SUMA 51
Febrero 2006, pp. 65-72

iMÁTgenes 22, 23 y 24

Los había de hasta ocho marcas distintas; envasados en vidrio y en plástico; con mayor o menor porcentaje de nata y grasa (normales, semidesnatados, desnatados y 'bio', o sea, con un 0% de grasa, es decir, sin grasa); los había sin azúcar, azucarados y edulcorados; de diferente textura; con sabor a fruta y con trocitos de fruta (fresa, melocotón, plátano, limón, manzana, frutas del bosque, macedonia, piña); otros tenían por fondo una gruesa capa de mermelada (con sabores ya mencionados); otros, en lugar de fruta, llevaban cereales, fibras, bífidus, calcio y algo muy raro llamado 'saciactiv'; los había también con aroma de té; y 'griegos'; y unos especiales para comerse en un par de días como mucho; otros... Mohamed no pudo acabar el inventario. La gama de características de los yogures le parecía infinita.

Mohamed tenía entonces diez años y llevaba poco tiempo en nuestro país. Su madre le había mandado a por yogures y él la había obedecido entusiasmado porque sería la primera vez que haría algo él solo. Nunca había entrado en el supermercado, sólo lo había visto de pasada. Por eso nada más entrar se quedó pasmado por la cantidad y variedad de cosas apiladas en los larguísimos estantes. Tan extensos que formaban pasillos más largos y amplios que muchas calles de su pueblo. ¿Habría compradores para tantos productos?, se preguntó. Tras recorrer la avenida de la pasta y el arroz, justo al doblar la última esquina, se encontró en una calle muy iluminada y gélida. Sus estantes estaban repletos de pequeños envases, cada uno pegado al vecino. Fue entonces cuando comprendió a lo qué se refería su padre cuando en casa le oía hablar de La Vía Láctea. Se refería a la calle mayor del supermercado, la de los yogures.

Su madre le había dado el dinero, pero no le había dicho qué yogures quería. Tendría que elegirlos él. ¿Pero cuál escoger? ¿De qué marca? ¿Qué era el bífidus? Decidió escoger al azar porque estaba convencido de que si lo hacía a su gusto no acertaría con lo que quería su madre y ésta se lo recriminaría. 'El azar es inocente', pensó.

Cerró los ojos y empezó a dar vueltas sobre sí mismo. Sus brazos fueron abriéndose hasta que su mano golpeó algo, un abrigo, cuyo dueño le espetó palabras de las que sólo comprendió las últimas: '... a tu país!'. Eso le hizo detenerse, pero mantuvo los ojos cerrados. Dio unos pasos hacia donde se oía menos barullo y extendió la mano derecha. Las puntas de sus dedos rozaron algo y lo palpó. Con los ojos aún cerrados percibió una forma cilíndrica de cuyo tacto duro y frío se imaginó un yogur en frasco de cristal. Lo agarró y tiró de él, pero no se movió. Al abrir los ojos vio que su mano asía la columna metálica del estante. Su elección aleatoria no había tenido éxito. ¿Por qué aquí las cosas más simples resultaban tan complicadas? En su pueblo sólo había un tipo de yogur. El problema se reducía a tomarlo o dejarlo.

Diez años después, Mohamed está sentado en un aula de la facultad de Matemáticas. El profesor habla del problema de elegir un elemento de un conjunto infinito. Mientras escucha, Mohamed se acuerda de La Vía Láctea de los yogures, un conjunto finito, pero tan grande y él tan pequeño entonces que la situación vivida le resultaba muy parecida a aquella de la que hoy les habla el profesor. Piensa que no es lo mismo elegir que seleccionar. La selección es exclusiva y para realizarla es preciso conocer bien todos los objetos. Cuando nos quedamos con una de varias manzanas porque tiene mejor color o porque posee el grado de madurez que nos gusta, la seleccionamos. Al tomar una sin preocuparnos por nada de eso, la elegimos. A diferencia de la selección, la elección puede hacerse a ciegas, con sólo alargar la mano. Pero, ¿qué mano matemática es la que elige un elemento de un conjunto infinito?

El profesor dice que una solución es confiar el asunto al azar, como hace Godement en su Álgebra (1978, pág. 75), pero ¿acaso el azar no puede ser improductivo? Mohamed se imagina experimentos cotidianos en otros ambientes. Lanzamos una moneda al aire esperando que sus volteretas en el suelo acaben cesando. En su reposo leemos cara o cruz, pero esta es una concepción situada del azar, dependiente del contexto. La gravedad de nuestro planeta limita el suceso en el tiempo y en el espacio haciéndolo finito, haciéndolo posible. Si la moneda se lanzase en ingravidez, ¿cuánto tardaría en detenerse? ¿Se detendría? ¿Qué leeríamos en ella si conceptos como 'arriba' y 'abajo' ya no tienen el mismo significado? Mohamed sabe que hay situaciones en las que el azar es estéril y que quienes le confían sus elecciones las basan, de hecho, en un axioma previo, el de que el azar es fecundo y ofrece siempre resultados.

Miquel Albertí Palmer
imatgenes.suma@fespm.org

En la iMATgen n.º 19 hablé de la más corriente, de la más esencial de las curvas espaciales: la hélice. Su pariente bidimensional, la superficie helicoidal también es de lo más común. En la avenida de la pasta de cualquier supermercado encontrarás hélices empaquetadas, aunque en prácticamente todos los casos figuren bajo el nombre de 'espirales', haciendo referencia al hecho de tratarse de formas retorcidas. La inmensa mayoría son el resultado de retorcer tres cintas unidas longitudinalmente. Los fabricantes Gallo y Dalla Costa retuercen una única cinta o tallarín obteniendo una hélice auténtica (de una sola cinta). Que yo sepa, sólo Gallo las llama así, pero quizá tu, estimado lector o lectora, sepas de otros fabricantes que también lo hagan. Tal vez incluso te las hayas comido.

Marca	*Nombre*	*Cintas en el eje*
Barilla	espirales	3
Ardilla	espirales	2
El Pavo	espirales	3
Gallo	hélices	3
Dalla Costa	fusilli	2
Nomen	espirales	3
Carrefour	espirales	3

La iMATgen n.º 20 hacía referencia a la mirada, al punto de vista, al hecho de ver con un par de ojos y a la zona del espacio de visión tridimensional que se abre delante de nuestro rostro. Tal vez más de uno haya envidiado al camaleón por disponer de ojos tan móviles y, sobre todo, tan independientes. Sí, el camaleón puede girar a su antojo y con libertad casi absoluta cada uno de sus ojos de huevo, pero debemos tener presente que, de acuerdo con el asunto principal de la iMATgen n.º 20, esta independencia va en perjuicio de la visión en tres dimensiones. Una opción podrá ser preferible a la otra, pero en cualquier caso lo que más ayuda a comprender aquello que miramos, lo que nos ayuda a 'ver' realmente lo que contemplamos (me acuerdo otra vez de Miguel de Guzmán) es la posibilidad de contemplarlo en tres dimensiones. De otro modo perdemos perspectiva, profundidad, claridad y no podemos valorar con precisión a qué distancia se encuentran las cosas.

Dos enemigos acechan al camaleón, uno por la izquierda y otro por la derecha. Con sus ojos independientes es capaz de detectarlos. Los ve, pero no sabe cuál de los dos tiene más cerca porque no puede verlos al unísono en el mismo campo visual. El camaleón no puede huir corriendo y alejarse del peligro a toda velocidad. En breves instantes cambia de color, se confunde con el entorno que lo rodea y se disipa en las miradas tridimensionales de quines le acosan.

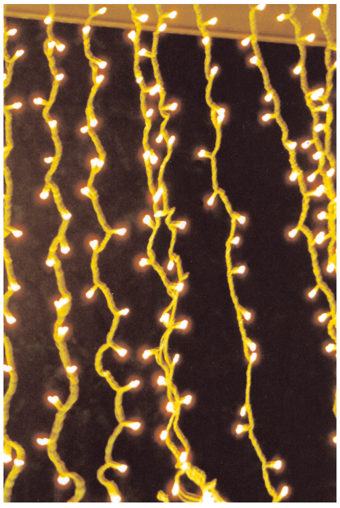
La Fotografía es un arte que, como muchos otros, se basa en una tecnología detrás de la cual se esconden un sinfín de Matemáticas. Una cámara es un artefacto óptico extraordinario construido a partir de sus leyes y de las de la Física. La fotografía de la iMATgen nº. 21 destacaba un aspecto fundamental de toda imagen: el enfoque. Enfocar consiste en separar las lentes a la distancia correcta según nuestro punto de interés, buscar la intersección de un plano, el de la película, con el vértice de un cono, el de la luz que tamiza la lente del objetivo.

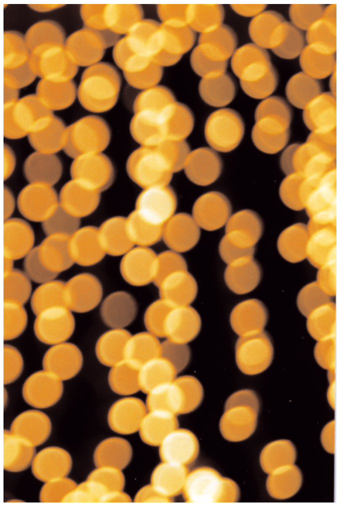
Durante las pasadas navidades las noches de las ciudades se iluminaron con millones de lucecitas en las que pudo apreciarse esa tendencia al círculo del desenfoque.

Si las hélices y las superficies helicoidales constituyen la esencia de las curvas suaves del mundo, el cono es la base de la mirada con la que lo observamos todo. También de lo que leemos, escribimos o dibujamos. ¿Qué sería de las Matemáticas sin la mirada? ¿Puede haber Matemáticas sin luz? De ser así, ¿serían las que conocemos?

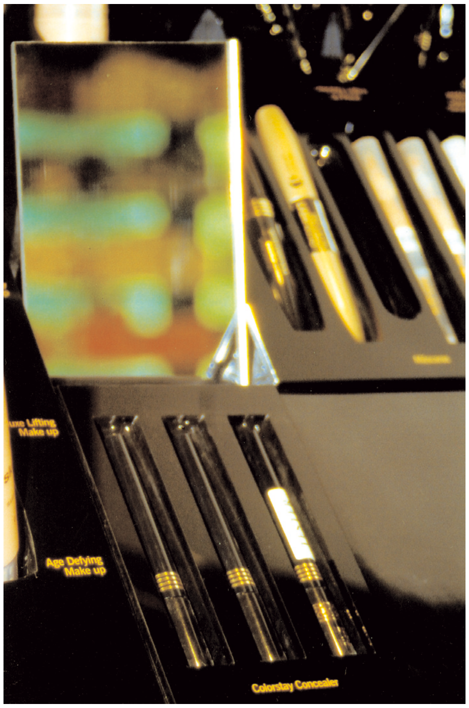
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

GODEMENT, R. (1978): *Álgebra*. Editorial Tecnos. Madrid.





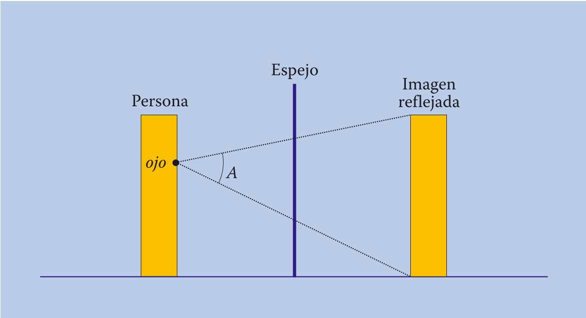
Cada vez que entro en una perfumería me siento aturdido como hice sentir al pobre Mohamed en la introducción a estas tres iMÁTgenes por la cantidad de cosméticos, estilos y marcas disponibles. Todo distribuido en estantes repletos de frasquitos de tamaño inversamente proporcional a su valor. Me siento perdido, desorientado, y no sólo entre tanta cantidad y variedad, también entre tanto número. Muchos productos se identifican con uno, especialmente las diferentes gamas de pintalabios. Aunque eso no detiene a la mujer que va a escoger uno de ellos. Ella nunca se detendrá pasmada ante cantidad y variedad semejantes. Ni ante tanta numeración, la cual, por cierto, cambia de una marca a otra. Una mujer sabe perfectamente el lápiz de labios que quiere, el color y tonalidad precisos, la textura más adecuada y que más le agrada y el grado de brillo que más le favorece. Por eso entre cien tonalidades de carmines tardará sólo unos segundos en decidirse por una. Su elección es, de hecho, una selección breve y certera aún cuando lo que haga en ese momento sea decidirse por un cambio a otro tipo de tono, color, textura o brillo. Utilizará el número impreso en el tubito del lápiz escogido para abreviar futuras repeticiones del proceso.



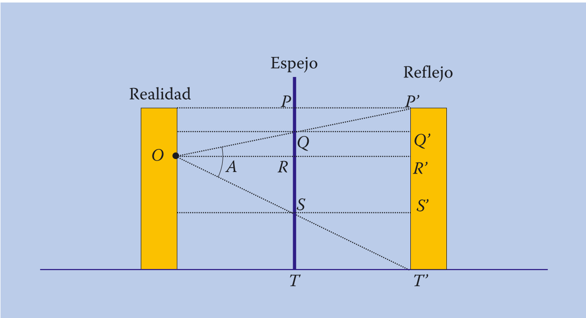
Se dice que todos los hombres, en mayor o menor medida, son daltónicos. No hay mejor sitio para comprobarlo que una perfumería. Cuando ella te pregunta cuál de los dos tonos, etiquetados con los números 910 y 911, que tú ves idénticos te parece más adecuado, tú te quedarás absorto entre dudas. No te parece extraño que no puedas distinguir a simple vista entre un color y otro. ¿Cómo vas a hacerlo si su diferencia se reduce a una unidad entre 910? Casi una milésima. ¿Existe alguien capaz de apreciar semejante sutileza? ¿Tanto pueden afinar los fabricantes? Ella sigue esperando tu respuesta y se está impacientando. Así que abandonas tus dudas optando por escoger al azar (tu azar) y te decides por el 911. Si eres matemático tal vez tu azar no sea tal y tu subconsciente te haya traicionado (911 es primo). En cualquier caso tampoco importa demasiado porque, sea cual sea tu elección, siempre te equivocarás. Si eres matemático posiblemente te preguntes si Peano, Hilbert y sus colegas pensaron en esta posibilidad. Al oír tu respuesta, ella replicará: *¿Estás tonto?*, el 910 me va mucho mejor'. La observas mientras se lo aplica y al terminar tienes que admitir que tenía razón. Seas matemático o no te sentirás como un inepto y le envidiarás esa capacidad visual tan sutil que hace que siempre dé en el clavo.

Para aplicarse el color ella habrá usado uno de esos espejitos que hay entre los paneles de las diferentes marcas de lápices. La imagen muestra uno de esos espejos. Así que el centro de atención será precisamente la parte más desenfocada de la fotografía, la que refleja ese rectángulo erguido entre los artículos de maquillaje. El espejo debe ofrecer a quien se mira en él no solamente la boca o los ojos, sino el rostro entero para así poder apreciar como asimila la cara ese matiz perceptible sólo por la mirada femenina.

Comprender esa imagen es entender por qué el tamaño de este espejo es el que es y no otro. Es decir, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de un espejo para que quien se mire en él se vea todo el rostro? ¿Y el cuerpo entero? ¿Depende ese tamaño de la distancia a la que nos situamos de él? Si el espejo fuese tan solo un cuadrado de un par de centímetros, podría alguien verse la cara alejándose lo suficiente? Pongámonos delante de un espejo y llamemos A al ángulo visual necesario para vernos por completo (ya sea la cara o el cuerpo):



Añadiendo determinadas líneas auxiliares a esta figura veremos cuál es la cuestión esencial:



Puesto que el original y su reflejo equidistan del espejo, $OR=RR'$. Eso hace que los triángulos OQR y $OP'R'$ sean semejantes con razón de semejanza 2. Y lo mismo para los triángulos ORS y $OR'T'$:

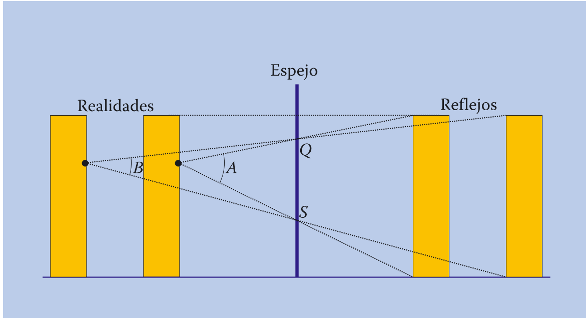
$$PR=P'R'=2\cdot QR$$
$$RT=R'T'=2\cdot RS$$

Por tanto,

$$QS=QR+RS=PR/2+RT/2=PT/2$$

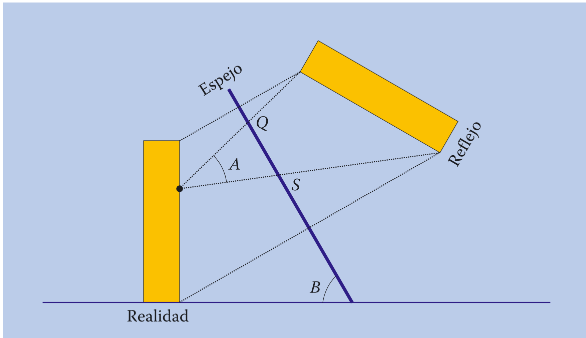
Es decir, para que la visual dirigida desde O abarque por completo el objeto reflejado es necesario que el espejo se reduzca a, como mínimo, la mitad de PT, esto es, la mitad de la estatura de la persona que se mira en él. O la mitad de su cara, según el caso. El ancho verificaría la misma propiedad.

Por muy cerca o muy lejos que nos situemos del espejo, QS seguirá siendo siempre la mitad de PT. En tal caso, cambiará el ángulo de visión, pero no QS:



Un espejo de cuerpo entero o de rostro entero será, por tanto, independiente de la distancia a la que se sitúa el sujeto que refleja. El punto S determina la altura a la que deberá colgarse en la pared, la cual será también la mitad de la estatura ocular del sujeto: $ST=RT/2$.

¿Y si el espejo no es vertical? Inclinándolo un ángulo B, la amplitud del espejo se reduciría a $QS=(x\cdot \mathrm{sen}B)/2$, siendo x la estatura de la persona que se mira en él:



Para $B=90^\circ$ tenemos que $QS=x/2$; para $B=30^\circ$, será $QS=x/4$. Cuanto mayor sea el valor de B comprendido entre 0° y 90°, menor será QS. Pero si $B>90^\circ$, es justamente al revés. De todos modos, al inclinar el espejo modificamos la perspectiva.

En fin, que tildar a un espejo de ***Espejo de cuerpo entero*** o de rostro entero, como en el caso de la fotografía, no depende de él, sino de quien en él se mira. Y no hay ninguno universal.

Quiero cerrar esta iMATgen con mi agradecimiento a la perfumería *GOTTA* de la avenida de Aragón de Alcañíz (Teruel) por permitirme tomar la fotografía que la abre.

iMATgen 23

Hace unos años, en primavera, hice esta fotografía sin tener la más remota idea de que la utilizaría del modo en que voy a hacerlo ahora. La perspectiva cenital no es la más corriente y, sin embargo, es la que nos da una idea más clara del terreno en el que nos movemos. Esa es la perspectiva de los mapas y de gran parte de la Geometría.

No serían más de las once de la mañana de un domingo de primavera, pero ese grupo de turistas ya se disponía para la comida en uno de los restaurantes que hay junto a los edificios más altos de Barcelona. Ellos se disponían a comer y yo aún tenía en la boca el sabor del café del desayuno. Eran del norte de Europa, venidos de allí donde amanece al mismo tiempo que aquí, pero donde se empeñan en acortar el día. Desayuno y comida casi seguidos, cena a media tarde y retiro al anochecer. En el Mediterráneo es diferente. Quizá la culpa la tenga el frío. Aquí lo posponemos todo, o casi todo. De hecho, no posponemos, sino que intercalamos. Si desayunamos a las ocho y comemos a las dos, solemos intercalar un almuerzo de bocata y uno o varios cafetitos. Siempre que sea posible, claro está. Y si lo es, mejor aún preludiar la comida con un aperitivo. Mientras tanto, disfrutaremos del calor, de la luz, del buen tiempo y de conversación. Así las cosas, una mañana da para mucho. Por ejemplo, para plantearse cuestiones matemáticas como las que me voy a plantear unas líneas más abajo. Para nosotros la comida es la excusa para un encuentro y una charla. Para los nórdicos, no. Es otra cosa. Es un intervalo en el que reina el silencio, al menos cuando nos visitan. Hasta sus hijos se callan y sus bebés dejan de llorar. El porqué no lo sé. Algún día se lo voy a preguntar.

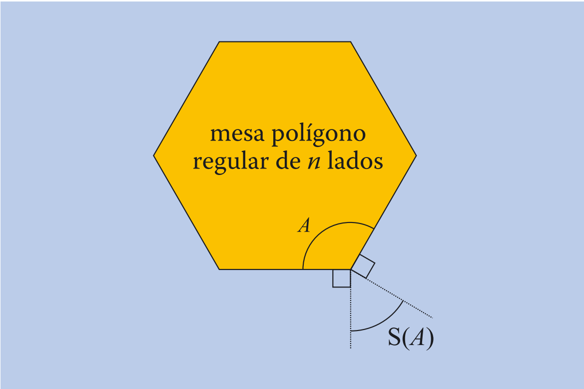
No hay duda de que todo eso es necesario si uno quiere comprender la imagen, aunque no sea suficiente para comprenderlo todo. Entenderla mejor significa fijarse en toda la parafernalia necesaria para comer: platos, cubiertos, vasos y copas, servilletas, mantel y, también, la disposición de los comensales sentados a la mesa. Pero no voy a centrar mi atención en la perfecta distribución de mesas que se ven cubiertas con manteles (cuatro de cuatro y dos de dos). Tampoco me fijaré en la también exquisita distribución (¿la habrán hecho los camareros con regla y compás?) de los cubiertos y servilletas, estas últimas trazando la diagonal del rectángulo casi cuadrado determinado por aquellos. Me voy a detener en el mantel que viste la mesa y preguntarme algo sobre la tela sobrante. Es evidente el porqué sobra tela. Porque es mayor que la superficie que debe cubrir. Sin embrago, no es tan evidente cuánto sobra. Y ya se sabe, cuando nos preguntamos por el *cuánto* entramos en terreno matemático. Comprender la imagen pasa por ahí. Así se crea la iMATgen.

Aún sin verlo por completo, puedo asegurar que los manteles blancos son rectangulares. Ésta es una afirmación basada en la experiencia, no en la observación visual de la fotografía. La visualización de la imagen tampoco muestra mesas rectangulares, sino cuadriláteras. Pero la experiencia nos dice que esos cuadriláteros son consecuencia del punto desde el que se observa un rectángulo. Además, las mesas de ese restaurante son cuadradas (otra afirmación experimental) y las cuatro que se ven rectangulares se han obtenido juntando dos mesas cuadradas. El resultado es un rectángulo de doble longitud que anchura.

El caso es que tan acostumbrado estoy a ver cómo son las arrugas que deja un mantel rectangular extendido sobre una mesa también rectangular que me atrevo a asegurar que este lo es. ¿Cuánto mide el ángulo sobrante $S(A)$ de un mantel en la esquina de ángulo A de una mesa? Entiendo por sobrante aquella parte de la tela que no produciría arrugas al caer, es decir, la que cubre el ángulo A de la esquina de la mesa más los dos ángulos rectos que forman las aristas de dicha esquina con la plomada hacia el suelo:

$$S(A)=360^\circ-A-2\cdot 90^\circ=180^\circ-A$$

Sobra el suplementario del ángulo del vértice en cuestión. En el caso de una mesa rectangular, $S(A)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$; si la mesa es hexagonal, sobra S(120º)=60º. Para el caso general de una mesa con forma de polígono regular convexo de *N* lados:



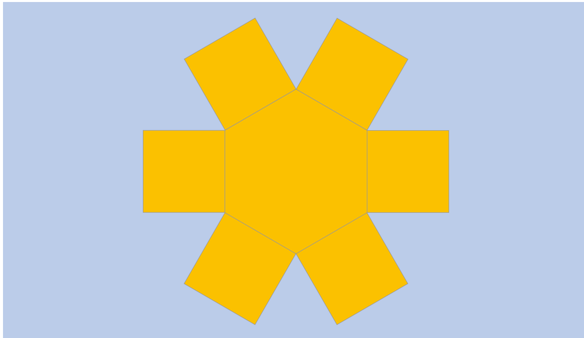
$$A = 180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{N} \Rightarrow S(A) = \frac{360^{\circ}}{N}$$

¿Qué sucede si la mesa es circular? Una mesa circular puede interpretarse como caso límite del polígono regular convexo de *N* lados. Entonces:

$$N \to \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A \to 180^{\circ} \\ S(A) \to 0^{\circ} \end{cases}$$

¡No sobra nada! Esto significa que los manteles que cubren una mesa circular siempre quedan bien, sin arrugas en el borde. Pero las arrugas se crean más abajo. Cuanto más excede su perímetro al de la mesa, más tela cuelga de su perímetro. Esa tela colgante queda a merced de la gravedad, que provoca en ella una serie de ondas entrantes y salientes con las que se compensa la diferencia entre el perímetro del mantel (circular o no) y el de la mesa. Por una cuestión de simetría el número de esas ondas será siempre un número par (si la tela con que está hecho es homogénea). Véase la fotografía de esta página.

Los manteles sin excedentes de tela deberían confeccionarse reproduciendo la forma de la mesa y añadiendo en cada uno de sus lados una pieza rectangular según la altura a la que se desea que caiga. Para una mesa hexagonal, una solución sería coser en cada uno de los lados del mantel hexagonal diseñado para ella, es decir, de sus mismas dimensiones, un cuadrado:



¿Cómo debería ser el mantel de una mesa circular? En conclusión, en la esquina de ángulo A de una mesa poligonal la parte excedente del mantel es S(A)=180º-A mientras que en una mesa circular el excedente es nulo. Eso sí, en condiciones normales, el número de vueltas de la tela excedente en la parte inferior de un mantel circular extendido sobre una mesa también circular será siempre un número par. Esto es ***Lo que sobra del mantel.***

iMATgen 24

Una ola llega a la playa de Tamariu, en la Costa Brava. La espuma asciende por la suave pendiente de arena hasta desaparecer escurriéndose entre sus granos. Una maravilla inmovilizada en el breve instante que transcurre entre la apertura y el cierre de un diafragma fotográfico. Un fragmento diminuto de la costa catalana, línea de encuentro entre el mar Mediterráneo y el noreste de la península ibérica. El vaivén del oleaje nunca cesa y por eso mismo todos los mapas son falsos. Su única aproximación a la certeza es la que les da la inmensa lejanía cenital. Tanta, que impide apreciar ese incesante vaivén. Desde allá arriba un litoral es el límite entre dos masas de distinto color y textura, una línea tan irregular como irreal. La realidad es que tu vienes aquí, pones los pies en el agua y estás o no estás en tierra catalana según intervalos de diez segundos. O tal vez no. Quizá cuando el agua te cubre los pies sigue siendo catalana la tierra que pisas. ¿Recogen los mapas parte de la tierra sumergida?

Los litorales naturales son muchos pero no muy diversos. Esa ola bien podría ser otra cualquiera que alcanzara una playa cualquiera de otra costa cualquiera de cualquier otro continente. El mar parece más responsable de la forma que adquiere el litoral playero porque en él es el mar el que se sube a la tierra y su frente de agua determina la línea de ese litoral. En cambio, en un litoral de acantilados la tierra es una barrera que detiene al mar y lo hace estallar rompiendo su frente en mil espumas y salpicones. Ahí manda la tierra y es ella la que determina la curva de la costa abrupta. Pero esas son solo apariencias, el mar hiere los acantilados afectando su forma tanto como la tierra desvía el frente de la ola y la hace irregular.

Comprender la imagen significa comprender la forma de una ola que llega a una playa. ¿Es ese frente de agua una línea? ¿Es esa línea una curva? ¿De qué tipo? ¿Es una curva de las que estudia el cálculo tradicional que, contemplada muy de cerca, acaba por verse rectilínea? ¿Cuánto mide? ¿Es su longitud la suma de sus fragmentos? Responder a todas esas preguntas no resulta fácil.

La longitud de una curva puede medirse de modo práctico tomando un paso o abertura de compás de longitud p. Para cada valor de p se obtiene una longitud $L(p)$ de la curva. Si la curva es un segmento, su longitud $L(p)$ será constante e independiente del valor p escogido. En este caso $L(p)=n\cdot p$, siendo n el número de pasos efectuados para recorrer el segmento. Si la curva es una circunferencia, cuanto menor sea el paso más cerca se estará de la longitud real de la curva y $L(p)$ se acercará al valor de su longitud L a medida que p tienda a cero. Sabemos que el resultado será $L(p)\to 2\pi r$, para $p\to 0$. Sin embargo, y contrariamente a lo que pueda parecer, es posible que las longitudes de diferentes costas no tiendan a un valor concreto cuando $p\to 0$ y que $L(p)$ crezca indefinidamente.

Richardson (1961), observó que esto sucedía en diversos litorales y según Mandelbrot (1988), de los datos de Richardson se desprende que la longitud $L(p)$ de una costa es proporcional a p^{-a}, siendo a un parámetro dependiente de la costa, pero independiente del método elegido para estimar la longitud. Este es un aspecto fundamental para comprender la imagen. Un litoral no es una curva tradicional. La longitud de una costa depende de la distancia desde la que se observa o, dicho de otro modo, de la longitud del paso con el que se recorre.

Observando la fotografía nos damos cuenta de que el perfil de la masa de agua no posee esquinas ni tramos rectilíneos. Su irregularidad parece más aguda en la parte superior de la imagen, pero es a causa de la perspectiva. En general, es bastante suave, tanto como la espuma de burbujas apelotonadas que la forman. Su perfil no es tan irregular como el de un acantilado abrupto, aunque ambos son *autosimilares*. Esto quiere decir que trazados sendos fragmentos suyos sobre el papel no podemos saber a qué escala corresponden. La auto similitud es una propiedad de la que adolecen las curvas tradicionales del Cálculo. Esas se ven más rectilíneas cuanto más de cerca se observan. Ampliar o reducir un tramo del frente de la ola de la imagen no revelará diferencias significativas mientras no lleguemos al punto de aislar una única burbuja. Las masas de espuma menores serán también cúmulos de otras burbujas antes invisibles, pero cuyo perfil será muy parecido al de la ola entera. Su forma, aunque diferente, seguiría presentando las mismas anomalías y estarían, además, similarmente distribuidas.

Estas irregularidades y su distribución hacen de una costa un objeto 'fractal', pero a diferencia de los primeros objetos fractales conocidos en los que la auto semejanza homotética del fragmento con el todo era idéntica, una fragmento de costa o un fragmento del perfil de una ola no es idéntico al total. La cuantificación de su irregularidad conduce al concepto de dimensión fractal y puede no ser un número entero, como por ejemplo, las de algunas fronteras terrestres y perfiles costeros según Richardson (1961):

Costa oeste de Gran Bretaña:	1,25
Frontera terrestre de Alemania:	1,15
Frontera entre España y Portugal:	1,14
Costa australiana:	1,13
Costa de África del Sur:	1,02

Los objetos euclidianos de la geometría tradicional son útiles para interpretar la realidad física de nuestro entorno a un nivel elemental, pero las nubes no son esferas, ni las montañas conos, ni los relámpagos se desplazan en línea recta (Mandelbrot, 1982). Hoy en día reducir la geometría de estos objetos al ámbito de las curvas y objetos de la geometría euclidiana tradicional resulta casi pueril. Esos modelos geométricos no describen adecuadamente la realidad física que nos rodea. Comprender la imagen supone un cambio de interpretación de nuestra percepción. La curva de un litoral es fragmentaria, no es el vestigio dejado por un lápiz en un papel, está hecha de pedacitos rotos, de fragmentos de otras curvas fragmentadas y auto similares. Y esta semejanza homotética no responde a una pauta numérica determinada de modo absoluto como ocurre en las curvas fractales más simples (curva de von Koch, curva de Peano), sino que es variable.

Un litoral o el perfil de una ola no son así. Para recrear en el laboratorio curvas tan reales Mandelbrot introdujo en su elaboración la participación controlada del azar. Eso produjo excelentes resultados cuyas aplicaciones alcanzan campos muy diversos. Y en esa intervención controlada del azar se basan los programas que recrean modelos fractales de fenómenos naturales. Las páginas web sobre ese tema son innumerables. En la siguiente, además de ver cómo el azar facilita la construcción de modelos de litorales, puedes descargarte los programas que las realizan (para sistemas Mac OS 7.x y Windows 95, 98 o 2000) o trabajar *online* con los applets en *Java* que se ofrecen:

http://polymer.bu.edu/ogaf/html/software.htm

Nuestra ola llega a la playa y se encuentra con un banco de arena de superficie suave pero irregular. La pendiente de la playa no es la misma en todos sus puntos ni la fuerza que empuja la ola tampoco es la misma en todos los puntos de su frente. La pendiente variable de la arena, al menos en parte, depende del subsuelo. La fuerza de la ola depende de múltiples factores que se fraguaron mar adentro. El resultado final es similar al que produciría el azar, pero no es fruto del azar. Cuando una parte de la masa de agua asciende por la pendiente y se topa con el obstáculo (una zona algo más empinada) esa masa de agua se frena y busca una salida bifurcándose a ambos lados del obstáculo, sumándose a aquellas masas de agua que ascienden por sus flancos. De este modo el perfil del frente espumoso es el resultado de la fragmentación de un todo en una serie de sumas.

Hace más de dos mil años, mientras olas del mismo mar llegaban también a la costa que dos mil años después se llamaría *Costa Brava*, Arquímedes construyó la parábola siguiendo un método iterativo conocido como desplazamiento del punto medio. Alrededor de 1900, Takagi, añadiéndole una variante interesante, recuperó esa idea para construir una curva irregular, autosemejante y continua, pero que en ninguno de sus puntos era derivable. Yo la llamo *función suflé* y se parece tanto a la línea del frente de la ola de esta iMATgen que podría tomarse como modelo matemático suyo (véase en Tall, 1982). De ahora en adelante cada vez que vuelva a la playa y vea acercárseme a los pies un frente espumoso le diré: ***¡Hola, ola de sumas!***

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MANDELBROT, B. (1982): *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co. New York.

MANDELBROT, B. (1988a): *Los Objetos Fractales*. Tusquets editores. Barcelona.

RICHARDSON, L. F. (1961): *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*. General Systems Yearbook 6, 139-187.

TALL, D. (1982): "The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere". *The Mathematical Gazette* 66, 11-22.