SUMA 51
Febrero 2006, pp. 41-50

El Tolmo de Minateda. Historia y Matemáticas

El presente artículo apunta, desde las matemáticas, distintas hipótesis para interpretar la composición de ciertos edificios de época medieval. En particular, los restos de una basílica visigoda situada en el yacimiento arqueológico del Tolmo de Minateda, Hellín(Albacete).

This article points, from mathematics, different theories to interpret the composition of some religious constructions from Middle Ages. Especially, the rests of a visigothic basilica, at the archaeological site of Minateda, Hellín(Albacete).

El Tolmo de Minateda, situado en las proximidades de Hellín(Albacete), es uno de los yacimientos arqueológicos más importantes de España. Se trata de un cerro amesetado, cuyas paredes actúan de muralla natural, cercano a una fuente de agua continua y en medio de lo que, hasta hace relativamente poco, ha sido un fértil valle.

Bajo dichas condiciones, no es de extrañar, que hayan dejado su testimonio particular prácticamente todas las culturas que han pasado por nuestra península: desde pinturas rupestres en sus inmediaciones, pasando por restos de la edad del bronce, necrópolis ibéricas, murallas romanas, almazaras rupestres islámicas, etc.

Pero fijémonos en una de las joyas de este yacimiento: los restos de una basílica visigoda, fechada en el s. VII de nuestra era. Son de gran relevancia, ya que quedan escasísimos ejemplos de esta entidad.

Nuestro objetivo, a partir de ahora, consistirá en ponernos en el lugar de aquel maestro de obra del s. VII, e intentar averiguar qué tipo de procedimiento pudo haber seguido para diseñar la basílica. Si deseamos indagar sobre su obra debemos tener presente su contexto cultural, que debió de estar muy influenciado por el imperio romano (todavía presente en Bizancio), o mejor dicho por la cultura greco-latina. Eran, dentro de los pueblos bárbaros, de los que tenían un mayor grado de romanización. Por otra parte, el hecho de que los visigodos hubieran ejercido como tropas auxiliares del imperio en la cuenca baja del Danubio, hace que su cultura también se vea impregnada de cierto orientalismo.

Figura 1. Basílica visigoda

Manuel García Piqueras
IES Aldonza Lorenzo
La Puebla de Almoradiel. Toledo

Figura 2. Vista del Tolmo de Minateda

La Escuadra Pitagórica

Pongámonos manos a la obra, y analicemos la planta de la basílica. En ella distinguimos tres naves principales, ábside en la cabecera, y un baptisterio a los pies (nave 14-C). Destacamos también, que el baptisterio está construido con un giro de unos 5º respecto a la perpendicular de las naves, debido posiblemente, a la existencia de una agujero a los pies, previo a la construcción del edificio (Cánovas, 2005).

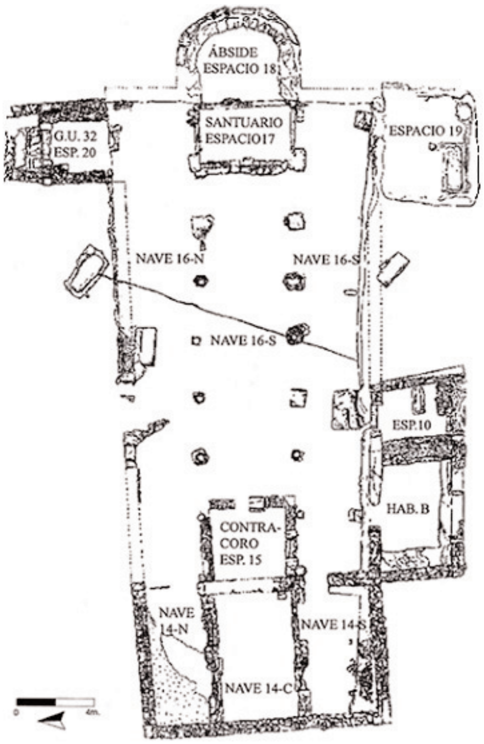

Figura 3. Planta de la basílica visigoda
(Abad, Gutiérrez, Gamo, 2000)

Sabemos que en la Antigüedad, y hasta la irrupción del sistema métrico decimal, la arquitectura seguía unos cánones de proporción puros. Veamos entonces qué método fué empleado para generar proporciones en dicho edificio. Para ello, probaremos con el método de la escuadra pitagórica que consiste en:

1. Tomar un cuadrado de lado la unidad y le adosamos otro cuadrado, cuya diagonal sea la unidad (figura 4).

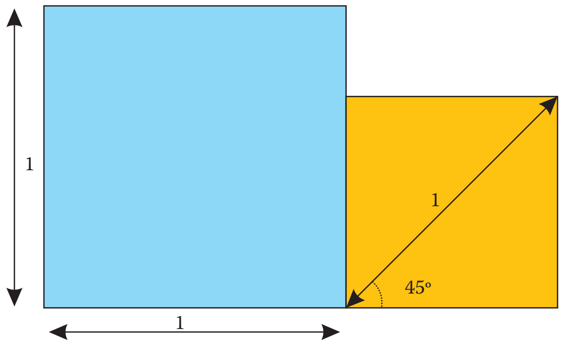

Figura 4

2. Así podemos construir un rectángulo, de lados 1 y $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (figura 5).

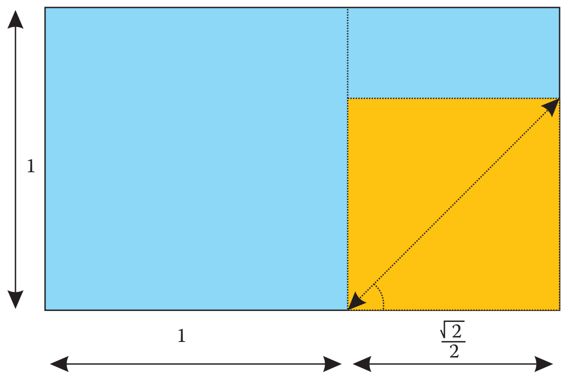

Figura 5

Éste método da lugar a nuestra primera noción.

Decimos que un rectángulo está en *proporción pitagórica*, cuando sus lados verifican

$$\frac{\text{LadoMayor}}{\text{LadoMenor}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En la figura 6, observamos cómo se aplica esta proporción a la planta de la basílica siendo éste un resultado aceptable (si tenemos en cuenta que de lo que se trata es de una aproximación).

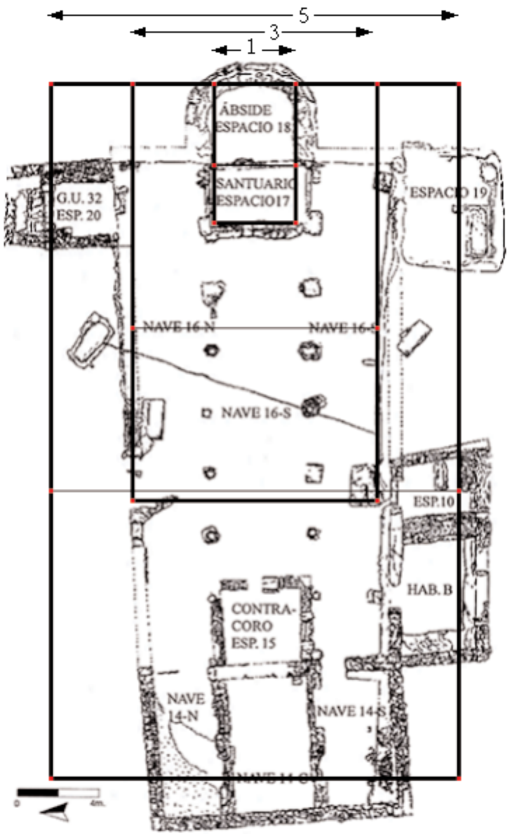

Figura 6. Composición de la basílica, según el método de la escuadra pitagórica

Hasta aquí hemos mostrado lo publicado hasta la fecha de escritura del presente artículo sobre la composición de la basílica (Cánovas, 2005). Partiendo de éste punto, se trató de aplicar estas ideas para elaborar una unidad didáctica que aprovechara las matemáticas presentes en dicha investigación arqueológica.

Sin embargo, nos asaltaba constantemente la siguiente duda: en una época de profunda espiritualidad, donde casi todo era utilizado como un símbolo, ¿encierra nuestra basílica algún secreto en la composición? Es obvio que estamos ante una planta cruciforme, aunque la simetría no se da exactamente, y a los pies aparecen unas estancias anejas que rompen la estructura cruciforme. Todo esto, parece indicar, que el hecho de ser cruciforme pasa a un segundo plano. Pero, ¿qué símbolo puede jugar el papel principal?

Buscando un símbolo

Iniciaremos nuestras indagaciones tomando un libro de Historia del Arte. Dentro del período dedicado al medievo, se pueden observar ilustraciones como las siguientes:

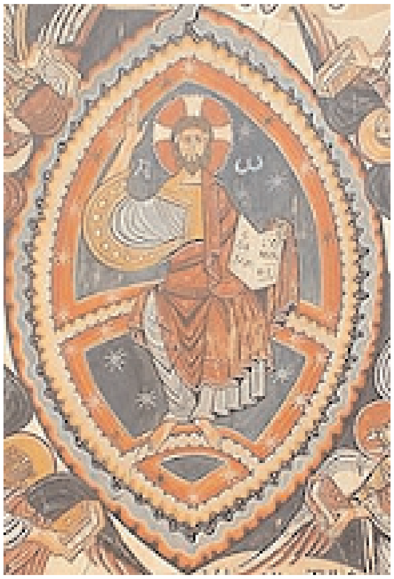

Figura 7. Pantocrator de San Isidoro de León

Figura 8. Frontal de la Seo de Urgell (M. del Arte de Cataluña)

Ambas figuras representan el *Pantocrator* que, generalmente, aparece situado entre el alfa y la omega, entre el principio y el fin, con su cabeza rodeada de una mandorla alusiva a la santidad, etc. Tenemos una representación cargada de simbología, pero, ¿de qué figura geométrica emerge el Pantrocrator de San Isidoro (figura 7)?, ¿tiene algún significado especial? Si todavía no tiene claro de qué figura se trata, el que exista en el frontal de la Seo de Urgell (figura 8) no ofrece dudas. Efectivamente, se trata de la intersección de dos figuras circulares y que formalizamos en nuestra siguiente noción.

Dadas dos circunferencias cuyos radios miden ambos una longitud r, y donde la distancia entre sus centros es también r, se llama *vésica* a la región comprendida entre ambas circunferencias.

Al segmento que une los centros de ambas circunferencias se le denomina *semieje menor* y al que une los puntos de intersección entre ambas *semieje mayor*.

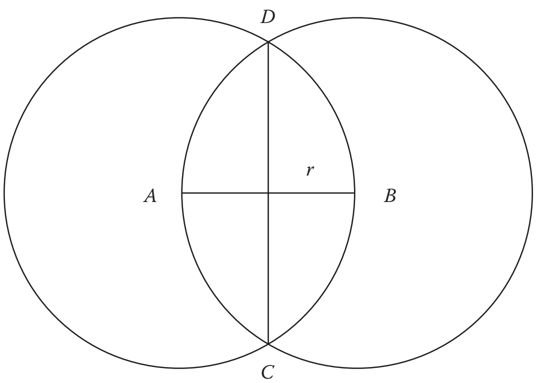

Figura 9. Construcción de la vésica

En cuanto a su posible significado, desde la Antigüedad ha sido utilizada por distintas culturas y religiones para expresar la intersección de dos opuestos; por ejemplo: lo divino y lo terrenal, el bien y el mal, etc. El catolicismo considera que Jesús de Nazaret es Dios hecho Hombre, de ahí que una figura ideal para representar algo perteneciente tanto a lo divino como a lo terrenal sea nuestra vieja conocida, la Vessica Piscis.

Pero no abusemos de interpretaciones y sigamos nuestra investigación. Para ello, nada mejor que estudiar las propiedades matemáticas de la vésica. No será materia banal puesto que no tardaremos mucho en aplicarlas.

Propiedad (Triángulos equiláteros circunscritos): La vésica circunscribe dos triángulos equiláteros que comparten un mismo lado.

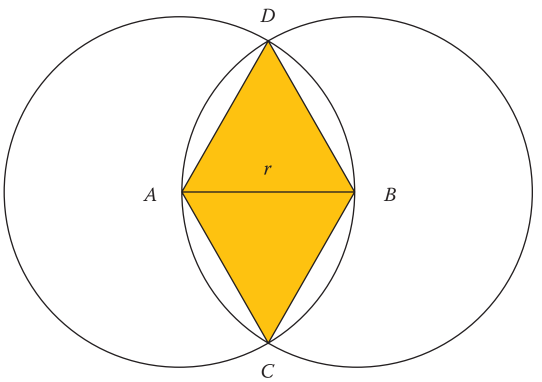

Figura 10. Triángulos equiláteros inscritos

Demostración: Puede comprobarse fácilmente, observando la figura 10 y teniendo en cuenta que por definición de vésica se ha de verificar

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{DA}$$

En una época de profunda espiritualidad, donde casi todo era utilizado como un símbolo, ¿encierra nuestra basílica algún secreto en la composición?

Propiedad (Rectángulo en proporción $\sqrt{3}$): Todo rectángulo que circunscribe una vésica, está en proporción $\sqrt{3}$, es decir

$$\frac{LadoMayor}{LadoMenor} = \sqrt{3}$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos tomar la unidad como lado de los triángulos inscritos en la vésica, entonces aplicando Pitágoras es fácil ver que su altura es $\sqrt{3}/2$, de donde

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$$

Propiedad (Progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$): El proceso que consiste en tomar el semieje mayor de una vésica como semieje menor de una nueva, da lugar a una progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$.

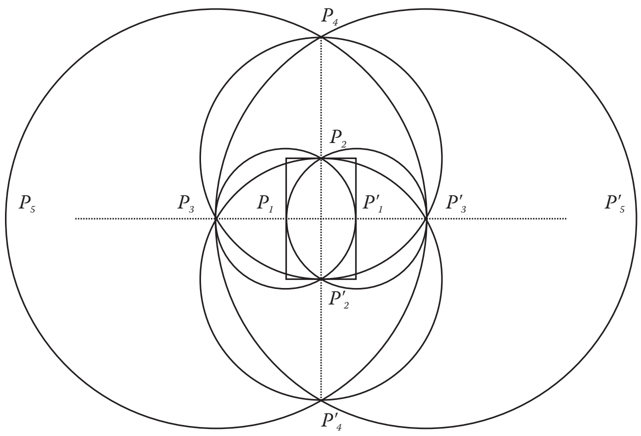

Figura 12. Vésicas encadenadas

Desde la antigüedad, la vésica ha sido utilizada por distintas culturas y religiones para expresar la intersección de dos opuestos: lo divino y lo terrenal, el bien y el mal, etc.

Demostración: Acabamos de ver que las medidas del rectángulo con ejes de simetría

$$\overline{P_1P_1'} \quad \text{y} \quad \overline{P_2P_2'}$$

(figura 12) están en proporción $\sqrt{3}$. Tenemos en ese caso que

$$\frac{\overline{P_2P_2'}}{\overline{P_1P_1'}} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{P_2P_2'} = \sqrt{3} \cdot \overline{P_1P_1'}$$

Razonando de manera análoga

$$\frac{\overline{P_3P_3'}}{\overline{P_2P_2'}} = \sqrt{3} \rightarrow \overline{P_3P_3'} = \sqrt{3} \cdot \overline{P_2P_2'} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \overline{P_1P_1'}$$

En general podemos afirmar que

$$\overline{P_{n+1}P_{n+1}'} = \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot \overline{P_1P_1'}$$

Propiedad (La proporción $\sqrt{3}$ es dinámica): Todo rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, contiene a su vez, otros tres rectángulos en la misma proporción.

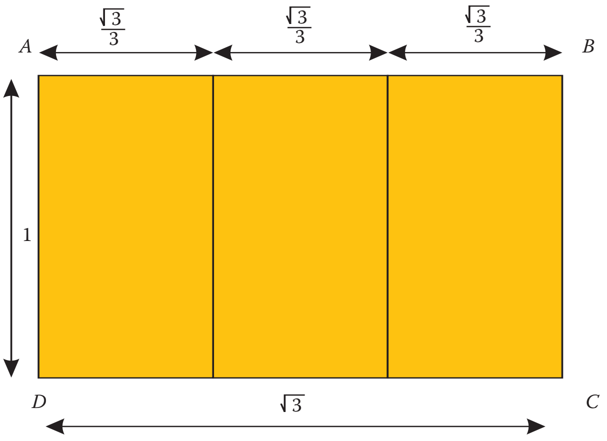

Figura 13. Proporción dinámica

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la unidad es la medida del lado menor del rectángulo

$$\overline{ABCD}$$

(figura 13) en proporción $\sqrt{3}$. Si dividimos el lado mayor, en tres partes iguales, obtenemos tres nuevos rectángulos donde se verifica que

$$\frac{LadoMayor}{LadoMenor} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Así, estamos ante tres nuevos rectángulos, con la misma proporción que el original.

Resumiendo, un rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, contiene tres nuevos rectángulos en la misma proporción, y cada uno de estos a su vez otros tres, también en la misma proporción. Este proceso podría prolongarse indefinidamente.

Aplicaciones

Todo este repaso geométrico de la vésica nos ofrece una nueva perspectiva en la composición de nuestra basílica visigoda (figura 14).

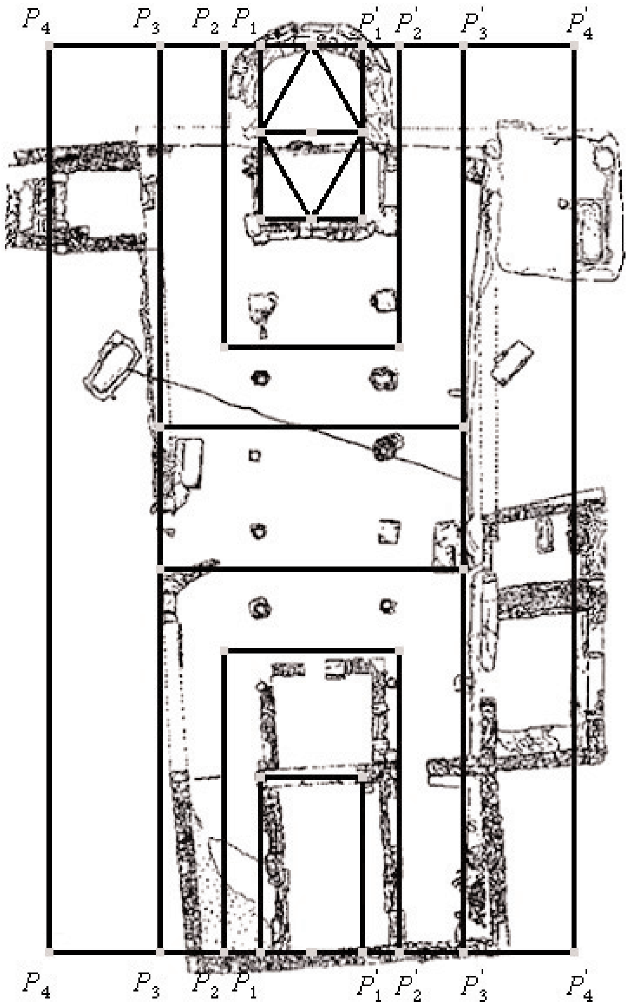

Figura 14. Composición según la proporción $\sqrt{3}$

Aparecen aquí encajados una serie de rectángulos en proporción $\sqrt{3}$, que marcan las estancias de una manera bastante aceptable.

Como vemos comparten eje de simetría, sus bases parten de la cabeza y los pies de la basílica, pero ¿cuál es la relación entre estos rectángulos? Como puede comprobarse, las bases de dichos rectángulos enlazan entre sí, sabiendo que están en progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$, comentada en el apartado anterior; es decir

$$\overline{P_4P_4'} = \sqrt{3}\cdot\overline{P_3P_3'} = \left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\overline{P_2P_2'} = \left(\sqrt{3}\right)^3\cdot\overline{P_1P_1'}$$

Por otra parte, el arco de medio punto del ábside, tiene su centro en el del triángulo equilátero asociado a la vésica, como podemos observar en la figura 15.

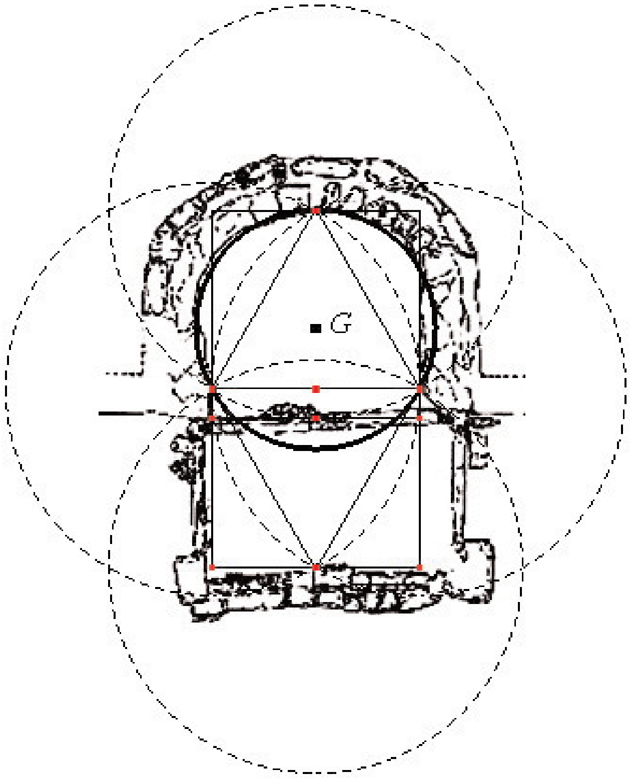

Figura 15. Arco del ábside con centro el del triángulo equilátero

El triángulo equilátero simboliza la *Trinidad* para el catolicismo y, bajo esta percepción, qué mejor candidato para ser centro de la circunferencia del ábside que aquel que equidista de los vértices de dicho triángulo.

Alguien podría pensar que esto parece estar en contradicción con la religión que profesaban los visigodos, el *arrianismo*, que podríamos decir que se trataba de una versión del cristianismo donde Jesús de Nazaret era considerado como *profeta* y no como *Hijo de Dios*. Sin embargo, nuestra basílica está fechada en el s. VII, posterior a la conversión al catolicismo de Recaredo en el año 587, es decir, todavía en el s. VI, por lo que no habría ningún problema político-religioso, para incluir un símbolo como el del triángulo equilátero.

Estamos, por tanto, en condiciones de afirmar que la composición de la basílica parece ajustarse de manera bastante aceptable a nuestro nuevo punto de vista.

Por otra parte, desde un punto de vista eminentemente práctico, marcar sobre el terreno las líneas necesarias, teniendo en cuenta los instrumentos disponibles en aquella época, es totalmente factible. Sólo necesitaríamos: cordel, postes, y una cuerda dividida en 12 partes iguales, para trazar perpendiculares (genera un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5). Este triángulo es llamado *sagrado* y es muy conocido por haber sido utilizado ya en la arquitectura egipcia.

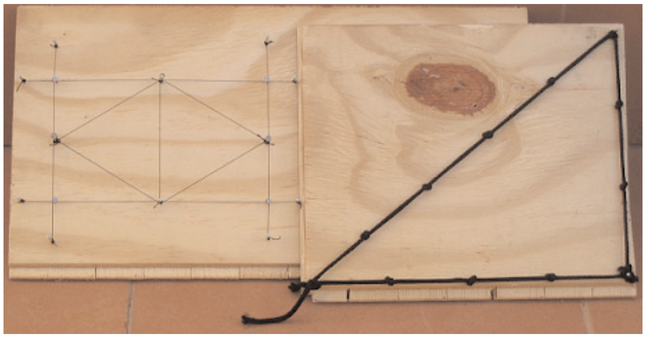

Figura 16. Construcción del rectángulo en proporción $\sqrt{3}$, ayudado de la cuerda de 12 nudos

Parece evidente, que la construcción de las líneas maestras no debió revestir de una complicación extrema para aquella época. Además, variando la distancia entre los centros de las circunferencias que generan la vésica podemos aprovechar al máximo el solar disponible sin perder la proporción deseada.

Aún así, no podemos apartar la pregunta acerca de si todo esto es fruto de una feliz coincidencia geométrica.

La basílica del Tolmo está fechada en el s. VII, posterior a la conversión al catolicismo de Recaredo en el año 587, por lo que no habría ningún problema político-religioso para incluir un símbolo como el del triángulo equilátero.

Suponiendo esto último, ¿se repetirá en otras construcciones de la misma época? Para comprobar esta última cuestión, hemos analizado la composición de distintas construcciones visigóticas, tales como: Santa Comba de Bande (Orense), Recópolis (Guadalajara), San Juan de Baños (Palencia), San Pedro de la Nave (Zamora), Santa María de Melque (Toledo) y San Giao de Nazará (Nazaré. Portugal).

También en dichos edificios (figuras 17 a 21) podemos observar la proporción $\sqrt{3}$.

Santa Comba de Bande

Iglesia de difícil datación, al desconocerse el grado de remodelación producido en el s. IX. Planta en principio de cruz griega, con brazos de la misma longitud, aunque la prolongación del ábside y del atrio enfatiza el eje longitudinal.

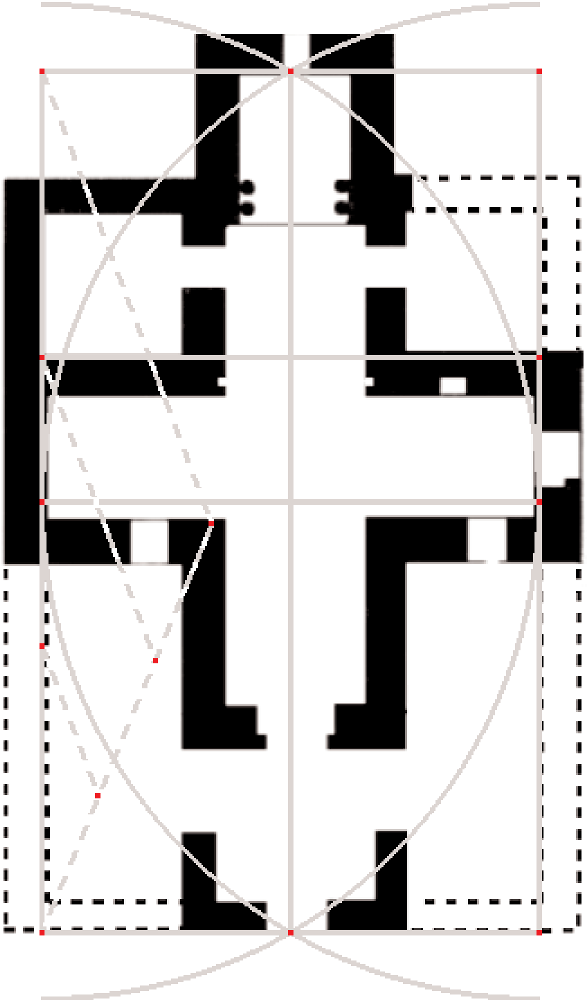

Figura 17. Santa Comba de Bande (Orense)

Recópolis

Su importancia radica en que es uno de los escasos núcleos urbanos que nos dejó la cultura visigoda. Tuvo una gran importancia como centro administrativo, político y económico.

Fue mandada construir por el rey Leovigildo en el año 578, en honor de su hijo Recaredo. Estamos, por tanto, en un período anterior al de su conversión al catolicismo. Se trata de la única iglesia que con seguridad puede decirse que fue de rito arriano. Observamos que, en esta ocasión, no se escogió como centro del ábside el centro del triángulo equilátero.

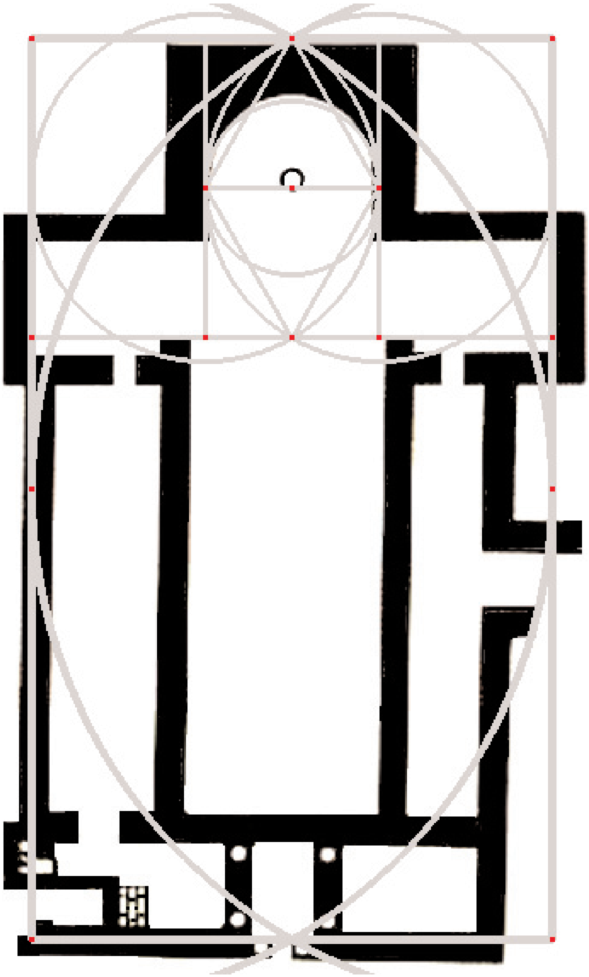

Figura 18. Recópolis (Guadalajara)

Las excavaciones arqueológicas han descubierto una cabecera bien distinta de la actual, aunque conserva el ábside central original.

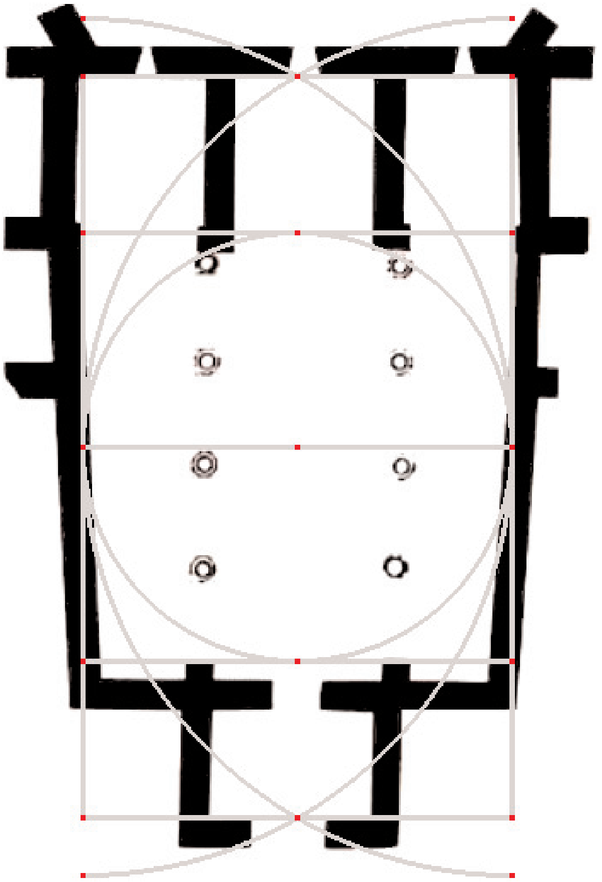

Figura 19. San Juan de Baños (Palencia)

San Juan de Baños

Su construcción puede ser fechada con exactitud en el año 661 debido a la inscripción situada en la parte superior del arco triunfal. Año en el que Recesvinto dedica la iglesia a San Juan Bautista.

San Juan de Baños (Palencia)

Figura 20. San Pedro de la Nave (Zamora)

San Pedro de la Nave
Construida en la segunda mitad del siglo VII, periodo en el que fueron construidos los edificios visigodos de mayor relevancia.

Planta de tres naves sobre la que se inscribe una cruz griega, todo ello encabezado por un ábside de la anchura de la nave central.

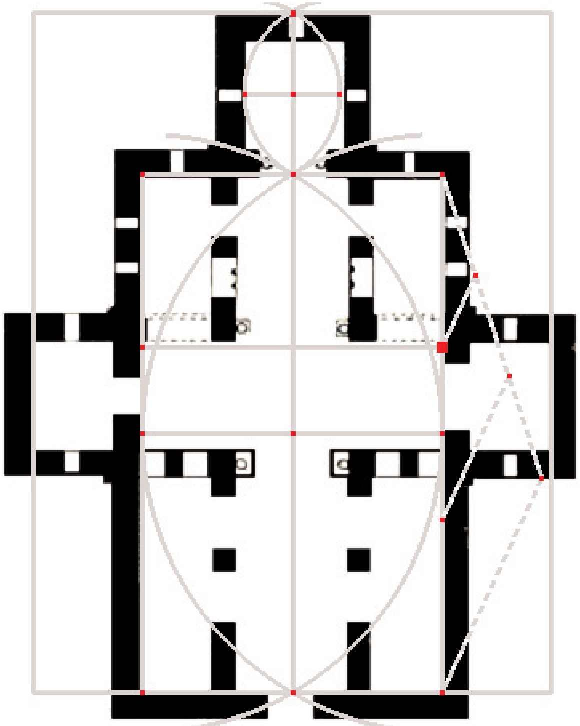

Figura 20. San Pedro de la Nave (Zamora)

La planta es claramente cruciforme, con los pies más alargados que el resto.

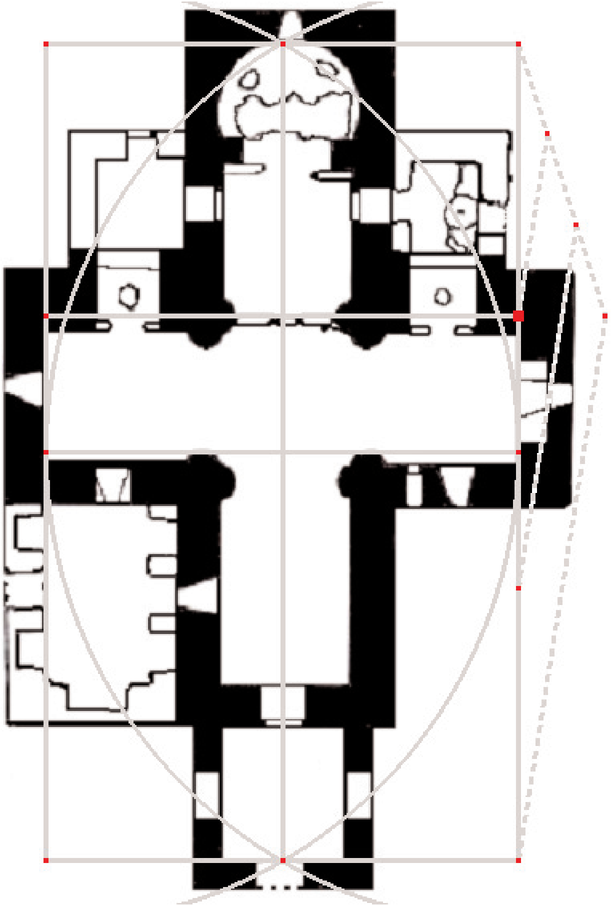

Figura 21. Santa María de Melque (Toledo)

Santa María de Melque
No se sabe prácticamente nada sobre su fundación, y es difícil de sintetizar su estilo arquitectónico.

Santa María de Melque (Toledo)

> *Cuando nos paramos a pensar que sus contemporáneos tenían a Isidoro de Sevilla (570-636) como el hombre más sabio de su época, podemos entender mejor el lamento de aquellos tiempos (...). Ésta fue verdaderamente la «Época Oscura» de la ciencia (...).*
> Boyer

San Giao de Nazaré

La iglesia de San Giâo de Nazaré, proporciona otra planta con solución de crucero. Se suele leer como una cruz inscrita en un cuadrado, del que sobresale la capilla mayor.

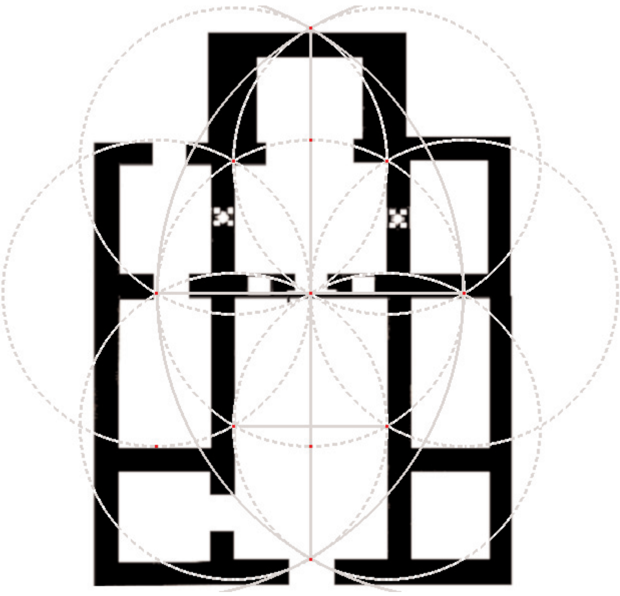

Figura 22. San Giao de Nazaré (Nazaré. Portugal)

Conclusión

¿Estamos viendo técnicas constructivas basadas en cánones geométricos donde no hay? Es posible. Sin embargo, la repetición del mismo concepto, en distintos edificios del idéntico período y condición, deja escaso margen para la duda. Todo parece indicar que, efectivamente, la Vessica Piscis es utilizada para darle al edificio un carácter *sagrado*.

¿Estamos viendo técnicas constructivas basadas en cánones geométricos donde no hay?

Utilizando este aspecto y armado de imaginación, aquel maestro de obra pudo haber diseñado todas estas iglesias altomedievales. Bastaría con aplicar la misma receta e introducir pequeñas variantes en cada edificio, que es lo que le confería su personalidad particular a cada uno.

En cualquier caso, todo parece indicar que las construcciones seguían un diseño preestablecido de antemano y que aquella época oscura quizá no lo fuera tanto como se nos ha presentado:

> Cuando nos paramos a pensar que sus contemporáneos tenían a Isidoro de Sevilla (570-636) como el hombre más sabio de su época, podemos entender mejor el lamento de aquellos tiempos (…). Ésta fue verdaderamente la «Época Oscura» de la ciencia (…) (Boyer, 1986).

También es posible que no hayamos reparado en construcciones como las del Tolmo de Minateda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAD CASAL, L.; GUTIÉRREZ LLORET, S. y GAMO PARRAS, B. (2000): *La basílica y el baptisterio del Tolmo de Minateda (Hellín, Albacete)*, AespA.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza Ed., Madrid.

CÁNOVAS GUILLÉN, P. (2005): *El material cerámico de construcción en la antigüedad y la alta edad media: El Tolmo de Minateda (Hellín, Albacete)*, Instituto de Estudios Albacetenses Don Juan Manuel, Albacete.

HERGUEDAS LORENZO, M.A., GARCÍA TORRALBA, M.A. y ZAFRA CAMPS, J. (1992): *Historia del Arte*, Edelvives, Zaragoza.

MANKIEWICZ, R., (2000): *Historia de las Matemáticas. Del cálculo al caos*, Paidós, Barcelona.

En Internet:

http://webs.ono.com/argopuebla