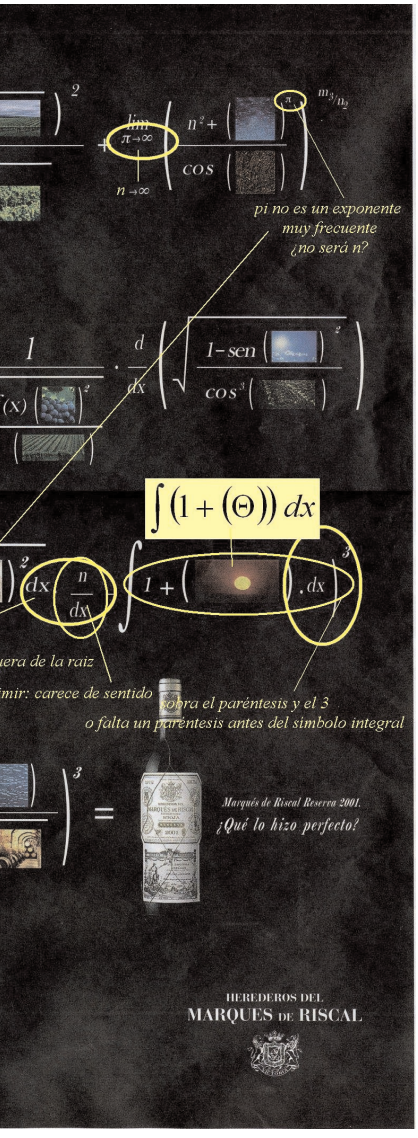
Por desgracia los publicistas no eran matemáticos, ni consultaron con ninguno, pues el anuncio contenía un buen número de errores de *ortografía* matemática.

Tengo que reconocer la fabulosa respuesta de los responsables de las bodegas. Porque me puse en contacto con ellos y para mi sorpresa, no solo acogieron bien mi crítica sino que me propusieron, al principio, que les marcara los errores para proceder a corregirlos y, al final, tras un intercambio de correos con gráficos como éste, proponer los cambios en el anuncio. Así, sin perder su sana

intencionalidad de dejar en buen lugar al vino y a las matemáticas, quedó libre de componentes extraños.

El último libro destacable que he leído sobre matemáticas...

Es un libro ligero, 175 páginas, que en 65 capítulos a guisa de pequeños flashes de un par de páginas, nos hace viajar, como si de un anuncio televisivo se tratara, por la historia de las matemáticas hasta la demostración de Wiles del Último teorema de Fermat. En él desfilan Fermat y Wiles, pero también se asoman a sus páginas desde los babilonios y la tablilla Plimpton 322, pasando por Pitágoras, Arquímedes, Diofanto, Al-Khuwarismi, Fibonacci, Euler, Gauss, Sophie Germain, Dedekind... hasta Weil, Shimura, Taniyama, Ribet, Frey, Flach, Katz... y todos salpicados con nociones sobre funciones periódicas, ideales, formas modulares, curvas elípticas...



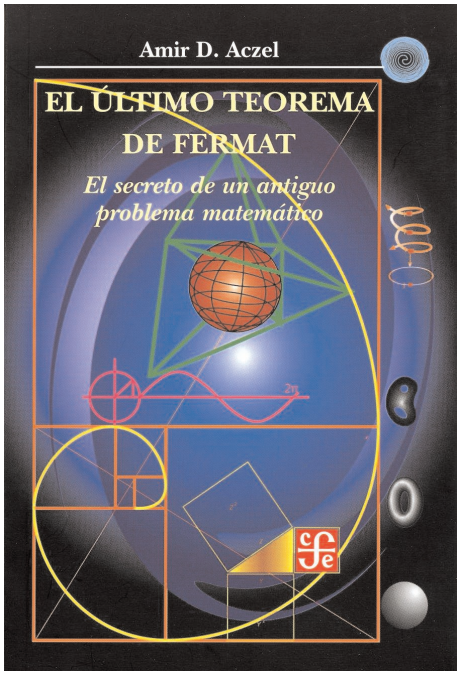
Se trata de El *Último Teorema de Fermat. El secreto de un antiguo problema matemático*. De Amir D. Aczel, (Fondo de Cultura Económica, México, 2003), editado en inglés en 1996 aún caliente la demostración de Wiles.

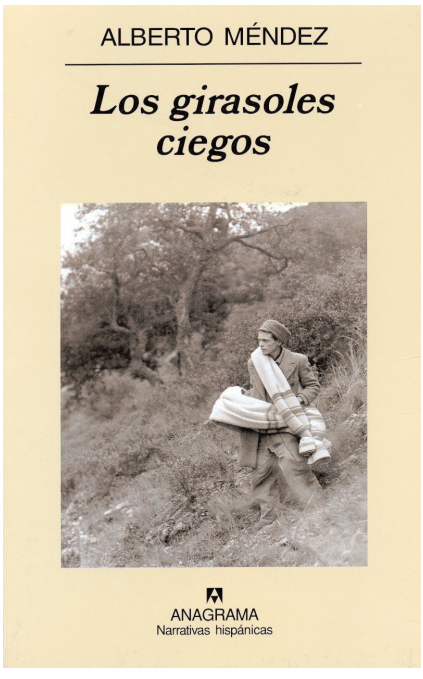
Al final no conocerás la demostración pero habrás realizado un espléndido viaje vertiginoso por las ideas matemáticas y los personajes que de una u otra forma han participado en el reto más famoso de la historia de las matemáticas. Y hablando de citas, no tiene desperdicio la de Andrew Wiles con la que comienza el libro:

> Tal vez la mejor manera de describir mi experiencia de hacer matemáticas sea comparándola con la exploración de una mansión a oscuras. Entras en la primera habitación, que está en tinieblas. Avanzas dando traspiés y tropezando con los muebles, hasta que poco a poco, te familiarizas con la ubicación de cada uno. Por fin, al cabo de unos seis meses, encuentras el interruptor y enciendes la luz. De pronto todo se ilumina, y puedes ver con exactitud dónde estabas. Y entonces entras en la siguiente habitación oscura...

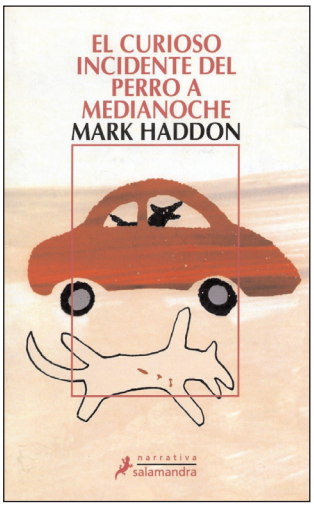
Mi último libro no matemático destacable

Los girasoles ciegos, de Alberto Méndez (Anagrama, Barcelona 2004). Son cuatro historias breves, cuatro derrotas como las titula el autor, ya fallecido, que tiene lugar entre los años 1939 y 1942. Cuatro relatos impresionantes, que contaron en voz baja, como indica la contraportada, narradores que no querían contar cuentos sino hablar de sus amigos, de sus familiares desaparecidos, de ausencias irreparables. Historias de tiempos de silencio obligado y de miedo. Un libro emotivo que va directamente al corazón y a la memoria. Imprescindible en esta época de revisionismo interesado de nuestra historia por parte de algunos. Un libro que en voz baja, casi desde el silencio dispara las alarmas contra la crispación, la intransigencia, el grito y el insulto que últimamente tanto proliferan en nuestras latitudes. ■





En campo ajeno



El curioso incidente del perro a medianoche
Mark Haddon
Ediciones Salamandra
Barcelona 2004.
ISBN 84-7888-910-8
272 páginas

Todos nosotros conocemos a colegas y quizás más fácil es que hayan sido profesores nuestros (tal vez algunos de nuestros conocidos piensan eso de nosotros) bien dotados para las matemáticas, pero no tanto para los demás aspectos de la vida, en los que pueden llegar a ser auténticos desastres cuando no nulidades perfectas. Personas con una perplejidad total en cuanto se les saca de la perfecta armazón de las matemáticas, en la que vislumbran cosas que no vemos el común de los mortales. De tal manera que esos estereotipos del matemático despistado (que tan bien retrata Polya en su *Cómo plantear y resolver problemas)* para buena parte de los que se tropiezan con ellos fuera del terreno profesional son algo así como un ACNEE (por utilizar el término políticamente correcto).

Pues un personaje así, pero adolescente y catalogado y encuadrado en la categoría de los auténticos acnees es el tierno imaginario protagonista y narrador del libro que nos ocupa (ver también la sección 'Mi biblioteca particular' de este mismo número), que además es un apasionado cultivador de las matemáticas, territorio en el que es brillante y no se siente agredido, al contrario de lo que le sucede en el resto de los aspectos de la vida:

> El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las mate-

El protagonista podría ser el perfecto alumno, capaz de saber los más abstrusos e inútiles conocimientos académicos, pero no es capaz de relacionarse de forma normal *con quienes le rodean. Aunque desde su punto de vista siempre por razones claras y nítidas.*

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

> máticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir era que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas.

Pero no todas las matemáticas son así, incluso hay partes que son como metáforas de la realidad:

> Los números primos son lo que queda después de eliminar todas las pautas. Yo creo que los números primos son como la vida. Son muy lógicos pero no hay manera de averiguar cómo funcionan, ni siquiera aunque pasaras todo el tiempo pensando en ellos.

El protagonista podría ser el perfecto alumno, capaz de saber los más abstrusos e inútiles conocimientos académicos, pero no es capaz de relacionarse de forma *normal* con quienes le rodean. Aunque desde su punto de vista siempre por razones claras y nítidas. Y ahí reside otro de los atractivos de la novela: la visión de la 'anormalidad' no se hace desde fuera, desde los ciudadanos normales que se encargan de ellos (los padres o familiares próximos, a quienes habitualmente conocemos y que tanta pena nos dan), sino desde el punto de vista también muy padecido del diferente. Lo que nos hace conocer y entender mejor que ellos también sufren, porque se trasgreden sus reglas, incluso cuando se dice que se respetan por los adultos, por los que creen e intentan quererles bien.

Y todo ello con un aroma de verdad que debe provenir del trabajo y la relación del autor con personas con deficiencias físicas y mentales, que le ha hecho conectar con lectores de todo el mundo. Y también en nuestro país, donde se han realizado ocho ediciones en los ocho primeros meses de su lanzamiento (y el libro continúa vivo). Y que nos sirve para cuestionarnos muchas seguridades, y para mirar de otra forma a los diferentes que nos rodean (y que a poca atención que pongamos veremos que todos somos diferentes en uno u otro aspecto).

Puesto que estamos en una revista de enseñantes, señalar que también proporciona algunos conocimientos y puntos de vista matemáticos interesantes, que no sólo nos servirán como personas, sino también en nuestras clases. Me permito señalar tres. En primer lugar (pg 92) una cercanía con el cálculo mental:

> —¿Cuánto es 251 por 864?
>
> Y lo pensé y contesté:
>
> —216.864— porque era un cálculo realmente fácil, porque sólo hay que multiplicar 864×1000 que da 864.000. Entonces lo divides por 4 que da 216.000 y eso es 250×864. Entonces sólo hay que sumarle otro 864 para conseguir 251×864. Y eso da 216.864.

En segundo lugar aparece el problema de 'Los soldados de Conway' (pg. 181-183), un bonito juego que nos permite ver que no siempre hay regularidades en todas las situaciones, aunque los humanos (y más los 'deformados' por las matemáticas) las veamos hasta donde no existen. Y por fin una sugerente explicación del problema tan poco evidente que él llama de 'Monty Hall' (pp. 87-90): el del concursante de TV que tiene una puerta elegida entre tres posibles una sola de las cuales tiene premio; el presentador le abre otra que no tiene premio y le pide si quiere seguir con la puerta que ya eligió o cambiar a la tercera puerta. Como se sabe, aumentas tu probabilidad de tener premio cambiando de puerta.

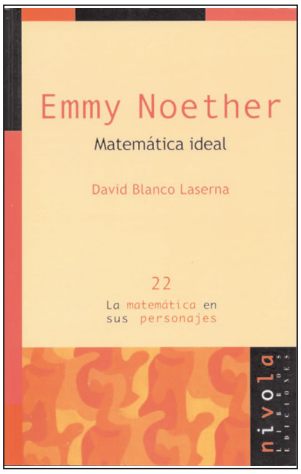
Puesto que estamos en una revista de enseñantes, señalar que también proporciona algunos conocimientos y puntos de vista matemáticos interesantes, que no sólo nos servirán como personas, sino también en nuestras clases.

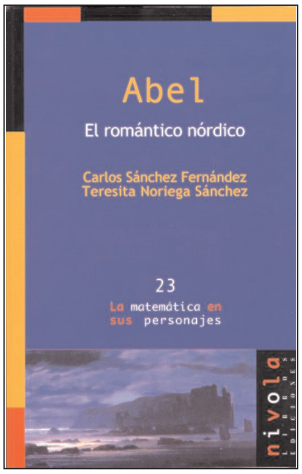
Y acabamos con una profunda reflexión sobre el tiempo y el espacio.

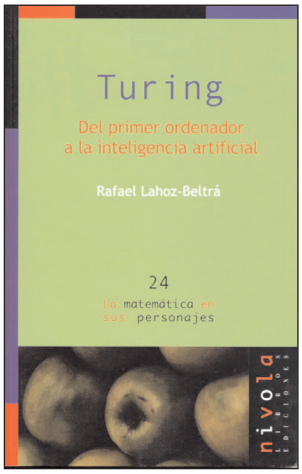
> Porque el tiempo no es como el espacio. Cuando dejas algo en algún sitio, como un transportador o una galleta, puedes tener un mapa en la cabeza para decirte dónde lo has dejado, pero incluso aunque no tengas un mapa seguirá estando allí, porque un mapa es una representación de cosas que existen en la realidad, así que puedes volver a encontrar el transportador o la galleta. Y un horario es un mapa del tiempo, solo que si no tienes un horario, el tiempo no está ahí como el rellano y el jardín y la ruta del colegio. (...) Y por eso, si te pierdes en el tiempo es como perderse en un desierto, solo que no puedes ver el desierto porque no es una cosa. Y por eso a mí me gustan los horarios, porque son la garantía de que no te vas a perder en el tiempo.

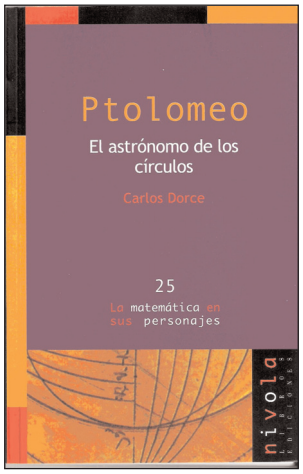
Absolutamente recomendable para cualquiera que tenga algo de humanidad, es decir, para todo el mundo. ■

Escaparate: 25 volúmenes de la colección 'La matemática en sus personajes' de la editorial Nivola









Acaba de aparecer *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*, de Carlos Dorce, que es el número 25 de la colección 'La matemática en sus personajes' de la editorial Nivola, lo que nos da pie a una reflexión sobre la misma y su significación en el panorama cultural y matemático de nuestro país.

Cuando en septiembre de 1999 aparece *Arquímedes. Alrededor del círculo*, el primer número de la serie, estábamos abocados al inicio de Año Mundial de las Matemáticas con su intento, entre otros objetivos, de mostrar que las matemáticas eran parte fundamental de la cultura. Y, en nuestro país, era evidente la falta de biografías asequibles de los matemáticos destacados de la historia, que la colección venía a intentar llenar. Nadie apostaba mucho por su persistencia; incluso hubo agoreros que solo vieron en ella una manera de ganar dinero fácil y rápido con volúmenes elaborados a toda prisa y con poca exigencia científica. Pero poco a poco las nuevas entregas han ido saliendo y seis años después se alcanza un número destacable, superada ya con amplitud la mayoría de edad legal.

'La matemática en sus personajes' en su conjunto tiene una cuidada presentación, moderna y bien ilustrada, que hace de los libros objetos deseables. Encierran un contenido atractivo que enlaza al autor y a su actividad vital y matemática con el resto de los aspectos sociales del lugar y de la época en que se desarrollan. Lo que hace que aparezcan los diferentes biografiados como lo que fueron la mayoría de los matemáticos, y tan mal se ha sabido transmitir: seres de carne y hueso, personas con sus grandezas y sus miserias, progresistas o reac-

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

cionarios, pero imbricados en las preocupaciones de su época, inmersos en los problemas de todos y eso sí, tocados por la varita mágica del genio matemático. O sea que, excepto en la última de las características, homologables a los cultivadores destacados de cualquier otra disciplina intelectual, que aparecen en las series de biografías o en las novelas históricas tan al uso. Por resumir, una colección con unos libros de destacable diseño de continente y de contenidos.

Conforme avanza la colección su valor se refuerza, porque va formando un retablo de referencias históricas y de influencias mutuas entre épocas y personas, aportando una visión global del largo desarrollo matemático. Cada vez más se enlazan unos y otros de los personajes tratados en otros libros anteriores. Por ejemplo, en el de *Abel* se hacen referencias a los de *Galois*, *Cardano y Tartaglia*, *Legendre*, *Euler* y *Lagrange*. Y eso tanto de épocas lejanas –en los que los números 1 y 25 cierran como un círculo– como de los genios más recientes, como Emmy Noether y Alan Turing, que son el 22 y 24 respectivamente.

Y ha permitido sacar a la palestra a una serie de autores hispanos (algunos ya repetidos), sin recurrir al recurso fácil (al menos habitual) de tantas editoriales de traducir libros de otros idiomas, lo que permite una proximidad del autor a las preocupaciones e intereses de los potenciales lectores y una labor de edición de los libros que posibilita la adecuación del producto final. El único traducido (el dedicado a Euler, de W. Dunham) es de una calidad tal que no necesita explicaciones. Sólo queda lamentar que todavía no haya la biografía de ningún matemático hispano, lo que no deja de ser una laguna, que, aunque constate la ausencia histórica de grandes personajes, debería ser llenada por alguno de los de primera fila (que de paso quizás permitiría reflexionar sobre esa carencia). Y aunque sea obvio y tópico hablar de la desigualdad de méritos de unas y otras entregas, que también aquí se dan, hay que desear que continúe con impulsos renovados, rellenando algunas faltas y acercándose a la época actual. En cualquier caso, la persistencia y la regularidad de esta colección es una muestra de que nuestro país entra a pasos agigantados en la normalidad cultural matemática (como lo es que nuestra revista *SUMA* sobrepase con esta vitalidad los 50 números, ¡alguna flor nos tenemos que echar!).

Los últimos números

Emmy Noether. Matemática ideal, de D. Blanco Laserna, es el número 22, y además de acercarnos esa figura fundamental de la matemática más reciente, se abre con una espléndida introducción que hace una panorámica de lo que ha venido significando (y no ha finalizado) ser mujer (y judía) en la historia –general y de la ciencia–, que finaliza con:

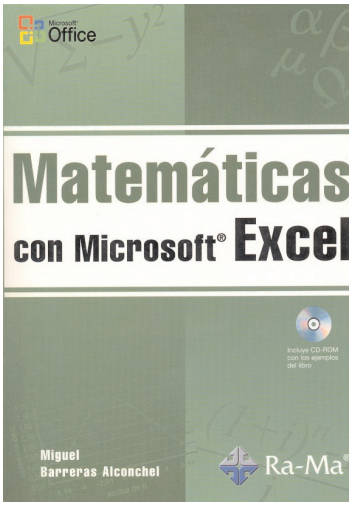
> "(…)pese a que su carácter matemático ha podido revestirla de un cierto incógnito, la obra de Noether constituye, junto al teatro de Brecht, las novelas de Thomas Mann, el cine de Fritz Lang o Billy Guilder, la música de Schönberg o Kurt Weill, o la arquitectura de Mies van der Rohe, una de las más intensas luces de una sociedad que eligió el eclipse. Y como la literatura o el arte de su tiempo, el álgebra de Noether nos enfrenta a una reflexión profunda sobre alguna faceta esencial de nuestra condición humana, es el fruto de una poderosa imaginación y posee una perdurable belleza que enriquece a quien llega a descubrirla.

C. Sánchez Fernández y T. Noriega firman el n.º 23, *Abel. El romántico nórdico*, que inicia el cierre del álgebra clásica que completaría Galois, dando paso a la *matemática moderna*. Además de desarrollar sus aportaciones, hacen hincapié en algo no siempre tenido en cuenta: que los países ricos hoy no lo han sido siempre (ni tienen por qué continuar siéndolo). Así la Noruega de principios del siglo XIX se parecía poco en niveles de bienestar a la puntera nación de nuestros días y en ella tuvo que bregar Abel. Y la riqueza actual permite dotar el Premio que lleva su nombre, cuya memoria intenta perpetuar.

Si hay una persona cuya influencia es universal en nuestra vida de cada día, y del cual no es conocido casi ni el nombre, ese es Alan Turing, a pesar de que haya sido incluso el protagonista (bien que con seudónimo) de películas de éxito como la reciente 'Enigma'. Y es que si se es *diferente* en algún aspecto de la vida (y él era homosexual) es difícil sobrevivir hasta en los sofisticados y tolerantes ambientes universitarios ingleses de la primera mitad del siglo XX. Y como recoge R. Lahoz-Beltrá en *Turing. Del primer ordenador a la inteligencia artificial*, eso le llevó, tras un proceso por su *desviación* y su tratamiento para volverle a la *normalidad*, a una muerte prematura, en 1954, a los 42 años, cuando sus fecundas ideas aún tenían un amplio potencial de desarrollo. Una muestra más de la forma en que muchas patrias pagan el trabajo de sus hijos verdaderamente ilustres.

Pocas teorías han durado tanto tiempo como la de Ptolomeo sobre el movimiento circular de todos los cuerpos celestes: casi quince siglos. Durante los cuales a la vez supone una guía y un corsé que impide romper los movimientos perfectos: los circulares. En *Ptolomeo. El astrónomo de los círculo*, Carlos Dorce nos lleva por los antecedentes y el desarrollo de sus teorías, su influencia en los pensadores posteriores, sobre todo árabes, hasta que la aparición de nuevos instrumentos como el telescopio (de nuevo las matemáticas insertadas en los avatares sociales) puso poco a poco fin a su paradigma, alumbrando nuevas teorías sobre el universo. Y en alguna medida el libro concluye una completa visión de la matemática griega que inauguró la colección con *Arquímedes* y la amplió con *Euclides* (n.º 19). ■

Hoja de cáculo, herramienta para la clase de matemáticas



MATEMÁTICAS CON MICROSOFT EXCEL
Miguel Barreras Alconchel
Editorial RA-MA, 2005
ISBN 84-7897-674-4
241 páginas, incluye CD-ROM

Miguel Barreras es profesor de Matemáticas y desde hace años viene mostrando gran preocupación e interés por el aprendizaje de esta disciplina en el nivel de Secundaria, en el que realiza la mayor parte de su quehacer profesional. Algunos de sus trabajos y propuestas han aparecido en diferentes revistas especializadas y fue galardonado con el premio Ada Byron de coeducación matemática en su edición del año 2003. En la actualidad enseña en el IES de Valderrobres (Teruel).

Este libro, si bien recoge propuestas didácticas dirigidas a alumno de ESO, es deudor de la curiosidad de su autor por extender la aplicación de Excel a una gran variedad de contenidos y muestra su preocupación por ampliar y mejorar el tipo y la complejidad de los problemas a los que uno puede enfrentarse. Por ello, aunque en un primer vistazo puede verse como un curso práctico sobre Excel aplicado al aprendizaje de las Matemáticas y a la resolución de problemas, se trata de mucho más que eso.

Durante los últimos años mucho se ha hablado y escrito sobre los ordenadores como recurso didáctico. Son numerosos los artículos sobre el tema desde una perspectiva más o menos global y desde un punto de vista fundamentalmente teórico. Sorprendentemente –¿o no tanto?– son escasas las publicaciones que llevan el tema hasta su último nivel de concreción y aportan ejemplos prácticos elaborados para resultar de uti-

Lo relamente novedoso es que la validez de la hoja de cálculo como herramienta didáctica en matemáticas no se argumenta con disquisiciones teóricas, sino con gran cantidad de ejemplos prácticos completamente elaborados.

Manuel Sada Allo
IES de Zizur Mayor / Zizur Nagusiko BHI

lidad más o menos inmediata para el aula. En particular de Excel siempre se han pregonado sus enormes posibilidades no sólo para la obtención de resultados sino también como herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

El libro de Miguel y las más de 180 hojas de cálculo distintas que se incluyen en el CD anexo, vienen a demostrar esas posibilidades como no se había hecho hasta ahora en ninguna otra publicación. Este libro puede ser útil para iniciar o afianzar al lector en el uso de las herramientas básicas y avanzadas de Excel (incluso los usuarios expertos pueden descubrir usos insospechados) y por ello se puede describir como un curso práctico. Pero además, la obra presenta la hoja de cálculo como un recurso para potenciar el conocimiento matemático y para facilitar su enseñanza y aprendizaje.

La validez de Excel como herramienta didáctica no se argumenta con disquisiciones teóricas, sino que se demuestra con una gran cantidad de ejemplos prácticos completamente elaborados. Esto es lo realmente novedoso y ahí radica su mayor interés. Cualquiera podría esperar que la mayoría de las aplicaciones prácticas de Excel correspondan a la Estadística, dada la idoneidad de una hoja de cálculo para trabajar con tablas de datos y la facilidad de generar los correspondientes gráficos, o a la Probabilidad, por la sencillez de generar números aleatorios y simular, a partir de ellos, cualquier experimento aleatorio tantas veces como se desee. Pero además, el libro recoge gran cantidad y variedad de temas matemáticos:

- *Aritmética*: desde problemas tratados con las herramientas básicas de Excel hasta otros que incluyen macros y pueden servir al lector de asequible introducción a Visual Basic.
- *Álgebra*: desde resoluciones gráficas de ecuaciones y sistemas de primer y segundo grado hasta problemas de programación lineal, pasando por el trabajo con matrices o problemas de optimación.
- *Análisis*: representación gráfica de no sólo funciones sino también familias de funciones dependientes de un parámetro, interpretaciones gráficas de la derivada, la integral de Riemann, etc.
- *Geometría*: Transformaciones en el plano, Cónicas, Resolución de triángulos...
- *Estadística*: parámetros estadísticos para una distribución unidimensional, distribuciones bidimensionales, correlación y recta de regresión, la binomial y la normal, Ley de D'Hont, etc.
- *Probabilidad*: simulaciones de numerosos y variados problemas, visualización de la Ley de los grandes números, Teorema de Bayes, etc.

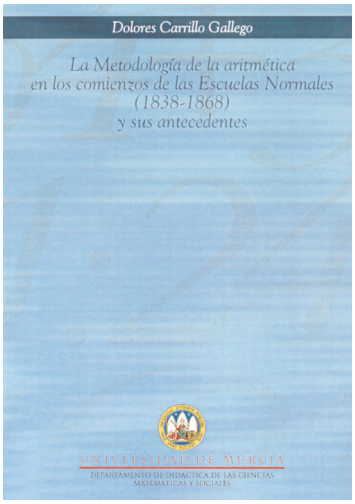
La mayoría de los problemas y ejemplos están tratados a un nivel de Educación Secundaria, pero en la segunda parte se abordan también temas de Matemáticas superiores como las Ecuaciones diferenciales, Teoría de números, Representación de superficies en el espacio, Ecuaciones en paramétricas, etc.

En cada capítulo se explica la elaboración paso a paso de varios ejemplos (resueltos en el CD) introduciéndose, sobre la marcha, el uso de diversas herramientas de Excel (algunas pueden ser novedosas para el lector), con diversas sugerencias, comentarios y reflexiones de interés para los profesores de Matemáticas. Y propone ejercicios, también resueltos en el disco.

Tanto los textos como las hojas de cálculo elaboradas evidencian que la clave para abordar un problema matemático y encontrar estrategias de solución, bajo la perspectiva de una hoja de cálculo, estriba casi siempre en la capacidad de imaginación, antes que en un dominio exhaustivo del programa. En ese sentido, el autor hace todo un derroche de imaginación a la hora de abordar problemas muy diversos, con planteamientos y estrategias sorprendentes, facilitando pequeños (y no tan pequeños) trucos de gran utilidad.

La calidad y variedad de los ejemplos elaborados suponen, además de la constatación de que la hoja de cálculo puede ser idónea para abordar problemas de todos los bloques del currículo, una fuente de ideas y una referencia o modelo a seguir para cualquier profesor de Matemáticas con interés por el uso didáctico de los ordenadores. Algo nada desdeñable pues la escasez de esos modelos o referentes para el profesorado es quizás una de las principales causas de que el aprovechamiento didáctico de las TIC siga siendo una asignatura pendiente para la mayoría de nosotros. En definitiva, un trabajo que hará disfrutar de las Matemáticas al lector y útil para quien haga de él una herramienta para sus clases. ■

La Aritmética en las Escuelas Normales en el XIX



La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes
Dolores Carrillo Gallego
Dpto. de Didáctica de las C. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia.
Murcia, 2005
ISBN: 84-608-0245-0
469 páginas

Esta publicación es la tesis doctoral realizada por la profesora Dolores Carrillo Gallego que fue defendida el 1 de febrero de 2005 y obtuvo la máxima calificación de sobresaliente *cum laude*.

Su trabajo se ha centrado en la Historia de la enseñanza de las Matemáticas. Su contenido ha sido muy valorado, tanto por historiadores de la educación como por profesores de matemáticas, ya que ha incardinado en la historia de la educación la enseñanza de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales y los conocimientos de esta materia que debería tener un maestro para poder impartirla.

En un primer bloque hace un estudio de los antecedentes y comenta distintas leyes y disposiciones que desarrollaron la enseñanza de la aritmética siguiendo el método de la enseñanza mutua y el de Pestalozzi. De ambos se expone el proceso seguido. Se detiene después en el matemático José Mariano Vallejo, autor de textos para todos los niveles educativos.

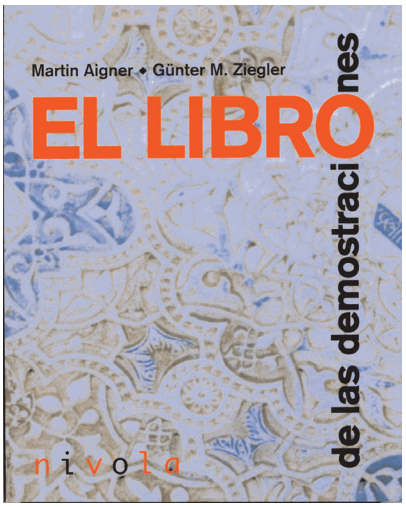
Un segundo bloque va dedicado casi exclusivamente al aspecto legislativo. Se destacan los requisitos para el ingreso (tanto para hombres como para mujeres), reglamento de exámenes y características, para centrarse en los estudios en la Escuela Normal y terminar con un seguimiento más detallado de la aritmética y su metodología en la legislación.

En un tercer bloque, la autora pasa de las leyes al aula. Hace un repaso de profesores de Escuelas Normales, masculinas y femeninas, para después ver el método de enseñanza y pedagogía de Pablo Montesino con una referencia a la aritmética recogida en el *Manual de párvulos* y a su enseñanza, según el Boletín Oficial de Instrucción Pública. También aborda el tratamiento de la aritmética y su enseñanza en otros manuales pedagógicos y por último analiza algunos libros para la enseñanza de la aritmética en las Escuelas Normales. Se completa la tesis, y por tanto el libro, con un capítulo de conclusiones.

La tesis considerada, cuya publicación comentamos, puede ser calificada como muy buena tanto por la importancia del tema como por el grado de innovación y por la metodología seguida en su desarrollo. Los objetivos planteados y las conclusiones obtenidas tienen gran coherencia y en toda la tesis se destaca una abundante bibliografía consultada, una meticulosa aportación de citas y datos, una secuenciación de acontecimientos en distintas provincias, una claridad de exposición, un sentido histórico de lo tratado y una madurez en su exposición. Aporta luz para conocer la enseñanza de la aritmética en el periodo estudiado, tanto en lo referente a los conocimientos necesarios para ser maestros como de los alumnos en periodo escolar. En definitiva, un trabajo amplio, muy detallado, con gran cantidad de material leído, con cientos de anotaciones y con bibliografía amplia y variada.

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia

Las demostraciones del *Libro*



El libro de las demostraciones
Matin Aigner, Gunter M.Ziegler
Editorial Nivola
Madrid, 2005
ISBN 84-95599-95-3
240 páginas

Según Paul Erdos, inspirador de este libro, Dios recopila demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos, en un Libro, con mayúsculas como la Biblia, en el que todos los matemáticos deberían *creer.*

Paul Erdos (1913-1996), prolífico matemático hebreo de origen húngaro, es una de las personalidades más curiosas y excéntricas de las Matemáticas del siglo XX. Dedicó diecinueve horas diarias durante 25 años a la búsqueda de la verdad a través de las matemáticas. No estaba interesado en ningún otro placer de la vida. Célibe, sin trabajo fijo, nómada, viajaba de un continente a otro, de casa en casa… cuando murió su epitafio decía: *finalmente he acabado por ser más estúpido*.

Sus discípulos y colaboradores Martín Aigner y Gunter M. Ziegler, ambos profesores de la Universidad Técnica de Berlín, dedicaron este libro a su memoria en la primera edición publicada en 1998 por Springer-Verlag. Ha sido traducido a un buen número de idiomas y Nivola ha asumido la primera traducción al castellano en junio del 2005. El libro –con minúsculas– pretende revelar una pequeña porción del *Libro* y queda a juicio de cada lector decidir si lo consigue.

Lo esencial de las matemáticas es demostrar teoremas, y por tanto a ello se dedican los matemáticos podemos leer al inicio del capítulo 25. Pero, de entre todas las demostraciones que nutren las matemáticas, ¿cómo definiríamos una demostración merecedora de estar en el Libro del que hablaba Erdos?

Existe una creencia compartida por la comunidad matemática, no siempre explicitada, de lo que es una demostración perfecta. Esta creencia, muy marcada por las ideas de Erdos es la que ha guiado la selección de las demostraciones hecha para el Libro que recoge temas de teoría de números, geometría, análisis, combinatoria y teoría de grafos.

Para empezar, una buena demostración debe **responder a una pregunta** formulada por el investigador y, por tanto, muchos de los capítulos del libro comienzan con una pregunta. Algunas simples: ¿cuántos números primos existen?, ¿qué enteros se pueden escribir como suma de dos cuadrados?, ¿cuántas pendientes diferentes determinan n puntos no alineados del plano? Otras requieren conocimientos previos de los términos utilizados: ¿puede siempre encontrarse una partición en a lo sumo $d+1$ partes de menor diámetro de cualquier conjunto acotado de $\mathbf{R}^d$?, ¿cuál es el tamaño de la anticadena más grande de un conjunto de n elementos?, ¿en qué condiciones puede completarse un cuadrado latino parcial para obtener un cuadrado latino del mismo orden?, ¿cuál es la tasa máxima de transmisión para que el receptor de un mensaje a través de un canal pueda recuperar el mensaje sin errores? Erdos también tenía sus preguntas favoritas: ¿existen dos números divisores uno del otro en cualquier subconjunto de $n+1$ elementos del conjunto $A=\{1, 2, 3, 4, \ldots 2n\}$?

Elena Gil
Colegio Sagrado Corazón, Zaragoza

La respuesta a esta pregunta es mejor cuánto más **sorprendente, asombrosa e inesperada** sea. ¿No es inesperada la fórmula de Euler que relaciona los vértices, aristas y caras de un grafo finito en el plano?, ¿o que el conjunto de los números racionales sea tan numerable como el de los enteros a pesar de parecer mucho más grande?, ¿o que la probabilidad de que una aguja caiga en una posición tal que corte una de las líneas de un papel pautado tenga que ver con el número π? ¿o todas las identidades inesperadas que aparecen cuando estudiamos la teoría de los productos infinitos? ¿o que haya teoremas que se cumplen en el mundo finito que dejan de hacerlo cuando nos trasladamos al infinito? Sorprendentes son siempre las afirmaciones que los matemáticos llaman lemas, aplicables a gran variedad de circunstancias y a problemas sin conexión aparente.

Para que un resultado y su demostración sean valorados por los matemáticos por encima de otros, debe ser **simple**, **sencilla**, **elemental**, **elegante**. Simple es el resultado de la suma de la serie de Euler:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

y elegantes algunas de sus demostraciones que han pasado a la historia de las matemáticas. Resultados profundos como alguno atribuido a Polya, o la fórmula de Cayley se pueden demostrar de forma asombrosamente simple si se combinan ingeniosamente las ideas adecuadas. Encontrar un contraejemplo explícito, puede ser una forma sencilla de refutar una conjetura, como hizo la matemática A. Nilli con la conjetura de Borsuk. Asociar la elegancia a la brevedad es propio de las matemáticas y por ello en el Libro estos dos conceptos aparecen casi siempre unidos: puede bastar media página para demostrar que π es irracional; se valora la demostración corta y elegante de cuál es el tamaño de la anticadena más grande de un conjunto de *n* elementos; se muestran modelos elegantes sencillos y naturales para estudiar una mezcla por imbricación.

Pero lo que realmente comparten todos los teoremas y demostraciones del Libro es que son **bellas**, **bonitas**, **hermosas**, **preciosas**... adjetivos que no son ajenos a ningún conocedor de las matemáticas, pero que pueden resultar sorprendentes para las personas que no se dedican a ellas.

Puede ser bonito saber que cualquier anillo de división finito es conmutativo. Cualquier matemático encuentra bellas y singulares *aquellas maravillosas desigualdades* de las que habla el Libro (Cauchy-Schwarz, relación entre la media armónica, geométrica y aritmética...). Es un placer intelectual pero también estético descubrir fórmulas que involucran funciones elementales como:

$$\pi\cot\pi x=\lim\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$$

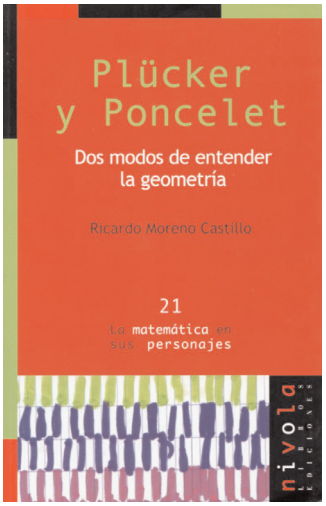
Se puede vibrar con la belleza de la fórmula de Cayley (*hay* n^{n-2} *árboles etiquetados diferentes con* n *vértices*) y algunas de sus demostraciones –hasta cuatro igualmente bellas muestra el libro–.

Algunas de las demostraciones que aparecen son clásicas. Otras son pruebas nuevas y brillantes de resultados clásicos. Tampoco faltan resultados recientes. Muchas de ellas utilizan el principio de inducción, forma privilegiada que tienen las matemáticas para formalizar una generalización hecha a partir de casos particulares. Mi resultado favorito, de entre los que aparecen en el libro, sería el lema de Sperner. Aúna todas las características que avalan los teoremas elegidos para estar en el Libro: fue descubierto de forma sorprendente por un joven de 23 años en 1928; es un sencillo e ingenioso resultado combinatorio: potente, a pesar de su sencillez, pues de él se pueden deducir teoremas tan importantes como el teorema del punto de fijo de Brouwer. Está, además, acompañado de una bella demostración de no más de veinte líneas.

Una última reflexión. Los autores han intentado que todas las demostraciones "resulten comprensibles para los lectores con un dominio básico de las técnicas y conceptos matemáticos e incluso para los mejores alumnos de Bachillerato". Más de un docente de Matemáticas estará conmigo, en que hay pocos alumnos de Bachillerato de nuestro sistema educativo capaces de entender los resultados y demostraciones de este libro, menos aún de apreciar los motivos por los que se han elegido. Sin embargo, puede ser muy motivador para muchos profesores de Secundaria y Bachillerato, redescubrir que *lo esencial de las matemáticas es demostrar teoremas* y que la capacidad de apreciar la belleza de muchos resultados teóricos y sus pruebas es lo que nos ha hecho a muchos de nosotros amar las matemáticas.

Esta capacidad, como la de disfrutar con la música o con el arte, no son innatas y nuestra responsabilidad de docentes es ayudar a los alumnos a crecer aprendiendo a combinar ideas lógicas, es decir aprendiendo a pensar. Conseguir vencer su sordera para las matemáticas es nuestro reto y este libro nos muestra un camino. Suscitar preguntas interesantes, no rutinarias. Asombrar siempre con las respuestas. Huir de los cálculos farragosos que impiden ver las ideas brillantes utilizando si es necesario los medios tecnológicos a nuestro alcance. Valorar, no sólo la potencia de las matemáticas en sus aplicaciones, sino fundamentalmente su belleza intrínseca como construcción del pensamiento humano. Y finalmente, ¿por qué no? Mostrar las matemáticas como una forma de acercarse a Dios, supuesto autor del Libro de Erdos.

Hacia la geometría proyectiva



PLÜCKER Y PONCELET.
DOS MODOS DE ENTENDER LA GEOMETRÍA
Ricardo Moreno Castillo
Nivola
La matemática en sus personajes/21
Madrid, 2005
ISBM 84-95599-92-9
122 páginas

La colección *La matemática en sus personajes* de la Editorial Nivola, nos propone un viaje a través del tiempo, que nos muestra la evolución de las matemáticas de una forma clara y amena.

El libro de *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría,* nos sugiere un paseo hacia la geometría proyectiva, desde los estudios de perspectiva de los pintores renacentistas hasta el siglo XIX, época en que la geometría impregna toda la matemática y *la geometría proyectiva es toda la geometría* (Cayley). Sus protagonistas son Jean-Victor Poncelet (1788-1867) y Julius Plücker (1801-1868) como abanderados de los dos bandos, sintético y algebraico, en que se fragmentaron los geómetras de la época.

Los métodos cartesianos, permitieron prescindir del uso de figuras y agrupar en una misma ecuación entes geométricos diferentes. Se logra con ello un carácter abstracto y general que atrajo la atención de numerosos matemáticos a lo largo del siglo XVIII, de manera que el desarrollo y consolidación de la geometría analítica, como rama independiente de las matemáticas, se basa en el uso de las coordenadas cartesianas. Estos métodos presentan, sin embargo, algunos inconvenientes: el desarrollo de los cálculos se hace a veces penoso y poco intuitivo; por ello se acabó generando una reacción en contra que propició el impulso de los métodos sintéticos –donde el empleo de las coordenadas llegó a ser considerado una deshonra (Bourbaki)–. *Pero la geometría analítica también podía ser útil a la geometría proyectiva, de modo que ésta albergó en su seno la brecha entre los reticentes y los entusiastas de aquella. En el siglo XIX casi no había geómetra que no estuviera adscrito a uno de los dos bandos.* (R. Moreno).

El autor es el profesor Ricardo Moreno Castillo, licenciado en filosofía y matemáticas, que imparte esta última disciplina en el instituto Gregorio Marañón de Madrid y en la Universidad Complutense. Sabemos de su interés por la historia de las matemáticas –en la misma colección podemos encontrar otros dos libros suyos– y de su preocupación por la didáctica de la matemática –mi primer contacto con su obra, fue la lectura de un interesante y esclarecedor *Panfleto antipedagógico* que circula por la Red.

Tanto su formación matemática como filosófica se encuentran reflejadas en este libro. Así encontramos, un boceto de la evolución de la geometría proyectiva, a través de teoremas y propiedades enlazados lógicamente con una visión platónica e internalista de la ciencia. Se trata también de un texto de geometría, en mi opinión dedicado a un público con una formación matemática, a caballo entre la enseñanza media y la universidad, que debe leerse con calma, atención, y con la

José Javier Escribano Benito
IES Valle del Cidacos, Calahorra

regla y el compás a mano o, si se prefiere, con algunos de los nuevos programas de ordenador. En todo caso, el esfuerzo merece la pena, ya que el texto recoge una serie de resultados atractivos para todos los que gustamos de *una ciencia nacida del arte que resultó ser ella misma un arte* (Kline).

El libro, consta de 122 páginas y está estructurado en siete capítulos, cuyo contenido pasamos ahora a describir:

Índice:

Introducción
1. Algunos preliminares geométricos
2. Los orígenes de la geometría proyectiva
3. Poncelet y la geometría proyectiva sintética
4. Plücker y la geometría proyectiva analítica
5. Las curvas algebraicas en el siglo XVIII
6. Plücker, Poncelet y las curvas algebraicas
7. Algunas curvas algebraicas notables
Bibliografía

El capítulo uno, *Algunos preliminares geométricos*, se justifica dado el carácter divulgativo de la obra. En él se resumen algunos resultados geométricos básicos y los teoremas de Menelao y de Ceva, que permiten demostrar numerosas propiedades de tipo proyectivo.

En el capítulo dos, Ricardo Moreno señala como núcleo de la geometría proyectiva, los esfuerzos de los pintores del Renacimiento (Brunelleschi, Alberti, Durero...) para representar el espacio sobre una superficie plana. También destacan las aportaciones de Desargues: la adición de un punto impropio común a todas las rectas de un mismo haz de rectas paralelas, el teorema de los triángulos homológicos, el de invarianza de la razón doble en las proyecciones y la posibilidad de estudiar las cónicas de forma unitaria. Del mismo modo, menciona el teorema del hexágrama místico de Pascal y un teorema de Phillippe de La Hire, dos de los escasos seguidores de Desargues. Así, queda descrito el escenario para que en él irrumpan los dos protagonistas de la obra.

El tercer capítulo está dedicado a los defensores de la geometría sintética. En él, se describe brevemente las ideas que sustentan la obra de Poncelet (*homología, principio de continuidad* y *principio de dualidad*) y los esfuerzos de Steiner, Chasles y Von Staudt por desarrollar la geometría proyectiva, sin hacer ninguna referencia a consideraciones métricas.

Después de hablar de los que hicieron progresar la geometría proyectiva con métodos sintéticos, les toca el turno a los que lo hicieron usando procedimientos analíticos: Möbius y Plücker. A Möbius se debe la introducción de las coordenadas baricéntricas –que, como todas las coordenadas homogéneas son independientes de todo concepto métrico y, por tanto, adecuadas para tratar problemas proyectivos– y el concepto de correspondencia biunívoca o transformación de un plano o un espacio en otro y, en particular, el de colineación, única que conserva las relaciones gráficas, ya que no altera la incidencia o pertenencia.

Plücker introdujo un sistema de *notaciones abreviadas*, que simplifica los cálculos algebraicos, y un sistema de coordenadas homogéneas, más manejable que el creado por Möbius, que permite incorporar los puntos del infinito y las rectas que pasan por el punto límite. El propio Plücker extendió las coordenadas homogéneas al campo complejo y resaltó la importancia de los puntos cíclicos. El capítulo termina con un esbozo del modelo para la geometría proyectiva propuesto por Klein.

Los tres últimos capítulos, están dedicados al estudio de las curvas algebraicas. En el primero de ellos, se introducen las curvas algebraicas desde el punto de vista de la geometría analítica del siglo XVIII, para poder entender lo que hicieron después Plücker y Poncelet con ellas en el siglo XIX. Este quinto capítulo se centra fundamentalmente en el estudio de la clasificación de las cúbicas con coeficientes reales establecida por Newton en 1704, lo que da pie para introducir algunos conceptos fundamentales como diámetro, puntos singulares, inflexión, asíntotas, polar...

El capitulo sexto, que exige una formación matemática del nivel de un primer curso de facultad, aborda las curvas algebraicas con métodos proyectivos. En él podemos encontrar, entre otras cuestiones, el concepto de curva dual, de hexiano y las fórmulas de Plücker para clasificar curvas algebraicas.

El libro se cierra con un capitulo, dedicado a mostrar una serie de curvas algebraicas notables. Algunas, como la cisoide de Diocles o el astroide, son muy conocidas; otras, como la cuártica de Durán Lóriga, no lo son tanto. Pero todas, son particularmente atractivas. Tal vez si las incluyéramos en los programas de bachillerato, al conocerlas algún joven pudiera hacer suya la cita de Bertrand Russell con la que comienza el libro:

> Jamás había imaginado que pudiera haber algo tan delicioso en el mundo. ■