SUMA 51

Febrero 2006, pp. 15-29

Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático

Un sencillo juego de fichas es el recurso que proponemos para que los alumnos utilicen métodos, técnicas y herramientas propios del razonamiento matemático inductivo y deductivo. En este artículo se comentan algunas vías para llegar a formular una hipótesis, y también se comentan distintas formas de abordar la demostración de dicha hipótesis; además, se incluyen consideraciones didácticas para que los propios alumnos construyan resultados matemáticos.

We suggest a simple board game with counters as a didactic resource so that pupils can get used to methods, techniques and tools of inductive and deductive mathematical thinking. In this paper we comment different methods to set a hypothesis and some ways to deal with the proof of this hypothesis; moreover we provide several didactical outlines, so that pupils can build their own mathematical results.

Los responsables de la Educación Matemática marcan como objetivo principal la formación de ciudadanos bien informados; es decir, ciudadanos que sean capaces de participar en decisiones políticas, económicas y sociales que implican cuestiones tecnológicas tan complejas como la protección del medio ambiente, la energía nuclear, los gastos militares, la conquista del espacio, etc.

Para alcanzar este objetivo es preciso, en primer lugar, que

> los niños se convenzan de que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos sino que, por el contrario, tienen sentido, son lógicas y son divertidas (NCTM, 1992, pp. 28).

En segundo lugar, como señala el Informe Pisa 2003, hay que lograr que los estudiantes sean competentes en Matemáticas, lo que significa potenciar su capacidad de analizar, razonar, comunicar eficazmente las ideas, y formular y resolver problemas en contextos variados.

Oigo, y olvido.
Veo, y recuerdo.
Hago, y entiendo.
Refrán popular

Este artículo ofrece un medio adecuado para avanzar en este camino, para que los alumnos puedan realizar tareas fundamentales en el trabajo matemático como son la recopilación de evidencias, la formulación de hipótesis y la elaboración de argumentos que apoyen las hipótesis formuladas. Nuestra propuesta es la de ofrecer a los estudiantes un juego, o actividad no identificada con resultados matemáticos escolares, para que hagan matemáticas sin inhibiciones:

> admitir que se pueden recorrer caminos equivocados o inconvenientes, estar dispuestos para rectificar o reformular las respuestas, y constatar, en suma, que las matemáticas no es una ciencia ya terminada en la que solamente hay cabida para la verdad o la falsedad (Gairín, 2001, pp. 59).

Desde estas consideraciones afrontamos el trabajo de analizar un juego de estrategia en el que se profundiza en los tres niveles de trabajo que se pueden abordar teniendo en cuenta las exigencias cognitivas de la tarea: resolver casos particulares, generalizar y demostrar. Su objetivo es que el profesor pueda reflexionar acerca de la educación del razonamiento matemático y de las peculiaridades de la comunicación de las ideas matemáticas. Este trabajo, persigue ofrecer al profesorado un desarrollo completo de una actividad de aula, en la que interesa mucho más el grado de formación del alumno que la relevancia de los resultados matemáticos alcanzados.

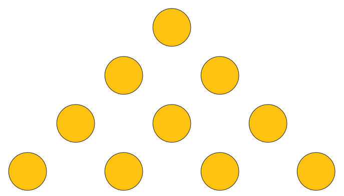
José María Gairín Sallán
Universidad de Zaragoza. Zaragoza
José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza. Zaragoza

Este artículo se estructura en tres partes, que se corresponden con los tres niveles de trabajo anteriormente establecidos, en cada una de las cuales el resolutor debe poner en juego conocimientos y destrezas de naturaleza bien diferenciada. De este modo, quedan recogidas distintas alternativas para que cada alumno pueda desarrollar, de acuerdo con sus competencias, tareas de alguno de los niveles y para que, con la ayuda del profesor, pueda avanzar hacia niveles de mayor dificultad.

Además, y por considerarla una actividad de aula, hemos querido reflejar tanto el proceso de búsqueda de la solución como los recursos utilizadas para comunicar dicha solución; en este sentido hemos querido dejar constancia del modo en que deberíamos estructurar el proceso de resolución del juego: delimitar con precisión el alcance de la tarea en cada uno de los tres niveles, los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para encontrar la solución, y las características de los sistemas de representación que hemos utilizado para comunicar la respuesta a las distintas tareas. Finalmente, y desde la consideración de que los problemas admiten soluciones diferentes, hemos introducido algunas sugerencias sobre otras posibilidades de dar respuestas a las tareas de cada uno de los niveles. Con ello queremos dejar constancia de que las respuestas que ofrecemos no son las únicas ni, posiblemente, las mejores; pero que para encontrar tales respuestas hemos debido utilizar conceptos, herramientas y técnicas que, a buen seguro, serán de naturaleza diferente a las utilizadas en otros procesos de resolución del juego.

Todo comienza con un pequeño juego o divertimento que encontramos en libros de matemática recreativa que reformulamos de este modo:

Con 10 fichas circulares iguales hemos formado el triángulo de la figura. ¿Cuál es el menor número de fichas que hay que mover para que el triángulo quede invertido?



Nivel 1. Resolver un caso particular

El enunciado contiene un reto, una situación problemática que hay que abordar. El trabajo del alumno es el de dar respuesta a la pregunta que se ha planteado y en los términos en que se formuló. Y este trabajo exige, cuando menos, tres tareas principales: precisar el enunciado, encontrar la solución y formular la respuesta.

Precisar el enunciado
Antes de resolver el juego consideramos oportuno introducir un par de matizaciones sobre el término *invertir el triángulo* que aparece en el enunciado del juego:

1. Decir que *el triángulo quede invertido* es equivalente a decir que *pasa de tener un vértice superior a tener un vértice inferior*.

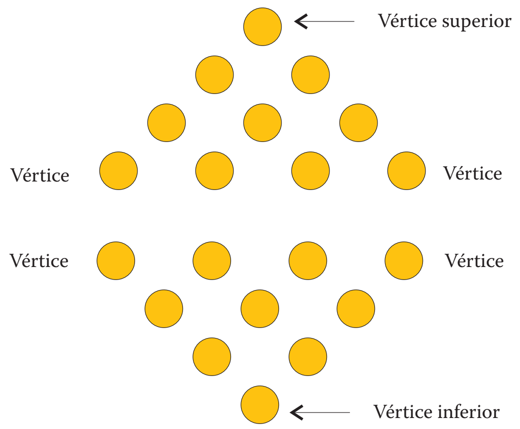


Figura 1. Triángulos de 10 fichas (4 filas) y vértices del triángulo

2. Añadimos una condición de simetría[1]: el vértice inferior estará sobre la recta *r* perpendicular a la base del triángulo que pasa por el vértice superior del triángulo original.

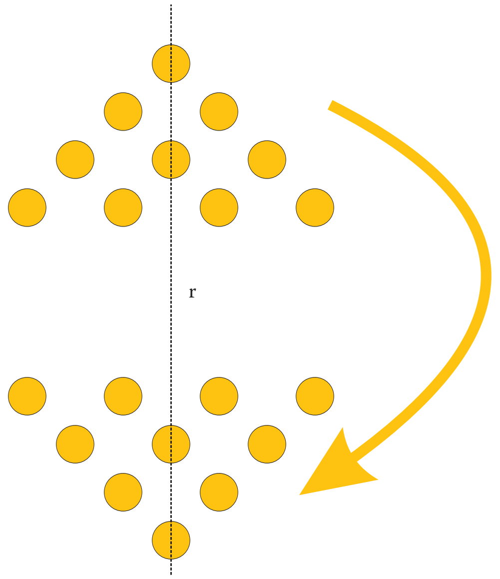


Figura 2. Invertir el triángulo con la condición de simetría

Encontrar la solución
En un primer momento podríamos intentar mover las fichas al azar, ir encontrando diversas formas de invertir este trián-

gulo de forma adecuada y elegir la que implique menor número de movimientos.

Pronto comprobamos que es necesario sistematizar el problema de alguna manera; es decir, encontrar algún método para llevar el control de los movimientos, comparar todas las posibles formas de mover las fichas y elegir la que exige el menor número de movimientos.

Para encontrar algún método que nos permita *rastrear* todas las soluciones posibles de invertir el triángulo, necesitaremos introducir algún tipo de notación o lenguaje que nos permita expresarnos de una manera eficiente. Con esta finalidad, nos ha parecido interesante numerar las filas del triángulo: llamamos fila 1 a la fila del vértice superior; fila 2 a la fila que está debajo de la fila 1 y que tiene 2 fichas; fila 3 a la que tiene 3 fichas y fila 4 a la que tiene 4 fichas. En el caso en que, moviendo las fichas, formemos una fila debajo de la fila 4, llamaremos fila 5 a esta nueva fila creada y así sucesivamente.

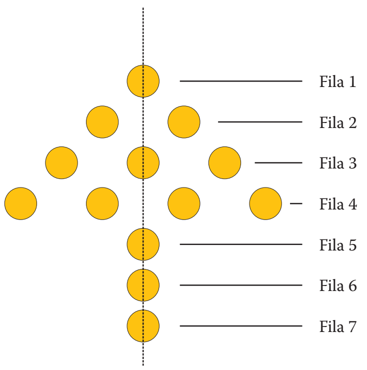
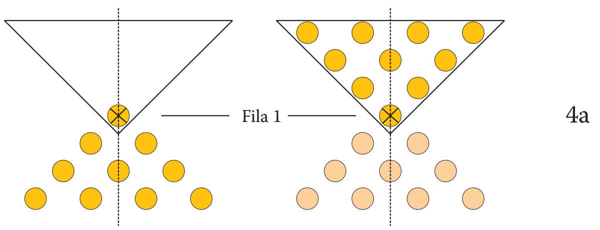


Figura 3. Numeración de las filas de un triángulo

Por la condición de simetría que hemos impuesto, observamos que la posición del vértice inferior del triángulo invertido resulta clave para resolver el juego. En efecto, fijada la posición del vértice inferior, queda determinado el triángulo invertido final (ver figuras 4a, 4b, 4c y 4d) cuyos *espacios vacíos* indican el número de movimientos a realizar y las fichas que quedan fuera de él serán las fichas que tendremos que mover para ocupar esos *espacios*. Por tanto, la forma de resolver el problema se traduce en dar respuesta a la pregunta: ¿en qué fila estará la ficha que corresponda al vértice inferior del triángulo invertido?



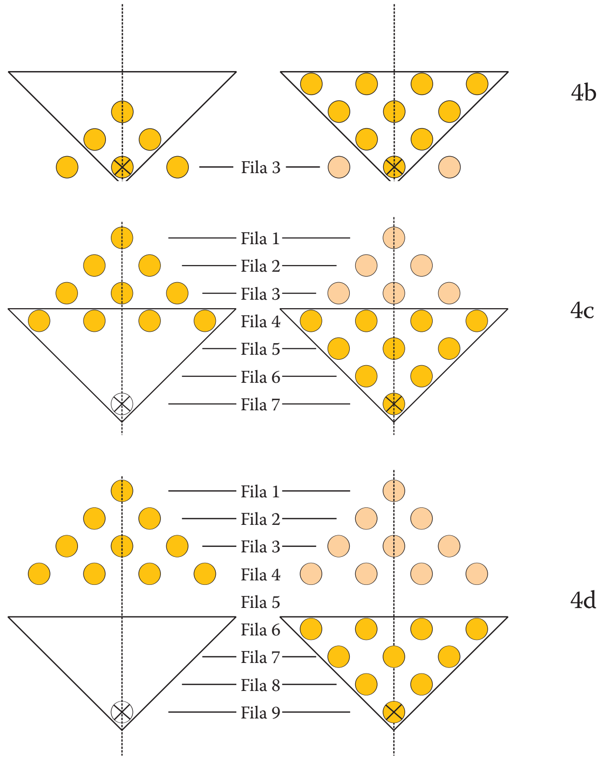


Figura 4. Inversión del triángulo con el vértice inferior situado, respectivamente, en la fila 1, en la fila 3, en la fila 7 y en la fila 9

Los ejemplos de la figura 4 reafirman nuestra idea de que la posición del vértice inferior del triángulo permite resolver el problema porque determina totalmente el número de movimientos. Así, si el vértice inferior estuviese sobre la fila 9 (figura 4d) tendríamos que mover todas las fichas; y si, por ejemplo el vértice lo situásemos en la fila 1 habríamos de mover todas las fichas menos la situada en la fila 1 (figura 4a). Además, una lectura detallada de los casos presentados en la figura 4 nos permite enunciar tres observaciones o ideas importantes para reducir el número de formas de invertir el triángulo:

- Comprobamos que el vértice debe situarse en una fila impar porque la condición de simetría con respecto a la recta *r* obliga a mover todas las fichas si el vértice está situado en una fila par (ver figura 5). En consecuencia, el vértice inferior se encontrará en las filas 1, 3, 5, 7, 9...

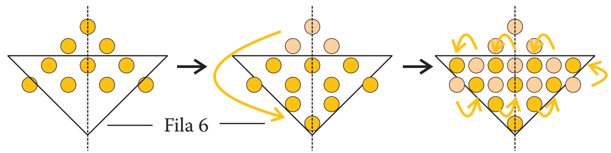


Figura 5. Inversión del triángulo con el vértice inferior situado en la fila 6

• El ejemplo de la figura 4d del párrafo anterior nos indica que podemos descartar los de la fila 9 en adelante para invertir con mínimos movimientos.

• También comprobamos que el vértice inferior de los triángulos invertidos tendrá que estar en una fila mayor que 4 (si estuviese por encima de la fila 4, podemos encontrar un modo de mover las fichas más *económico* fijando el vértice inferior dos filas debajo de la fila donde lo queríamos poner, como se pone de manifiesto en las figuras 4a y 4b).

Teniendo en cuenta estas observaciones, para resolver el problema nos quedan dos opciones por analizar: fila 5 o fila 7. Y se comprueba que la mejor posición del vértice inferior es en la fila 5, siendo 3 el número de movimientos.

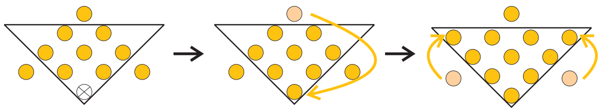


Figura 6. Esquema de la resolución del problema en un triángulo de 4 filas

Formular la respuesta

El alumno se debe enfrentar a una respuesta poco habitual como es la de minimizar el número de movimientos. Posiblemente haya alumnos que den como solución la primera de las formas en que han invertido el triángulo, lo que ofrece una oportunidad para que el profesor introduzca en el aula la reflexión sobre el momento en que se finaliza un problema, alertando sobre la necesidad de volver a leer el enunciado y de revisar la solución que se ofrece.

Y también es un momento oportuno para que los alumnos reflexionen sobre las particularidades de la comunicación en matemáticas. En efecto, la solución del juego comprende el número de fichas que hay que mover y la forma de hacerlo. El número de fichas a mover se hace con la utilización del sistema simbólico habitual para los números naturales; pero para la descripción de los movimientos no hay un sistema de representación de uso común, por lo que corresponde al resolutor crear un lenguaje de comunicación (que será de tipo gráfico en la mayoría de los casos, aunque también aparecerán notaciones de tipo simbólico). Es más, esta representación debe permitir al alumno hacer un estudio sistemático de la solución del problema: comprobar que se cumplen las reglas, controlar si hay posibilidades no contempladas, buscar otras posibles soluciones, etc.

Finalmente hay que utilizar algún sistema de representación para formular la respuesta en términos precisos y concisos. Ofrecemos algunas posibles maneras de dar la solución:

• Mediante representaciones verbales, que describen la situación utilizando el lenguaje materno y que resulta más o menos compleja de formular y de interpretar:

> Se mueven 3 fichas, que corresponden a los vértices del triángulo, y hay que desplazarlas una a la fila 5 y las otras dos a los extremos de la fila 2.

• Mediante representaciones gráficas: es un sistema que refleja las manipulaciones con las fichas, tal y como reflejamos en la figura 6.

• Mediante representaciones simbólicas, que ofrecen un amplio abanico de posibilidades de acuerdo con las capacidades y conocimientos del resolutor. A modo de ejemplo podemos citar el siguiente:

> Numerar las posiciones con dos dígitos (fila y columna): la ficha de la posición (1,4) pasa a la posición (5,4), la de la posición (4,1) a la posición (2,1) y la de la posición (4,7) a la posición (2,7).

Nivel 2. Generalizar

El enunciado del problema se formula en términos similares a los siguientes:

Supongamos que tenemos ahora un triángulo de fichas con un número cualquiera, n, de filas, ¿cómo conocer el mínimo número de fichas necesario para invertir el triángulo y la forma en que se realizan los movimientos?

Precisar el enunciado

La actividad de generalización exige utilizar el razonamiento inductivo que implica tareas como formular conjeturas, someter dichas conjeturas a prueba, formular nuevas conjeturas y enunciar la hipótesis. Y ello conlleva unas técnicas que favorecen el éxito y que también conviene que los alumnos conozcan: estudio sistemático de casos particulares, revisión de los resultados obtenidos, resolución de nuevos casos particulares para constatar las conjeturas, delimitar las series de datos que se quieren relacionar, descomponer los datos en dos o más series, etc.

Encontrar la solución

La solución al problema conlleva la formulación de una hipótesis en la que se relacione las características de un triángulo cualquiera y el número de fichas que hay que mover, así como las posiciones que deben ocupar las fichas que se mueven. Para ello, hay que formular alguna conjetura y someterla a prueba:

a. Formular una conjetura

Para lograr este objetivo parcial hay que decidir, en primer lugar, qué característica del triángulo vamos a considerar; nuestra propuesta es la de considerar el número de filas (aun cuando también se podría trabajar con el número total de fichas del triángulo o con otra característica).

En segundo lugar, hay que disponer de algunos datos que relacionen la característica número de filas con el número de fichas que se mueven o número de movimientos. En este sentido suele ser útil resolver casos más sencillos, con 2 y 3 filas, y ordenar los datos en una tabla como la siguiente:

Número de filas	2	3	4
Número de movimientos	1	2	3

Con estas informaciones surge una sencilla relación numérica que formulamos como conjetura: el número de movimientos necesarios para invertir un triángulo cualquiera es 1 unidad menor que el número de filas.

b. Someter a prueba la conjetura

Una vez formulada una conjetura es buen momento para animar a los alumnos a comprobar si *funciona* con nuevos casos, con otros triángulos distintos de los ya resueltos. Además, conviene que los alumnos actúen de forma sistemática, por lo que se aconseja resolver el triángulo de 5 filas, lo que significa indicar el número mínimo de fichas que hay que mover, así como la posición inicial de estas fichas y su posición final. Y también conviene que los alumnos trasladen al nuevo problema las técnicas y conocimientos adquiridos al resolver los casos anteriores.

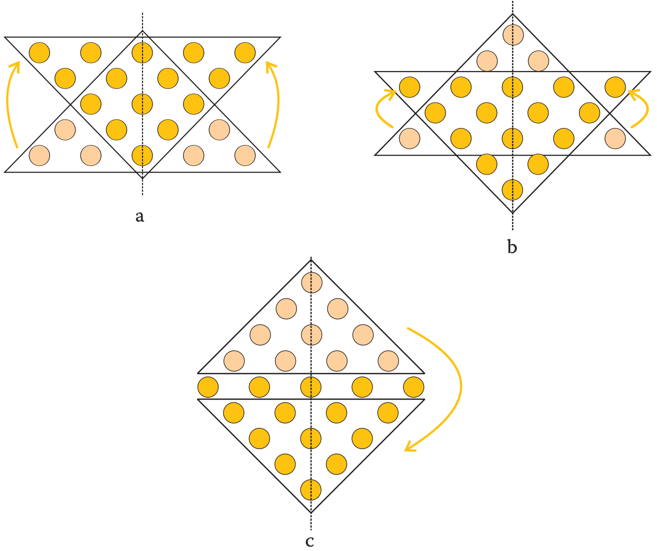


Figura 7. Esquema de los modos de invertir un triángulo de fichas de 5 filas

Con estas consideraciones, y aplicando razonamientos análogos a los utilizados en el triángulo de 4 filas, sabemos que el vértice inferior tendrá que encontrarse en las filas 5, 7 o 9. Las figuras 7a, 7b y 7c indican, respectivamente, que hay que mover 6, 5 ó 10 fichas; por tanto, la respuesta es colocar el vértice en la fila 7 y hacer 5 movimientos.

Trasladamos este resultado a la tabla

Número de filas	2	3	4	5
Número de movimientos	1	2	3	5

Con estos resultados resulta evidente que nuestra conjetura no se cumple para el triángulo de 5 filas y en consecuencia hay que seguir buscando nuevas conjeturas.

c. Obtención de más resultados y formulación de una nueva conjetura

Hay que proseguir con el estudio de triángulos con mayor número de filas. Y en este nuevo empeño cabe pensar que el trabajo con representaciones gráficas presentará dificultades técnicas que desaconsejan utilizarlas.

Otra forma de expresar la solución es mediante representaciones orales que tampoco son aconsejables porque se van haciendo más farragosas al aumentar el número de filas.

Finalmente, y ante la necesidad de estudiar nuevos casos, interesa *inventar* un sistema simbólico que nos permita formular la respuesta de manera ágil y precisa. En este sentido, y sin querer transmitir la idea de que la simbolización es única, a partir de la figura 7 establecemos que el proceso de invertir el triángulo consiste en actuar del siguiente modo:

1. Desplazar un triángulo de fichas de la parte superior del triángulo original de k filas (que denominamos triángulo superior) y dos triángulos de fichas iguales y simétricos respecto a r de j filas cada uno (a los que llamaremos triángulos laterales)[2]. Se admiten los triángulos de 0 filas.

2. El número de fichas que componen el triángulo de n filas lo simbolizamos con T_n , por similitud con los conocidos números triangulares[3].

3. Para expresar el número de movimientos que invierten el triángulo utilizaremos la expresión T_k+2T_j , en la que T_k indica el triángulo superior que hay que desplazar a la parte inferior y $2\ T_j$ indica los dos triángulos laterales que hay que desplazar[4].

4. Como se observa en la figura 8, hay tres variables que intervienen en esta modelización de la inversión de un triángulo: n el número de filas del triángulo original o el número de

fichas de la fila inferior, k el número de filas del triángulo superior y j el número de filas de un triángulo lateral. Además, se constata que estas variables están relacionadas por la igualdad: $2j + (k+1) = n$.

De esta forma conocido el número de n o tamaño del triángulo a invertir, para cada valor de k sabemos el tamaño de cada uno de los triángulos laterales: $j = (n - k - 1) / 2$.

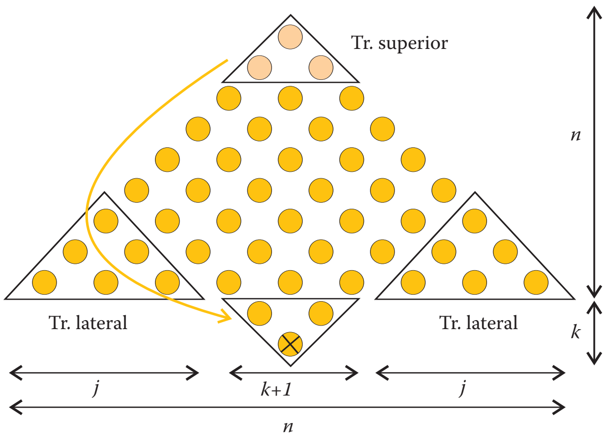


Figura 8. Inversión de un triángulo de 9 filas de forma que el vértice inferior esté en la fila 11. Relación entre las variables n, k y j

Esta técnica de modelizar el problema en términos matemáticos nos permite estudiar el juego a partir de relaciones numéricas; de este modo, ya no es necesario el soporte físico, la manipulación de fichas o la representación gráfica de las mismas, que nos ha servido para resolver casos particulares sencillos así como para construir un modelo matemático sustentado en representaciones simbólicas.

Así, para resolver el caso del triángulo de 5 filas analizamos las 3 posibles formas de invertir el triángulo:

a. El vértice inferior se coloca en la fila 5:

Hay que mover (ver figura 7a) un triángulo superior de 0 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 0 - 1)/2 = 2$ filas; por lo que el número de movimientos será: $T_0 + 2\ T_2 = 6$ movimientos.

b. El vértice inferior se coloca en la fila 7:

Hay que mover (ver figura 7b) un triángulo superior de 2 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 2 - 1)/2 = 1$ fila; por lo que el número de movimientos será: $T_2 + 2\ T_1 = 5$ movimientos.

c. El vértice inferior se coloca en la fila 9:

Hay que mover (ver figura 7c) un triángulo superior de 4 filas y dos triángulos laterales de $(5 - 4 - 1)/2 = 0$ filas; por lo que el número de movimientos será: $T_4 + 2\ T_0 = 10$ movimientos. La ventaja de este sistema simbólico es que facilita la resolución de nuevos casos que aportarán datos para la formulación de una nueva conjetura.

Así, para resolver un triángulo de 6 filas procedemos del siguiente modo:

- El vértice inferior se puede encontrar en las filas 7, 9 y 11. Luego el triángulo superior que tendremos que mover será de k = 1, 3 y 5 filas respectivamente. Calculamos de esta forma que el número de movimientos, en cada uno de los casos, serán:

$$T_1 + 2\ T_2 = 7$$
$$T_3 + 2\ T_1 = 8$$
$$T_5 + 2\ T_0 = 15$$

- Por tanto, se consigue invertir el triángulo con 7 movimientos y se debe mover un triángulo superior de 1 fila y dos triángulos laterales de 2 filas.

De forma similar podemos encontrar la solución del triángulo de 7 filas:

- El vértice inferior se puede encontrar en las filas 7, 9, 11 y 13. Luego el triángulo superior que tendremos que mover será de k = 0, 2, 4 y 6 filas, respectivamente. Con lo que obtenemos los siguientes resultados:

$$T_0 + 2\ T_3 = 12$$
$$T_2 + 2\ T_2 = 9$$
$$T_4 + 2\ T_1 = 12$$
$$T_6 + 2\ T_0 = 21$$

- Hacen falta 9 movimientos, que vienen descritos en la formulación $T_2 + 2\ T_2 = 9$

Una vez resueltos estos tres casos particulares nos replanteamos la tarea inicial, la de formular una solución general para un triángulo de n filas, para lo que procedemos a recoger los datos disponibles en una tabla:

n	2	3	4	5	6	7
mov	1	2	3	5	7	9

A la vista de estos datos, desechamos definitivamente la conjetura inicial (el número de movimientos es una unidad inferior al número de filas), pues no se cumple a partir del triángulo de 5 filas. A su vez, se pueden formular nuevas conjeturas, como la siguiente: el número de movimientos necesario para invertir un triángulo se corresponde con los números impares consecutivos (con excepción del caso $n = 3$).

d. Someter a prueba la nueva conjetura

Para comprobar si es válida esta nueva conjetura, obtenemos el número de movimientos necesarios para invertir el triángulo de 8 filas mediante el mismo sistema simbólico que planteamos en el apartado anterior. De esta forma, para invertir el triángulo de 8 filas, el vértice inferior puede estar en la filas 9, 11, 13 ó 15. Por lo tanto k = 1, 3, 5 ó 7, respectivamente. Con lo que obtenemos:

$$T_1 + 2\ T_3 = 13$$
$$T_3 + 2\ T_2 = 12$$
$$T_5 + 2\ T_1 = 17$$
$$T_7 + 2\ T_0 = 28$$

Luego el número de movimientos mínimo para invertir un triángulo de 8 filas es 12 y los movimientos realizados son los correspondientes a la expresión $T_3 + 2\ T_2$. Pero este resultado invalida *la conjetura de los impares* expresada en el apartado anterior y nos obliga a seguir obteniendo nuevos datos para conseguir formular otra conjetura.

e. Obtención de más resultados y nueva búsqueda de regularidades

Con el método anteriormente establecido y que se revela muy útil para la resolución de la inversión de triángulos con relativamente *pocas* filas[5], construimos esta tabla más extensa:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mov	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35

Es evidente que el número de movimientos es unas veces impar y otras veces par, por lo que desechamos la conjetura de los impares y formulamos nuevas conjeturas. En este sentido conviene señalar a los alumnos que la conjetura puede formularse a partir del estudio separado de diferentes grupos de datos, tal y como sugiere la lectura de la tabla con el agrupamiento de cada grupo de tres datos:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mov	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35
	+1	+1	+2	+2	+2	+3	+3	+3	+4	+4	+4	+5	

Vemos que el número de movimientos de un caso es la suma del número de movimientos del caso anterior más otro número. Para calcular éste es necesario hacer grupos de 3 en 3. De esta manera, el otro número que se suma es constante dentro de cada grupo de 3 casos y aumenta en 1 cada vez que pasamos a un grupo de 3 casos mayor.

Formular la respuesta

La respuesta al problema planteado exige, de una parte, indicar el número de fichas que hay que mover o el número de movimientos a realizar; y, por otra parte, hay que indicar cuáles son las fichas que se mueven y la posición que han de ocupar. En consecuencia, la respuesta exige dar dos resultados bien diferenciados que abordamos por separado: número de movimientos y la forma de mover las fichas.

Número de movimientos necesarios:

En el apartado anterior ya hemos encontrado una regularidad en la tabla que indica el número de movimientos a realizar para invertir el triángulo, pero resulta complicado escribir una fórmula para calcular el caso general *n*, así que vamos a agrupar de 3 en 3 los casos, haciendo un estudio diferenciado de cada uno de ellos:

Caso 1: $n = 3c$

Si $n = 3c$, c es el cociente entero de dividir n entre 3; tenemos la siguiente tabla

n=3c	3	6	9	12	15
mov	2	7	15	26	40
		+5	+8	+11	+14

Observamos que el número de movimientos para un valor de n se obtiene sumando al anterior valor de la tabla el correspondiente múltiplo de 3, menos una unidad:

$$mov\ (n) = mov\ (3c) = mov\ (3(c-1)) + (3c-1)$$

Aplicando esta igualdad a todos los casos, haciendo su suma y simplificando los términos que están en ambos lados de la igualdad, encontramos la expresión general de los movimientos necesarios para invertir el triángulo de n fichas, con n múltiplo de 3:

$$\begin{array}{llll} & mov\ (3) & = & (3 \times 1) - 1 \\ & mov\ (6) & = mov\ (3) \quad + & (3 \times 2) - 1 \\ & mov\ (9) & = mov\ (6) \quad + & (3 \times 3) - 1 \\ & \ldots\ldots & = \ldots\ldots \quad + & \ldots\ldots \\ & mov\ (3(c-2)) & = mov\ (3(c-3)) \quad + & 3(c-2) - 1 \\ & mov\ (3(c-1)) & = mov\ (3(c-2)) \quad + & 3(c-1) - 1 \\ + & mov\ (3c) & = mov\ (3(c-1)) \quad + & 3c - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$mov\ (n) = mov\ (3c) = 3[c+(c-1)+(c-2)+\ldots+3+2+1] - c =$$
$$= (3T_c - c) = 3c(c+1)/2 - c = (3c^2+c)/2$$

Caso 2: $n = 3c+1$

Construida la correspondiente tabla de valores

n=3c+1	4	7	10	13
mov	3	9	18	30

+6 +9 +12

y procediendo de forma similar al caso 1 se obtiene

$$mov\ (n) = mov\ (3c+1) = mov\ (3(c-1)+1) + (3c+1-1)$$
$$mov\ (n) = mov\ (3c+1) = 3T_c = 3c(c+1)/2$$

Caso 3: $n = 3c+2$

n=3c+2	2	5	8	11
mov	1	5	12	22

+4 +7 +10

$$mov\ (n) = mov\ (3c+2) = mov\ (3(c-1)+2) + (3c+2-1)$$
$$mov\ (n) = mov\ (3c+2) = 3T_c + c + 1 =$$
$$= 3c(c+1)/2 + c + 1 = (3c^2+5c+2)/2$$

Luego ya hemos formulado una expresión general que calcula el número mínimo de movimientos para un triángulo de cualquier número de filas[6]. Respondemos así a la pregunta de cuántas fichas hay que mover para invertir un triángulo de n filas. Lo que aún no sabemos es la forma en que hay que mover esas fichas para invertirlo.

Forma de mover las fichas:

Como hemos visto anteriormente, dado un triángulo cualquiera con n filas, el conocer en qué fila se sitúa el vértice inferior nos permite saber qué fichas hay que mover y a qué lugares hay que moverlas. Como vemos en la figura 8, para un n dado, si conocemos k, conocemos dónde se sitúa el vértice inferior y podemos identificar los triángulos superior y laterales. De esta manera, conociendo k deducimos cuál es el número de fichas que movemos y además la forma de moverlas.

En consecuencia, construimos una tabla en la que se relacionen n, las filas del triángulo a invertir, y k, las filas del triángulo superior que consigue invertirlo con el menor número de movimientos.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5

En esta tabla aparecen muchas posibles regularidades y se presta a formular distintas conjeturas. Nosotros, a la vista de los resultados obtenidos con el número de movimientos, preferimos separar los datos de la tabla en tres distintas:

Si $n = 3c$

n=3c	3	6	9	12
k	0	1	2	3

el triángulo superior tendrá $k = c-1$ filas. Por lo tanto, como $2j + (k+1) = n$, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Si $n = 3c + 1$

n=3c+1	4	7	10	13
k	1	2	3	4

el triángulo superior tendrá $k = c$ filas. Por lo tanto, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Si n = 3c + 2

n=3c+2	2	5	8	11	14
k	1	2	3	4	5

el triángulo superior tendrá $k = c + 1$ filas. Por lo tanto, cada triángulo lateral tendrá c filas.

Observamos que la forma de invertir el triángulo se corresponde con que los tres triángulos de fichas que movemos (triángulo superior y triángulos laterales) sean lo más iguales posibles.

Con los resultados obtenidos en los anteriores epígrafes, ya podemos enunciar una hipótesis sobre las condiciones para invertir un triángulo de cualquier número n de filas:

Para invertir un triángulo de n filas:

Si $n = 3c$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $3c^2+c/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c-1$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Si $n = 3c + 1$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $3c(c+1)/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Si $n = 3c + 2$
- El número mínimo de movimientos de fichas que realizamos es $(3c^2+5c+2)/2$
- La forma de mover las fichas es desplazar un triángulo superior de $k = c+1$ filas y dos triángulos laterales de c filas.

Revisar la solución
En el proceso de generalización necesitamos determinar una característica o variable independiente del problema sobre la que construimos todo el proceso. La elección de tal característica la hace el resolutor conjugando informaciones de distinta índole: sus intuiciones, sus observaciones al resolver casos particulares, su experiencia, sus interpretaciones del enunciado, etc.; además, tiene que definir otra variable dependiente que permita dar la respuesta al problema en forma de relación entre variables.

Esta decisión marcará el trabajo posterior de generalización. En efecto, tal y como se ha puesto de manifiesto en los apartados *Precisar el enunciado*, *Encontrar la solución* y *Formular la respuesta*, el trabajo se centra en dar la respuesta sin cuestionar la elección realizada: el número de filas del triángulo es la variable independiente y el número de movimientos es la variable dependiente. Salvo que se llegue a una situación de bloqueo, el resolutor buscará soluciones a los distintos problemas parciales que aparezcan hasta enunciar la hipótesis que va buscando.

Con posterioridad, y una vez revisado el trabajo, aparecen nuevas perspectivas del problema cuestionando las elecciones realizadas. De este modo, es factible alcanzar resultados que sean más simples, más comprensibles o más elegantes que los obtenidos en una primera solución. Conviene, por tanto, trasladar al alumno la necesidad y utilidad de revisar las soluciones porque se pueden encontrar nuevas relaciones, como estas dos que mostramos seguidamente:

1. La variable independiente que consideramos es el número de fichas que tienen los triángulos, comenzando por el de 2 filas, y la variable dependiente es el menor número de movimientos necesarios para invertir sus posiciones:

N.º de fichas	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
N.º de *mov*	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35

Observamos que en esta tabla resulta sencillo relacionar el número de fichas con el número de movimientos[7]: el número de movimientos de fichas mínimo es el cociente entero entre el número total de fichas y 3.

2. Mantenemos como variable independiente el número de filas n del triángulo, mientras que consideramos como variable dependiente el número de filas de cualquiera de los dos triángulos laterales que se desplazan al resolver el juego, y que denotamos con j:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4

A partir de esta tabla resulta sencillo establecer como hipótesis que: para invertir un triángulo de n filas con el menor número de movimientos, el número de filas j de un triángulo lateral será siempre el cociente entero c resultante de la división de n entre 3.

Nivel 3. Demostrar

La certeza matemática se alcanza mediante el razonamiento deductivo, demostrando la veracidad de las hipótesis formuladas por medio de argumentos lógicos y resultados matemáticos. Alcanzar la demostración de un resultado conlleva un proceso de recorrer distintos caminos, de retomar ideas abandonadas, de reformular el proceso, de buscar la simbología adecuada, etc. Y una vez que las ideas ya están claras queda el proceso de comunicar el resultado, lo que suele acompañarse de cambios en la simbología utilizada y nuevas reformulaciones de los argumentos.

El producto final oculta muchas de las ideas y de las fases del proceso seguido. Nuestra intención es la de ofrecer al lector algunas aclaraciones sobre el modo en que llegamos a los resultados, y siendo muy conscientes de que existen otras muchas formas de alcanzar dichos resultados.

Precisar el enunciado
El punto de partida son las hipótesis formuladas, los resultados alcanzados aplicando el razonamiento inductivo a unos pocos casos particulares. Recordemos que, en este caso, el menor número de movimientos necesarios para invertir el triángulo viene determinado por el tamaño de los tres triángulos de fichas que hay que mover, tal y como se recoge en el apartado *Formular la respuesta*.

Encontrar la solución
Para demostrar la veracidad de la hipótesis formulada no se parte de cero pues en el proceso seguido con el juego propuesto hay un camino recorrido que facilita el trabajo. En efecto, las observaciones y reflexiones realizadas para formular la hipótesis serán de gran ayuda en esta tarea: ya tenemos un sistema simbólico que se ha mostrado eficaz, ya conocemos de dónde procede el número de fichas que hay que cambiar, ya sabemos un método que garantiza la inversión de un triángulo cualquiera, ya conocemos resultados matemáticos que resultan adecuados para nuestro juego, etc. Especialmente interesa destacar dos informaciones que hemos obtenido en el proceso de generalización:

• El tamaño del que denominamos triángulo superior, de k filas, determina el tamaño de los dos triángulos laterales implicados en la inversión del triángulo.

• Las formas posibles de invertir el triángulo y el número de movimientos necesarios para lograrlo, vienen dados por expresiones de la forma $T_k + 2T_j$ donde k y j serán números naturales relacionados mediante $(k+1) + 2j = n$ (ver figura 8).

A partir de estos elementos hay que justificar que el número de fichas que aparece en la hipótesis es el mínimo, el que garantiza la inversión del triángulo desplazando el menor número de fichas posibles. Desde este punto de partida hay que planificar el proceso de demostración que se va a seguir y presuponiendo que la construcción de resultados matemáticos admite distintas vías, cada una de las cuales se corresponde con diferentes perspectivas de un mismo problema. Ofrecemos tres vías de demostración diferentes, cuyas características esenciales son las siguientes:

• La primera consiste en comprobar que el número de movimientos indicados en las hipótesis es menor que cualquiera de los movimientos necesarios para cualquiera de las otras posibilidades de invertir el triángulo. Es una demostración más cercana al mundo escolar pues solamente demanda la manipulación de símbolos algebraicos.

• La segunda consiste en establecer las condiciones para que uno de los números sea el mínimo de los números que forman el conjunto de posibles movimientos para invertir un triángulo de n filas. Para el alumno puede resultar interesante justificar la ordenación de un conjunto finito de números naturales, determinar las condiciones para que uno de dichos números sea el mínimo y comprobar que esas condiciones son las que figuran en las hipótesis.

• La tercera pone en juego conocimientos sobre el mínimo de una función. Desde el punto de vista del alumno, esta demostración aporta ideas sobre cómo afrontar el cálculo de mínimos con funciones naturales de variable natural.

Formular la respuesta

La presentación de los resultados matemáticos conlleva un proceso de refinamiento de distintas formulaciones. En dicho proceso nuevos discursos sustituyen a otros anteriores porque se consideran más precisos y más comprensibles, hasta alcanzar una versión que se considera definitiva y que es la que se plasma en los siguientes apartados:

Vía de demostración 1:

Lo que sabemos: En los apartados *Formular la respuesta* y *Encontrar la solución* ya se han sintetizado las hipótesis a demostrar y los conocimientos, técnicas y resultados que se han acumulado en el proceso de formulación de la hipótesis.

Pretendemos: Para alcanzar nuestro objetivo de demostrar la hipótesis vamos a proceder del siguiente modo:

1. Para cada uno de los tres valores que aparecen en las hipótesis calculamos M, el número de movimientos implicados.
2. Elegimos un valor cualquiera N, de los que invierten el triángulo.
3. Comparamos M y N para determinar cuál es el mayor de los dos y, en consecuencia, poder determinar si se cumplen las condiciones de valor mínimo para M.

1. Aparecen tres casos, para cada uno de los cuales ya calculamos, en el apartado *Formular la respuesta*, el número de movimientos:

$$M = T_{c-1} + 2T_c = 3c^2+c/2$$
$$M = T_c + 2T_c = 3c(c+1)/2$$
$$M = T_{c+1} + 2T_c = (3c^2+5c+2)/2$$

2. Elegimos un caso cualquiera de los que invierten el triángulo, $T_r + 2T_s$, siendo s distinto de c

El número de movimientos implicados es

$$N = \frac{r(r+1)}{2} + 2\frac{s(s+1)}{2}$$

Puesto que queremos comparar N y M vamos a utilizar valores similares; y como además sabemos que $r + 1 + 2s = n$, tomamos $r = n - 2s - 1$ y lo sustituimos en N, con lo que se tiene:

$$N = \frac{n^2 - 4ns - n + 6s^2 + 4s}{2} \quad [1]$$

3. Comparamos N y M en cada uno de los tres casos:

Caso a: $n = 3c$

Sustituyendo este valor en [1] se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs - 3c - 6s^2 + 4s}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + c}{2}$$

Por tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs - 2c + 3s^2 + 2s \quad [2]$$

Para saber si ese resultado es positivo o negativo, y dado que s es distinto de c, estudiamos las dos posibilidades:

- $s > c$

Tomamos $s = c + t$, siendo t mayor o igual que 1, y sustituimos en [2]

$$N - M = 3t^2 + 2t = t(3t + 2)$$

valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

- $s < c$

Tomamos $s = c - t$, siendo t mayor o igual que 1, y sustituimos en (2)

$$N - M = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$$

valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Caso b: $n = 3c + 1$

Procediendo de forma similar al caso a, se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs + 3c + 6s^2}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + 3c}{2}$$

Por tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs + 3s^2 = 3(c - s)^2$$

valor que es siempre positivo puesto que s es distinto de c.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Caso c: $n = 3c + 2$

Procediendo de forma similar al caso a, se tiene

$$N = \frac{9c^2 - 12cs + 9c + 6s^2 - 4s + 2}{2} \text{ y } M = \frac{3c^2 + 5c + 2}{2}$$

Por lo tanto

$$N - M = 3c^2 - 6cs + 2c + 3s^2 - 2s$$

- $s > c$

$N - M = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$, valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1. Por tanto $N > M$.

- $s < c$

$N - M = 3t^2 + 2t = t(3t + 2)$, valor que es siempre positivo puesto que t es mayor o igual que 1 . Por tanto $N > M$.

En consecuencia, queda probado que siempre $N > M$, luego N es el valor mínimo de los que invierten el triángulo; es decir se cumple esta parte de la hipótesis.

Vía de demostración 2:

Lo que sabemos: Para invertir el triángulo de n filas, tenemos que mover fichas. Hemos demostrado que la forma de mover fichas se puede organizar por medio de la estrategia de fijar el vértice inferior.

Como queremos elegir la inversión con el mínimo número de movimientos, podemos prescindir de las estrategias que sitúan el vértice inferior en las filas pares, puesto que en este caso deberíamos mover todas las demás para que se respete la condición de simetría (figura 5). También podemos prescindir de las que sitúan el vértice inferior por encima de la base (en la fila $d < n$), puesto que siempre moveríamos menos fichas si situásemos el vértice dos filas más abajo (en la fila d+2).

Comentamos en el apartado *Encontrar la solución* que si fijamos el vértice en cualquier fila, el número de movimientos que realizaremos tendrá esta expresión: $T_k + 2T_j$ donde k y j serán dos números naturales y se relacionan mediante la igualdad $(k+1) + 2j = n$ (ver figura 8). De las dos condiciones impuestas, obtenemos que $k + n$ será impar.

Dado un n, podemos hacer un listado con todas las expresiones del tipo anterior ordenando las expresiones que aparecen según el valor de k (ver tabla 9). En esta lista estarán contenidos no sólo todos los números de movimientos en que invertiremos el triángulo, sino la forma en que se invierte (ya que k determina la forma en que se realizan los movimientos).

n=11	k=0	$T_0+2T_5=30$
	k=2	$T_2+2T_4=23$
	k=4	$T_4+2T_3=22$
	k=6	$T_6+2T_2=27$
	k=8	$T_8+2T_1=38$
	k=10	$T_{10}+2T_0=55$

Tabla 9. Listado de todas las formas de invertir un triángulo de 11 filas, ordenado según k

Lo que pretendemos: Nuestro objetivo es identificar y escoger el número menor de entre todas las expresiones de la lista (en el caso de la tabla 9, el mínimo es $T_4 + 2T_3$), para lo cual tenemos que:

1. Encontrar las condiciones para que un número de la lista, $m = T_r + 2T_s$, sea menor que los anteriores.
2. Encontrar las condiciones para que un número de la lista, $m = T_r + 2T_s$, sea menor que los posteriores.

1. Razonamos con los números anteriores.

Tomamos el número, m_a , de la lista inmediatamente anterior a m: tiene $k = r - 2$ y vale $m_a = T_{r-2} + 2T_{s+1}$.

Entonces:

$$m - m_a = (T_r + 2T_s) - (T_{r-2} + 2T_{s+1}) = (T_r - T_{r-2}) + \\ + 2(T_s - T_{s+1}) = (r + r - 1) - 2\,(s + 1) = 2\,(r - s) - 3$$

Luego $m \neq m_a$ siempre, ya que r y s son números naturales y además

$$m < m_a \Leftrightarrow r - s \leq 1$$

Ahora vamos a intentar decir algo acerca de *todos* los números anteriores al m, usando esta nueva relación.

Sea un $m = T_r + 2T_s$ que cumpla la condición $r - s \leq 1$, sean $m_a = T_{r-2} + 2T_{s+1}$ y $m_{a(2)} = T_{r-4} + 2T_{s+2}$ el número anterior a m y a m_a en la lista respectivamente. Los *coeficientes* de m_a cumplen que $(r - 2) - (s + 1) = (r - s) - 3 \leq r - s \leq 1$; entonces afirmamos que $m < m_a < m_{a(2)}$.

En general, no es difícil comprobar que todo número anterior a m tendrá la forma $m_{a(q)} = T_{r-t} + 2T_{s+q}$ con t y q números naturales.

Luego la resta de sus *coeficientes* será $(r - s) - (t + q)$ y será ≤ 1.

Por lo tanto, queda probado que si encontramos en nuestra lista un número $m = T_r + 2T_s$ tal que $r - s \leq 1$, entonces

$$m < m_a < \ldots < m_{a(q)} < m_{a(q+1)} <\ldots$$

2. Razonamos ahora con los números posteriores.

Tomamos el número, m_p , de la lista inmediatamente posterior a m: tiene $k = r + 2$ y vale $m_p = T_{r+2} + 2T_{s-1}$.

Entonces:

$$m - m_p = (T_r + 2T_s) - (T_{r+2} + 2T_{s-1}) = \\ = (T_r - T_{r+2}) + 2(T_s - T_{s-1}) = -\,(r + 1 + r + 2) + 2s = \\ = (-2)\,(r - s) - 3$$

Luego $m \neq m_p$ siempre, ya que r y s son números naturales y además

$$m < mp \Leftrightarrow r - s \geq -1$$

Por razonamientos análogos a los realizados con los números anteriores podemos decir que si encontramos en nuestra lista un número $m = T_r + 2T_s$ tal que $r - s \geq -1$, entonces

$$m < m_p <\ldots< m_{p(q)} < m_{p(q+1)} <\ldots$$

Con todo esto, concluimos que sea $m = T_r + 2T_s$ un número de la lista entonces

m cumple que $-1 \leq r - s \leq 1 \Rightarrow m$ es el mínimo de la lista[8].

Este resultado coincide con las hipótesis del apartado *Formular la respuesta*:

a. Para $n = 3c$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c - 1$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = (c - 1) - c = -1$. Luego $T_{c-1} + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

b. Si $n = 3c + 1$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = c - c = 0$. Luego $T_c + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

c. Si $n = 3c + 2$, donde c es su cociente entero, el menor número de movimientos se conseguirá al mover un triángulo superior de $k = c + 1$ filas, y dos triángulos laterales de $j = c$ filas.

En este caso, $k - j = (c + 1) - c = 1$. Luego $T_{c-1} + 2T_c$ será el mínimo número de movimientos para invertir el triángulo.

Vía de demostración 3:

Ahora abordamos la demostración del problema desde el punto de vista de la optimización de funciones.

Fijado un n, para invertir un triángulo de n fichas, necesitamos mover un triángulo superior de k filas y mover dos triángulos laterales de j filas. Estas variables cumplen que $k + n$ es impar y $2j + (k + 1) = n$.

Cada valor que toma k representa una forma distinta de realizar la inversión y un número distinto de movimientos de fichas. Una manera cualquiera para invertir el triángulo constará de $T_k + 2T_j$ movimientos.

$$T_k + 2T_j = \frac{k(k+1)}{2} + 2\frac{j(j+1)}{2} =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{n-k-1}{2}\left(\frac{n-k-1}{2}+1\right) = \frac{3k^2+(2-2n)k+n^2-1}{4}$$

Puesto que n es un número fijo (hace el papel de un parámetro), observamos que el número de movimientos realizados nos queda como una expresión que varía en función de k.

Luego podemos entender el número de movimientos necesarios para invertir un triángulo de n filas como una función aritmética de variable k, $f_n(k)$. Donde

$$f_n(k) = \frac{3k^2+(2-2n)k+n^2-1}{4}$$

y cuyo dominio de definición será $\mathbb{Z} \cap [0, n) \cap \{k \mid k+n \text{ impar}\}$.

El problema de hallar el número y la forma de mover las fichas de un triángulo de n filas para que éste quede invertido se reduce a encontrar el valor k con el que se obtiene el mínimo de la función $f_n(k)$. Al ser f_n una función aritmética (su dominio de definición y su imagen son conjuntos de números naturales), la forma de hallar su mínimo será diferente de cuando lo hacemos para una función cuyo dominio son los números reales ya que entonces podemos usar el concepto matemático de derivada para calcular su crecimiento y decrecimiento y encontrar su mínimo. Es por ello que, para encontrar el mínimo de $f_n(k)$, recurrimos a una función real auxiliar definida del siguiente modo:

$$g_n(x) = \frac{3x^2+(2-2n)x+n^2-1}{4}$$

que cumple

$g_n(k) = f_n(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z} \cap [0, n) \cap \{k \mid k+n \text{ impar}\}$.

Averiguando para qué valor de x se obtiene el mínimo de g_n (analizando el crecimiento y decrecimiento con su función derivada), tomamos en el dominio de f_n el valor k más aproximado a este x y de esta manera, podemos asegurar (ya que g_n es una función parabólica) que $f_n(k)$ es el mínimo de f_n.

Como

$$g_n{}'(x) = \frac{3x+(1-n)}{2}$$

entonces hay un mínimo en

$$x = \frac{n-1}{3}$$

1. Si $n = 3c$ entonces $x = c - 1/3$.

Ahora bien, si tomamos $k = c$, entonces $k + n = 4c$ es par y por tanto no pertenece al dominio de f_n. En consecuencia, el k más próximo a $c - 1/3$ es $k = c - 1$.

2. Si $n = 3c + 1$ entonces $x = c$ y $k = x = c$.

3. Si $n = 3c + 2$ entonces $x = c + 1/3$ y, por razonamientos análogos a los del caso 1, el k del dominio más próximo a $c + 1/3$ es $k = c + 1$.

A modo de conclusión

Una vez completada la actividad que ha surgido desde un problema particular enunciado como un divertimento matemático, nos parece oportuno hacer algunas consideraciones desde la perspectiva de la educación matemática:

La actividad matemática admite diferentes niveles o grados de dificultad; por tanto, es posible implicar a los alumnos en tareas matemáticas ajustadas a sus conocimientos y habilidades matemáticas. Además, conforme los alumnos alcancen éxitos en tareas de un determinado nivel se podrán proponer tareas de niveles superiores.

La realización de tareas como las planteadas en este trabajo ayudan a que los alumnos no limiten su concepción de las matemáticas a una disciplina científica que consiste en conocer y aplicar técnicas de cálculo. Entendemos que de este modo se provoca en los alumnos actitudes positivas hacia las matemáticas y, en consecuencia, un mayor interés por el estudio.

Las recomendaciones de los expertos inciden en la conveniencia de que los alumnos conecten las diversas áreas de las matemáticas, puesto que si no se producen tales conexiones, los alumnos se ven obligados a aprender y recordar demasiados conceptos y destrezas en vez de reconocer los principios generales que son realmente relevantes (NCTM, 1992). El juego que hemos desarrollado, al igual que muchos otros juegos y problemas genuinos, permite establecer de forma natural conexiones entre ideas aritméticas, algebraicas, geométricas y funcionales.

A lo largo de este trabajo hemos querido transmitir la idea de que la Matemática no es una ciencia terminada y que los resultados matemáticos no se alcanzan siguiendo un único camino. Esta idea será asumida por los alumnos en tanto en cuanto contrasten sus trabajos con los de otros compañeros y observen que los problemas se pueden abordar desde distintos planteamientos y que cada uno de ellos puede utilizar razonamientos, procedimientos y herramientas de índole claramente diferenciadas.

La comunicación en matemáticas es esencial para comprender y comunicar las ideas tanto personales como colectivas. Es más, en la resolución de problemas, como es el caso del juego que nos ocupa, aparece la necesidad de crear un sistema de representación, generalmente simbólico, que represente el modo en que se ha resuelto el problema. Es más, en la resolución es el propio resolutor quien debe *inventarlo*, y también quien decide si lo modifica o lo abandona de acuerdo con la eficacia que demuestre al utilizarlo en distintas fases del trabajo. Resulta necesario, por tanto, que los alumnos presenten y discutan con sus compañeros las soluciones que han encontrado y la forma en que lo han hecho; esta actividad les obligará a organizar sus exposiciones, a describir la simbología utilizada, a justificar los resultados utilizados y a utilizar argumentos bien construidos.

Actividades similares a las planteadas en este trabajo ayudan a que los alumnos simulen el trabajo de los matemáticos. Y para que esta práctica docente resulte efectiva deben modificarse los tradicionales papeles y relaciones en el sistema esco-

NOTAS

1 Incluimos esta condición de simetría para *simplificar* el trabajo. Se puede demostrar que no es necesaria, ya que para cualquier forma de invertir el triángulo dejándolo *desplazado*, se puede encontrar otra forma de invertirlo que cumpla la simetría con respecto a r y que tenga el mismo o menor número de movimientos de ficha.

2 Por sistematizar la forma de mover las fichas, trasladaremos siempre las fichas del triángulo superior a la parte inferior del triángulo original, y las fichas de los triángulos laterales serán trasladadas a las correspondientes posiciones simétricas (ver figura 7).

3 Cabe recordar que el número de fichas de T_n es igual a $n(n+1)/2$

4 Sobre la modelización matemática:

El juego permite un trabajo inicial de manipulación de objetos reales, pero al ampliar el trabajo a situaciones con un mayor número de fichas surge la necesidad de sustituir los objetos reales por modelos matemáticos que faciliten la tarea.

En la descripción realizada hemos recurrido a la modelización del juego con números triangulares que representan bloques de fichas que han de trasladarse. Y sobre este modelo hemos dado respuesta a las tareas de formulación de hipótesis y construcción de demostraciones.

De nuevo alertamos sobre la existencia de otras posibilidades de construir modelos ante una misma situación problemática. Así, por ejemplo, podíamos haber construido un modelo como el siguiente, que ejemplificamos con un triángulo de 7 filas:

Hacemos un modelo del triángulo como una sucesión de números dispuestos en una tabla de 1 columna por 7 filas, donde cada fila indica el numero de fichas que tiene (ver tabla *A*). El procedimiento de invertir el triángulo se produciría cuando al sumar y restar números a los que hay en la tabla *A*, llegásemos a otra tabla donde los números estén situados en orden inverso (ver tabla *B*). Las sumas y restas que se realizan se pueden recoger en otra tabla (ver transiciones) y de ella, sumando todos los números positivos obtendríamos el número de movimientos para invertir un triángulo.

Tabla *A*	Fichas	Transiciones	Fichas	Tabla *B*
Fila 1	1	-1		Fila 1
Fila 2	2	-2		Fila 2
Fila 3	3	+4	7	Fila 3
Fila 4	4	+2	6	Fila 4
Fila 5	5		5	Fila 5
Fila 6	6	-2	4	Fila 6
Fila 7	7	-4	3	Fila 7
Fila 8		+2	2	Fila 8
Fila 9		+1	1	Fila 9

Como vemos en la tabla central, los signos que preceden a los números indican si hay que quitar (-) o añadir fichas en una fila cualquiera; además, las p fichas que se quitan de una fila se deben trasladar a la fila en que aparece $+p$.

Para conocer el número de movimientos necesarios para invertir el triángulo basta sumar los valores del cuadro central que tienen el mismo signo. En este caso, el número de movimientos será 1+2+2+4=9.

Lo que queremos destacar es que con este modelo diferente se alcanzarán los mismos resultados pero se hará de un modo distinto, y también serán distintas las ideas puestas en juego para formular y justificar las hipótesis. En efecto, ya intuimos que los movimientos se podrán expresar como sumas de términos de sucesiones aritméticas, pero ¿cómo razonaríamos para poder calcular todas las inversiones posibles?, ¿cómo sería el paso entre los datos obtenidos con este modelo de números al modelo de las fichas?, ¿cómo se garantiza la condición de simetría?, ¿cómo sería la búsqueda de regularidades y la generalización?, etc.

5 Al valorar este método de obtención de los movimientos debemos reconocer que es poco eficaz puesto que para casos en los que n sea grande habría que realizar muchos cálculos (para n = 100 habría que analizar 50 casos, para n = 1000 analizaríamos 500, etc). Por lo tanto, intentamos un camino más *económico*. Vamos a trabajar con el número de movimientos mínimos necesarios para invertir triángulos con un número pequeño de filas y aplicar un razonamiento inductivo para obtener resultados generales.

6 Esta expresión general también podríamos ponerla en función de n, quedando de esta forma:

Caso 1: mov $(n) = (n^2+n)/6$

Caso 2: mov $(n) = (n^2+n-2)/6$

Caso 3: mov $(n) = (n^2+n)/6$

7 Trabajando con la expresión de los números de movimientos en función de n que figura en la nota anterior, esta regularidad es casi directa.

8 Aunque no lo necesitemos (ya que lo hemos encontrado de manera concreta en las conjeturas), es posible demostrar que en la lista siempre existe algún número m cuyos *coeficientes* r y s cumplen que $-1 \le r - s \le 1$. Por lo tanto podemos ampliar el resultado y decir que

m es el mínimo de la lista $\Leftrightarrow -1 \le r - s \le 1$

lar: el alumno debe ejercer el trabajo del aprendiz de una profesión, el trabajo de la persona que, bajo la tutela del maestro, va paulatinamente adquiriendo los conocimientos del profesional; el profesor ocupa la posición del maestro artesano, la del experto profesional, que tiene a su cargo a un colectivo de aprendices a los que va educando en la profesión; y el conocimiento matemático es el resultado de los trabajos que realizan los alumnos acompañados de su profesor (Gairín, 2002).

Esperamos y deseamos que este trabajo sirva para que unos cuantos profesores animen a unos cuantos alumnos a realizar unas cuantas actividades que impliquen la construcción personal de resultados matemáticos. En apoyo de este deseo incluimos publicaciones, más o menos recientes, de las que se pueden sacar actividades para proponer a los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALBUENA, L. (1999): *Naciones y banderas*, Proyecto Sur, Granada.

BALBUENA, L., CUTILLAS, L. y COBA, D. de la (2000): *Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos*, Rubes, Barcelona.

BRANDRETH, G. (1999): *Juegos con números*, Gedisa, Barcelona.

CAPÓ, M. (2005): *El país de las mates. 100 problemas de ingenio*, Volúmenes 1 y 2, El Rompecabezas, Madrid.

CHAMOSO, J. y RAWSON, W. (2003): *A vueltas con los números*, Nivola, Madrid.

DEULOFEU, J. (2001): *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*, Planeta, Barcelona.

DEULOFEU, J. (2003): *Gimnasia mental*, Martínez Roca, Barcelona.

FABRETTI, C. (1999): *El libro del genio matemático,* Martínez Roca, Barcelona.

FERRERES, J. (2003): *Juegos de ingenio*, Orbis, Barcelona.

GAIRÍN, J.M. (2001): "Hacer matemáticas: el juego como recurso", *Aspectos didácticos de Matemáticas 8*, Educación Abierta, 153, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GAIRÍN, J.M. (2002): "Aprender a demostrar: los juegos de estrategia", *Actas de las X Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Volumen I, pp. 171-188, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GARDNER, M. (2000): *Los mágicos números del Doctor Matriz*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Juegos y enigmas de otros mundos*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GARDNER, M. (2002): *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GRUPO ALQUERQUE (2004-2005): Sección Juegos, *SUMA*, Madrid.

GUZMÁN, M. de (2002): *La experiencia de descubrir en geometría*, Nivola, Madrid.

HAIGH, J. (2003): *Matemáticas y juegos de azar*, Tusquets, Barcelona.

HOFFMAN, P. (2000): *El hombre que sólo amaba los números,* Granica, Barcelona.

JOUETTE, A. (2000): *El secreto de los números*, Robinbook, Barcelona.

MALA, M. (2000): *Juegos de ingenio III*, Victor, Barcelona.

MALA, M. (2002): *Juegos de ingenio V*, Robinbook, Barcelona.

MUÑOZ, J. (2003): *Ernesto, el aprendiz de matemago*, Nivola, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, NCTM (1992): *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*, Sevilla.

NAVARRO, A. y MORAL, T. (2003): *Ingenio 2*, El Aleph, Barcelona.

NELSON, R. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.

NIEDERMAN, D. (2003): *Juegos matemáticos. Rompecabezas, cifras y números para agudizar el ingenio*, Victor, Barcelona.

PERELMAN, Y. (2002): *Matemáticas recreativas*, Martínez Roca, Barcelona.

PISA 2003 (2004): *Evaluación Pisa 2003. Resumen de los primeros resultados en España*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

SEGARRA, LL.: *Problemates*, Graó, Barcelona.

SERRA I FABRA, J. (2002); *El asesinato del profesor de matemáticas*, Anaya, Madrid.

SMULLYAN, R. (2001): *El enigma de Scherezade*, Alianza Editorial, Madrid.

SORET, I. (2003): *Matemágicas*, ESIC, Madrid.

STEWART, I. (2000): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

STEWART, I. (2005): *Locos por las matemáticas: juegos y diversiones matemáticos*, Crítica, Barcelona.

VIVES, P. (2003): *Juegos de ingenio*, Martínez Roca, Barcelona.

UNO (1988): Número 18, monográfico sobre juegos matemáticos.

En Internet:

www.arrakis.es

www.juntadeandalucia.es/averroes

www.educa.aragob.es

www.divulgamat.net

www.buscoacertijos.com

www.matematicas.net

www.recursosmatematicos.com

www.galeon.com