

Jakob Bernoulli: La geometría y el nuevo cálculo

Hace 300 años, moría en Basilea, el 16 de agosto de 1705, Jakob Bernoulli, el primero de una familia de científicos que había regentado ininterrumpidamente la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea durante 105 años, mientras que, en el total de cátedras, la Universidad siempre había contado con algún representante de la familia durante un cuarto de milenio, hasta mediados del siglo XX.

Los Bernoulli procedían originariamente de los Países Bajos. Se trataba de una familia protestante dedicada al comercio que se vio obligada a escapar de la persecución religiosa española. Después de pasar por Frankfurt, un tal Jakob Bernoulli se estableció definitivamente en Basilea, en el año 1622. Su hijo Nikolaus, que se había casado con la hija de un comerciante suizo, era padre de una familia numerosa, entre cuyos hijos se contaban Jakob y Johann, los dos matemáticos más eminentes de la familia y de los más influyentes en la Matemática del siglo XVII.

Jakob había nacido en Basilea, el 27 de diciembre de 1654,. Su padre lo había orientado a los estudios de Teología, cosa que realizaba a disgusto, llegando a graduarse no obstante en

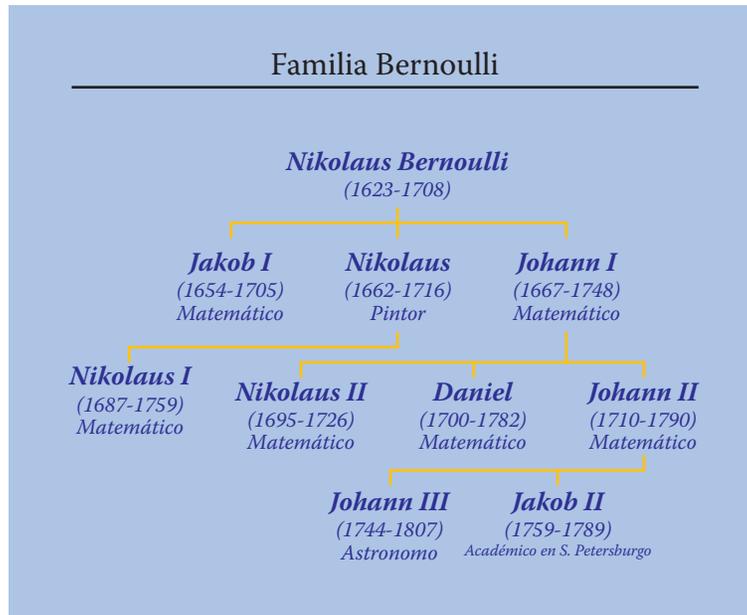


Jakob Bernoulli (1654-1705)

1676. Durante todo este tiempo se dedicaba, en secreto y de forma autodidacta, al estudio de las matemáticas, la física y la astronomía, que es lo que verdaderamente constituía el centro de sus intereses.

De 1676 a 1682 viajó por Suiza, Francia, los Países Bajos e Inglaterra, donde tuvo ocasión de conocer a destacados científicos de la época, como R. Hooke y R. Boyle. Durante sus viajes, comenzó a escribir un cuaderno científico en el que iba anotando todas las ideas que se le ocurrían. Daba clases particulares y entre sus alumnos tuvo a una chica ciega, cuya experiencia le sirvió para escribir el libro *Método para enseñar matemáticas a los ciegos*.

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org



Árbol genealógico de los Bernoulli

A partir de la aparición de un cometa en 1680, elabora y publica en 1681 su primer trabajo científico donde expone una teoría, no totalmente correcta, sobre las leyes que rigen la trayectoria de estos cuerpos, afirmando que su aparición es predecible. Con ello, se opone a la creencia general de la época, según la cual los cometas eran fenómenos de origen divino.

Jakob escribe a Leibniz planteándole algunas cuestiones de su cálculo que los dos hermanos no acababan de comprender, pero Leibniz está de viaje y cuando le contesta, tres años más tarde, Jakob y Johann ya las habían resuelto por su cuenta.

De regreso a Basilea, en 1682, Jakob se dedica intensamente al estudio de sus materias preferidas. Estudia algunas de las obras matemáticas más significativas del momento, como la *Geometría* de Descartes, la *Aritmética infinitorum* de Wallis y las *Lecciones de geometría* de Barrow.

En 1684, contrae matrimonio con Judith Stupan, del cual nacieron dos hijos, una niña y un niño, pero éste no siguió los

pasos de su padre y se dedicó al arte. Fue su hermano Johann el que originó una descendencia más numerosa de científicos.

En 1687, Jakob obtiene la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea, que no dejaría hasta su muerte. Ese mismo año, conoce los dos trabajos de Leibniz, sobre el *nuevo cálculo* (que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral), publicados en la revista *Acta eruditorum*, en 1684 y 1686. Llegados a su conocimiento estos trabajos estudia las ideas de Leibniz, junto con su hermano Johann, trece años más joven que él, estudiante de medicina por consejo de su padre, y al que Jakob había iniciado en los misterios de la Matemática. Escribe a Leibniz planteándole algunas cuestiones de su cálculo que los dos hermanos no acababan de comprender, pero Leibniz está de viaje y cuando le contesta, tres años más tarde, Jakob y Johann ya las habían resuelto por su cuenta. Comienza entonces una colaboración tan fructífera entre los hermanos y Leibniz que en menos de veinte años logra sentar las bases del tratamiento, mediante el nuevo cálculo, de los problemas geométricos y mecánicos.

Parece ser que Johann era más brillante y rápido en dar con la solución de los problemas que se planteaban. Jakob, sin embargo, más lento, procuraba dar mayor profundidad tanto a sus planteamientos como a sus soluciones.

Entre 1689 y 1704, publica Jakob cinco memorias en las que trata de desarrollar en serie determinadas funciones, sin demasiado rigor, al objeto de poder diferenciarlas e integrarlas, calcular sus longitudes y las áreas encerradas por ellas. De este modo, enriqueció notablemente la teoría de series, junto

a Mercator, Gregory, Newton y Leibniz, a los que consideraba como fundadores. Entre otros resultados, consigue demostrar la divergencia de la serie armónica, cosa que, según él mismo señala, había logrado antes su hermano Johann.

Las curvas mecánicas

Uno de los problemas que más ocupaban a los matemáticos del siglo XVII era el de la determinación de curvas. Hasta entonces, se consideraba determinada una curva cuando se podía describir un procedimiento geométrico para construirla, pero el método de coordenadas desarrollado por Descartes y Fermat permitía trasladar el problema al de encontrar su ecuación mediante el uso de los polinomios. De ahí que las curvas correspondientes se denominasen algebraicas. Sin embargo, ya el propio Descartes consideraba importante desarrollar otros métodos que permitieran determinar y estudiar las curvas no algebraicas, a las que él mismo denominó mecánicas. Y precisamente el objetivo de Leibniz con su nuevo cálculo era el de poseer un método general que permitiera abordar el estudio de todo tipo de curvas, incluidas las no algebraicas.

El problema de la catenaria enorgulleció sumamente a Johann que se ufanaba de haber resuelto un problema para el que su hermano Jakob se había mostrado incapaz. A partir de este momento, se origina una rivalidad entre los dos hermanos tan fructífera en el terreno científico como penosa en el ámbito personal.

Es así como Jakob, junto con su hermano Johann, se dedica a ello intensamente. En 1690, Jakob publica en el *Acta Eruditorum* la solución al problema, propuesto por Leibniz en 1686, de la isócrona, esto es, de la determinación de la curva descrita por un móvil que desciende con velocidad constante. En la resolución de este problema, que Jakob reduce a la solución de una ecuación diferencial, aparece por primera vez el término *integral*, en el sentido que le asignamos actualmente como proceso inverso al de diferenciación. El propio Leibniz lo consideró más adecuado que el término *sumatorio*, utilizado hasta entonces.

En ese mismo trabajo, propone Jakob el problema de determinar la forma que adopta una cuerda, flexible y homogénea,

fijada por sus extremos, sometida tan solo a la acción de su propio peso, que es el caso de la forma adoptada por un cable de la luz entre dos postes de la misma altura y sobre terreno llano. Este viejo problema no da lugar a una parábola, como Galileo creía, pues ya Huygens había sido capaz de demostrarlo a los diecisiete años. A raíz del reto formulado por Jakob, encuentra Huygens la solución correcta por métodos geométricos, denominando a la curva resultante *catenaria*. Corresponde a Johann y a Leibniz, sin embargo, resolverlo mediante el uso del cálculo infinitesimal.

El problema de la catenaria enorgulleció sumamente a Johann que se ufanaba de haber resuelto un problema para el que su hermano Jakob se había mostrado incapaz. A partir de este momento, se origina una rivalidad entre los dos hermanos tan fructífera en el terreno científico como penosa en el ámbito personal.

Dentro de este clima de rivalidad entre ambos hermanos, hay que situar el problema de la braquistócrona, propuesto por Johann en junio de 1696 a través del *Acta eruditorum*, como era costumbre en la época. Se trataba de encontrar la curva descrita por un cuerpo que se mueve, entre dos puntos fijos situados a distinta altura, desde el más alto al más bajo, sometido solamente a la acción gravitatoria, en el menor tiempo posible. La solución del propio Johann solo se ajustaba a un caso particular. Jakob, en cambio, lo resolvía por un método capaz de ser generalizado y que contenía en ciernes lo esencial del *Cálculo de variaciones*. Titulaba su trabajo *Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro*:

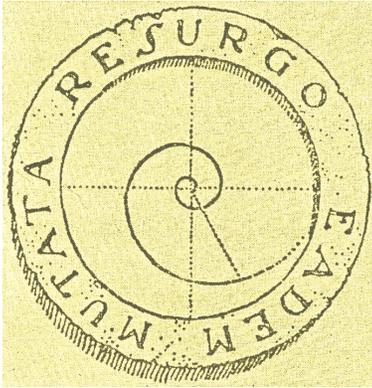
Pero en particular él podría, si desea tomarse la revancha, intentar resolver el siguiente problema general. De entre todas las figuras de igual perímetro sobre la base común BN, determínese la curva BFN que aunque ella misma no contenga la máxima área, en cambio haga que sí la tenga otra curva BZN cuya ordenada PZ es proporcional a una potencia o raíz del segmento PF o del arco BE... Y como es injusto no compensar a una persona por un trabajo que emprenda en beneficio de otra, con menoscabo de su propio tiempo y en detrimento de sus propios asuntos, por eso deseo garantizar a un hombre del que yo salgo fiador, mi hermano, si resolviese el problema –aparte del merecido elogio– una gratificación de cincuenta ducados con la condición de que en el plazo de tres meses a partir de esta publicación prometa intentarlo y presente antes del fin de año la solución por cuadraturas, lo cual es posible.

Por cierto que Johann aceptó el reto y tan solo tres días después comunicaba a Leibniz que no había necesitado más que unos pocos minutos para resolverlo. Sin embargo la solución era errónea. Por su parte Jakob, después de preguntarle repetidas veces si estaba seguro de su solución, a lo que Johann respondía una y otra vez que sí, le demostró su error sometiéndolo a una crítica demoleadora.

La ironía con que se desarrolló este episodio basta para hacerse una idea de cómo estaban las relaciones entre los dos hermanos.

Las espirales

Jakob se sentía especialmente atraído por las espirales. La primera espiral que estudia es la espiral *parabólica*, y es en este estudio donde utiliza por primera vez, de forma un tanto embrionaria, lo que hoy entendemos por coordenadas polares.



Pero la que más llama su atención es la conocida como espiral *logarítmica*. Esta curva aparece en el siglo XVI relacionada con la navegación, debido a su propiedad de equiangularidad, o lo que es lo mismo, a que en cualquiera de sus puntos la tangente a la curva forma un ángulo constante con el radio vector. Analizó Jakob la evoluta de la espiral logarítmica y se encuentra con la sorpresa de que es otra espiral logarítmica. Y no solo eso, ve además que son numerosas las transformaciones que aplicadas a la espiral logarítmica dan como resultado otra espiral logarítmica. Este hecho provocó en él tal admiración que la denominó *spira mirabiles* (espiral admirable) y dejó escrito que la curva fuese

grabada en su tumba con la inscripción *Eadem mutata resurgo* (aún modificada resurjo), como un símbolo de resurrección.

Las probabilidades

La muerte sobrevino a Jakob en 1705, como consecuencia de una tuberculosis, sin haber logrado acabar la que sería su obra más difundida: *Ars conjectandi* (Arte de las conjeturas), que se publicó en 1713, ocho años después de su muerte, por su sobrino Nikolaus I. En la primera parte de esta obra resuelve varios problemas relacionados con el azar para lo cual introduce, entre otras herramientas de cálculo, la distribución binomial, también conocida por ello como distribución de Bernoulli. Al final, en una última parte, introduce, como no era por menos de esperar, el cálculo infinitesimal para tratar de las probabilidades. Así, enuncia y demuestra con rigor el teorema al que Poisson denominó ley de los grandes números. Esta parte, considerada como la más valiosa comienza con cuestiones acerca de la *certeza, probabilidad, necesidad y contingencia de las cosas*. Así, se dice:

La probabilidad no es más que un grado de la certeza y se distingue de ella lo mismo que una parte se distingue del todo.

La aportación de Jakob Bernoulli a la matemática ha sido ampliamente reconocida por toda la comunidad científica de la época, como lo demuestra su elección por la Academia de París, en 1699, como uno de los ocho miembros extranjeros que entraron a formar parte de la misma, junto a Newton y Leibniz, además de su hermano Johann. Por su parte la Academia de Berlín eligió también a los dos hermanos, en 1701, como miembros extranjeros de la misma. ■



Este sello se emitió en Suiza el año 1994 con motivo del Congreso internacional de Matemáticas celebrado en Zurich durante ese año. Reproduce la imagen de Jakob Bernoulli, junto con la fórmula que expresa la Ley de los grandes números y una representación gráfica de las oscilaciones que experimenta la frecuencia relativa de un suceso en torno a la probabilidad teórica del mismo, a medida que crece el número, n , de casos del experimento.