SUMA 51
Febrero 2006, pp. 31-39

¿Teoremas o fórmulas?

En este artículo se describen algunos ejemplos que muestran que un teorema es mucho más que una fórmula.

This paper considers some examples that show that a theorem is much more than a formula.

Una de las conversaciones preferidas entre los profesores de matemáticas es sobre de los errores que cometen nuestros alumnos. Todos, alguna vez, hemos co-mentado lo mal que han simplificado una fracción o las equivocaciones surgidas al operar con raíces cuadradas, o les hemos convencido de que 0 es igual a 1 con una prueba falsa en la que no han sabido descubrir el paralogismo. Todo este tipo de cosas están recogidas, por ejemplo, en el libro Cipra (2000), o en las páginas de Internet:

http://members.cox.net/mathmistakes/
http://math.vanderbilt.edu/~schectex/commerrs/

Una de las conversaciones preferidas entre los profesores de matemáticas es la que trata sobre los errores que cometen los alumnos.

También, en los artículos (Abramovitz, Berezina y Berman, 2002), (Abramovitz, Berezina y Berman, 2003) y (Berezina y Berman, 2000) se presentan interesantes ejemplos de pruebas erróneas, definiciones mal interpretadas o usos incorrectos de la teoría, y se exponen algunos tests que se han pasado a los alumnos para comprobar su nivel de conocimientos teóricos.

En un artículo de Movshovitz, Zaslavsky y Inbar (1987) se clasifican los errores en categorías tales como pruebas falsas, aplicaciones de teoremas fuera de sus condiciones, interpretaciones erróneas del lenguaje, usos erróneos de algoritmos o usos erróneos de una definición.

De todas estas categorías de errores, creo que resulta especialmente interesante la que se refiere a la aplicación indiscriminada de un teorema. Es decir, los errores que se derivan de aplicar una fórmula que no se debe utilizar. Este tipo de hábitos lleva consigo una interesante reflexión acerca del tipo de matemáticas que queremos explicar. No sólo los alumnos, también los profesores nos lanzamos a aplicar fórmulas sin comprobar si estamos en las condiciones requeridas en las hipótesis del teorema. Ya sea por simplificar, por ahorrar tiempo o simplemente por considerar que las posibilidades de que se nos presente un caso que falle son escasas, el caso es que incluso libros muy difundidos propician el mal empleo de algún algoritmo (como veremos).

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
Cádiz

Objetivos

Este artículo va dirigido a todos los profesores de Matemáticas que quieran transmitir a sus alumnos el rigor y la sutileza de los teoremas. En todos los niveles de las Matemáticas nos podemos plantear, en determinados momentos, hacer una mirada reflexiva sobre algunos enunciados que pensamos que son especialmente interesantes para nuestros cursos. La frecuencia e intensidad de esta mirada reflexiva dependerá de dos factores principales: el tiempo que podamos emplear y la receptividad de nuestros alumnos.

En todos los niveles de las Matemáticas nos podemos plantear, en determinados momentos, hacer una mirada reflexiva sobre algunos enunciados que pensamos que son especialmente interesantes para nuestros cursos.

Para articular la forma de reflexionar sobre los teoremas se propondrán dos propuestas metodológicas con las que poder hacer un análisis teórico de un resultado. En este artículo hemos seleccionado seis, muy conocidos, donde aplicaremos estas propuestas. Han sido escogidos con el fin de hacer ver que una fórmula, o un método automático de resolver un problema, pueden llevarnos a conclusiones falsas si no los usamos bien. Pero las posibilidades son infinitas. Cada profesor podría hacer una selección propia, fruto de sus propias experiencias y necesidades, y sería perfectamente válida.

Se ha usado un programa de matemáticas para realizar algunas de las gráficas que se muestran, pero los objetivos de este artículo se centran en análisis teóricos que no se pueden realizar con un programa. Estos análisis teóricos son, precisamente, los que muestran la potencia y sutileza de los teoremas. Por otro lado, el uso indiscriminado de los programas de Matemáticas lleva, en ocasiones, a errores de cálculo. Estos errores, causados unas veces por fallos del programa y otras veces por el mal uso de los mismos, deben ser detectados con un análisis detallado del enunciado en cuestión.

Propuestas Metodológicas

Como ya hemos visto anteriormente, la aplicación indiscriminada de un teorema, es decir, hacer caso omiso de las hipótesis requeridas y usar simplemente la fórmula, es una práctica habitual. Para hacer reflexionar sobre esto proponemos dos maneras de actuar:

Opción I

Paso 1. Obtener una fórmula aparentemente válida sin problemas.
Paso 2. Dar un contraejemplo.
Paso 3. Dar el enunciado correcto.

Opción II

Paso 1. Dar el enunciado correcto.
Paso 2. Avisar de los usos incorrectos.
Paso 3. Dar ejemplos de los usos incorrectos.

Con la opción I mostraremos que, en Matemáticas, a veces no hay que fiarse de la primera impresión.

Con la opción II mostraremos que las hipótesis de los teoremas se dan porque son necesarias para aplicarlos.

En los casos que daremos a continuación diremos, al principio, qué opción hemos elegido.

Regla de L'Hopital

En este caso usaremos la Opción II.
Paso 1: Damos el enunciado de la regla de L'Hopital (Spivak, 1986, p. 264).

Paso 2: La regla de l'Hopital es el típico resultado que se suele aplicar de manera automática, sin embargo su uso indiscriminado puede llevarnos a resultados falsos. La hipótesis de la existencia de

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

significa dos cosas: dicho límite debe existir antes de aplicar la regla y debe existir un entorno alrededor de a donde $f'(x)$ y $g'(x)$ existan y donde $g'(x)$ sea distinto de cero (salvo en a).

Paso 3: Damos los ejemplos que muestren los errores que podemos cometer si no comprobamos si se respetan o no las condiciones del teorema:

Ejemplo 1
Tomemos las funciones $f(x) = x + \text{sen}\, x$ y $g(x) = x$.

Se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Si aplicamos la regla se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}(1+\cos x)$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\cos x$$

no existe, llegamos a la conclusión de que el límite buscado tampoco existe. Esto, sin embargo, es falso porque:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{senx}{x}\right) = 1$$

Observación: El límite del cociente de las derivadas debe existir antes de aplicar la regla de L'Hopital.

La regla de l'Hopital es el típico resultado que se suele aplicar de manera automática, sin embargo su uso indiscriminado puede llevarnos a resultados falsos.

Ejemplo 2
Tomemos las funciones

$$f(x) = \left(xsen\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

y

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

(Rickert, 1968).

Se verifica que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

Si aplicamos la regla se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\left(sen\frac{1}{x^4}\right)x^3 - 4\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4} + 2\left(sen\frac{1}{x^4}\right)x\right)$$

Llegamos a la conclusión de que el límite buscado no existe ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4}$$

no existe, como puede apreciarse en la gráfica de

$$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^4}$$

(figura 1, realizada con el programa Scientific WorkPlace).

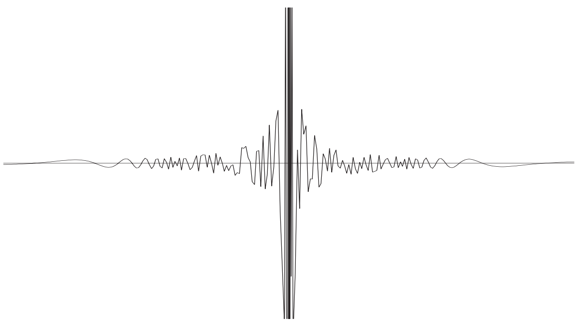

Figura 1

Sin embargo nuestra conclusión es falsa porque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} xsen\frac{1}{x^4} = 0$$

Como en el ejemplo anterior, la regla de L'Hopital sólo se puede aplicar si previamente existe el límite del cociente de las derivadas.

Ejemplo 3
Tomemos las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+\cos xsenx)$$

y

$$g(x) = f(x)e^{senx}$$

(Boas, 1986).

Se verifica que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

ya que

$$g(x) = f(x)e^{senx} \geq f(x)\frac{1}{e}$$

Si aplicamos la regla de L'Hopital se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos^2 x}{e^{senx}(\cos x)(\cos x + f(x))}$$

Observemos que el error se consuma al simplificar *cos x*. En efecto, tanto *cos x* como $e^{sen\,x}$ *cos x* son acotadas, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^{senx}\cos x + e^{senx} f(x)} = 0$$

Sin embargo esta conclusión es falsa porque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{senx}}$$

y el segundo límite no puede ser 0 ya que

$$\frac{1}{e^{senx}} \geq \frac{1}{e}$$

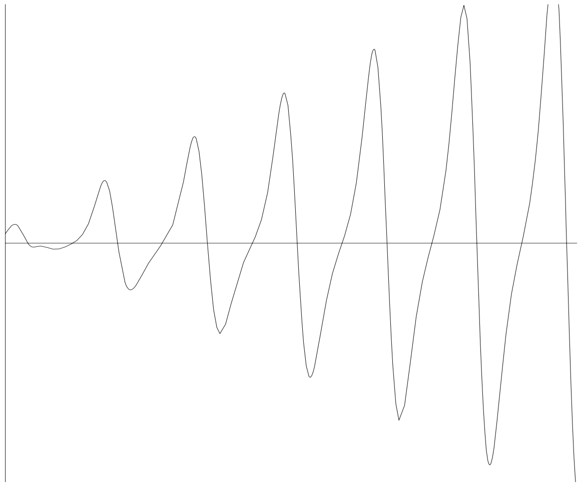

Figura 2

Observación: la regla sólo se puede aplicar si $g'(x)$ es distinto de cero en un entorno de $+\infty$, condición que no se cumple como puede verse en su gráfica (figura 2, realizada con el programa Scientific WorkPlace).

Función inversa

En este caso usaremos la Opción I.

Partiendo de una función inyectiva *f*, la función inversa f^{-1} suele visualizarse (Spivak, 1986, p. 298) intercambiando los ejes horizontal y vertical (esta práctica en la pizarra puede acarrear problemas en el cuello).

> *Partiendo de una función inyectiva f, la función inversa f^{-1} suele visualizarse (Spivak, 1986, p. 298) intercambiando los ejes horizontal y vertical.*

Paso 1: Partiendo de $y = f(x)$, entonces $x = f^{-1}(y)$, y derivando ambos miembros de la igualdad respecto de *x*, se obtiene la derivada de la función inversa en un punto $b = f(a)$. Este valor viene dado por la fórmula:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Paso 2: Evidentemente, la derivada de la inversa se calcula mediante la expresión anterior, siempre que el denominador de dicha expresión sea distinto de cero. Sin embargo, es posible que se cumpla esta condición, pero que ésta no baste para garantizar la derivabilidad de la inversa. En otras palabras, podríamos calcular el valor anterior, y que este valor no signifique nada.

En el ejemplo que sigue, daremos una función con estas características:

Ejemplo 4
Tomemos la función (Ionin, 1993)

$$f(x)=\begin{cases} x \quad si \quad x\leq 0 \\ (1+\frac{1}{n})x \quad si \quad \frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n} \\ \frac{x}{n(n+1)^2}+\frac{1}{n+1} \quad si \quad n\leq x<n+1 \end{cases}$$

Su gráfica está en la figura 3.

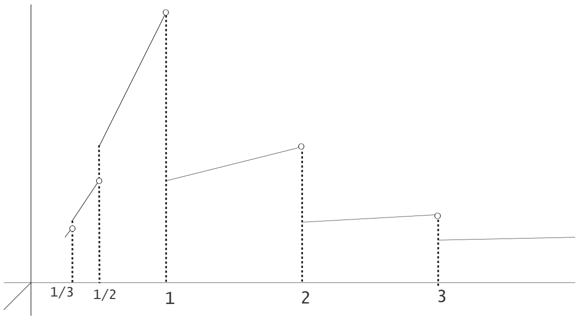

Figura 3

La función verifica que $f'(0) = 1$. En efecto:
Si $x < 0$ tenemos que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

por tanto $f'_-(0) = 1$.

Además:

$$f(x)=(1+\frac{1}{n})x\ ,n=n(x)=\left\lceil \frac{1}{x}\right\rceil -1$$

(el símbolo $\lceil\ \rceil$ representa la parte entera por exceso). Por tanto:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)=1$$

Entonces

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

Aunque hayamos podido calcular el valor anterior, este valor no tiene ningún significado. En efecto: gráficamente podemos observar que f^{-1} no está acotada en ningún entorno del origen y por tanto no es continua ni derivable en el origen.

Paso 3: En el enunciado correcto sobre la derivabilidad de f^{-1} en un punto $b = f(a)$ (Spivak, 1986, p. 309), aparece como hipótesis el hecho de que f sea continua en un entorno del punto a. Observemos que f verifica:

$$\lim_{x\to \frac{1}{n}^-} f(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n-1}$$

Por tanto, f es discontinua en cada $1/n$, por lo cual no existe ningún entorno de 0 en el que sea continua, y el teorema de derivación de la inversa no se puede aplicar.

Observación: a veces es posible aplicar una fórmula y obtener un resultado y, sin embargo, este resultado puede carecer de sentido.

Integrales

En este caso aplicaremos la Opción II.

Paso 1: Enunciamos la Regla de Barrow para calcular integrales definidas a través del cálculo de primitivas.

Paso 2: La regla anterior se presta a la automatización del cálculo de las integrales definidas: se calcula una primitiva y después se sustituyen los límites de integración. Sin embargo, esta automatización puede llevarnos a situaciones equivocadas. El problema se puede presentar si no miramos bien los límites de integración. Puede ocurrir que el integrando no esté acotado entre los límites dados, y no nos hayamos dado cuenta. Otra posibilidad es que la primitiva, que se obtiene mediante los métodos de integración habituales, tenga problemas en el intervalo dado por esos límites.

Paso 3: Damos los ejemplos que muestran las dos actuaciones equivocadas a las que nos hemos referido en el Paso 1.

Ejemplo 5
Consideremos la integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx$$

La primitiva de la función $1/x^3$ es

$$F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$$

La simple sustitución de los límites de integración da:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}dx=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{1}=0$$

Pero este resultado es falso. Notemos que $1/x^3$ no está acotada en [-1,1]. Por tanto, la integral dada es una integral impropia que resulta ser divergente por serlo

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^3}dx$$

Ejemplo 6
Consideremos la integral

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

para

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x+3sen^2x}$$

(Abramovitz, Berezina y Berman, 2003).

Mediante el cambio *tg x* = *t*, se obtiene:

$$\int f(x)dx=\int\frac{dt}{1+3t^2}$$

por tanto:

$$F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}tgx)+C$$

La simple sustitución de los límites de integración da como resultado:

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=F(\pi)-F(0)=0$$

Sin embargo, el resultado anterior es falso ya que al ser $f(x)$ continua y positiva se tiene que

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx>0$$

El problema radica en que $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ en [0, π], ya que no está definida en π/2. En realidad la primitiva de la función $f(x)$ en [0, π] debe tener la forma:

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}(\sqrt{3}\,\text{tg}\,x+C_1, & \text{si } x\geq\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}(\sqrt{3}\,\text{tg}\,x+C_2, & \text{si } x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Para asegurar la continuidad en π/2 ha de cumplirse que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}G(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}G(x)$$

Por tanto ha de ser:

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+C_1=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+C_2$$

De la igualdad anterior obtenemos que

$$C_2=C_1-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

por tanto:

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=G(\pi)-G(0)=C_1-C_2=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Observación: Debemos asegurarnos de que la primitiva que se obtiene con los métodos de integración está definida en el intervalo dado por la integral definida.

Ecuaciones diferenciales

En este caso aplicaremos la Opción II.

Paso 1: enunciamos el teorema de existencia y unicidad de un problema con valores iniciales:

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(a)=b\end{cases}$$

Paso 2: de forma análoga al caso de las integrales definidas, la resolución de las ecuaciones diferenciales se hace de forma automática, según el tipo de ecuación que sea, y seguidamente se aplica la condición inicial. Sin embargo, esta automatización puede llevarnos a situaciones equivocadas, si no nos aseguramos de que estamos en las condiciones del teorema.

La resolución de las ecuaciones diferenciales se hace de forma automática, según el tipo de ecuación que sea, y seguidamente se aplica la condición inicial.

Paso 3: ilustramos el comentario del Paso 2 con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7
Tomemos (Abramovitz, Berezina y Berman, 2002) el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (x-2)dx+(y-1)dy=0 \\ y(2)=1 \end{cases}$$

Como la ecuación diferencial

$$(x-2)dx+(y-1)dy=0$$

es exacta, la solución general viene dada por el potencial de $F=(x-2, y-1)$, es decir:

$$U(x,y)=\frac{1}{2}((x-2)^2+(y-1)^2)=C$$

De la condición inicial se obtiene $C = 0$ y se llega a la falsa solución

$$(x-2)^2+(y-1)^2=0$$

Observemos que reescribiendo la ecuación en la forma

$$y' = -\frac{x-2}{y-1}$$

vemos que

$$f(x,y)=-\frac{x-2}{y-1}$$

no es continua en ningún entorno de (2, 1), y por tanto no satisface las hipótesis del teorema.

Plano tangente

En este caso usaremos la Opción I.

Paso 1: generalizando el concepto de recta tangente, la fórmula del plano tangente a una superficie $z = z(x, y)$ en un punto $(a, b, z(a, b))$viene dada por:

$$z-z(a,b)=z_x(a,b)(x-a)+z_y(a,b)(y-b)$$

Paso 2: el paso de las funciones reales de una variable al de dos variables presenta una serie de dificultades a la hora de la extensión de ciertos conceptos. Aquí nos referiremos exclusivamente al paso del concepto de recta tangente al de plano tangente. Para el caso de una variable, la existencia de derivada en un punto asegura la existencia de una recta tangente en ese punto, sin embargo para el caso de dos variables, la simple existencia de las derivadas parciales en un punto no asegura la existencia de un plano tangente en ese punto: hace falta la diferenciabilidad de la función en el punto. Aquí nos encontramos con un caso parecido al que vimos con la derivada de la función inversa: podemos obtener la fórmula del Paso 1 y, sin embargo, esta fórmula puede carecer de sentido. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8
Tomemos (Martínez y Vinuesa, 2002) la función:

$$z(x,y)=\begin{cases} x & si \quad y=x^2, x\geq 0 \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

Esta función es continua en el origen y verifica que

$$z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0$$

con lo que aparentemente tendríamos que $z = 0$ es un plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el origen. Pero esto es falso. En la figura 4 se aprecia que la recta tangente a la curva (t, t^2, t) en $t = 0$ no está contenida en el plano $z = 0$, y por tanto éste no es un plano tangente.

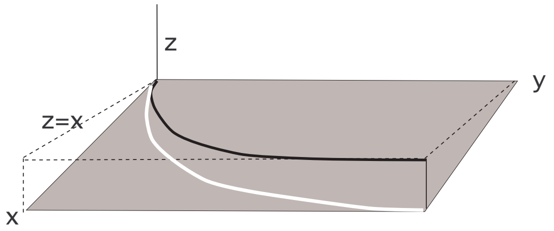

Figura 4

Observación: aunque podamos aplicar una fórmula, el resultado puede carecer de sentido.

Paso 3: damos el concepto de plano tangente unido al de la diferenciabilidad.

Extremos relativos condicionados de funciones de dos variables

En este caso usaremos la Opción I.

Cuando se introducen los extremos relativos, los alumnos no tienen problemas en comprender que el valor en un máximo relativo puede ser menor que el valor en un mínimo relativo.

Cuando se introducen los extremos relativos (tanto en funciones de una como de dos variables), los alumnos no tienen problemas en comprender que el valor en un máximo relativo puede ser menor que el valor en un mínimo relativo. Las figuras 5 y 6 ilustran este hecho.

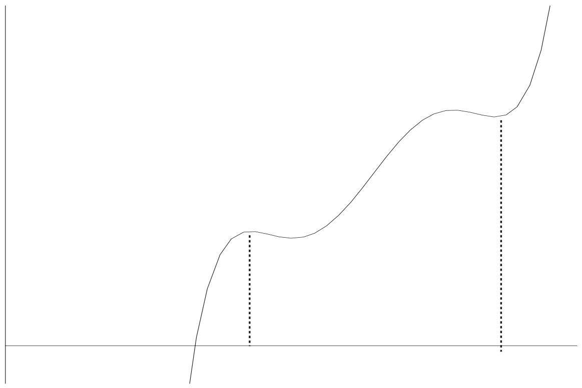

Figura 5

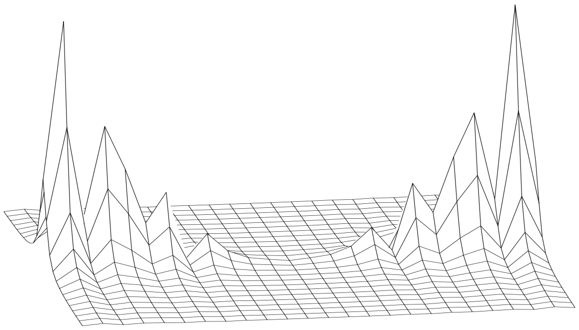

Figura 6

Es evidente que la misma situación se produce con los extremos relativos condicionados de funciones de dos variables. La figura 7 (Burgos, 1995, p. 180) ilustra la localización de los valores máximos y mínimos relativos de una función $z=z(x, y)$ cuando (x, y) recorre una cierta curva $g(x, y) = 0$.

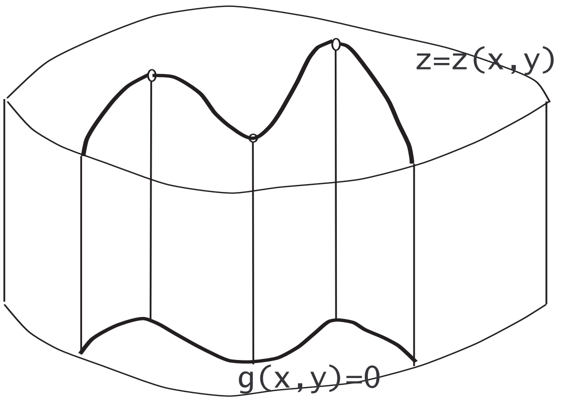

Figura 7

Parece lógico pensar que el valor de una función en un máximo relativo condicionado puede ser menor que el valor en un mínimo relativo condicionado. Sin embargo, en el método de los multiplicadores de Lagrange que se da en muchos libros de cálculo que manejan los alumnos, por ejemplo (Larson, 1995, p. 1075), se detalla que basta comparar los valores de la función en los puntos críticos de la Lagrangiana para saber donde están los máximos y los mínimos.

Paso 1: nos limitamos a la comparación de valores para la obtención de los máximos y mínimos.

Paso 2: damos el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 9
Tomemos la función:

$$z(x,y)=\frac{17}{8}x^3y-\frac{85}{4}x^2y+\frac{315}{4}x^3-\frac{265}{2}y+\frac{825}{8}x-\frac{117}{4}$$

cuando (x, y) recorre la parábola $y = x^2$. Los extremos condicionados coinciden con los de la función:

$$f(x)=z(x,x^2)=\frac{17}{8}x^5-\frac{85}{4}x^4+\frac{315}{4}x^3-\frac{265}{2}x^2+\frac{825}{8}x-\frac{117}{4}$$

Su gráfica en el plano está en la figura 8 (realizada con el programa Scientific WorkPlace).

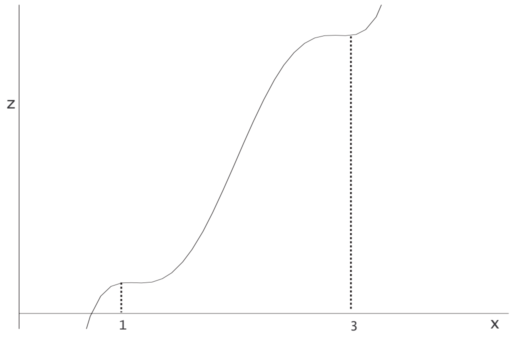

Figura 8

Esta función tiene un máximo relativo en el punto $x = 1$ de valor $f(1) = z(1, 1) = 1$, y un mínimo relativo en $x = 3$ de valor $f(3) = z(3, 9) = 9$. Por tanto en $(x, y) = (1, 1)$ hay un máximo condicionado, y en $(x, y) = (3, 9)$ un mínimo condicionado, y sin embargo, el valor en el máximo $z(1, 1) = 1$, es menor que el valor en el mínimo $z(3, 9) = 9$.

Paso 3: enunciamos correctamente el método de los multiplicadores de Lagrange (Burgos, 1995, p. 191).

Observaciones finales

Los ejemplos que se han expuesto muestran que las matemáticas van más allá de la simple aplicación de una fórmula. En los ejemplos 1, 2 y 3, vemos que la aplicación de un método, sin verificar si estamos en condiciones de aplicarlo, puede llevarnos a respuestas erróneas. En los ejemplos 4 y 8, observamos que las fórmulas de la derivada de la inversa y del plano tangente resultan demasiado tentadoras (nos basta con un simple cálculo de derivadas) como para preocuparnos de si se pueden aplicar o no. En los ejemplos 5, 6 y 7, vemos que una cosa son los métodos automáticos para soluciones generales y otra las condiciones particulares de un problema. Finalmente en el ejemplo 9, vemos que la excesiva simplificación en el enunciado de un teorema puede hacer que nos equivoquemos.

Resulta evidente que es imposible dar la versión más general de cada teorema que incluimos en nuestros temarios. El tiempo limitado o la escasa preparación de un sector de alumnos son factores que hacen que debamos buscar un necesario equilibrio entre los teoremas y las fórmulas. Quizás, a veces, no quede más remedio que sacrificar algunos aspectos teóricos o dar versiones más reducidas de ciertos teoremas. En ocasiones, conseguir el aprendizaje de ciertos métodos para la resolución de problemas cuesta tanto trabajo que nos damos por satisfechos con lograrlo. Aún en estos casos, en ocasiones especiales, podemos utilizar una de las propuestas de este artículo para hacer vislumbrar a nuestros alumnos la sutileza y belleza de las matemáticas.

En las referencias que se aportan, el lector interesado podrá encontrar un buen número de ejemplos relacionados con las cuestiones presentadas en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOVITZ, B., BEREZINA, M., BERMAN, A. (2002): "Incorrect but instructive", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 33, n.º 3, 465-475.

ABRAMOVITZ, B., BEREZINA, M., BERMAN, A. (2003): "Useful mistakes", Int. J. Math, *Educ. Science Technology*, vol. 34, n.º 5, 756-764.

BEREZINA, M., BERMAN, A. (2000): "Proof reading and multiple choise tests", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 31, n.º 4, 613-619.

BOAS, R. P. (1986): "Counterexamples of L´Hopital´s Rule", *Amer. Math. Monthly*, vol. 93, 644-645.

BURGOS, J. (1995): *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGraw-Hill.

CIPRA, B. (2000): *Misteakes... and how to find them before the teacher does*, A. K. Peters Ltd.

IONIN, Y. (1993): "On the derivative of the inverse function", Int. J. Math., *Educ. Science Technology*, vol. 24, n.º 1, 163-166.

LARSON, R., HOSTETLER, R., EDWARDS, B. (1995): *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2*, McGraw-Hill.

MARTÍNEZ, F., VINUESA, C. (2002): "A graphic study of the properties of real values functions of two variables", Int. J. Math. *Educ. Science Technology*, vol. 33, n.º 5, 733-739.

MOVSHOVITZ-HADAR, N., ZASLAVSKY, O. & INBAR, S. (1987): "An Empirical Classification Model for Errors in High Schools Mathematics", *J. Research Math. Educ.*, vol 18, n.º1, 3-14.

RICKERT, N. W. (1968): "A Calculus Counterexample", Amer. Math. *Monthly*, vol. 75.

SPIVAK, M. (1986): *Calculus*, Reverté.