SUMA 50

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS MADRID · NOVIEMBRE 2005 · Nº. 50 · ISSN 1130-488X

SUMA 50
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Noviembre 2005

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6600 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

Artículos

Poliedro

Actividades de la FESPM

Seguimos SUMAndo

SUMA cumple cincuenta números en este noviembre de 2005 y creemos que hay que celebrarlo. Por ello, SUMA 50 se edita por primera vez en color también en las páginas del interior de la revista.

En octubre de 1988 se publicaba en Granada el número uno de SUMA. Su director entonces, Rafael Pérez Gómez, decía en el editorial:

> SUMA nace con pretensión de ser una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, órgano de expresión de la Federación de Sociedades que la edita(...); útil para la clase, plural, participativa, dedicada a todos los niveles educativos recogiendo ideas, sugerencias, informaciones, innovaciones....

Diecisiete años más tarde sus palabras siguen definiendo el espíritu de esta revista y el sentimiento de los que actualmente la hacemos.

En el otoño de 1991 SUMA se trasladó a Huelva y se hizo cargo de la dirección Sixto Romero. SUMA publicaba su número 9. En 1995 comezó la etapa aragonesa. SUMA se editó en Zaragoza desde el número 20 hasta el 43, durante ocho años.

Heredamos así en Madrid, en el año 2003, una realidad consolidada. Hemos tratado de seguir impulsando con nuestra propia energía la revista en estos dos primeros años del periodo de cuatro en el que SUMA estará en nuestras manos.

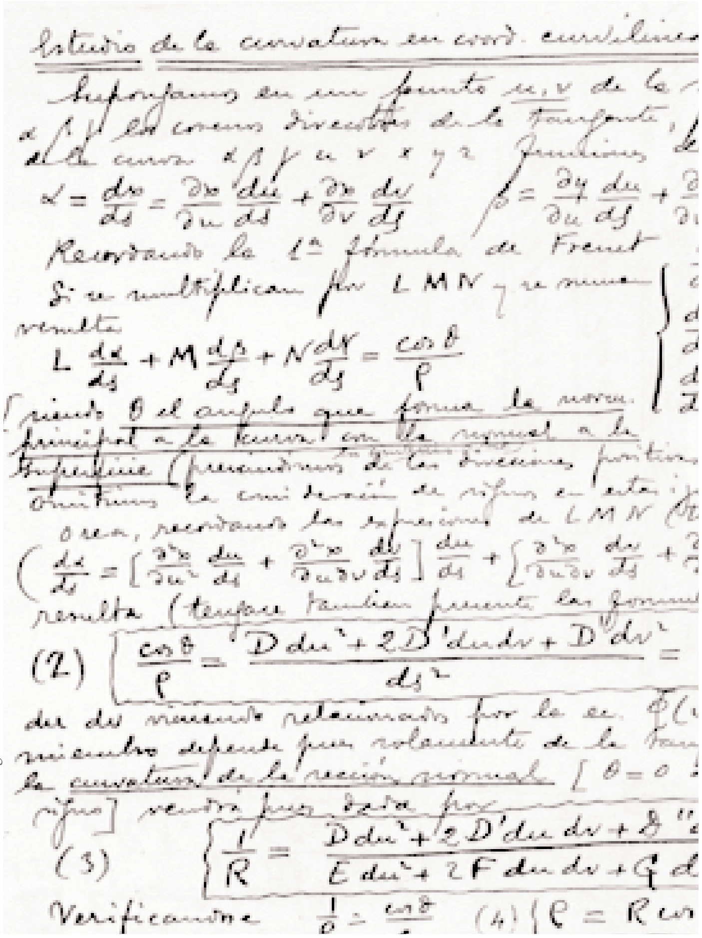
Anunciábamos en el último editorial nuestro compromiso de editar, probablemente en soporte digital, unos nuevos índices de SUMA, que incluyeran todo lo publicado en estos primeros 50 números. Algunos problemas técnicos nos han obligado a retrasar la salida de estos índices, que esperamos distribuir con SUMA 51.

Recientemente ha presentado su solicitud de ingreso en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas una nueva sociedad. Se trata de la Sociedad Balear de Matemàtiques Xeix*. Cuando leas este editorial, incorpordada probablemente ya la nueva Sociedad, en la FESPM seremos veinte.*

Desde SUMA damos la enhorabuena a nuestros colegas de las Islas Baleares y les instamos a colaborar con la revista, que desde ahora es también suya, con sus contibuciones y sus ideas. Deseamos también a esta nueva Sociedad los mayores éxitos en su tarea.

Rafael Pérez terminaba el editorial del primer número de SUMA con un enfático ¡Súmate a SUMA! *Nosotros terminaremos éste con la frase que nos ha servido de título*:

¡Seguimos SUMAndo! ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 50
Noviembre 2005, pp.7-14

Einstein y las matemáticas

Con motivo del centenario de la publicación de los Papeles de 1905 se conmemora mundialmente El Año de la Física, que está siendo el año Einstein. Los profesores de matemáticas tenemos ante nosotros un estimulante escenario para poner nuevamente de manifiesto el fecundo engarce de las teorías abstractas de la razón con las aparentemente ocultas leyes de la naturaleza.

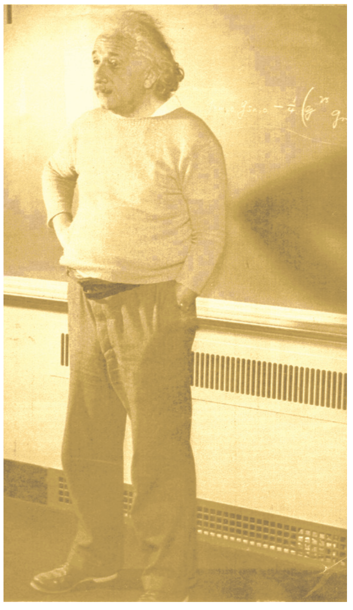
The United Nations have declared 2005 The world year of physics, to mark the hundredth anniversary of the publication of Einstein´s important five Papers in 1905. For mathematics teachers, this represents a stimulating framework to recall the strong links between the abstract theories with the apparently hidden laws of Nature.

Albert Einstein obtuvo el título de *Profesor en Física y Matemáticas* en la Escuela Politécnica Federal de Zurich en 1900, y aunque decidió dedicarse a problemas de la realidad física siempre tuvo que recurrir a nuevas herramientas matemáticas, hasta el punto que el sueño de sus últimos años –la teoría de la unificación– le exigió un esfuerzo matemático que no logró resolver, pero que le mantuvo en plena creatividad. Su legado no sólo han sido los problemas resueltos, también forma parte de su herencia la búsqueda inacabada de la unidad del cosmos.

En este artículo se hace un repaso sobre la formación matemática de la personalidad más influyente del siglo XX (encuesta de la revista Time), sus opiniones sobre la disciplina, y sobre las matemáticas usadas en sus principales obras.

Infancia: la caza del animalito *x*

Albert Einstein nace en 1879 en la ciudad suaba de Ulm. La familia –judíos alemanes– se traslada un año después a Munich, donde su padre Hermann y su tío Jacob montaron una tienda y una fábrica de material eléctrico. Será en la capital de Baviera donde Einstein realice los estudios primarios y dejará sin terminar los del Gimnasio. Hermann tuvo que ponerse a trabajar sin terminar estudios superiores, pero Jacob si acabó los estudios de ingeniería. Tanto uno como otro fomentaron la afición del pequeño Albert por las matemáticas.



Ángel Requena Fraile
IES La Cabrera. La Cabrera. Madrid

Sus primeros pasos en la escuela fueron poco prometedores, los profesores no tenían buena opinión de un niño que hablaba tan despacio que les exasperaba. Con diez años –en la escuela primaria– el hijo de los Eintein empieza a mostrar sus posibilidades pues se inicia en la lectura de divulgación científica y ya se había familiarizado con el álgebra. El encargado de enseñarle fue su tío Jacob, al que gustaba repetir:

> El álgebra es una ciencia muy divertida. En ella se caza un animalito cuyo nombre se ignora y al que se designa por x. Cuando ha caído en la trampa, el cazador le agarra y le da su verdadero nombre.

> Por supuesto que la experiencia retiene su cualidad de criterio último de la utilidad física de una construcción matemática. Pero el principio creativo reside en la matemática.
> *Albert Einstein*

Esta caza algebraica le deleitaba hasta el punto de saltarse los métodos convencionales usando atajos. Su tío fue también el que le mostró por primera vez el teorema de Pitágoras:

> El teorema de Pitágoras me lo enseñó uno de mis tíos, antes... Tras arduos esfuerzos logré probar el teorema sobre la base de la semejanza de triángulos.

Pero será en el Gimnasio muniqués donde se produce el apasionante encuentro del joven con la geometría:

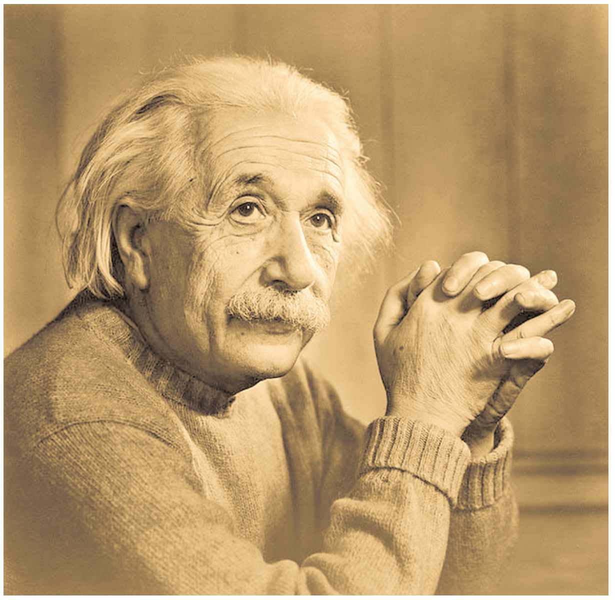
> A la edad de doce años experimenté el asombro con un librito sobre geometría euclídea del plano, que cayó en mis manos al comienzo del curso escolar. Había allí asertos, como la intersección de las tres alturas de un triángulo en un punto... podían probarse con tanta seguridad que parecían estar a salvo de toda duda.

Muchos años más tarde, Albert fue así de contundente al expresar la importancia de la formación geométrica en el despertar intelectual:

> Si Euclides no ha logrado inflamar vuestro entusiasmo juvenil, esto significa que no habéis nacido para convertiros en un pensador científico.

Como los negocios de la familia no van bien, padre y tío trasladan la residencia y la empresa a Milán y a Pavía, dejando al joven en Munich para que terminara la escuela secundaria. Su rebeldía le va a ocasionar el primero de los múltiples problemas: Albert es expulsado del Gimnasio por socavar el respeto de los alumnos hacia los profesores.

Fracasado en la secundaria por enfrentarse con el rígido profesorado de Munich, la familia busca fuera de Alemania –pero de habla germana– donde puede continuar los estudios su vástago. El prestigioso Politécnico Federal de Zurich será el centro elegido.



Nuevo fracaso: no tiene el diploma de secundaria, y las notas de lengua y biología son malas. Le salvan los resultados brillantes en matemáticas que impresionan tanto al director que decidirá rescatarle orientándole para que termine los estudios secundarios. En la escuela suiza de Aarau encontrará Albert un ambiente mucho más favorable: libertad e investigación. Un curso más y tendrá abiertas las puertas del Politécnico.

Desapercibido en el Politécnico

Entre los años 1896 y 1900 estudiará Einstein en el Politécnico de Zurich. Ninguno de sus profesores pudo anticipar que, cinco años después, ese joven desconocido –faltaba mucho a las clases– iba a revolucionar la imagen física del mundo. Así lo expresaba un matemático que primero fue su profesor y más tarde clave para dar consistencia formal a la Teoría General de la Relatividad, Hermann Minkowski:

> Nunca habría esperado semejante trabajo de mi exalumno.

Albert prácticamente no va a clase –pasará desapercibido– prefiere estudiar por su cuenta, encerrarse en los laboratorios y acudir a las fuentes originales de las teorías: Maxwell, Boltzmann o Hertz. En esta época es cuando su interés se reparte equitativamente entre la física y las matemáticas, como ponen de manifiesto los cursos complementarios a los que asiste: ecuaciones en derivadas parciales, cálculo de variaciones, mecánica analítica y mecánica general entre otros.

La nota más alta de licenciatura de Einstein –sobre 6– fue en una materia matemática: teoría de funciones, un 5,5. En física teórica, práctica y astronomía se quedó en el 5.

Einstein obtiene el *Diploma de profesor en física y matemáticas* pese a su aversión por los exámenes, que le asqueaban y le apartaban de abordar verdaderos problemas científicos. De hecho, la ayuda para aprobar la obtenía por la generosidad de su amigo Marcel Grossmann que le pasaba sus cuidadosos apuntes. Grossmann fue tan importante como Minkowski para el posterior desarrollo del formalismo matemático de la relatividad.

La nota más alta de licenciatura de Einstein –sobre 6– fue precisamente en una materia matemática: teoría de funciones, un 5,5. En física teórica, práctica y astronomía se quedó en el 5. Pese a sus notas no fue contratado por el Politécnico.

Tras la licenciatura empiezan los problemas de empleo. Además Albert quiere casarse con una compañera: Mileva. En la avanzada Suiza las mujeres pueden estudiar en el Politécnico pero no reciben el diploma sino un certificado.

En 1900 Einstein tiene que optar entre la matemática y la física. Así lo confiesa:

> El hecho de que descuidase hasta cierto punto las matemáticas no respondía exclusivamente a que mi interés por las ciencias naturales fuese mas fuerte que el que sentía por aquellas, sino también por la siguiente circunstancia singular. Yo veía que las matemáticas estaban parceladas en numerosas especialidades, cada una de ellas por sí sola podía absorber el breve lapso de vida que se nos concede. En consecuencia yo me veía como el asno de Buridan, que era incapaz de decidirse entre dos gavillas de heno. Presumiblemente esto se debía a que mi intuición en el campo de las matemáticas no era lo bastante fuerte como para diferenciar claramente lo que era básico...Además, mi interés por el estudio de la naturaleza era sin duda más fuerte; y en mi época de estudiante no tenía aún claro que el acceso a un conocimiento más profundo de los principios más básicos de la física depende de los métodos matemáticos más intrincados. Sólo poco a poco se fue haciendo esto claro para mí tras años de trabajo científico independiente.

Esta última confesión es muy significativa, está hecha en sus años finales, cuando su *tormento matemático* es mayor. Einstein ha descubierto que su enorme intuición física no es suficiente, necesita herramientas matemáticas más avanzadas que las que domina.

Max Planck y Albert Einstein

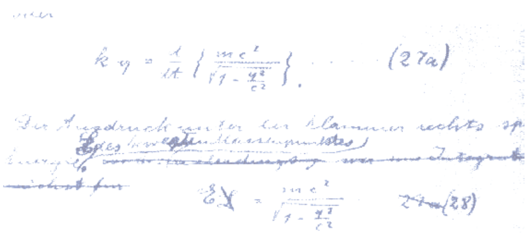
Anni mirabiles: 1902-1905

La epidemia de peste apartó a Isaac Newton de sus obligaciones académicas. Los años 1665 y 1666 de estancia en Whoolsthorpe del joven Newton (nacido en 1642) supusieron el hallazgo de lo que constituye su obra fundamental en todos los campos: el binomio, el método de tangentes, el de fluxiones (diferencial), el inverso (integral), la teoría de los colores y la atracción gravitatoria. ¡Impresionante! Newton tardó en publicar, fue dosificando y puliendo, pero con 24 años había creado una imagen del mundo intocable durante dos siglos. Es obligado citar a Newton, pues su producción juvenil sólo es comparable con el periodo de Berna de Albert Einstein.

Tras impartir algunas clases –sustituciones– Albert consigue trabajo en la oficina de patentes de Berna. Se opera el milagro. El trabajo es interesante en sí mismo –la creatividad y variedad de los inventos– y también por el tiempo que le deja para pensar. A diferencia de Newton, Einstein no está aislado; con un grupo de amigos forma la Academia Olimpia, un club de debates múltiples que solía reunirse en el café Metropol. Los olímpicos igual discuten un problema matemático, una teoría física o sobre el Quijote.

El ambiente de seguridad económica y estímulo intelectual le ofrece al joven diplomado la libertad que anhelaba. Einstein nunca quiso que le pagaran por investigar: sólo ganándose la vida de otra manera podía dirigir sus estudios en la dirección que le marcaba su espíritu rebelde.

No necesitaba mucho; si le preguntaban sobre su laboratorio respondía señalando su estilográfica.



En 1905, un marginal del mundo universitario, va a publicar cinco artículos en campos dispares que van a conmocionar la física:

- Una nueva determinación de las dimensiones moleculares (determinación del número de Avogadro). Tesis doctoral.
- Sobre el movimiento de partículas pequeñas suspendidas en líquidos en reposo exigido por la teoría cinético molecular del calor (movimiento browniano).
- Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento (relatividad restringida).
- ¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido en energía?
- Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz (hipótesis cuántica y efecto fotoeléctrico).

Entre los cinco artículos apenas suman 80 páginas. El premio Nobel de 1921 le será concedido curiosamente por el último trabajo, no por el principio de relatividad, que todavía tenía influyentes detractores.

Los recursos matemáticos usados por Einstein son fundamentalmente ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, integrales de superficie y volumen, laplacianos, y cálculo de extremos.

La generalización del principio de relatividad: obstáculos matemáticos

Después de 1905 se empiezan a abrir las puertas universitarias al funcionario de patentes. La creatividad de Einstein, su espíritu libre, su anhelo de armonía, le llevará inmediatamente a buscar una alternativa a lo que ha socavado: la imagen mecánica del universo. Más tarde dirá: *perdóname Newton.*

Hasta ahora, Albert ha optado por Maxwell frente a Newton, pero la batalla intelectual se ha librado en el terreno del primero, en la electrodinámica. Ha llegado el momento de combatir en el centro mismo de la soberbia construcción de Newton: la gravitación. En 1908 ya tenía Einstein una idea de cómo abordar la sustitución de la acción a distancia por una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Y, sin embargo, hasta 1916 no puede publicar la *teoría general*; ha surgido un fortísimo obstáculo: se requiere algo más que las ecuaciones diferenciales del Politécnico. La superación de la barrera matemática le llevará al joven profesor ocho años.

La primera universidad importante que le reclama es Praga. En 1911 Einstein disfrutará de la hermosura de la ciudad con grandes paseos, pero su incapacidad para el protocolo académico le alejará del profesorado. Una excepción fue George Pick quien, en estimulantes discusiones matemáticas le sugiere por primera vez que use los trabajos de dos matemáticos italianos para el problema de la relatividad general. Desde 1900 estaba disponible una memoria de Ricci y Leví-Civita que introducía un nuevo ente matemático, el cálculo tensorial, y que se estaba mostrando como una herramienta muy potente. Pick morirá en los campos de exterminio.

Muestra del reconocimiento de la comunidad científica a las aportaciones de 1905 es la invitación que recibe Einstein para asistir a los encuentros Solvay de 1911. En Bruselas se reúne lo más selecto de la ciencia, de hecho a Austro-Hungría sólo llegan dos invitaciones. El carácter revolucionario de las aportaciones hará que no todas ellas gocen de acuerdo universal, pero serán los nazis muchos años más tarde los únicos que negarán todo crédito al trabajo de su compatriota.

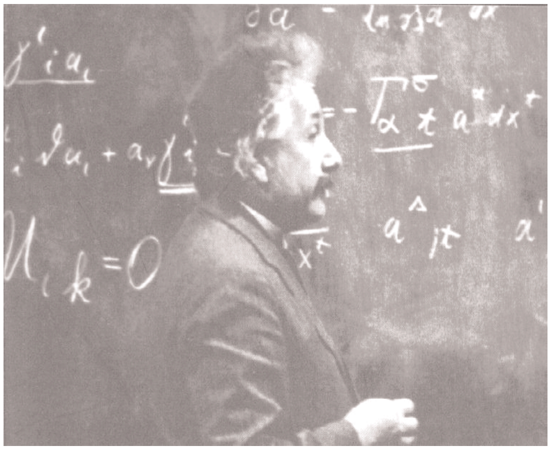
En 1912 le reclama su antiguo Politécnico, doce años más tarde y como un creador reconocido se produce el retorno. Einstein se reencuentra con sus escasos amigos, en particular con Grossmann. Su colaboración será de nuevo esencial para la fundamentación matemática de la relatividad general. Las herramientas que permitirán sacar conclusiones de las creativas intuiciones van a ser: la mencionada teoría de tensores y la geometría cuadridimensional de su profesor Minkow-ski, que además incorpora la curvatura de Riemann.

El periodo de enseñanza en Zurich va a ser básico para recorrer el camino de la generalización de la relatividad; y también, con la perspectiva de hoy, no puede dejar de asombrarnos lo difícil que era anquilosarse en la época. Los cursos en Zurich eran cambiantes por semestres: en el invierno de 1912-1913 Einstein enseña análisis matemático y termodinámica, en el siguiente semestre mecánica de los medios continuos y teoría del calor y, en el último, electricidad y magnetismo, y óptica geométrica. Un profesor del politécnico no podía anclarse en una especialidad.

La oferta recibida de la Universidad de Berlín hace que en 1914 Einstein se desplace a una ciudad que no había perdido su prominencia científica desde que Guillermo II en el XVIII atrajo a los grandes de su época. La capital de Prusia era ahora la de la Alemania unificada y estaba en su esplendor. La guerra hará que el nuevo profesor se distinga... por ser de los pocos académicos que firme en contra del militarismo alemán y su afán de dominio.

Y en plena guerra –en 1916– aparece lo que va a ser la más refinada y compleja aportación de Einstein: *Fundamento de la teoría general de la relatividad*.

A diferencia de la brevedad y concisión de los artículos de 1905, el trabajo de fundamentación supera las 100 páginas, dedicando casi la mitad al apartado B: *Recursos matemáticos para establecer ecuaciones de covarianza universal*. El cálculo tensorial es adaptado para encontrar las ecuaciones del movimiento en sistemas de referencia no galileanos.



Einstein y Gotinga: física y matemáticas

Otro aspecto de la compleja relación –que fue evolucionando con el tiempo– de Einstein con las matemáticas la podemos observar en sus comentarios sobre el principal centro de desarrollo matemático desde Gauss hasta los años treinta: la universidad de Gotinga. Hablar de la universidad alemana en la época es hacerlo de Klein y sobre todo de Hilbert. Las observaciones de Einstein son algo duras, no comenta tanto el trabajo realizado como el elitismo que percibió en sus contactos:

> La gente de Gotinga me asombra a veces, no como si quisieran ayudar a alguien a expresar claramente algo, sino al contrario, como si únicamente quisieran demostrarnos a los físicos que son mucho más brillantes que nosotros.

Este juicio puede completarse con la –quizá más significativa– expresión humilde de Hilbert sobre el mérito de Einstein:

> En las calles de nuestra Gotinga matemática, el primer muchacho recién llegado comprende la geometría cuadridimensional mejor que Einstein. Y, sin embargo, a pesar de esto, quien realizó la tarea fue Einstein y no los matemáticos.

En efecto, el fino olfato de Hilbert, que fue tan útil para la mecánica cuántica, parte del conocimiento de que la obtención de las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones del campo constituía un problema muy difícil. Para vencerlas fue necesaria cierta intuición física, que permitiera comprender la imagen del mundo.

Incluimos en este apartado otro comentario de Einstein en una conferencia en el Colegio de Francia (1922):

> Su error [el de algunos matemáticos] consiste en no ver más que relaciones formales, sin pararse a considerar las realidades físicas que se corresponden con los símbolos matemáticos.

Einstein pasó muchos años trabajando sobre construcciones matemáticas complejas... sin embargo sus construcciones teóricas comprendían siempre principios simples y claros. Estos principios son los que divulgaba, y después había que dejar que la armonía y la fuerza convincente de la teoría hicieran el resto.

Einstein expresó –en *Geometría y experiencia*– el principio de precaución en la aplicabilidad de los modelos a la realidad de forma muy contundente:

> En la medida que las proposiciones matemáticas se refieren a la realidad, no son seguras; y, en la medida en que son seguras, no se refieren a la realidad.

El eclipse de 1919 y el Premio Nobel

Las previsiones de desviación de la luz en presencia de un campo gravitatorio podían ser comprobadas. El responsable de hacerlo sería el astrofísico Eddington. La apertura de ideas del inglés se pone de manifiesto en su empeño inmediato por conocer y aplicar la teoría de un *enemigo* en plena guerra. La anécdota que de él se cuenta es la respuesta a un periodista que le preguntó sobre la dificultad de una teoría que sólo dominan tres personas; la socarrona respuesta de Eddington fue: *Eintein es uno, ¿quien es el otro?*

La verificación en 1919 durante un eclipse solar de las previsiones de desviación de la luz por Eddington no sorprende a Einstein, sus fuertes convicciones están basadas en la buena fundamentación matemática de la teoría y en su arraigada creencia en la cognoscibilidad del mundo. En el artículo original de 1916 se recogía la prueba hasta ese momento inexplicable de la desviación del perihelio de Mercurio.

La concesión del Premio Nobel de Física en 1921 le llega por una parte de sus trabajos de 1905, ni la Relatividad Restringida ni la General recibieron premio manifiesto. La diplomacia de la Academia Sueca permite darle el premio, sobradamente justificado, con la prueba incuestionable y brillante de la hipótesis cuántica. Podemos suponer que el jurado estuvo pensando también en el resto de los trabajos de Einstein, que eran controvertidos y no universalmente aceptados todavía en 1921, pese a la acumulación de pruebas.

El juicio popular ya había puesto a Einstein en la cima. Los años veinte son la época viajera del profesor berlinés. Japón, India, España, Francia y EEUU son algunos de sus destinos; en todas partes se supera el ámbito académico: Einstein es un fenómeno en la naciente sociedad de masas.

La segunda guerra mundial lleva a Einstein a colaborar, pese a sus convicciones pacifistas, en el esfuerzo bélico: trabajará en problemas prácticos de la marina.

Princeton

El avance del nazismo lleva a los Einstein a aceptar la oferta de Princeton para instalarse en EEUU. Al principio a Albert le cuesta tomar la decisión, pues tiene muy arraigada la convicción de que la libertad de investigación requiere no vivir de ella, y prefiere no renunciar a dar clases. La garantía de independencia le lleva a vivir en ese centro singular donde los sabios comparten paseos y tertulias sin más obligaciones que las que se impongan ellos mismos de creatividad intelectual.

Einstein ya no dejará nunca Princetón, allí, con sus muchachos, trabajará en la gran tarea, la que no logrará acabar, la que le hará pasar de la esperanza al pesimismo, la que le dará tormentos. La gran unificación queda todavía hoy como reto.

Curiosamente lo que más transciende de este periodo son las objeciones de Einstein a la interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica (QM). Con la convicción de que *Dios no juega a los dados*, el equipo de Einstein elabora unas paradojas cuánticas que consiguen el efecto contrario: asentar mejor la QM. Hasta ahora ha sido Niels Bohr el ganador: *Quiénes somos nosotros para decirle a Dios cómo tiene que ser el mundo.*

Las metáforas teológicas en científicos escépticos siempre han sido muy ingeniosas.

La segunda guerra mundial lleva a Einstein a colaborar –pese a sus convicciones pacifistas– en el esfuerzo bélico: trabajará en problemas prácticos de la marina. Los problemas que tenía que resolver no eran los estratégicos: el FBI ya tenía prevención contra un hombre considerado de dudosa fidelidad.

Einstein en su juventud

Necesito más matemáticas

La lucha por las matemáticas adecuadas para la Teoría Unificada consume los últimos veinte años de Einstein. Dejemos que sea un brillante biógrafo, el físico ruso Koutnesov quien los resuma:

> En los años de Princeton, Einstein hablaba de tormento matemático. Un drama humano, el sabio luchaba casi en solitario –desarrollando complejas construcciones mate-

> máticas– en un camino que según los que le rodeaban no llevaba a ninguna parte.

Para esos momentos ya la visión einsteiniana se había vuelto hacia las matemáticas. La experiencia de la Relatividad General había sido determinante, así lo expresa Koutnesov:

> Las discusiones de Einstein con Grossmann reflejaban los enormes cambios ocurridos en las relaciones entre la matemática y la física. Como sabemos, Einstein distinguía en la evolución de la matemática el periodo en que era considerada como una ciencia semiempírica del periodo siguiente, durante el cual la matemática se independizó de la física. En el curso del tercer periodo, la matemática, sin regresar a las nociones empíricas primitivas, se asoció con las experiencias físicas susceptibles de responder a la cuestión de la realidad de las cuestiones matemáticas.

Cuanto más lejos avanzaba Einstein más necesidad tenía de matemáticas: *Necesito más matemáticas* fue su obsesión. En 1938 escribía a su amigo Solovine:

> Trabajo con mis muchachos en una teoría sumamente interesante, con la que espero vencer la mística probabilista actual [QM] y el alejamiento que se experimenta de la noción de realidad en el terreno físico... La teoría unitaria de campos está terminada. Pero es tan difícil emplearla matemáticamente, que pese a todo el trabajo que me he tomado, no soy capaz de verificarla de ninguna manera. Esta situación aún durará muchos años.

Einstein no pudo resolver la complejidad del problema. En su singular autobiografía, que él llamaba necrológica, está el más directo testimonio:

> Han pasado cuarenta años desde la elaboración de la teoría de la gravitación. Estuvieron consagrados enteramente al único propósito de generalizar la teoría gravitacional y de desarrollar una teoría de los campos capaz de convertirse en la base de toda la física... los diez últimos años han conducido a una teoría que me parece natural y prometedora, aunque sea incapaz de decir, si probará o no que posee un valor a los ojos de la física. Esta incertidumbre se debe a insuperables dificultades matemáticas que, sin embargo, son inevitables en toda teoría no lineal de campos.

No hay amargura, Albert cita a Lessing: la búsqueda de la verdad es más importante que su posesión.

España en el corazón

Se puede escribir un artículo sobre Einstein y las matemáticas sin hablar de algunas de sus grandes pasiones: el violín y la filosofía. Pero no comentar el compromiso ético de toda una vida con los oprimidos y desfavorecidos es imposible. Albert nunca se considero obligado a defender sus teorías científicas, era de la opinión que la verdad natural se defiende sola. No ocurría así cuando se trataba de justicia social –no era como la justicia científica– ahí sí tenía que levantar la voz.

Einstein dedicaba mucho tiempo a analizar las peticiones de ayuda que recibía, pues fueron aumentando con el tiempo. Nunca declinó la de los republicanos españoles. Como para toda su generación de intelectuales, la causa de España fue materia de gran impacto.

Ante la amenaza nazi, Einstein escribió la celebre carta a Roosvelt alertando sobre el peligro nuclear en manos de Hitler. Después centró sus esfuerzos en evitar su uso, encabezando el movimiento de científicos por la paz.

Y como triste paradoja, descalificados en el año 2000 los expedientes del FBI sobre Einstein, nos encontramos con una investigación continuada que ocupa 1800 páginas para inculpar a Einstein de actividades antiamericanas. El sabio a cuya cabeza el nazismo puso precio, que conoció cómo quemaron su casa de campo de Alemania, que vio la supresión de sus libros en su país de nacimiento... afortunadamente no llegó a conocer que en su nueva patria el FBI utilizaría alguno de los bulos nazis.

El consejo de Einstein en 1931 sobre el trabajo del científico merece estar expuesto en todas las aulas:

> No olvidéis nunca en medio de vuestros diagramas y ecuaciones... la preocupación por el hombre mismo... con el fin de que las creaciones de vuestra mente sean una bendición y no una maldición.

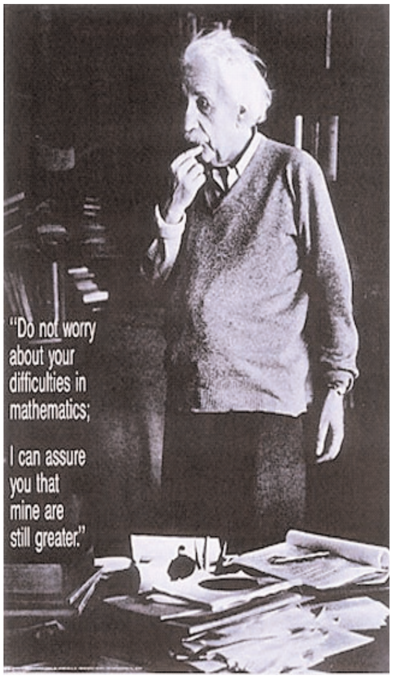
Einstein pasó muchos años trabajando sobre construcciones matemáticas complejas... sin embargo sus construcciones teóricas comprendían siempre principios simples y claros.

Recapitulación matemática

Sorprende que en el gran mundo virtual que llamamos internet no se encuentre un enorme caudal de información con la entrada en los buscadores "Einstein - matemáticas". Curiosamente aparecen a la venta unos carteles –véase reproducción– con una cita que puede confundir: no te preocupes por tus dificultades matemáticas, puedo asegurar que las mías son todavía mayores. Quien no conozca el contexto puede erróneamente deducir un escaso conocimiento o desinterés de Einstein, nada más lejos de la verdad; la frase responde a su angustia final, cuando sus preocupaciones matemáticas no pueden ser mayores: *necesito más matemáticas*.

El hilo conductor de este artículo está resumido en la cita inicial: *el principio creativo reside en las matemáticas*. En efecto:

> Una teoría puede ser sometida a la prueba de la experiencia, pero no hay camino que lleve de la experiencia a la formulación de una teoría. Ecuaciones tan complejas como las del campo gravitatorio sólo pueden ser expresadas porque se encuentre una condición matemática, simple desde el punto de vista lógico, que determina por completo, o casi, dichas ecuaciones. ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DÜRRENMATT, F. (1983): *Albert Einstein*, Tusquets, Barcelona.

BODANIS, D. (2002): *E = m c²*, Planeta, Barcelona.

EINSTEIN, A. (2001): *Einstein 1905: un año milagroso*, Ed. John Stachel, Editorial Crítica, Madrid.

EINSTEIN, A. (1980): *Mi visión del mundo,* Tusquets, Barcelona.

EINSTEIN, A. (1981): *Mis ideas y opiniones*, Antoni Bosch editor, Barcelona.

EINSTEIN, A. (1984): *Notas autobiográficas*, Alianza, Madrid.

EINSTEIN, A. (1950): *La relatividad. Memorias originales de 1905 y 1916*, Emecé editores, Buenos Aires.

HOLTON, G. (1998): *Einstein, historia y otras pasiones*, Taurus.

JEROME, F. (2002): *El expediente Einstein*, Planeta, Barcelona.

KOUZNETSOV, B. (1975): *Einstein*, CVS ediciones, Madrid.

LICHNEROWICZ, A. (1968): *Elementos de calculo tensorial*, Aguilar, Madrid.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 15-18

En recuerdo de Einstein

Aprovechando el primer centenario de la publicación de su teoría de la relatividad especial (1905) y por ser este año el Año Internacional de la Física, merece la pena dedicar una clase para divulgar la figura de Einstein, sus trabajos y las consecuencias que de ellos se derivan, como que el tiempo no es absoluto, para lo cual, presentamos un ejemplo muy asequible que permite entender por qué un astronauta viajando a una velocidad próxima a la de la luz podría, a su regreso a la tierra, ser más joven que su hijo. Así mismo justificamos como, a las velocidades cotidianas, los resultados de Einstein pueden ignorarse.

Now that is the first centenary of the publication of his relativity theory and at the same time the International Year of Physics, it is worthwhile dedicating a lesson to make Einstein's figure known, his work and the amazing consequences derived from it, such as knowing that time isn't absolute. To make students aware of this, we present here a very accessible example that will allow them to understand why an astronaut travelling at a speed close to that of light, upon returning to the earth, could be younger than his son. We will also justify why at everyday speeds, Einstein's results can be ignored.

Imagina que estás en el andén de una estación y pasa un tren a 40 km/h, y un niño que viaja en el tren tira una pelota a 20 km/h en la dirección del movimiento del tren. Para el niño, que se mueve con el tren, la pelota que ha tirado se mueve a 20 km/h, pero para ti la velocidad con la que ves que se mueve la pelota es la suma de la velocidad del tren y la de la pelota, o sea, 60 km/h.

Esto que ocurre con la pelota no ocurre con la luz; si el niño enciende una linterna en la dirección del movimiento del tren, la luz se moverá para él a 300.000 km/seg. y para ti ,que estás en el andén, irá a la misma velocidad.

Esto lo comprobó por primera vez Michelson, en 1881, con un experimento que consistía en medir la velocidad de la luz en dirección del movimiento terrestre y en contra de él, esperando percibir diferencia entre las dos velocidades, pero el resultado era que coincidían en ambas mediciones.

Desde entonces se han realizado medidas muy precisas que demuestran que la velocidad de la luz (300.000 km/seg) no varía sea cual sea el movimiento de la fuente que emita la luz.

En 1905, Einstein observó que este hecho implicaba algunos resultados extraños:

- Los objetos se acortan en la dirección del movimiento (hablamos de velocidades muy grandes), más cuanto mayor sea la velocidad hasta llegar a una longitud nula en los límites de la velocidad de la luz.
- Sin embargo, la masa (cantidad de materia) aumentaría. De hecho, existen planetas de unos pocos centímetros de diámetro y de masa inmensa.
- La masa es equivalente a una cierta cantidad de energía, y viceversa, según la célebre fórmula:

$$E = m \cdot c^2$$

A partir de esta relación entre masa y energía, se inventó la bomba atómica: de un poco de masa se obtiene una cantidad enorme de energía (la cantidad de masa multiplicada por *la velocidad de la luz al cuadrado*). Nada se crea ni se destruye, solamente se transforma.

- El paso del tiempo de un objeto es cada vez más lento a medida que aumenten las velocidades.

Francisco Merino Ayuso
IES Poeta García Gutiérrez. Chiclana de la Frontera. Cádiz
Ana Merino Teruel
IES Poeta García Gutiérrez. Chiclana de la Frontera. Cádiz

Como ejemplo vamos a justificar este último hecho.

Supongamos que existe un tren extraordinario al que llamaremos *tren de Einstein* que va a una velocidad de 240.000 kilómetros por segundo.

Tendremos que hacer un gran esfuerzo para imaginar el *tren de Einstein*, ya que estamos acostumbrados en nuestra vida diaria a velocidades considerablemente menores a las que éste toma; para hacernos una idea, pensemos que el *tren de Einstein* a 240.000 km/seg. daría 6 vueltas a la tierra siguiendo el ecuador en un solo segundo y un avión comercial a 1.000 km/h., o sea, a 0,28 km/seg. necesitaría 10 días para dar las 6 vueltas o, por ejemplo, la tierra, el cuerpo más veloz con el que tenemos contacto, va a 30 km/seg. en su movimiento de traslación alrededor del sol y tarda 365 días en hacer el recorrido completo; si fuera a 240.000 km/seg., el año duraría sólo 1 hora y 5 minutos.

Supongamos que el *tren de Einstein* tuviese que recorrer los 864.000.000 km. que distan entre sí dos estaciones. El avión tardaría en recorrer esta distancia casi 100 años a 1.000 km/h sin parar, pero el *tren de Einstein* lo hará en una hora:

$$\frac{864.000.000\ km}{240.000\ km/seg} = 3.600\ seg = 60\ min = 1\ hora$$

En las dos estaciones hay relojes. En la primera estación un pasajero comprueba su reloj con el de la estación. Al llegar a la siguiente estación verá que su reloj se retrasó veinticuatro minutos.

¿Qué es lo que pasa?

Supongamos que una linterna, que está puesta en el suelo del tren, envía un rayo de luz a un espejo que está colocado en el techo del tren, y éste a su vez lo devuelve al suelo del vagón (figura 1).

Según un pasajero, este rayo recorrerá el siguiente camino:

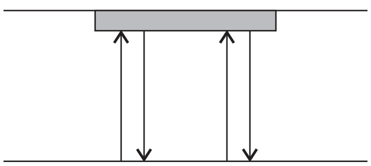


Figura 1

Para alguien que lo viera desde la estación (figura 2), la imagen es completamente diferente, ya que el espejo y la linterna estarían en movimiento con respecto a esta segunda persona.

En el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer el camino hasta el espejo, este último, debido al movimiento del tren, se desplazará. Mientras el rayo de luz retorna, la bombilla se desplazará igualmente.

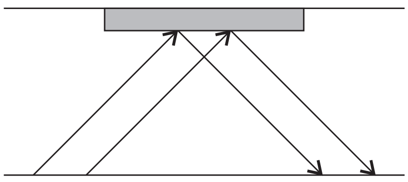


Figura 2

Como vemos, para los observadores del andén la luz recorrió una distancia mayor que para los observadores del tren. Por otra parte, nosotros sabemos a ciencia cierta que la velocidad de la luz es velocidad absoluta, y es igual tanto para aquellos que viajan en el tren como para aquellos que se encuentran en el andén. Este hecho nos obliga a sacar una conclusión:

¡Entre el envío y el regreso del rayo de luz, en el andén transcurrió más tiempo que en el tren!, ya que a la misma velocidad, para el observador del andén el rayo de luz ha recorrido más distancia.

Calculemos el tiempo que transcurre para el pasajero del tren y para el observador del andén.

Supongamos que el observador del andén cuenta que entre el envío y el regreso del rayo de luz transcurrieron 10 segundos.

Durante estos 10 segundos la luz recorrió una distancia de

$$300.000\ km/seg \times 10\ seg = 3.000.000\ km$$

De aquí se deduce que cada uno de los lados AB y BC del triángulo isósceles ABC de la siguiente figura es de 1.500.000 kilómetros (recuerda que estamos en el *tren de Einstein* y que sus medidas son inmensas).

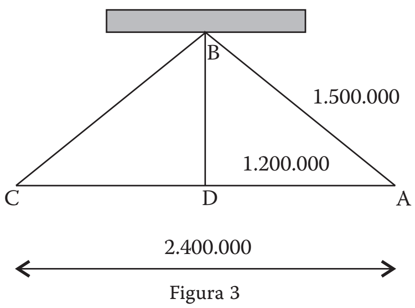


Figura 3

Como el tren va a 240.000 km/seg. en los 10 seg. recorre:

$$240.000\ km/seg \times 10\ seg = 2.400.000\ km$$

Ahora es fácil determinar la altura del vagón, que será la altura *BD* del triángulo *ABC*.

En el triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras, tendremos:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

de donde se deduce, despejando *BD* en función de *AB* y *AD*, que la altura del vagón es:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{1.500.000^2 - 1.200.000^2} =$$
$$= \sqrt{810.000.000.000} = 900.000\ km$$

La altura es sumamente grande, lo que ya no nos extraña por las dimensiones astronómicas del *tren de Einstein*.

El camino recorrido por el rayo de luz desde el suelo del vagón hasta el techo de éste y en dirección contraria, desde el punto de vista del pasajero, es igual al doble de la altura:

$$2 \times 900.000\ km = 1.800.000\ km$$

Para calcular el tiempo que tardaría la luz en hacer ese recorrido dividimos la distancia entre la velocidad de la luz:

$$\frac{1.800.000\ km}{300.000\ km/seg} = 6\ seg$$

Mientras en el andén transcurrieron 10 segundos, en el tren transcurrieron solamente 6 segundos. Es decir, si respecto al reloj de la estación el tren llegó una hora después de haber salido, para el pasajero pasaron:

Andén	Tren
10 seg.	6 seg.
3.600 seg.	x seg.

$$x = \frac{3.600\ seg \times 6\ seg}{10\ seg} = 2160\ seg = 36\ min$$

Es decir, según el reloj de la estación el tren hizo el trayecto en una hora y sin embargo para el pasajero sólo han transcurrido 36 minutos.

Sabemos que existen estrellas a una enorme distancia de la tierra; por ejemplo la estrella Arturo se encuentra a 36 años luz, (distancia pequeña si la comparamos, por ejemplo, con el grupo de Nebulosas de la Corona Boreal que se encuentra a la increible cantidad de 120.000.000 años luz); esto significa que la luz de la estrella Arturo tardaría en llegar a la tierra 36 años a la velocidad de 300.000 km/seg.

Supongamos que volamos a esa estrella en el *cohete de Einstein* a la velocidad de 240.000 km/seg., desde la base de la tierra; desde el momento de la salida del cohete hasta su llegada a la estrella pasarían:

Si a 300.000 km/seg. tarda 36 años, a 240.000 km/seg. tardará:

$$\frac{36\ \text{años} \times 300.000\ km/seg}{240.000\ km/seg} = 45\ \text{aæos}$$

Pero para el astronauta que viaja en el cohete, y que va a la misma velocidad que el viajero del tren, pasarían sólo:

Base	Cohete
10 seg.	6 seg.
45 años	x años

$$x = \frac{45\ \text{años} \times 6\ seg}{10\ seg} = 27\ \text{aæos}$$

Para volver necesitaría otros 27 años mientras que en la tierra habrían transcurrido otros 45. El viaje de ida y vuelta para el astronauta duraría 54 años y en la tierra habrían pasado 90 años. Si el astronauta inició su viaje con 30 años y su hijo tenía 4, a la vuelta el padre tendría 84 años y su hijo 10 años más que él.

Estos fenómenos predichos por Einstein sólo son apreciables a grandes velocidades. Los científicos han expuesto a estas velocidades partículas subatómicas comprobando que se verificaba con gran exactitud la teoría de Einstein.

A una velocidad cualquiera, la relación que existe entre el tiempo medido por un observador sin movimiento y el tiempo medido por otro podemos obtenerla utilizando el mismo triángulo de la figura 3.

Si T es el tiempo que transcurre para el observador sin movimiento, t el tiempo que transcurre para el observador a velocidad v:

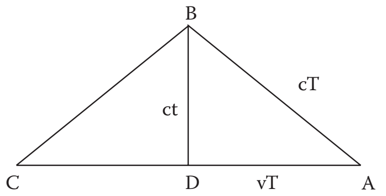


Figura 4

$AB = c \cdot T$ = recorrido de la luz en un tiempo T.
$AD = v \cdot T$ = recorrido del observador en movimiento en un tiempo T.
$BD = c \cdot t$ = recorrido de la luz en un tiempo t.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$(c \cdot T)^2 = (v \cdot T)^2 + (c \cdot t)^2$$

despejamos t en función de T:

$$(c \cdot t)^2 = (c \cdot T)^2 - (v \cdot T)^2$$

$$c^2 \cdot t^2 = c^2 \cdot T^2 - v^2 \cdot T^2 = \left(c^2 - v^2\right) \cdot T^2$$

$$t^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \cdot T^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot T^2$$

$$t = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot T^2} = T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Si comparamos los tiempos para un observador sin movimiento y, por ejemplo, el tiempo que transcurriría en el avión hipersónico más rápido del mundo, *X-43A* de la NASA, que alcanza casi los 12.000 km/hora, o sea, 3,33 km/seg.:

$$t = T \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3,33}{300.000}\right)^2}$$

(invito a hacer los cálculos), vemos que los tiempos prácticamente son coincidentes.

A las velocidades a las que estamos familiarizados también se cumple la teoría de Einstein pero las diferencias son inapreciables; como nadie ha viajado a grandes velocidades nos resultan extraños los resultados de Einstein, aunque éstos son los que realmente rigen el universo. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUBERT J. M. (1981): *Filosofía de la naturaleza*, Herder, Barcelona.

CATALÁ DE ALEMANY (1966): *Física General*, Guerri, Valencia.

DE JUANA SARDÓN J. M. (2000): *Física General*, Alhambra Universidad, Madrid.

EINSTEIN A. (1994): *Sobre la teoría de la relatividad*, Alianza, Madrid.

GARCÍA MORENTE M. (1984): *Sobre la teoría de la relatividad*, Encuentro. Madrid.

LANDAU L., RUMER Y. (1970): *Qué es la teoría de la relatividad*, Ricardo Aguilera, Madrid.

www.librys.com/einstein2005/

www.fi-b.unam.mx/safir/sn/num01/num015.htm

SUMA 50
Noviembre 2005, pp.19-26

De Mates... ¿Na? Una Web por y para los alumnos de matemáticas

La idea de diseñar en la asignatura Taller de Matemáticas una página web surgió a lo largo del curso 2000-01. Buscábamos resaltar el carácter lúdico del Taller y pensamos que una página web podría ser un buen elemento motivador de la asignatura, a la vez que en ella podíamos mostrar a otras personas parte del trabajo que allí realizamos. En el Taller tratábamos de redescubrir las Matemáticas y en la página web hablábamos de Matemáticas mostrando las investigaciones y curiosidades que se realizaban a lo largo del curso.

The idea of designing in the subject Taller de Matemáticas a web page arose along the course 2000-2001. We were seeking to highlight the playful character of Taller de Matemáticas and we thought that a web page could be a good motivating element of the subject, at the same time through it we would be able to show other people part of the work that we did there. In Taller de Matemáticas we were trying to re-discover Mathematics and in the web page we were speaking about Mathematics showing the researches and curiosities that we had made along the course.

En el presente artículo queremos mostrar la experiencia que estamos realizando durante estos últimos cinco cursos en el IES Sierra Minera de La Unión (Murcia). Una *descripción* breve de la misma podría ser algo así como una página web realizada por y para alumnos de matemáticas.

Al principio la página fue pensada como un elemento motivador de la asignatura Taller de Matemáticas, a la vez que podía mostrar a otras personas parte del trabajo que realizábamos.

Desde el curso 2003-04 la Consejería de Educación y Cultura de la Región de Murcia suprimió esta asignatura en la mayoría de los centros, incluido el nuestro, lo que nos ha obligado a *redefinir* el concepto de la página siendo ahora elaborada por todos los alumnos que cursan la asignatura de matemáticas tanto de ESO como de Bachillerato, con las ventajas e inconvenientes que posteriormente comentaremos.

Inicios

La idea de diseñar en la asignatura Taller de Matemáticas una página web surgió en el curso 2000-2001. Buscábamos resaltar el carácter lúdico de las matemáticas y pensamos que una página web podría ser un buen medio para conseguir este objetivo. Por otra parte la posibilidad de diseñar la página nos permitía introducir las Nuevas Tecnologías en el aula con el consecuente aprovechamiento de sus posibilidades.

Para poder llevar la idea a buen término contábamos con un aula de informática bien equipada, un cañón de imagen (muy útil para hacer las clases más viables, dinámicas y amenas) y conocimientos elementales de informática. Sin embargo, no conocíamos los editores de html (páginas web), por lo que tuvimos que ojear revistas informáticas y buscar la ayuda de algunos compañeros.

> *Pensamos que una página web puede ser un buen medio para conseguir resaltar el carácter lúdico de las matemáticas.*

Contábamos en la asignatura con chicos/as de 4° de ESO, la mayoría de la opción B de Matemáticas.

Joaquín Comas Roqueta
IES Sierra Minera. La Unión. Murcia
María Jesús Herrera Ponz
IES Thiar. Pilar de la Horadada. Alicante

Objetivos buscados

Ante la construcción de la página web nos planteábamos las siguientes preguntas:

¿Qué queríamos mostrar?, ¿Cómo queríamos mostrarlo?

Respecto a qué queríamos mostrar nuestra idea era presentar algunos de los trabajos realizados en el Taller de Matemáticas, las actividades desarrolladas en nuestro Instituto relacionadas con las Matemáticas (Semanas Matemáticas, excursiones, exposiciones...), noticias e investigaciones matemáticas en general. Es de justicia comentar que la mayoría de los trabajos e investigaciones no son en absoluto originales (aunque sí lo son para nuestros alumnos) y en numerosas ocasiones nos hemos basado en ideas y experiencias de otros compañeros y colegas como posteriormente iremos detallando.

En cuanto a cómo queríamos mostrarlo decidimos hacerlo mediante diferentes secciones, cada una de ellas en torno a un tema de interés: presentación de la página, curiosidades, fotografía matemática, noticias, enlaces a otras páginas...

Por otra parte, buscábamos un esquema sencillo y reutilizable en cursos posteriores. Las secciones debían ser fácilmente accesibles por lo que creímos conveniente tener una página con dos marcos y con la posibilidad de ser utilizada en cursos posteriores con pequeñas variaciones para diferenciar un curso de otro, y eso sí, poder visitar todas las aportaciones de cursos anteriores (esto se puede ver en la parte superior derecha de la página principal donde hay hipervínculos a las páginas realizadas en los cursos 2000-01, 2001-02, 2002-03, 2003-04 y 2004-05).

Después de estudiar diversas opciones nos inclinamos por abrir la participación de la página a todos los alumnos que estudiasen la asignatura de matemáticas en la ESO y en Bachillerato.

Sin otra pretensión que mostrar algunas cifras sobre el trabajo realizado en estos cinco cursos podemos comentar que la página ha recibido más de 42.000 visitas (algo gratamente sorprendente para una página con un contenido *poco comercial*) principalmente de España y América (México, Argentina, Estados Unidos, Chile...). La página se compone actualmente de aproximadamente 5.000 archivos htm, 1.000 dibujos, 8.000 fotografías y 350 vídeos, lo que puede dar algún testimonio del trabajo que se está llevando a cabo para realizarla.

El Taller de Matemáticas y la Web

Uno de los principales objetivos que buscábamos en la realización de la página web era mostrar algunas de las actividades realizadas en el Taller de Matemáticas: investigaciones, concursos, biografías de Matemáticos, tratamiento de la calculadora científica, fotografía, curiosidades, noticias matemáticas... A la hora de diseñar la página pensábamos que era importante tener en cuenta una serie de elementos motivadores para que los alumnos se interesasen por la misma. Algunos de estos elementos eran propios de Internet, como controlar el número de visitas a nuestra página (estadísticas de los visitantes), un libro de visitas para que las personas que conociesen nuestro trabajo pudieran dejar su opinión en un *tablón* público, una dirección de correo electrónico en la página para que quien lo desease se pusiera en contacto con los que realizamos la página (dematesna@semrm.com), y la inserción de la web en los principales buscadores de Internet. Otros elementos motivadores eran propios del Taller de

Matemáticas como la elección del nombre de la página (*De Mates ...¿Na?* en nuestro caso) o la actividad Viaje a través de los Genios (búsqueda de famosos matemáticos a través de pistas que se van presentando semanalmente). Disponíamos también de elementos motivadores propios del Centro como la realización y difusión de Semanas Matemáticas.

Desde un principio, el desarrollo de la página web *De Mates...¿Na?*, lo concebimos como el eje motivador de la asignatura Taller de Matemáticas, pero queremos dejar claro que la asignatura no era únicamente la página web. En el Taller de Matemáticas tratábamos de redescubrir las Matemáticas y en la página web hablábamos de Matemáticas mostrando las investigaciones y curiosidades que se realizaban a lo largo de todo el curso.

Las asignaturas de Matemáticas y la Web

Como hemos comentado anteriormente en este artículo, durante el curso 2003-04 dejamos de ofertar la asignatura Taller de Matemáticas a los alumnos del centro. Esto nos llevó a tener que decidir entre dejar de realizar la página web o buscar otro enfoque que nos pareciese adecuado para seguir en nuestra línea de trabajo.

Un aspecto importante a destacar es que la página pasa a ser de muchos más chicos y chicas y puede ser utilizada para motivar a los alumnos en clase.

Nos entristecía el hecho de no poder realizar durante el curso la asignatura Taller de Matemáticas y vimos en la continuidad de la página una forma de seguir con esa idea de enfocar las Matemáticas de una manera más lúdica y atractiva tratando de redescubrir las Matemáticas.

Ahora no podíamos tener esa libertad de movimiento que permite una asignatura optativa para realizar investigaciones y experiencias a lo largo del curso.

Después de estudiar diversas opciones nos inclinamos por abrir la participación de la página a todos los alumnos que estudiasen la asignatura de matemáticas en la ESO y en Bachillerato. Esta participación se presenta a los alumnos de los diversos cursos y consiste en realizar trabajos y colaboraciones que encajen dentro de alguna sección de la web. Por lo general, los trabajos son presentados y sugeridos por nosotros y siempre se trata de *recompensar* a los colaboradores mediante notas de trabajos y de actitud.

Como elemento motivador es importante que toda colaboración esté firmada por su autor.

Durante el primer trimestre del curso se realiza un especial esfuerzo para que todos los alumnos visiten la página con el objetivo de conocer sus diversas secciones y potenciar que se sientan partícipes de la misma.

Las asignaturas de Matemáticas versus Taller de Matemáticas

Quizá sea un poco pronto para poder comparar los distintos planteamientos que ha tenido la página web desde sus inicios, como parte integrante de la asignatura Taller de Matemáticas, a la actual, como compendio de colaboraciones de alumnos de las asignaturas de matemáticas del Centro.

Qué duda cabe que nuestro planteamiento original como *escaparate* del Taller de Matemáticas fue el que nos ha llevado durante tres cursos a seguir adelante con la página, pues a nuestro entender cumplía ampliamente los objetivos que nos habíamos marcado. Una de sus principales ventajas era que al realizarse por un grupo pequeño de alumnos ofrecía una gran sensación de página propia por parte del grupo, lo que motivaba a estos alumnos a seguir con el trabajo. También era más controlable su realización porque se trabajaba dentro de la asignatura y al ser pocos alumnos se podía hacer un seguimiento del trabajo más detallado y exhaustivo.

El nuevo planteamiento nos ha obligado a diversificar mucho más el trabajo a realizar pues pretendemos tener el mayor número de colaboraciones por parte de nuestros alumnos. Esto supone una mayor coordinación para no duplicar trabajos y éstos no pueden ser tan especializados ni extensos. Un aspecto importante a destacar es que la página pasa *a ser* de muchos más chicos y chicas y puede ser utilizada para motivar a los alumnos en clase.

De esta forma vemos que cada planteamiento ofrece diferentes enfoques de trabajo, pero también podemos afirmar que ambos permiten a nuestros alumnos realizar investigaciones matemáticas.

Secciones

Pasamos a ver las secciones con que cuenta nuestra página. Han variado poco a lo largo de los cursos y nos han servido de guía en los trabajos que se han ido presentando en la página. En cada sección presentamos sus contenidos, los principales elementos motivadores que hemos utilizado en clase y los más destacados materiales y fuentes en las que nos hemos basado:

¿Quiénes Somos?

Presentación:

En esta sección explicamos brevemente a cualquier visitante de nuestra página en qué consiste y quiénes la integran.

Cuando la página se realizaba en Taller de Matemáticas se incluía en cada curso una foto de todos los miembros del grupo para que los visitantes los pudieran conocer un poco mejor y sirviese además como elemento motivador de manera que los alumnos se sintiesen verdaderos integrantes de la página.

Actualmente hemos optado por mostrar la foto de cada colaborador con su nombre, buscando los mismos objetivos que con la foto de grupo de cursos anteriores.

Elementos Motivadores:

La sección en sí misma es un importante elemento motivador, pues en cierta forma plasma un "contrato" entre el alumno y la propia página por el que el alumno se compromete a trabajar en la página, ve reconocido su esfuerzo y puede sentirse plenamente miembro de la web.

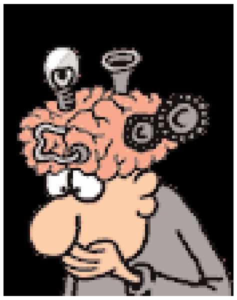


Imagen en *¿Sabías qué...?*

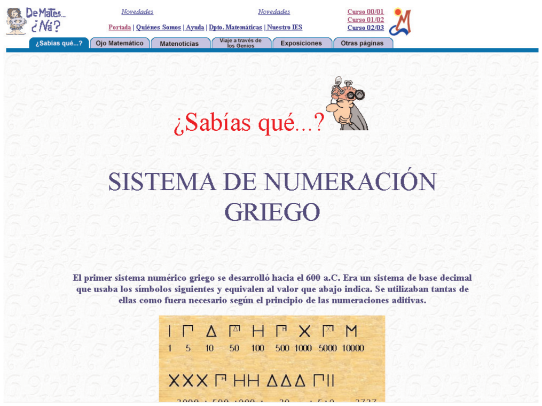
Fuentes y Materiales:

Esta sección requiere únicamente fotos de los alumnos (que no siempre es fácil obtener) en formato digital. Es necesaria cierta organización pues a lo largo del curso puede haber momentos en los que afortunadamente hay que realizar o escanear muchas fotos.

¿Sabías qué...?

Presentación:

En ella presentamos a lo largo del curso curiosidades, divertimentos y todos aquellos trabajos e investigaciones que se realizaron en Taller de Matemáticas y las que se realizan en las diversas asignaturas de matemáticas. Se pretende que otras personas las conozcan y puedan aprender y divertirse con ellas. Los trabajos se reparten entre los alumnos para presentarlos en esta sección de manera que, al finalizar el curso, haya el máximo número de colaboraciones.



Elementos Motivadores:

Pretendemos que los alumnos trabajen como verdaderos reporteros matemáticos transmitiendo a otros internautas sus experiencias y vivencias matemáticas. Lo que en ocasiones pudiera ser un pesado trabajo sobre una curiosidad o un importante contenido pasa a ser (en la mayoría de los casos) un reto para que el alumno *digiera* la información y la *traduzca* con sus propias palabras a un lenguaje más cercano para otros alumnos o visitantes de la página. Por supuesto cada actividad presentada está firmada por sus autores (de nuevo un elemento motivador).

Fuentes y Materiales:

Esta sección es la que mayor cantidad y variedad de materiales requiere. Los trabajos son propuestos en su mayoría por el profesor y los alumnos deben buscar información sobre el mismo en libros, enciclopedias, enciclopedias digitales, internet... No siempre el alumno sabe encontrar o asimilar la información y en ese caso el profesor le orienta e incluso le ofrece algunos materiales (fotocopias, libros, direcciones de Internet…).

A los alumnos que demuestran buenas aptitudes para la investigación se les propone *temas libres* y se les invita a *sorprender* al profesor.

Es importante destacar que ante el peligro del *copiar y pegar* pedimos que todos los trabajos sean escritos a mano y después de su corrección y posibles modificaciones los alumnos los pasan a soporte digital.

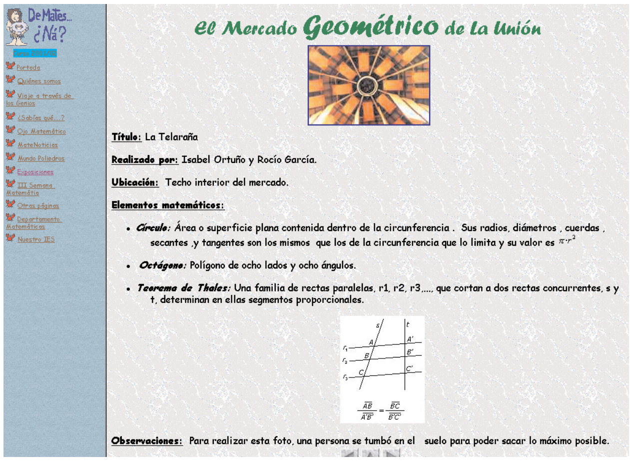
Algunos ejemplos de contenidos de la sección *¿Sabías que...?* son biografías de matemáticos, resúmenes de vídeos matemáticos vistos en clase, curiosidades, divertimentos y juegos, experiencias realizadas en clase, anécdotas sobre historia de las matemáticas…

> *A los alumnos que demuestran buenas aptitudes para la investigación se les propone temas libres y se les invita a sorprender al profesor.*

Ojo Matemático

Presentación:

Esta es una sección en la que presentamos a lo largo del curso nuestras incursiones en el mundo de la fotografía matemática. Tratamos de que los alumnos vean que a nuestro alrededor podemos encontrar las matemáticas de muy diversas maneras aunque a veces no es fácil darse cuenta, así que... para descubrir elementos matemáticos en nuestro entorno debemos adiestrar nuestro *Ojo Matemático*.



Elementos Motivadores:

Aunque cada año deja de ser menos innovadora en el Centro la fotografía matemática (llevamos varios años *explotando el filón*) es muy motivadora entre los alumnos. En primer lugar por el escepticismo que despierta en un principio y posteriormente cuando se ha explicado y ejercitado su realización, puede ser una herramienta fantástica para ir a la búsqueda de elementos matemáticos por la calle, en el instituto, en casa...

Fuentes y Materiales:

En el Centro realizamos cada dos años un concurso de fotografía con algún tema especial (como por ejemplo las matemáticas de nuestro entorno) y aprovechamos las excursiones que realizamos en el Departamento de Matemáticas para que una de las actividades sea *capturar entes matemáticos*.

Tenemos por tanto una cierta cantera de material, aunque no siempre es fácil que nuestros alumnos desarrollen su *Ojo Matemático*. Por ello al presentar la actividad mostramos numerosos ejemplos: realizados en el centro (en formato papel y en nuestras exposiciones virtuales), exposiciones de Internet y una presentación que hemos realizado expresamente para motivarles y ver ejemplos concretos.

Conviene indicar que cuando hemos hecho concursos en el centro siempre nos ha preocupado que los alumnos y alumnas no hiciesen fotos por falta de cámara o por la incomodidad que supone revelar una o varias fotos de un carrete sin terminar, por lo que hemos proporcionado a los alumnos que lo necesitaban cámaras desechables por un día y el revelado de las mismas. Actualmente la incorporación de las cámaras digitales en muchos hogares está facilitando la realización de esta actividad.

Matenoticias

Presentación:

Aquí presentamos noticias relacionadas con las matemáticas. Al estar los alumnos familiarizados con el mundo de Internet tienen acceso a muchísima información, por lo que al buscar páginas sobre matemáticas van descubriendo noticias de carácter matemático.

Los alumnos se van repartiendo la búsqueda de noticias para presentarlas en esta sección y también informan de nuestras propias noticias matemáticas como, por ejemplo, la participación en la revista del centro, celebración del Día de las Matemáticas, concursos... Todo esto favorece uno de nuestros principales objetivos: compartir con otras personas nuestras experiencias y vivencias matemáticas.

Elementos Motivadores:

Al igual que en la sección *¿Sabías que...?*, queremos que los chicos trabajen como verdaderos reporteros matemáticos transmitiendo a otros internautas noticias que aparecen en la prensa o que pueden ser de interés para los amantes de las matemáticas.

Cada noticia presentada está firmada por sus autores (de nuevo un elemento motivador).

Fuentes y Materiales:
No es siempre sencillo encontrar noticias con un contenido matemático que pueda ser totalmente entendido por los alumnos, por lo que nos centramos en noticias sobre actividades, concursos, exposiciones y otras experiencias que realizamos en las clases y en nuestras *Semanas Matemáticas*. También presentamos noticias sobre olimpiadas y otros eventos lúdicos que conoce el profesor o los alumnos encuentran en la red.

El descubrir páginas de contenido matemático que pueden ser curiosas, divertidas, útiles o simplemente distintas a la nuestra, causa cierta sorpresa para muchos alumnos que no dedican normalmente su tiempo a visitar páginas de este tipo.

Otras páginas
Presentación:
En esta sección hemos presentado enlaces a otras páginas web que tratan sobre matemáticas. Los alumnos pueden proponer páginas junto con una breve descripción de su contenido. Posteriormente elegimos las mejores y las ponemos en esta sección. Es muy interesante ponernos en contacto con los responsables de las páginas web que más nos gustan para que pongan enlaces a nuestra página (creemos que es muy interesante establecer enlaces con otras páginas que tengan nuestras mismas inquietudes).

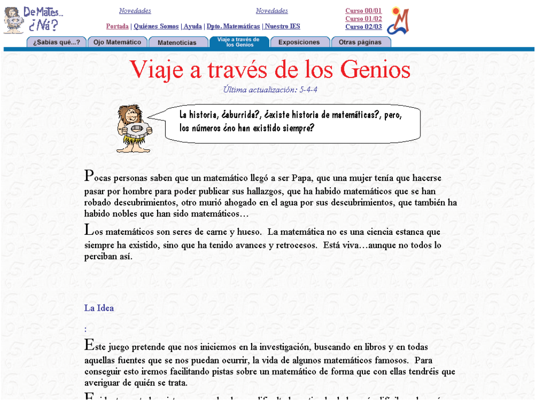
Elementos Motivadores:
El descubrir páginas de contenido matemático que pueden ser curiosas, divertidas, útiles o simplemente distintas a la nuestra, causa cierta sorpresa para muchos alumnos que no dedican normalmente su tiempo a visitar páginas de este tipo. Es por ello un elemento de motivación encontrar páginas que a su entender valga la pena visitar y que ellos mismos, con el resumen que deben hacer, puedan lograr que otros chicos y chicas conozcan la página que recomiendan.

Fuentes y Materiales:
Las principales fuentes son las propias páginas que eligen los alumnos. Normalmente se les deja que encuentren páginas por su cuenta usando buscadores tipo *google* y poniendo palabras clave como *matemáticas, ingenio, juegos, historia, fractal, teselación...*

En ocasiones también el profesor sugiere alguna página que por su contenido puede ser interesante recomendar.

Viaje a través de los Genios
Presentación:
Los matemáticos son seres de carne y hueso. La Matemática no es una ciencia estancada que siempre ha existido, sino que ha tenido avances y retrocesos. Está viva... aunque no todos lo perciban así.

Esta sección pretende que nos iniciemos en la investigación buscando en libros y en todas aquellas fuentes que se nos puedan ocurrir, la vida de algunos matemáticos famosos. Para conseguir esto vamos facilitando pistas sobre un matemático de forma que con ellas, los alumnos tengan que averiguar de quién se trata. Las pistas se gradúan por dificultad, partiendo de las más difíciles a las más fáciles, siendo éstas entregadas semanalmente en la sección.



Elementos Motivadores:
El hecho de ser un juego *de detectives* y de que las pistas se van dando semanalmente (normalmente los martes y viernes) hace que tengamos una buena motivación para participar. Los alumnos que aciertan el personaje (la mayoría, pues tratamos de que tenga la máxima divulgación) obtienen más o menos puntos en función de la pista en la que han conseguido averiguar al matemático siendo canjeables al final de la evaluación siempre que realicen un trabajo sobre el personaje buscado. Posteriormente el trabajo más completo de entre los realizados es colgado en la sección.

Fuentes y Materiales:
La estructura del juego la conocimos en la comunicación *Otra forma de trabajar la historia de las Matemáticas* del Grupo *Diego Pérez de Mesa* en las *IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* que tuvieron lugar en Lugo en Septiembre de 1999. Nos entusiasmó la idea y decidimos trabajarla con nuestros alumnos.

Con los primeros personajes las pistas eran elaboradas por los profesores, pero actualmente vemos mucho más interesante que sea un alumno elegido por el profesor el que realice las pistas siendo revisadas y ordenadas en dificultad. Las fuentes que usan los chicos para encontrar información son libros de Historia de las Matemáticas (tenemos varios en el centro), enciclopedias y principalmente por su comodidad internet y enciclopedias digitales.

Exposiciones
Presentación:
Esta no es una sección propiamente dicha, ya que a su vez engloba a otras.

Consta de diversas exposiciones de contenido matemático que se van realizando a lo largo de los cursos, como por ejemplo El Mundo de las Teselaciones, El Mercado Geométrico de La Unión, El Mundo de los Poliedros, la III Semana Matemática y la V Semana Temática:

πKT X las Mates

Elementos Motivadores:
La propia sección es un importante elemento motivador al ser una magnífica forma de presentar los trabajos realizados por los alumnos, tanto en el centro como en su versión digital en la web. La experiencia durante varios cursos nos ha demostrado la gran herramienta motivadora que puede ser la realización de una exposición hecha por los alumnos. También tratamos de poner imágenes del montaje y desarrollo de las exposiciones para que los alumnos se sientan plenamente partícipes de las mismas.

> *La sección* exposiciones *es un importante elemento motivador al ser una magnífica forma de presentar los trabajos realizados por los alumnos, tanto en el centro como en su versión digital en la web.*

Fuentes y Materiales:
Al ser una sección que va recogiendo los principales trabajos que se van realizando a lo largo de los cursos, es necesario ir

renovando los centros de interés de las exposiciones para tratar de no repetir contenidos de un curso para otro. La mayoría de las exposiciones que realizamos se basan en ideas y experiencias que los profesores han conocido a través de otras páginas web, revistas de educación matemática, multitud de libros, experiencias de otros compañeros y muy especialmente de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas.

Imagen de la Web

Conclusiones

El desarrollo de la página web *De Mates...¿Na?* lo concebimos como elemento motivador de las asignaturas de Matemáticas, sirviéndonos de plataforma para tratar de redescubrir las Matemáticas y siendo, en nuestra opinión, un medio idóneo para que nuestros alumnos hablen de Matemáticas mostrando las investigaciones y curiosidades que se realizan a lo largo del curso.

Conjuntamente a la elaboración de esta página web hemos desarrollado una Unidad Didáctica donde mostramos la realización de una página web en la asignatura optativa Taller de Matemáticas, que nos permita enseñar las investigaciones y curiosidades que se vayan elaborando a lo largo del curso (Comas, Herrera, 2002).

Como ya hemos comentado anteriormente se trata de una página realizada por y para los alumnos y creemos aconsejable efectuar las diversas actividades de la Unidad Didáctica en diferentes momentos a lo largo del curso aprovechando el material utilizado en clase.

Si desean visitar la página lo pueden hacer a través de la siguiente dirección:

http://centros5.pntic.mec.es/ies.sierra.minera/dematesna/

Poner en marcha una página web conlleva bastantes horas de trabajo (un ajustado diseño y desarrollo durante el primer curso de realización permite que en los siguientes cursos sea necesaria una menor dedicación), pero todo este trabajo puede verse ampliamente recompensado con la entrega y dedicación que unos alumnos motivados pueden mostrar ante el fascinante mundo de las Matemáticas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COMAS ROQUETA, J. y HERRERA PONZ, M. J. (2002): "Unidades Didácticas de Matemáticas: Página Web", *Interdisciplinaridad: Las Matemáticas en Plástica y Tecnología*, Centro de Profesores y Recursos de Cartagena-La Unión, Murcia.

COMAS ROQUETA, J. y HERRERA PONZ, M. J. (2002): "Unidades Didácticas de Matemáticas: Página Web", *Interdisciplinaridad: Las Matemáticas en Plástica y Tecnología*, Caja de Ahorros del Mediterráneo (CAM), Murcia.

COMAS ROQUETA, J. y HERRERA PONZ, M. J. (2002): "Una página web en el Taller de Matemáticas", *Educar en el 2000, Revista de Formación del Profesorado*, n.º5, 120-123.

GRUPO "DIEGO PÉREZ DE MESA" (1999): "Otra forma de trabajar la historia de las Matemáticas", *Actas de las IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Lugo.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 27-29

Aprovechamiento didáctico de los Silos de Villacañas

Relatamos una experiencia didáctica consistente en calcular la altura de una montaña hecha con el material extraído de unas viviendas singulares de Villacañas: los Silos.

We relate a teaching experience that consists of calculating the height of a mountain make with the ground mined from a special kind of houses in Villacañas, called Silos.

Los Silos de Villacañas son casas subterráneas, pero no son cuevas. Son viviendas excavadas cuatro metros por debajo de la llanura manchega, dentro del casco urbano de Villacañas (Toledo), constituyendo un modelo de casa único en Europa. Quien quiera conocer más acerca de estas singulares viviendas puede consultar los libros o las páginas web de la bibliografía y, por supuesto, visitarlos in situ en el Museo del Silo.

Dentro de una unidad didáctica con un gran contenido de áreas y volúmenes en un grupo de 3º de Diversificación, se nos ocurrió realizar una actividad que sirviera de investigación y de aplicación de lo aprendido. Siguiendo un esquema similar al que propone Carmen González Martí (González, 2003) formulamos la cuestión de la siguiente manera:

> Si hiciéramos una montaña con toda la tierra que nuestros antepasados extrajeron de los *Silos*, ¿qué altura alcanzaría la montaña?

Los Silos de Villacañas son casas subterráneas, pero no son cuevas. Son viviendas excavadas cuatro metros por debajo de la llanura manchega.

Francisco Javier Pascual Burillo
IES Enrique de Arfe. Villacañas. Toledo
Ana Rosa Romero Ramos
IES Garcilaso de la Vega. Villacañas. Toledo

Primera acción

Todos los alumnos tuvieron claro desde el principio que lo primero que debían hacer era ir a los Silos para medir las longitudes de las habitaciones y así poder calcular su volumen. De esta manera organizamos una salida en la que, equipados con cintas métricas y cuadernos, tomamos todas las medidas necesarias para después realizar los cálculos en la clase. Se decidió medir los tres Silos con que cuenta el Ayuntamiento en el Museo del Silo.

La primera observación que hicieron los alumnos es que, al tratarse de salas excavadas, eran todas irregulares, por lo que tendríamos que aproximar. Además, las habitaciones no tienen forma de ortoedro, sino que están ligeramente redondeadas en las uniones del techo con la pared, quedando el techo recto. Así, tomamos la decisión de aproximar las salas con salas *ideales* de la forma indicada en la figura 1.

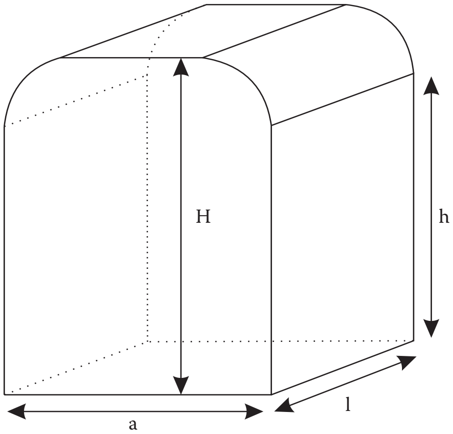


Figura 1

Las habitaciones no tienen forma de ortoedro, sino que están ligeramente redondeadas en las uniones del techo con la pared, quedando el techo recto.

Para calcular su volumen necesitaríamos las cuatro medidas de la figura. El resto de los huecos eran figuras conocidas, bien prismas triangulares o trapezoidales (para la entrada del Silo), ortoedros (para las puertas de paso), o troncos de cono (para las lumbreras), con lo que comenzamos a medir.

Segunda acción

Una vez tomadas todas las medidas comenzó el trabajo rutinario de calcular los volúmenes de las salas. Durante la realización de estas tareas surgían dudas acerca de cuál era la unidad que se debía utilizar, pues habían expresado las medidas tomadas unas veces en metros y otras en centímetros. Se tomó la decisión de poner todas las medidas en metros, para así obtener el resultado en metros cúbicos, pues de todas las unidades, parecía la más adecuada.

Otro de los inconvenientes que observaron los alumnos es que, al haber sido poco sistemáticos en la toma de medidas, encontraban ocasiones en las que no sabían si las medidas correspondían a una o a otra sala (por ejemplo, al dormitorio principal o a la cuadra), con lo que debían acudir frecuentemente a su memoria para tratar de averiguar cuál de las salas hicieron antes, o cuál de las salas puede ser tomando otras consideraciones, como la presencia de ventanas o lumbreras... Estas dudas, si bien no afectaron a la investigación, sí que sirvieron para que los alumnos tomaran conciencia de la importancia que para toda investigación tiene el ser sistemático.

Tras la realización de las operaciones, se obtuvo como resultado que los Silos estudiados tienen un volumen de 103,68; 190,22 y 198,55 m^3.

Tercera acción

Para estimar el volumen total de tierra que se extrajo de los Silos, necesitábamos estimar dos cosas:

a. El volumen medio de un Silo.
b. El número de Silos que hubo.

Para la primera de estas cuestiones decidimos que lo mejor era hacer la media de los tres resultados obtenidos, ya que no disponíamos de más datos. Así, el volumen medio de un Silo resultó ser de 164,15 m^3.

Para la segunda cuestión (b) encontramos un tríptico editado por el Ayuntamiento de Villacañas donde se asegura que en el año 1950 había unos 1700 Silos censados en el casco urbano de Villacañas. Decidimos tomar ese dato como bueno. De este modo la estimación del volumen total de tierra extraída de los Silos resultó ser de:

$$164{,}15 \times 1700 = 279055 \text{ m}^3$$

Cuarta acción (y última)

Por último se trataba de conocer qué forma adopta un montón de tierra de 279055 m^3. Para ello decidimos hacer un experimento de laboratorio. Conseguimos un litro de tierra fina de obra que vertimos sobre una mesa con la ayuda de un embudo. En seguida nos dimos cuenta de que la arena tomaba forma cónica, con lo que las magnitudes a medir eran el diámetro de la base, de donde obtendremos el radio, y la altura. Realizando el mismo experimento con diversas cantidades de arena se obtuvieron las siguientes medidas que introducimos en la siguiente tabla.

Volumen (ml)	Radio de la base (cm)	Altura del cono (cm)	Cociente Radio/Altura
200	6,7	4,2	1,595
400	8,3	5	1,660
800	9,65	5,8	1,663
800	10,75	6,8	1,580
1000	11,7	7,2	1,625

Calculando el promedio de los cocientes radio/altura, dedujimos que la tierra se dispone en forma de cono tal que el radio de la base es, aproximadamente, 1,6246 veces la altura (un número sorprendentemente parecido a la razón áurea).

Con toda esta información y utilizando la fórmula del volumen de un cono, llegamos a la conclusión de que la montaña tendría una altura de 46,56 m, lo cual no es poco si tenemos en cuenta que todo el trabajo se realizó a pico y pala. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GONZÁLEZ, C. (2003): "Si ocho millones de personas...", *Suma*, n.º 43, 87-88.

FLORES, C.; BRAVO, F. (1984): *Los Silos de Villacañas*, Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo.

www.sevenileven.com/villacanas/silos.htm

Fe de erratas de SUMA 49

Artículo: *Sobre el orden de magnitud de un número entero*

Pág. 15. Por error, se omitió como autora del artículo a:
Gema Calbo Sanjuán
IES Els Évols
L´Alcúdia (Valencia)

Artículo: *Las hipotecas y la tasa anual equivalente*

Pág. 26. Se omitió la Fig. 1

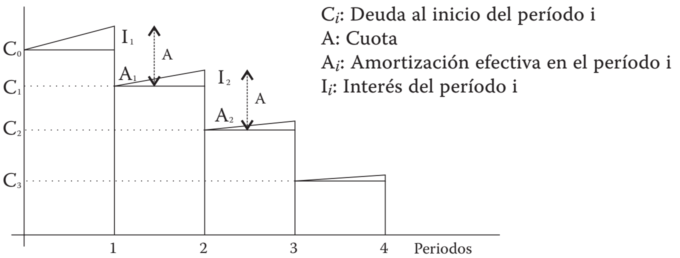


Figura 1. Representación gráfica de la amortización de un préstamo en cuatro cuotas constantes

Pág. 28 (2ª columna, 4ª línea empezando por el final). Dice "...para ello podemos utilizar la función TAE generada por el programa que incluimos en el artículo...". El programa es:

#1. "Programa para el cálculo de la Tasa Anual Equivalente"
#2. "Por Javier Pascual y Ana Romero, Mayo 2002"
#3. Precision := Approximate
#4. PrecisionDigits := 10
#5. "Cálculo del TAE a partir de las cuotas y los tiempos"
#6. cuotas :∈ Nonscalar
#7. tiempos :∈ Nonscalar
#8.

$$SUMACUOTAA(a,ni,nf,i) := a \cdot (1+i)^{-ni} \cdot \frac{1-(1+i)^{-nf}}{i}$$

#9.

$$SUMATOTALCUOTAS(t,cuotas,tiempos) := IF$$
$$\left(t=0,0,SUMATOTALCUOTAS(t-1,cuotas,tiempos)+\right.$$
$$\left.SUMACUOTAA\left(cuotas_t,\sum_{k=1}^{t-1} tiempos_k,tiempos_t,i\right)\right)$$

#10.

$$TASAMENSUAL\_AUX(c0,\alpha 0,cuotas,tiempos) :=$$
$$SUMATOTALCUOTAS(DIM(cuotas),cuotas,tiempos) - c0 + \alpha 0$$

#11.

$$TASAMENSUAL(c0,\alpha 0,cuotas,tiempos) :=$$
$$SOLVE(TASAMENSUAL\_AUX(c0,\alpha 0,cuotas,tiempos),i,0,1)$$

#12.

$$TAE(c0,\alpha 0,cuotas,tiempos) :=$$
$$100 \cdot \left(\left(1+RHS\left(\left[TASAMENSUAL(c0,\alpha 0,cuotas,tiempos)\right]\right)\right)^{12} - 1\right)$$

#13. "Cálculo del TAE a partir de los intereses y de los tiempos"
#14. intereses :∈ Nonscalar
#15. pdp :∈ Nonscalar
#16. dpendientes :∈ Nonscalar
#17. ttotales :∈ Nonscalar
#18.

$$TTOTALES(tiempos) :=$$
$$VECTOR\left(\sum_{i=k}^{DIMENSION(tiempos)} tiempos_i, k, DIMENSION(tiempos)\right)$$

#19.

$$DPENDIENTE(pdp) :=$$
$$\left[pdp_{1,1} \cdot \frac{\left(1+\frac{pdp_{2,pdp_{1,2}}}{1200}\right)^{pdp_{3,pdp_{1,2}}} - \left(1+\frac{pdp_{2,pdp_{1,2}}}{1200}\right)^{pdp_{4,pdp_{1,2}}}}{\left(1+\frac{pdp_{2,pdp_{1,2}}}{1200}\right)^{pdp_{3,pdp_{1,2}}} - 1}, pdp_{1,2}+1\right]$$

#20.

$$DPENDIENTES(c0,intereses,tiempos) := ITERATES$$
$$(DPENDIENTE([x,intereses,TTOTALES(tiempos),tiempos]),$$
$$x,[c0,1],DIM(tiempos)-1)$$

#21.

$$CUOTA\_X(x,dpendientes,intereses,ttotales) :=$$
$$PMT\left(\frac{intereses_x}{1200},ttotales_x,-dpendientes_{x,1}\right)$$

#22.

$$CUO\_INT(c0,intereses,tiempos) := VECTOR($$
$$CUOTA\_X(x,DPENDIENTES(c0,intereses,tiempos),intereses,$$
$$TTOTALES(tiempos)),x,DIM(tiempos))$$

#23.

$$TAE\_INT(c0,\alpha 0,intereses,tiempos) :=$$
$$TAE(c0,\alpha 0,CUO\_INT(c0,intereses,tiempos),tiempos)$$

#24. "Cálculos

SUMA 50
Noviembre 2005, pp.31-36

Resumen histórico de la docencia de las matemáticas

Conocer la Historia de la Matemática sirve para enmarcar adecuadamente los progresos de la Ciencia y para comprender mejor qué tipo de problemas dan lugar a un desarrollo de la teoría. También en el ámbito de la Didáctica resulta esencial conocer cuáles han sido las etapas que han dirigido la docencia hasta donde se encuentra hoy en día. Con objeto de comprender mejor cómo explicamos lo que explicamos, en este trabajo se recorren las etapas más destacadas que han influido en la transmisión de los conocimientos y razonamientos matemáticos, prestando especial atención al caso de la Matemática en la Universidad Española.

Knowing the history of Mathematics is useful to provide a setting for the progress in Science and to better understand what kind of problems lead to the development of a theory. It is also essential as far as Didactics is concerned, to know the different stages it has gone through before reaching the point where it is nowadays. With the aim of better understanding how we explain what we explain, this paper covers the most significant stages that have influenced the transmission of mathematical reasoning and knowledge, paying special attention to the circumstances of Mathematics at the Spanish University.

Origen, fundamento y primeros pasos

Todos tenemos una opinión sobre lo acontecido cuando esto afecta de algún modo al desempeño de nuestras actividades o se relaciona con nuestras inquietudes vitales. A algunos les resultará chocante la célebre frase del crítico de arte y sociólogo británico John Ruskin (1819-1900):

> La mayor cosa que un ser humano hace es ver algo y contar lo que ve de una forma sencilla.

En una línea similar se manifestó en cierta ocasión el matemático Simeón-Denis Poisson (1781-1840):

> La vida vale la pena vivirla por dos motivos solamente: el hacer Matemáticas y el enseñarlas.

El Profesor Luis A. Santaló Sors dirigía algunas de sus reflexiones específicamente hacia la didáctica de la Matemática:

> En general, todo matemático se siente empujado hacia la investigación; más tarde, siente el interés por transmitir a los demás sus conocimientos...
>
> Santaló, 1990.

Sea cual sea la importancia que se le asigne a estas actividades intelectuales, la Docencia y la Matemática permanecen íntimamente ligadas desde sus orígenes. Como es fácil imaginar, puede hablarse de una enseñanza de la Matemática incluso en los tiempos más remotos de nuestra historia. Surge con la evolución del ser humano como individuo que se adapta al medio, de la sociedad como recurso común y del conocimiento como motor del progreso.

> *En la cultura occidental (o mediterránea), se consideran como orígenes de la Universidad a las Academias de la Antigua Grecia.*

De este modo, los antecedentes de las instituciones docentes pueden encontrarse en los núcleos familiares, en los consejos tribales y comunitarios y en los consejos de ancianos. Ya entonces, esas reuniones de individuos se producían para la búsqueda de explicaciones de sucesos, para entender la realidad, para aprender nuevas técnicas y para desarrollar prácticas con las que convivir con el entorno.

Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide. Sevilla
Miguel A. Hinojosa Ramos
Universidad Pablo de Olavide. Sevilla

Recordando épocas más recientes, en la cultura occidental o mediterránea, se consideran como orígenes de la Universidad a las Academias de la Antigua Grecia (a partir del siglo V a.C.). También conviene reconocer como cunas del conocimiento moderno a los monasterios cristianos (desde el siglo IV) y a las Universidades medievales (con posterioridad al siglo X). También en el Renacimiento, el interés por el pasado greco-romano clásico se tradujo en un apasionamiento por las ciencias y las artes, así como en una sistematización y renovación de todas las parcelas de la cultura humana. Esta lectura del mundo influyó de manera importante en la evolución de las ciencias.

A partir del siglo XV, como consecuencia del conocido proceso de conquista y colonización a escala mundial, se trató de imponer un estilo de hacer y de saber.

Con respecto a la evolución de la Matemática española hasta principios del siglo XX, el lector interesado puede encontrar una completa descripción en una conferencia impartida por Francisco Vera en el Ateneo de Madrid (Vera, 1935).

La difusión del saber matemático

A partir del siglo XV, como consecuencia del conocido proceso de conquista y colonización a escala mundial, se trató de imponer un estilo de hacer y de saber. Se procuraba que todo el mundo adoptase las técnicas impuestas por el colonizador en cuanto a comprensión de sus explicaciones y de sus modos de saber o proceder. En particular, se fue imponiendo en todo el planeta una forma de entender Matemáticas que se había desarrollado fundamentalmente en torno a la cultura mediterránea. Como es bien sabido, este modelo ha resultado decisivo en el proceso posterior de desarrollo científico en todo el mundo. De hecho, hasta la segunda mitad del siglo XX no se había puesto en duda el modelo de conocimiento científico, aunque actualmente se adapta a diferentes formas de organización y se estudian propuestas alternativas en prácticamente todas las ramas de la Ciencia.

En España, durante el Renacimiento (siglos XVI y XVII), se distinguen dos líneas bien diferenciadas dentro de la actividad en torno a las Matemáticas. Por una parte, en el seno de la cultura académica de tradición bajomedieval, se veía a las Matemáticas como una disciplina teórica. Por otro lado, fue la base de aplicaciones prácticas en diversos campos de la actividad económica y técnica. No obstante, hay autores que discrepan, y consideran que la Matemática teórica no interesó, sino solo sus aplicaciones.

De hecho, entre todas las aplicaciones prácticas de las Matemáticas, la que mayor importancia tuvo en la España del siglo XVI fue el Cálculo Mercantil. Prueba de ello son las 19 obras que se publicaron a lo largo del siglo sobre lo que entonces se llamaban *cuentas*. Éstas se utilizaron para comenzar a difundir un conocimiento matemático realmente aplicado.

En cuanto a lo sucedido en el resto de Europa, ya en el siglo XVII, el método propuesto por René Descartes (1596-1650) para construir las disciplinas científicas hizo posible una visión limitada de algunos aspectos referidos a hechos de la naturaleza, del hombre y de la sociedad. En poco tiempo se comprobó que la complejidad de los fenómenos que se comenzaban a analizar exigía una yuxtaposición de conocimientos disciplinarios. Así, surgió y se estableció lo que ciertos autores denominaron multidisciplinariedad en los estudios como reunión de los resultados obtenidos con los métodos específicos de cada disciplina. El primero que expresó explícitamente la necesidad de la multidisciplinariedad fue el Secretario de la Académie des Sciences de París, Bernard Le Bovier De Fontenelle (1657-1757).

Con respecto a la difusión de esos conocimientos multidisciplinares, es fácil aceptar que, tradicionalmente, las teorías pedagógicas surgieran para la enseñanza primaria y secundaria. Es lógico que se sintiera la necesidad de abordar la didáctica de la Enseñanza Superior en estos momentos de la historia, cuando se comprobó lo difícil que resultaba enfrentarse a la gran acumulación de conocimientos. Las consecuencias de este retraso en la aparición de una preocupación por la didáctica universitaria ha podido apreciarse, según educadores actuales, hasta hace muy poco tiempo.

De hecho, los intentos de concentrar el conocimiento y los modos de utilizar la intelectualidad dieron lugar a las tres modalidades de la Universidad que caracterizan a las Universidades actuales de todo el mundo. Cada una de ellas surgió de un polo de imperialismo aparecido en los últimos siglos: las Grandes Écoles francesas aparecen a finales del siglo XVII; posteriormente, lo harían la Universidad de Berlín (inicios del siglo XIX) y los Land Grant Colleges de los Estados Unidos de América (alrededor de 1850). Estos modelos o propuestas de universidad están, obviamente, subordinados al modelo de propiedad (material e intelectual), al de producción y a la economía de la sociedad en la que se originan. En cada universidad es posible encontrar algunas componentes de dichos modelos en cuanto a diferentes aspectos: títulos académicos, carrera docente, admisión de estudiantes, exámenes, diplomas, diseño curricular y su ejecución... En todas ellas, las disciplinas relacionadas con las Matemáticas destacaron por la importancia asignada y su aprendizaje se impuso como necesidad a los que se dedicaban a disciplinas científicas.

Sin embargo, hay que reconocer que las Matemáticas no gozan de una gran popularidad fuera de los círculos matemáticos; casi siempre se las ha acusado de oscuras y costosas. Repasando la Historia, se pueden encontrar numerosos ejemplos de matemáticos geniales cuyos resultados pasaron mucho tiempo desapercibidos por el mundo. En la mayoría de estos casos, hubo que esperar a que otros sabios estudiasen, entendiesen, clarificasen y generalizasen estudios anteriores para que sus consecuencias pasasen a formar parte, al menos, de la tradición matemática general.

Un claro ejemplo de lo anterior lo tenemos en la figura de Isaac Newton (1642-1727). Newton no se comunicaba con facilidad y muchos de sus resultados tardaron en encontrar alguien que se tomara el suficiente interés como para estudiarlos desde diferentes puntos de vista y hacerlos accesibles a otras personas.

Todo lo contrario ocurría con Gottfried Wilhelm, más conocido por el alias de *Leibnitz* (1646-1716). Se preocupó por encontrar discípulos entusiastas a los que transmitir sus conocimientos, como ocurrió con todo lo relativo al Cálculo Diferencial e Integral, por ejemplo. Desde la época de Leibnitz hasta nuestros días, se ha procurado valorar la investigación matemática como parte de la labor docente. Se presentan a continuación algunos ejemplos más de buenos docentes:

Un de ellos digno de consideración es el genial Leonard Euler (1707-1783). Cualquiera que estudie su *Álgebra* se dará cuenta de la excepcional calidad didáctica con que fue escrito dicho texto. Muy probablemente, el lenguaje utilizado fue cuidado especialmente al dictárselo Euler, ya ciego, a un criado suyo de escasos conocimientos matemáticos.

Diferentes características pedagógicas presentaba el francés Gaspard Monge (1746-1818), del que Boyer (1992) dice que:

> ...reunía una combinación de talentos nada frecuente, ya que era al mismo tiempo un competente administrador, un matemático investigador de gran imaginación y un maestro capaz de transmitir a sus discípulos inspiración y entusiasmo. La única cualidad de un pedagogo que podría haber tenido también, pero de la que carecía, era la de ser un buen escritor de libros de texto.

No obstante, aunque es cierto que Monge mostraba una cierta deficiencia en este aspecto, sus jóvenes e inquietos alumnos compensaron con creces tal deficiencia, poniendo en circulación un verdadero torrente de libros de texto elementales de una calidad más que aceptable.

Durante la Ilustración en España, también se produjeron algunos acontecimientos de relevancia para la evolución de la docencia de las Matemáticas. Así, en 1764 se funda, con el nombre de Conferencia Físico-Matemática Experimental, la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, la primera institución de su clase en todo el país. Sus secciones dedicadas a las Matemáticas, Electricidad y Magnetismo, Óptica, Neumática y Acústica, Química e Historia Natural desarrollaron una notable labor.

Pocos años después, en 1785, el Rey Carlos III y su primer Secretario de Estado, el Conde de Floridablanca, decidieron crear en la Corte de Madrid una Academia de Ciencias *para promover el estudio, aplicación y perfección de las ciencias exactas*. La Academia fue fundada en 1834 y otra vez en 1847, pero no llegó a alcanzar el éxito previsto; suficientemente revelador es que nunca ocupó el edificio que se hizo para tal fin y que hoy es el Museo del Prado.

> *En 1764 se funda, con el nombre de Conferencia Físico-Matemática Experimental, la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.*

En lo que corresponde a la didáctica de la Matemática en España en este período, la síntesis más relevante del siglo XVIII la escribió el catalán Benito Bails bajo el título *Elementos de Matemáticas* (1779-1790); contemporáneo de Monge, fue *Director de Matemáticas* de la Academia de San Fernando, de Madrid.

Matematización del saber

Con esto llegamos a la descripción de la situación existente a principios del siglo XIX. Como consecuencia de la difusión de la Matemática a tantos niveles y en tantos ámbitos distintos, pronto se produjo un incremento de las influencias entre sus conocimientos y los relativos a otras ramas del saber.

Quizá el descubrimiento más decisivo del siglo XIX para la cultura matemática fue que se comenzó a considerar que este conjunto de saberes era una creación intelectual del hombre y no constituía una ciencia natural. A finales de dicho siglo, los medios tecnológicos desarrollados permitieron visiones más profundas del universo y los avances en el conocimiento de la naturaleza dieron origen a nuevos objetos de estudio, con lo que se comenzaron a crear métodos matemáticos surgidos a partir de la mezcla de los procedimientos utilizados en disciplinas distintas. Se comenzó a hablar de interdisciplinariedad y esa integración de conocimientos permitió abordar problemas mucho más complejos como la realidad cósmica, la naturaleza de la materia, el fenómeno de la vida y los misterios de la mente.

Se hizo necesaria la preparación de los estudiantes hacia una visión global; no era suficiente con identificar la totalidad en cada aspecto, sino que se debían reconocer las interacciones no siempre perceptibles. Cuando, años más tarde, se trató de adoptar un enfoque en el que se trascienden los objetos y métodos, un punto de vista más allá de las disciplinas, surgió la transdisciplinariedad, hacia la que se supone que se debe tender en educación matemática.

Una de las principales características de la Matemática del siglo XIX es la aparición de revistas específicamente matemáticas.

Otra de las principales características de la Matemática del siglo XIX es la aparición de revistas específicamente matemáticas. Estas publicaciones se convirtieron pronto en un importante vehículo de comunicación entre los diferentes investigadores de todo el mundo, como ocurriría en todas las ramas del saber. Quizá gracias a las revistas, o tal vez como causa de la importancia que obtuvieron éstas, la Matemática sufrió un espectacular desarrollo a lo largo de ese período. Para muchos autores, el siglo XIX es llamado el de la Edad de Oro de las Matemáticas por la cantidad y calidad de los progresos alcanzados durante esos 100 años.

A partir de 1850, en plena Edad de Oro, la Matemática gozó de una situación privilegiada en la Universidad. La investigación matemática recibió recursos considerables y se pudieron crear pequeños círculos de especialistas cuyo progreso se hacía notar de una forma importante. El motivo fundamental para esta *apuesta por las Matemáticas* se basaba en su carácter propedéutico; la Matemática fue considerada como una enseñanza preparatoria para el estudio de cualquier disciplina científica.

En la España isabelina y durante el período revolucionario, se puede hablar de una decisiva renovación institucional en las ciencias físico-matemáticas. Hasta 1845 no existía autonomía alguna en las enseñanzas universitarias de esas dos materias. En dicha fecha se creó una sección científica especial en las facultades de Filosofía, que fue un primer paso para la aparición de las primeras facultades de ciencias (y, dentro de ellas, de Ciencias Exactas), que surgieron a raíz de la ley Moyano de 1857.

Tras una fugaz y precaria Academia de Ciencias Naturales (1834-1843), se fundó en Madrid, en 1847, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Esta nueva organización exigía investigadores versados en las nuevas corrientes del saber, pero los escasos físicos y matemáticos españoles carecían de los conocimientos que debían difundir.

En España, el nivel académico era muy bajo por aquel entonces, según López (1982), tanto en lo concerniente a la información como desde el punto de vista de la enseñanza, y siguió siéndolo durante 25 años al menos. Fue el madrileño José de Echegaray (1838-1916) el que más eficazmente importó y difundió los conocimientos que estaban surgiendo y desarrollándose fuera de nuestras fronteras, tanto en Física como en Matemáticas. Desde 1868 fue ayudado en su labor por un importante grupo de colaboradores procedente en su mayoría de la Escuela de Ingenieros de Caminos.

A partir de la Restauración, comenzaron a surgir figuras aisladas que intentaban hacer olvidar la escasa tradición nacional. Destacaron Eduardo Torroja Caballé (1847-1918), así como Lorenzo Torres Quevedo (1852-1936) y, finalmente, Julio Rey Pastor (1888-1962), que fue capaz de compaginar sus trabajos de investigación con una labor didáctica y de síntesis que ha influido poderosamente en el posterior desarrollo de la Matemática contemporánea en España (y también en Argentina). Uno de sus colaboradores, el ingeniero industrial y matemático Pedro Puig Adam (1900-1960), le ayudó a elaborar una colección de textos para la Enseñanza Media y dedicó grandes esfuerzos a la mejora de la enseñanza de las Matemáticas (Castelnuovo et al., 1964).

Transformaciones recientes

La Metodología de la Docencia de las Matemáticas sufrió profundamente la crisis de los fundamentos de principios del siglo XX. Así, se enfatizó el rigor en lo que se vino a llamar el formalismo, al cual fueron a parar las principales corrientes de la didáctica matemática. Como consecuencia directa de esto, se perdió la intuición y se abandonó la enseñanza de la Geometría (en la que es difícil ser formal aunque es fácil ser intuitivo).

En todo el mundo se comenzó a sentir cierto escepticismo ante la utilidad real de las Matemáticas. ¿Cómo era posible el avance espectacular de la tecnología a pesar de los cada vez menos satisfactorios resultados en Matemáticas de los estudiantes?

En todas las ramas del conocimiento se ve una tendencia a desarrollar su propia Matemática, incluso en áreas hasta entonces poco matematizadas (recuérdese la adopción de la teoría de las catástrofes, a partir de 1970, en Artes y

Humanidades). Según D'Ambrosio (1997), hay dos explicaciones posibles para este fenómeno:

> Una interpretación es que la esencialidad de los métodos y del estilo matemático en la elaboración del conocimiento se impone. Otra, y las dos interpretaciones son compatibles, es que el concepto de disciplina como se estableció a partir del siglo XVII, no puede subsistir. La complejidad del mundo moderno, la profundidad del conocimiento que hoy tenemos de los fenómenos y las impresionantes posibilidades de observación, demandan ir más allá de las disciplinas tradicionales. La insuficiencia del conocimiento disciplinario desde luego se manifestó y creó la necesidad de estudios multidisciplinarios, que caracteriza a los sistemas educacionales a partir del siglo XIX.

En España, se produjo una gran conmoción en la década de 1970 con la introducción en los programas de Básica y Bachillerato de la entonces llamada *Matemática Moderna*.

Los profesores se sentían confusos y, además, se les creía culpables del *fracaso escolar*; para la mayoría, las odiadas Matemáticas tenían mayor responsabilidad que el resto de las asignaturas. A lo largo de los siguientes diez años, la sensibilización de los profesores de Matemáticas hacia el problema fue desarrollándose hacia la posterior constitución de asociaciones y la aparición de revistas especializadas:

En opinión de Iglesias Cerezal (1995), el panorama descrito anteriormente produjo la aparición de grupos de trabajo como Azarquiel, Zero, Aresta, Cero, Puig Adam, Rosa Sensat y otros. Cuando la legislación lo permitió, surgieron las Sociedades de Profesores de Matemáticas y, con ellas, las revistas españolas de didáctica matemática. Las primeras que surgieron en España fueron la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton* y, con ella, la revista *Números*.

El futuro de la docencia de las Matemáticas

Con lo anterior se pretende describir la historia de una renovación e innovación en la docencia de las Matemáticas cuyas consecuencias directas llegan prácticamente hasta nuestros días. En 1983, David Wheeler, editor de la revista canadiense *For the learning of Mathematics*, escribió una carta a 60 especialistas en educación matemática. En ella les pedía que formularan problemas específicos cuya resolución trajese consigo un notable avance en la enseñanza de las Matemáticas. Trataba de emular a David Hilbert, que en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, publicó la famosa lista de 23 problemas cuyos intentos de resolución supusieron importantes avances de la investigación matemática durante el siglo XX. Los problemas propuestos en respuesta a la petición de Wheeler se fueron publicando a partir de febrero de 1984, pero ni admitían una formulación exacta ni una resolución universalmente admitida como tal. De todos modos, muchas de las ideas que se presentaron han sido objeto de investigación reciente en Didáctica de las Matemáticas y siguen siendo problemas a abordar por los que se preocupan por ella.

Si pretendiésemos adivinar hacia dónde se dirige la docencia de las Matemáticas, es muy probable que debiéramos enfocar nuestro análisis hacia aquellos procedimientos que permiten al estudiante aprovechar los conocimientos para abordar otro tipo de problemas, no necesariamente matemáticos. Paul R. Halmos llegó a afirmar que

> el corazón de la Matemática consiste en resolver problemas.

También para Polya la resolución de problemas es el centro de la educación matemática. Hans Freudethal, uno de los autores más importantes del siglo XX en Didáctica de la Matemática, va un poco más allá: en 1983 publicó su *Fenomenología Didáctica* y en su obra afirma que todo conocimiento matemático procede de la resolución de un problema.

> *En España, se produjo una gran conmoción en la década de 1970 con la introducción en los programas de Básica y Bachillerato de la entonces llamada Matemática Moderna.*

En cuanto a las herramientas para afrontar los problemas, es evidente que, de la mano de las Matemáticas, ha surgido una especialmente importante. No sólo por lo versátil y potente que se está volviendo, sino porque se está difundiendo en todos los ámbitos, permitiendo la resolución de numerosos problemas matemáticos y de las más variadas facetas de la vida.

Obviamente, la referencia obligada aquí es la Informática. Según estudios recientes (por ejemplo, Llorens (2001)), casi la mitad de los estudiantes que comenzaba una ingeniería en 1990 decía estar en condiciones de usar habitualmente un ordenador personal (actualmente, nuestros alumnos se sitúan muy probablemente por encima de dicho porcentaje). Sin embargo, los programas de cálculo simbólico son relativamente poco conocidos. En la década de 1990, los programas eran poco utilizados en la actividad docente debido, fundamentalmente, a que sus utilidades eran limitadas y a que las notaciones que utilizaban no se adecuaban a las propias de las clases teóricas. Esos problemas ya se han resuelto en gran medida y las posibilidades se han visto incrementadas al permitir un manejo intuitivo de expresiones (no aproximaciones numéricas), como integrales o números irracionales.

Al principio, se trataba de usar el ordenador en clase de Matemáticas como un apoyo para las clases de teoría (incidiendo en las técnicas de visualización). También se utilizaba para resolver los problemas de siempre con la ayuda de una herramienta útil para los cálculos, tanto en las operaciones numéricas (como si se tratara de una calculadora) como a la hora de calcular derivadas, sumar series, etcétera. Sin embargo, el aspecto más espectacular fue su utilización en exámenes y no sólo para evaluar la capacidad en el manejo de los propios programas.

Hoy por hoy, parece aventurado y también arriesgado para nuestros estudiantes, diseñar un curso con un talante radicalmente innovador que abandone las vías tradicionales de presentación para basar la enseñanza en la interacción continua con el ordenador.

Como se sugiere en De Guzmán y Rubio (1993), de la mano de la Informática nos encontramos ante una transformación de las explicaciones matemáticas:

> Estamos, sin duda, en una época de profundos cambios en lo que se refiere a la iniciación de los que se adentran en el Análisis Matemático. Existen actualmente programas de ordenador de una gran potencia, versatilidad y facilidad de uso que, sin lugar a dudas, han de obligar, pasados unos pocos años, a una profunda transformación del aprendizaje del Análisis, así como de otras ramas de la Matemática. En la práctica del Análisis entre investigadores y usuarios, el ordenador se ha venido incorporando cada vez más intensamente desde hace décadas y el impacto que con ello ha experimentado la Matemática constituye una verdadera revolución. [...] Hoy por hoy, parece aventurado y también arriesgado para nuestros estudiantes, diseñar un curso con un talante radicalmente innovador que abandone las vías tradicionales de presentación para basar la enseñanza en la interacción continua con el ordenador. Con todo, parece poco razonable no hacer uso del ordenador para aquello en lo que podemos estar ciertos de que va a resultar profundamente beneficioso.

Para finalizar, se hará una breve reflexión sobre lo que puede ser el reto de la docencia universitaria de las Matemáticas en España:

Entre las funciones de la Universidad actual están la formación de recursos humanos para los distintos sectores sociales (de servicio, producción, gobierno, empresa privada,...) y, en cierto modo, la de

> filtrar los elementos capaces y excluir los de alguna manera inconvenientes

según sugiere D'Ambrosio (1997). Esta selección de individuos se manifiesta, por ejemplo, a través de los diplomas. Se ve una producción de conocimientos, pero subordinada a los criterios de uniformidad (o, cuando menos, de normalidad) científica, artística y filosófica que impone la Universidad. Ciertamente, se producen cambios en las diferentes disciplinas de conocimiento pero a menudo éstas se producen fuera de la Universidad.

En el futuro se verá cómo se adapta la Educación Matemática a estas exigencias y a los cambios a los que se acaba de hacer referencia. Creemos que esta transformación será más fructífera si se tiene en cuenta la evolución que ya ha sufrido la docencia desde sus inicios. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C.B. (1992): *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, 2ª reimpresión de la 1ª edición, Madrid.

CASTELNUOVO, E. ET AL. (1964): *Homenaje a D. Pedro Puig Adam*, Publicaciones de la Dirección General de Enseñanzas Medias, MEC, Madrid.

D'AMBROSIO, U. (1997): "Educación, Matemáticas y el futuro". *Épsilon,* n.º 38, pp. 105-114.

DE FONTENELLE, B. (1699) : *Historie de l'Academie des Sciences*, p. xix, París.

DE GUZMÁN, M.; RUBIO, B. (1993): *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático. Vol. 3*, Editorial Pirámide, Madrid.

DESCARTES, R. (1637): *Discurso del Método,* Ed. Aguilar, Argentina.

IGLESIAS, M. (1995): "Diez años en la Historia de la enseñanza de las Matemáticas", *Épsilon,* n.º 31-32, volumen 11(1-2).

LLORENS, J.L. (2001): "El impacto de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las Matemáticas (diez años de Matemáticas con ordenador)", *Épsilon*, n.º 49, 97-118.

LÓPEZ, J.M. (1982): *La ciencia en la historia hispánica*, Aula Abierta Salvat, Barcelona.

SANTALÓ, L.A. (1990): "Palabras al recibir la investidura de Doctor Honoris Causa de la Universidad de Sevilla el 26-IX-1989", *Épsilon,* n.º 18, 71-79.

VERA, F. (1935): *Los historiadores de la Matemática española*, Biblioteca Española de Divulgación Científica, Ed. Victoriano Suárez, Madrid. Reeditado por Ricardo Luengo, José M. Cobos y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en la Colección Recuperación del Patrimonio Matemático Español, Badajoz, 2000.

SUMA 50

Noviembre 2005, pp. 37-45

Matemáticas y educación en valores

Vivimos en un mundo complejo, conflictivo, en constante cambio y pluricultural. Por ello, es imprescindible una educación en valores fundamentales como la tolerancia, solidaridad, responsabilidad, cooperación, respeto a la naturaleza, sentido de justicia o espíritu crítico. En este artículo se presentan actividades de contenido matemático, elaboradas a partir de revistas, artículos periodísticos o de ONG y que versan sobre educación para el consumidor, educación para la paz, coeducación, derechos humanos, educación para el desarrollo sostenible. Están destinadas a alumnos de Educación Secundaria.

We live in a complex troubled world, in constant change and with a lot of different cultures. That is why teaching fundamental values is so important. Values such as tolerance, solidarity, responsibility, co-operation, respect to Nature, a sense of justice or being able to think for yourself. In this article several activities are shown that deal with mathematical questions; they have been elaborated from magazines, newspapers or non-governmental organizations and are related to consumer's and peace education, coeducation, human rights and education for maintainable development. This work is meant for Secondary Education students.

En los medios de comunicación se oyen cada vez con más frecuencia acontecimientos que atentan contra la convivencia pacífica de los habitantes de nuestro planeta y de nuestro entorno: incremento de las guerras y los conflictos armados, terrorismo, violencia callejera, asesinatos y maltrato de hombres a sus parejas o ex-mujeres, acoso físico y moral de algunos escolares hacia sus propios compañeros (recordemos el lamentable caso de Jokin). También se está produciendo un aumento alarmante del rechazo hacia los ciudadanos inmigrantes y la cultura que ellos representan. Nos cuesta mucho aceptar la diferencia y comprender la riqueza que la diversidad racial, cultural e ideológica nos aporta como individuos y como colectividad.

Nos encontramos en el barco de los países más poderosos económica y tecnológicamente y la brecha que nos separa de los que están en vías de desarrollo es cada vez más abismal. En numerosas ocasiones se ve a los pueblos de la región meridional del planeta como mano de obra barata o esclava, una oportunidad para el enriquecimiento gracias al comercio de petróleo, gas, diamantes, oro y otros materiales de primera necesidad, que individuos, gobernantes, países o multinacionales sin escrúpulos no dudan en aprovechar y explotar.

Escuchamos con indiferencia cómo los hielos glaciares se están descomponiendo, al tiempo que se multiplica el cáncer de piel por efecto de la destrucción de la capa de ozono. Mientras tanto, continúa la emisión de gases contaminantes a la atmósfera, sin que los países implicados y con mayor índice de desarrollo humano hagan el menor esfuerzo por cumplir los acuerdos internacionales ni por modificar un status de vida que daña a todos los pobladores de la tierra.

Nos invade un consumismo irreflexivo y feroz. En la sociedad de la tarjeta de crédito y del glamour se nos valora no por lo que somos sino por nuestra capacidad para gastar. Las campañas navideñas, cada vez más largas, los anuncios fascinantes y las ofertas espectaculares de las grandes superficies tienen un solo objetivo: hacernos comprar, con independencia de la utilidad o necesidad de los productos que adquirimos.

Asistimos diariamente a la manipulación de imágenes y noticias en los medios de comunicación. Desde la esfera política, económica o social, y haciendo uso de la televisión, la publi-

María Isabel Vegas Miguel
IES Tierra de Alvargonzález. Quintanar de la Sierra. Burgos

cidad o las revistas *del corazón* se pretende un adoctrinamiento subliminal; se nos intenta decir cómo vestir y qué comprar, qué pensar y cómo actuar.

Parece evidente, tras todo lo anterior, que es imprescindible una educación en valores. Al margen del papel que otros estratos sociales deben desempeñar en esta importante labor (familias, instituciones...) está claro que desde el aula tenemos, como profesores y educadores, una gran responsabilidad. Pero, ¿se puede enseñar matemáticas y educar en valores al mismo tiempo? ¿Es posible como profesores de matemáticas aportar un granito de arena a la ingente tarea de formar individuos que aprendan a descubrir el valor de la persona, a respetar la naturaleza y a convivir en armonía en un mundo complejo, cambiante y pluricultural?

En este artículo se presentan varias actividades que he recopilado en los 10 años que llevo como profesora de Matemáticas en institutos de Enseñanza Secundaria. En cada una de ellas, a partir de un texto recogido de una revista, un artículo periodístico o una ONG, he elaborado unidades con preguntas de contenido matemático. Los objetivos principales que he pretendido con este tipo de trabajos son:

Mostrar la conexión de las matemáticas con el mundo en que vivimos. Que los alumnos se acostumbren a leer periódicos y revistas *serias* y que aprendan a analizar críticamente sus informaciones, haciendo uso de las matemáticas. Al tiempo que los alumnos estudian contenidos del área de matemáticas, trabajan valores fundamentales como la tolerancia, solidaridad, responsabilidad, cooperación, respeto a la naturaleza, sentido de justicia, espíritu crítico. Aprenden a pensar por sí mismos, a comprar racionalmente, a valorar culturas diferentes y a ver al otro como igual en dignidad y en derechos.

Los conceptos que cubren las cuestiones planteadas abarcan parte de los currículos de matemáticas, desde segundo de ESO a segundo de Bachillerato.

Todas las actividades que se muestran de forma esquemática en este artículo aparecen expuestas íntegramente en el libro *Matemáticas y temas transversales*, (Vegas, 2003 (1)).

Educación para el consumidor

En el artículo "¡No pienses...compra!" de la revista *Quo*, 1995 (2) se relata la manipulación a la que nos someten los hipermercados, con estímulos conscientes y subliminales. En esta unidad, destinada a alumnos de tercero de ESO, se trabaja el tema de la proporcionalidad (porcentajes, índice de variación) y curiosidades matemáticas.

Revista *Quo. Octubre 1995*

SIEMPRE GASTAS MÁS. Los hipermercados pueden influir en un 78% de la compra total. La cesta media por persona se divide aproximadamente así: el 22% se compra decidiendo antes el producto y la marca; el 18% sabiendo el producto pero no la marca; y el 5% son marcas decididas, pero que se alteran en el hipermercado. El 55% restante se decide *in situ*. En general, cuantos más artículos se compran, más elevadas son las compras por impulso. Por contra, cuanto más se visita el hipermercado, menor es el porcentaje de compra irreflexiva.

Revista *Quo. Octubre 1995*

Desde que en 1930 se creó el primer supermercado en Estados Unidos, los expertos en marketing han estudiado minuciosamente el comportamiento de los consumidores con el objeto de condicionar sus compras. En la actualidad, los grandes autoservicios se han convertido en un auténtico teatro de los productos donde se desarma psicológicamente al cliente a fin de estimularle para que gaste lo más posible.

Como el cliente se fija primero en el centro de la estantería, allí se ponen los productos más rentables, alternando los artículos en oferta -productos gancho- con los de menor atractivo y mayor margen comercial. También es habitual que la marca blanca -la comerciali-zada con el nombre del hipermercado- se sitúe junto a la marca líder -más cara- a fin de que la diferencia incline al consumidor a comprar la marca propia, que da mayor beneficio a la empresa.

- ¿ Cuál es la estancia media en un hipermercado de una persona que entra allí?
- Durante ese período de tiempo, ¿A cuántos estímulos estamos sometidos en total?
- El matrimonio del 2º ha ido hoy al hiper y se ha gastado 128 euros, ¿Podrías decirme qué cantidad aproximadamente (según el artículo) ha comprado decidiendo previamente el producto y la marca y qué cantidad ha comprado por impulso *in situ*, sin tenerlo premeditado?
- La marca de café: “Café 2000” ha estado colocada el último mes en la estantería del nivel de las manos, obteniéndose una venta de 7.000 euros.
- ¿Cuánto disminuirá su precio si se pasa al nivel de los pies?
- ¿Y cuánto ganará si se pasa al nivel de los ojos?
- ¿Serías capaz de hallar los 4 porcentajes que faltan en el párrafo “Comprar con los ojos”?
- ¿Podrías decirme 10 títulos de cuentos, películas, refranes, símbolos, etc, donde aparezcan los números 5, 7 ó 9? ¿Crees que es casualidad? Investiga por qué culturalmente algunos números como el 3, el 5 o el 7 son números *mágicos* con especial importancia.

COMPRAR CON LOS OJOS

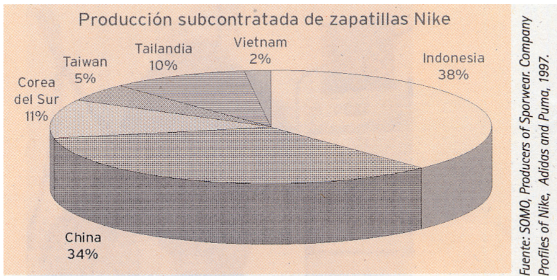
Las estanterías suelen tener tres niveles: el de los ojos, el de las manos y el de los pies. El nivel óptimo –donde la compra es más espontánea– es el de los ojos, seguido por el de las manos, donde se alcanza cómodamente. Los estudios demuestran que un producto puede aumentar sus ventas hasta un 78% si pasa del nivel de los pies al de los ojos, y que puede perder un 40% de su facturación si pasa del nivel de las manos al del suelo...

Revista *Quo. Octubre 1995*

En la siguiente actividad, los alumnos (de tercero de ESO) tenían que elaborar sus respuestas a partir de un artículo extraído de la ONG *Setem,* 1999 (3) y un vídeo de Intermón, 1999 (4). En el texto se describen las condiciones de trabajo injustas con las que se elabora el calzado deportivo de dos importantes marcas. Algunas de las personas implicadas en el proceso defectuoso de fabricación son mujeres, niños o presos. Los contenidos matemáticos trabajados son aritmética y proporcionalidad.

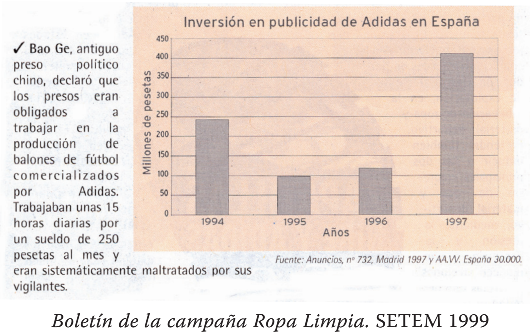
Un pasado oscuro

- En 1992, en Corea del Sur, Nike subcontrató a seis empresas que tenían unos 25000 empleados, de ellos más del 80% mujeres. En cuatro de esas empresas no se pagaba el sueldo mínimo establecido por las leyes nacionales y en tres había niños y niñas trabajando.
- En 1994, en Java Occidental, hubo una huelga en una fábrica subcontratada por Nike con más de 8000 trabajadores y trabajadoras. El ejercito fue llamado para reprimir las protestas.
- En 1995, en Turquía, se descubrió una fábrica que producía ropa deportiva para Nike utilizando trabajo infantil.
- En 1995, en Indonesia, Nike subcontrató doce empresas de calzado deportivo y 10 de ropa en las que los trabajadores y trabajadoras ganaban 1,80 dólares diarios, unas 250 pesetas. El sueldo mínimo obligatorio en Indonesia era de 2,5 dólares, unas 350 pesetas,
- En 1997, del 22 al 25 de abril, unos 10000 trabajadores y trabajadoras de Nike iniciaron una huelga para protestar contra los bajos salarios. La misma semana, 13000 vietnamitas iniciaron otra huelga por el mismo motivo.



Boletín de la campaña Ropa Limpia. SETEM 1999

- 1992: Corea del Sur. Suponiendo que las 6 empresas de la Nike son del mismo tamaño, ¿cuántos trabajadores son mujeres? ¿Cuántos trabajadores no cobran sueldo mínimo? ¿Qué porcentaje de empresas tenían trabajadores infantiles?. Si la población trabajadora fuera toda España ¿cuántos no cobrarían el sueldo mínimo?
- Busca el dato de personas que trabajan en empresas subcontratadas por Nike y mira el gráfico. Señala, ¿cuántas personas trabajan para la Nike en los diferentes países del sudeste asiático?
- Si alguno de vosotros tenéis unas zapatillas Nike, recuerda cuánto te costaron exactamente y halla qué parte del dinero que tú diste en la tienda va al obrero que las construyó, qué parte a publicidad y qué parte a los intermediarios.

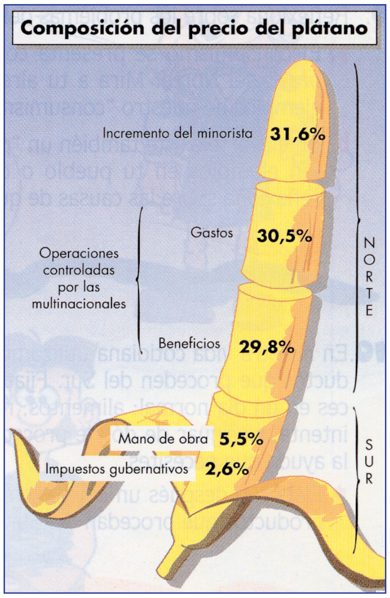


Boletín de la campaña Ropa Limpia. SETEM 1999

- Bao Ge: Calcula las horas al mes que trabaja un preso chino para fabricar balones de fútbol. Halla ahora el dinero que cobra por hora. Estima lo que vale un balón de fútbol en España. Suponiendo que al día un preso fabrica un balón, ¿cuánto dinero se lleva el preso por fabricar el balón? ¿Cuánto los intermediarios? Da también la solución en porcentajes.
- Averigua cuánto gana al año un jugador como Raúl, Bechkam o Ronaldo. ¿A cuántos presos chinos podría pagarse con ese dinero? Si pusiéramos a todos esos chinos en fila india y suponiendo que entre cada 2 personas hay 0,5 metros, ¿qué distancia recorrería la fila? Partiendo desde Madrid, ¿hasta qué lugar podría llegarse?
- ¿Cuántos millones de niños esclavos trabajan en el mundo, aproximadamente? ¿En cuántos institutos como el tuyo tendrían que trabajar como esclavos para igualar esa cantidad?

Educación para el desarrollo

La actividad que se muestra a continuación está destinada a alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales. En esta unidad, bastante extensa, se trabajan múltiples temas relacionados con la desigualdad Norte-Sur. Para ello, los alumnos debían hacer uso de diferentes materiales de Intermón (5) y del *Informe de Desarrollo Humano*, publicado por la ONU (6). Los conceptos matemáticos que se estudian abarcan desde proporcionalidad, interés compuesto, logaritmos o funciones, hasta estadística descriptiva e inferencial.

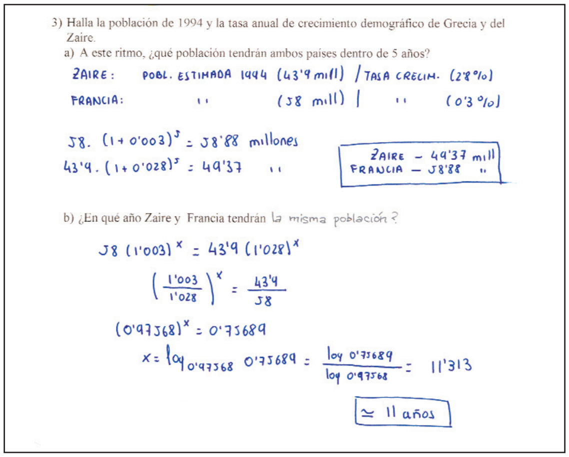


Querido Mundo. FUNCOE. UCICEF. Enero 1999

Observa el gráfico de *Composición del precio del plátano*.
- ¿Está el dibujo y los datos bien proporcionados?
- ¿Cuántos plátanos tienes que comprar para que el dinero correspondiente al precio de un plátano vaya totalmente al Sur?

Las siguientes actividades están relacionadas con el *Informe sobre el desarrollo humano 1997, segunda parte,* FUNCOE, UNICEF.

- Sirviéndote del Informe, halla la población de 1994 y la tasa anual de crecimiento demográfico de Francia y del Zaire.
- A ese ritmo, ¿qué población tendrán ambos países dentro de 5 años?
- ¿En qué año Zaire y Francia tendrán la misma población?
- ¿Está bien calculado el año en que se duplicará la población de Zaire, al ritmo del año 1994?
- ¿Cuántos años hay que esperar para que Francia duplique su población? ¿Y para que la triplique? ¿Y para que la triplique Zaire? A ese ritmo, ¿qué población tendrán ambos países dentro de 5 años?
- Selecciona España y 15 países más y anota en una tabla las siguientes variables: tasa anual de crecimiento demográfico, esperanza de vida, población con acceso al agua potable y PIB real per cápita.
- ¿Qué tipo de variable es cada una de ellas?
- ¿Existe alguna relación entre población con acceso a agua potable y tasa de mortalidad infantil? ¿Y entre PIB real per cápita y esperanza de vida? Haz los cálculos pertinentes y en caso afirmativo, da una explicación y averigua cuál puede ser la esperanza de vida de un país con 2.000 dólares de PIB per cápita.


3) Halla la población de 1994 y la tasa anual de crecimiento demográfico de Grecia y del Zaire.
a) A este ritmo, ¿qué población tendrán ambos países dentro de 5 años?

ZAIRE: POBL. ESTIMADA 1994 (43'9 mill) / TASA CRECIM. (2'8 %)
FRANCIA: " (58 mill) / " (0'3 %)

$58 \cdot (1+0'003)^5 = 58'88$ millones
$43'9 \cdot (1+0'028)^5 = 49'37$ "

ZAIRE – 49'37 mill
FRANCIA – 58'88 "

b) ¿En qué año Zaire y Francia tendrán la misma población?

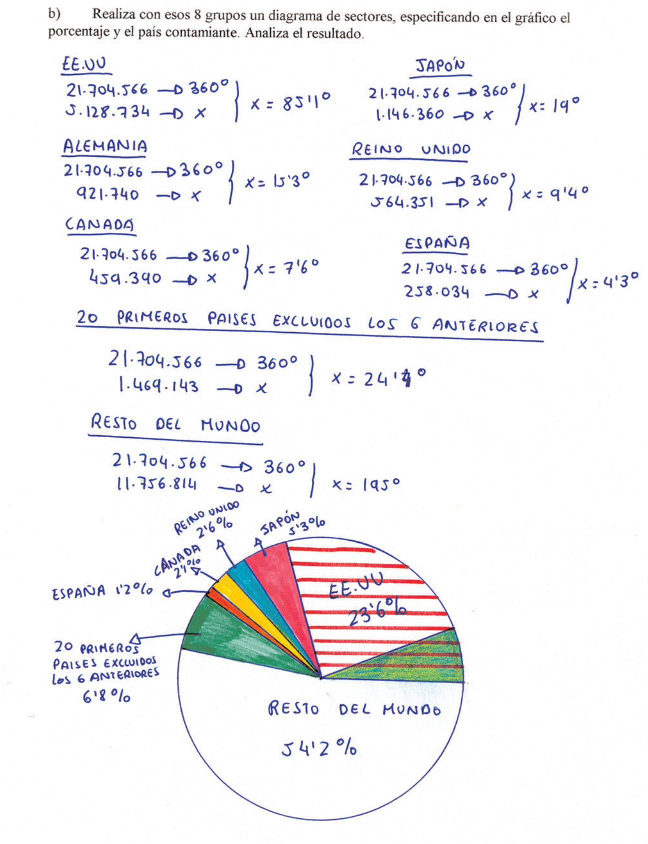
$$58\,(1'003)^x = 43'9\,(1'028)^x$$
$$\left(\frac{1'003}{1'028}\right)^x = \frac{43'9}{58}$$
$$(0'97568)^x = 0'75689$$
$$x = \log_{0'97568} 0'75689 = \frac{\log 0'75689}{\log 0'97568} = 11'313$$
$$\boxed{\simeq 11 \text{ años}}$$

Raquel Sáiz, 1º Bachillerato

- En el *Informe*, aparece el PNB per cápita y la deuda externa de varios países, entre ellos, los mayores productores de materias primas (café, cacao, azúcar, té, tabaco, pimientos, flores y gambas). Añade los datos correspondientes a España.
- ¿Tiene sentido calcular la media del PNB de esos países? ¿Por qué?
- ¿Tiene sentido calcular la mediana? ¿Por qué?
- Realiza un diagrama de cajas para el PNB de esos 20 países. Comenta los resultados.
- ¿En qué percentil se encuentra España? ¿Y Costa de Marfil (principal exportador de cacao del mundo, del que se obtiene el chocolate)?
- Busca el nº de televisores, papel de imprenta consumido y nº de líneas telefónicas principales de los países que te indico a continuación: Noruega, EEUU, Japón, Nueva Zelanda, España, Grecia, Suiza, Portugal, Lituania, Camerún, Armenia, China, Perú, Nicaragua, Tailandia y Sierra Leona.
- Realiza 3 polígonos de frecuencias superpuestos en 3 colores distintos. (Ordena los países según su IDH).
- Halla el rango de las 3 variables. ¿Qué país alcanza el máximo y el mínimo en cada variable?

Como has podido comprobar, los países industrializados (entre los que se encuentra España) gozan de un PIB per cápita, que permite a sus habitantes tener un alto nivel de vida, poder consumir todo tipo de bienes y disfrutar de los avances tecnológicos del siglo XX (coche, teléfono, calefacción, luz eléctrica, electrodomésticos...). El 80% de los recursos del planeta está en manos del 20% de sus habitantes (que viven en países desarrollados). Pero un excesivo consumo conlleva un excesivo gasto energético y como consecuencia, una excesiva contaminación. La emisión a la atmósfera de CO_2 es el mayor culpable del denominado efecto invernadero. Observa y halla la proporción de emisión de CO_2 de los países de alto IDH con relación a las emisiones mundiales.

- Selecciona los 5 países más contaminantes del mundo y agrupa el resto en 3 clases: España; 20 primeros países excluidos los 6 anteriores; resto del mundo.
- Realiza con esos 8 grupos un diagrama de sectores, especificando el porcentaje. Analiza el resultado. ¿Sabías que los países que más se oponen a un compromiso de reducción de CO_2 son EEUU, Japón, Australia y España?



Raquel Sáiz. 1º Bachillerato

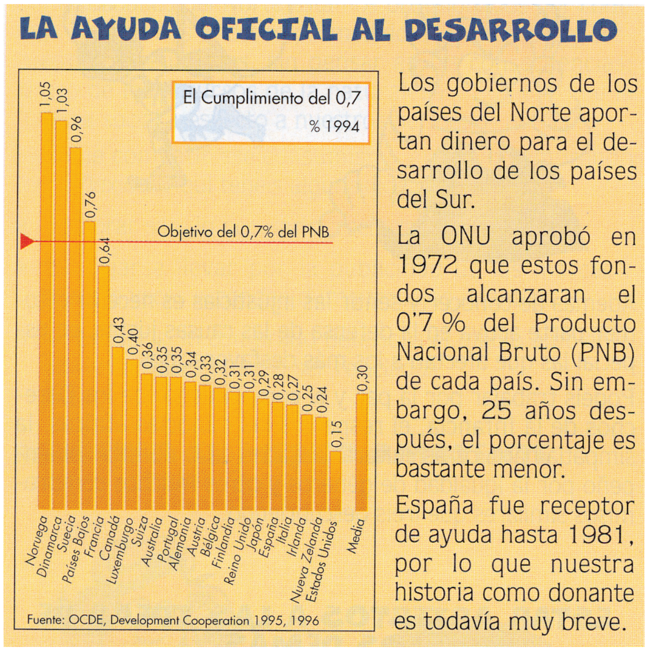
- Hace unos años, se acordó dar un 0,7% del PNB a los países en vías de desarrollo. En 1996, sólo 4 países cumplían este acuerdo... Busca cuáles son y halla el país que más lejos está de cumplir el acuerdo.

Deuda Externa

La deuda externa es el problema más importante de los países en vías de desarrollo. A raíz del huracán Mitch, en el diario *El Mundo* (7) apareció una información muy interesante con relación a las ayudas aportadas para el desastre por los países industrializados y la petición de las ONG para condonar la deuda a los estados afectados. En la actividad, destinada a alumnos de cuarto de la ESO, se trabajan los temas de interés, fracciones, divisibilidad y estadística descriptiva.

- Recoge el dato de la deuda externa de Honduras y Nicaragua. Si en 3 años no son capaces de pagar 1 pta de su deuda externa y suponiendo que los intereses por dicha deuda ascienden al 15% anual (estos intereses variables son, en general, muy superiores). ¿Cuánto nos “deberán” dentro de 3 años? ¿Y dentro de 10 años?

- Haz un cálculo del dinero que gastas en una semana en ocio, libros, ropa, calzado y comida. Averigua a partir de este dato con qué fracción de ese dinero debe conformarse un niño (o joven) del tercer mundo.
- Representa en un diagrama de barras la deuda externa de los 5 países más afectados y calcula la suma de esas cantidades. Halla luego el dinero que se emplea en EEUU para armamento y la cantidad gastada en automóviles en un año en la Unión Europea. (Pasa las cantidades a notación científica).
- ¿Qué fracción del dinero gastado por EEUU en armamento habría sido suficiente para cubrir todos los daños del huracán Mitch? (Dar el resultado en fracción, decimal y porcentajes).



Revista *Querido Mundo*

Educación ambiental

¿Es posible aprender jugando? Yo siempre he creído en el valor educativo del juego, como una oportunidad amena y divertida para desarrollar las habilidades físicas, sociales o intelectuales del niño y del adolescente. En la siguiente actividad, que titulé *Juego matemático-ecológico 50×15,* se distribuye a los alumnos en grupos de tres o cuatro y se les da a cada grupo cartulinas de diferentes colores con las letras *A*, *B*, *C*. A continuación se hacen preguntas que tienen que discutir en grupo. Han de consensuar una respuesta en un tiempo prefijado, al final del cual deben levantar la cartulina con la letra que consideren correcta. Por cada respuesta acertada y dependiendo de su dificultad se obtienen 100, 150 o 200 puntos. Por cada fallo pierden la mitad de los puntos acumulados. La actividad, adaptando las preguntas, se puede realizar en diferentes niveles. Este juego siempre goza de un enorme éxito entre los alumnos.

Juego Matemático-ecológico 50×15

La capa de ozono es:

A. Es una *capa* producida por el recalentamiento del planeta al no permitir la salida de gases como el dióxido de carbono y que de seguir así, producirá en los próximos decenios una subida de las aguas de los mares.

B. Una capa existente en la atmósfera, que actúa como filtro de los rayos del sol y evita así que puedan dañarnos la piel, dejando entrar solamente los rayos buenos.

C. La capa que subyace en el fondo del mar, donde se concentra todos los microorganismos y materia orgánica, imprescindibles para la supervivencia de la fauna marina.

$(2 + 5)^3$ es igual a:

A. $2^3 + 5^3$ B. 343 C. 133

La lluvia ácida es:

A. La lluvia que cae cuando estamos desanimados, desilusionados o “amargados”. Aumenta nuestro malestar general.

B. Algunos gases (al quemar carbón en las centrales térmicas o gasolina los automóviles), que mezclados con agua, la vuelven ácida, como el jugo de vinagre.

C. El olor nauseabundo que se produce cerca de los estercoleros y las aguas fecales provenientes de los hogares de la ciudad.

100 euros invertidos al 5% durante 20 años, sin retirar los intereses, producen:

A. 200 euros. B. 3325 euros C.265 euros

El envase para la leche, las cervezas o el agua más ecológico (que menos contamina y es más reutilizable) es:

A. Lata
B. Envase de plástico
C. Botella de cristal

Se dispone de un engranaje compuesto por 3 ruedas. Cada una de las cuales con 18, 12 y 16 piñones, respectivamente, que están actualmente alineadas. ¿Cuántas vueltas dará cada rueda hasta que las flechas vuelvan a estar alineadas en el mismo sentido?:

A. 36 vueltas B. 4 vueltas C. 144 vueltas.

La energía más limpia (menos contamina) y más renovable que existe es:

A. La energía nuclear.
B. La energía que proviene del petróleo y del gas natural.
C. La energía solar.

Una persona camina a 2 km/h mientras sube una cuesta y a 6 km/h en la bajada. ¿Cuál será la velocidad media para el trayecto completo?:

A. 3 km/h B. 4 km/h C. 4,5 km/h

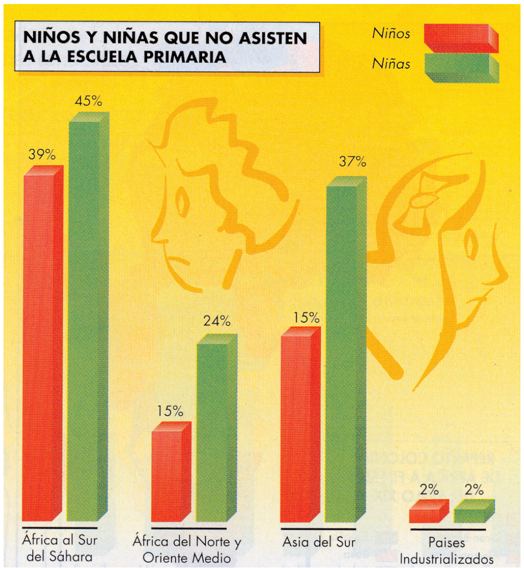
El *efecto invernadero* es:

A. Una construcción hecha con plástico transparente o con vidrio para cultivar hortalizas.
B. El estado de hipotermia (o congelación) que experimentan algunos animales, en invierno, para preservar energías para el verano.
C. La *capa* a modo de techo compuesta por dióxido de carbono, producido en la atmósfera por las fábricas, las centrales termoeléctricas y los coches, que evita que los rayos solares salgan de nuevo al exterior y que provoca un excesivo recalentamiento del planeta.

Coeducación. Educación para la paz. Derechos humanos

En octubre de 2002 apareció en el diario *El País* una información sobre el gasto en Defensa de Europa y EEUU, así como un estudio sobre el ejército profesional en España (8). A partir de este artículo y otros gráficos de la Revista “Querido Mundo” (9), los alumnos de cuarto de ESO debían trabajar los temas de funciones, proporcionalidad y estadística descriptiva.

- Realiza un diagrama de barras y un polígono de frecuencias con el gasto en defensa de todos los países que se indican en la tabla (sin incluir a la OTAN). ¿Qué país obtiene el máximo y cuál el mínimo?
- Observa la función representada en la *Convocatoria de tropa profesional.*
- ¿Cuál sería el gráfico más adecuado para representar esa información?
- Halla el dominio y el recorrido.
- Halla los extremos de la función ¿a qué crees que se deben?
- ¿Existe periodicidad o simetría en esta función? ¿Tendría sentido que la hubiera si se efectuara el cómputo durante varios años seguidos?
- Si tu oyeras la frase “las mujeres que se meten en las Fuerzas Armadas son en proporción más ignorantes y tienen menos formación que los hombres”, ¿podrías rebatirla utilizando argumentos matemáticos?
- ¿Ves algo extraño en la suma de los porcentajes de cada una de las columnas?



Querido Mundo, FUNCOE. UNICEF, enero 1999

- Observa ahora el gráfico donde se especifica el porcentaje de niños y niñas analfabetos en los diversos continentes.
- ¿Cómo se llama ese gráfico?
- Escribe esos porcentajes en una tabla de contingencia.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un niño asiático vaya a la escuela? ¿Cuál es la probabilidad de que una niña asiática vaya a la escuela?

- En los países no industrializados ¿tiene alguna relación el sexo de nacimiento y la posibilidad de educarse? ¿A qué crees que es debida esta discriminación?
- En un país al Sur del Sáhara, de cada 10.000 niñas, ¿cuántas aproximadamente no saben leer y escribir?
- Por cada 100 niñas que en España son analfabetas, ¿cuántas niñas asiáticas son analfabetas?
- ¿Crees que tiene algo que ver nacer en un país o no industrializado, con la oportunidad de estudiar? ¿Qué crees que hacen los niños de los países no industrializados en lugar de ir a la escuela? ¿Te parece justo?

A comienzos del año 2003 se creó una fuerte crisis internacional a raíz de un conflicto que ya entonces y aún dos años después, está teniendo consecuencias nefastas a nivel mundial. La tensión que se vivió en el consejo de seguridad de la ONU los meses previos a la invasión de Irak queda plasmada en los siguientes artículos recogidos del diario *El País* (10, 11). Con estos textos y otros extraídos de la revista *Querido mundo* (12) en relación a las causas que originan las guerras, se diseñó la actividad que se muestra a continuación. Ésta se puede llevar a cabo con alumnos de primero osegundo de Bachillerato de Ciencias Sociales, ya que los temas que se trabajan son repartos proporcionales, combinatoria y probabilidad (de la unión, intersección, condicionada, independencia).

- ¿Cuándo y por qué surgió la ONU? ¿Cuál es su misión?
- ¿Cuántos países componen el Consejo de Seguridad de la ONU y cuántos hay de cada continente? ¿Qué significa miembro permanente?
- Si la distribución en el Consejo de Seguridad fuera proporcional a la población mundial (Europa-700 millones, América-770, África-750, Asia-3.500, Oceanía-30) ¿cuántos asientos corresponderían a cada continente? Compara esas cifras con las obtenidas anteriormente.
- Desde septiembre de 2002, pertenecen a la ONU 191 países (22 de Europa Oriental, 23 de Europa Occidental, 35 de América, 53 de África y 58 de Asia y Oceanía). Efectúa ahora un reparto de los 15 puestos del Consejo de Seguridad proporcional al número de países de cada continente.
- Compara las tres formas anteriores de repartir los puestos del Consejo de Seguridad y señala cuál sería a tu modo de ver la más justa.

Supongamos que la elección de los 10 miembros no permanentes del Consejo de Seguridad de la ONU se realizara aleatoriamente por distribución geográfica.

- ¿Cuáles son todas las diferentes posibilidades de elegir los dos países Europeos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que España no pertenezca al Consejo de Seguridad?
- ¿Cuál es la probabilidad de que Perú pertenezca al Consejo?
- Se elige el primer país americano que debe pertenecer al Consejo y resulta ser Guatemala, ¿cuál es ahora la probabilidad de que Perú resulte elegido en el Consejo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que España y Perú pertenezcan al Consejo? ¿Son esos dos sucesos independientes? ¿Por qué? Contestar usando argumentos probabilísticos.

NOTA: Los miembros no permanentes del Consejo de Seguridad no se eligen aleatoriamente, sino por votación entre los diferentes países tras acuerdos previos.

Composición del Consejo de Seguridad

la presente resolución y que le pongan al corriente dentro de los 60 días siguientes a esa fecha;

6. Hace suya la carta de fecha 8 de octubre de 2002 dirigida al general Al Saadi del Gobierno de Irak por el presidente ejecutivo de la UNMOVIC y el director general del OIEA, que se adjunta como anexo a la presente resolución, y decide que lo indicado en la carta tendrá carácter obligatorio para Irak;

7. Decide además, habida cuenta de la prolongada interrupción por el Irak de la presencia de la UNMOVIC y del OIEA y de manera que éstos puedan cumplir las tareas estipuladas en la presente resolución y todas las resoluciones anteriores en la materia, y no obstante los entendimientos anteriores, establecer por la presente las siguientes disposiciones revisadas o adicionales, que serán obligatorias para Irak, para facilitar su labor en Irak:

▶ La UNMOVIC y el OIEA determinarán la composición de sus equipos de inspección y se asegurarán de que estén integrados por los expertos más calificados y experimentados de que se disponga;

▶ Todo el personal de la UNMOVIC y el OIEA gozará de las prerrogativas e inmunidades correspondientes a las de los expertos en misión contempladas en la Convención sobre Prerrogativas e Inmunidades de las Naciones Unidas y el Acuerdo sobre los privilegios e inmunidades del OIEA;

▶ La UNMOVIC y el OIEA tendrán derecho irrestricto de entrada y salida de Irak y derecho de circulación sin trabas, irrestricta e inmediata de ida y vuelta a los sitios de inspección, y derecho a inspeccionar cualquier sitio y edificio, incluido el

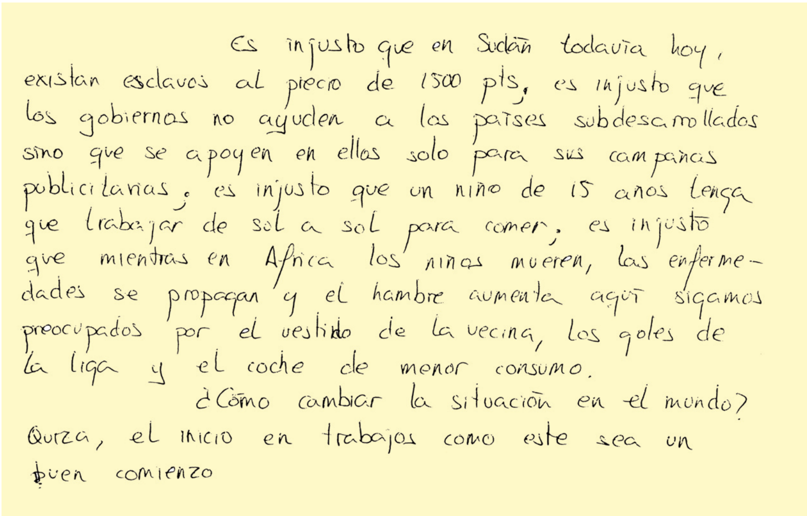
"Amenaza de Guerra. Resolución 1441". *El País* 30-01-2003

> La violencia crea más problemas sociales que los que resuelve y, por tanto, no conduce nunca a una paz duradera.
>
> *Martin Luther King*

Conclusión

Uno de los principales objetivos que he pretendido con este tipo de trabajo es sensibilizar a los alumnos y alumnas y fomentar en ellos el espíritu crítico. Por ello, cada actividad finaliza siempre con una pregunta del tipo: "Escribe la conclusión que has extraído del artículo" o "Señala la frase del texto que más te haya llamado la atención y coméntala". A continuación se muestran algunos de los comentarios finales expresados por los alumnos y las alumnas:

> Los supermercados saben atraer a la gente y hacerles comprar más de lo debido con trucos psicológicos.
>
> Cuánto más enriquecemos el norte, más empobrecemos el sur.
>
> Un 15% del dinero destinado a la publicidad sacaría a los trabajadores de la pobreza.
>
> No se sabe lo que siente una persona que sufre una guerra hasta que se vive.
>
> Nuestra maldición es la de no tener sensibilidad y la de evadir la realidad. Millones de niños mueren de hambre, mientras nosotros ¡tiramos la comida al cubo de la basura porque queremos adelgazar...!
>
> Me ha llamado la atención la foto de un niño con un arma y su padre le está enseñando a disparar, mientras otros niños de su edad estarían jugando con juegos infantiles. ■



Es injusto que en Sudán todavía hoy, existan esclavos al precio de 1500 pts, es injusto que los gobiernos no ayuden a los países subdesarrollados sino que se apoyen en ellos solo para sus campañas publicitarias, es injusto que un niño de 15 años tenga que trabajar de sol a sol para comer, es injusto que mientras en África los niños mueren, las enfermedades se propagan y el hambre aumenta aquí sigamos preocupados por el vestido de la vecina, los goles de la liga y el coche de menor consumo.

¿Cómo cambiar la situación en el mundo? Quizá, el inicio en trabajos como este sea un buen comienzo

Nuria Bello Sáiz, Patricia Tejada y Alberto García. 1º de Bachillerato

FUENTES DE INFORMACIÓN

(1) VEGAS, M.I. (2003): *Las matemáticas y los temas transversales*, Colección Perspectivas, Cuaderno de innovación pedagógica del CPR, Motilla del Palancar, Cuenca.

(2) "No pienses... ¡compra!", *Quo*, octubre 1995.

(3) Boletín de la campaña *Ropa Limpia*, Setem, 1999.

(4) *Comercio justo, consumo responsable*, (Vídeo), Intermón, 1999.

(5) *Comercio justo, una opción de consumo, una opción de justicia*, y *África más cerca*, Cuadernos de trabajo: Intermón, 1999.

(6) *Informe de Desarrollo Humano 1997*, ONU, 1997.

(7) "Centroamérica recibe 35 veces menos dinero que los especuladores del LTCM", *El Mundo*, 8 de noviembre de 1998.

(8) "Menos fuerzas, mejor armadas", *El País*, 13 de octubre de 2002.

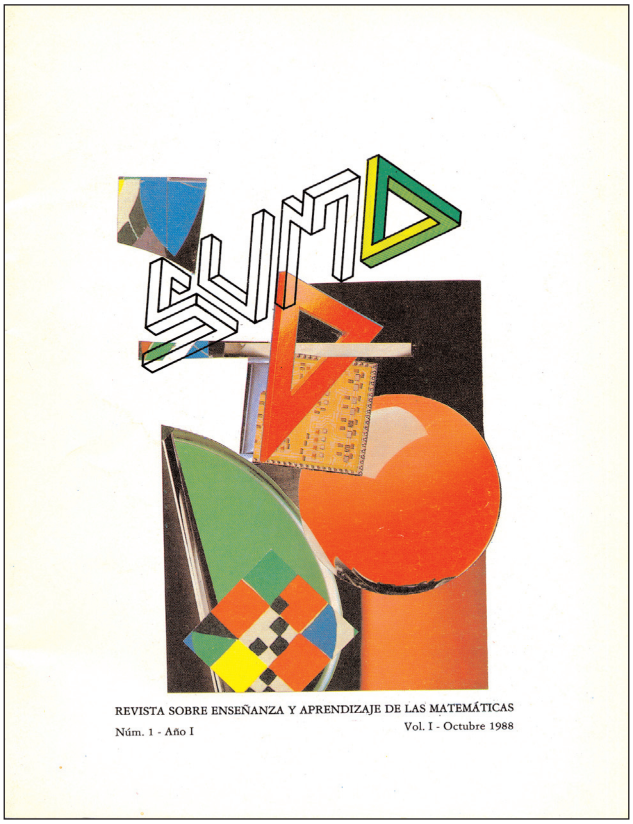
(9) "Ricos y pobres", Revista *Querido Mundo*, Funcoe-Unicef, enero 1999.

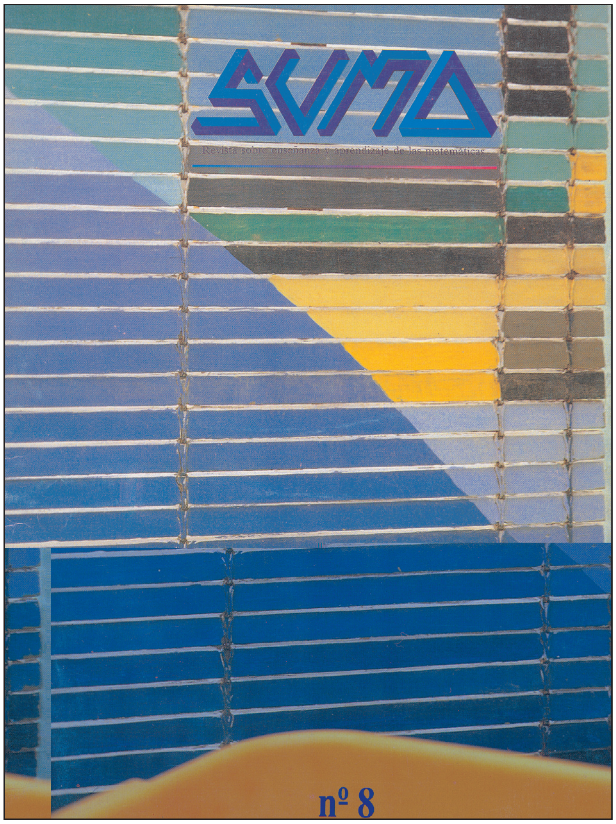
(10) "Amenaza de guerra", *El País*, 30 de enero de 2003.

(11) "El primer campo de batalla", *El País*, 2 de marzo de 2003.

(12) "Odio en el mundo", *Querido Mundo*, Funcoe-Unicef, enero 1999.

SUMA *Granada:* 1988-1991





Director: **Rafael Pérez Gómez**
Director Adjunto: **Manuel Vela Torres**
Administrador: **Felipe López Fernández**

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 47-52

Jumlah

El rigor, precisión, regularidad y simetría en la ornamentación arquitectónica de los pueblos Batak y Minangkabau, en Sumatra, y del pueblo Toraja, en Sulawesi, son difíciles de explicar sin matemáticas. Confirmar esa intuición pasa por contemplar el producto acabado, observar su proceso de elaboración y, sobre todo desde una perspectiva que ve las matemáticas como algo vivo, por interpelar a sus autores. Sólo así podrá decirse que se han encontrado matemáticas, las llamadas Etnomatemáticas por su origen vernáculo y extra académico.

The rigour, precision, regularity and symmetry in architectural ornamentation of the Batak and Minangkabau in Sumatra and of the Toraja in Sulawesi are hard to explain without mathematics. But such an intuition cannot be claimed without looking at the finished work, observing the work in progress and, from a perspective that considers mathematics as something in the making, inquiring work's authors. Only then it can be claimed that mathematics have been found, the so called Ethnomathematics given its local and non academic origin.

Cuando llegué no vi a nadie. Llamé, pero nadie abrió la puerta. Rodeé la casa y no encontré señales de que estuviese habitada. Me encontraba ante un ejemplo extraordinario de arquitectura vernácula, una casa tradicional batak en la costa este de la isla de Samosir, en el lago de Toba, en la isla de Sumatra. Pero estaba vacía.

Hoy en día, pocas son ya las familias batak que viven en casas tradicionales. Hechas de madera y sin clavos, son construcciones robustas levantadas sobre gruesos pilares cuyas fachadas se decoran con tallas. Los motivos de su ornamentación son formas foliares que se desarrollan en volutas de líneas múltiples y continuas, a menudo entrelazadas formando nudos, pero disponiéndose siempre según la simetría determinada por la mediatriz vertical de la fachada. Junto a esos diseños de líneas también se realizan otros basados en figuras geométricas más simples. La simetría proporciona a la construcción gran parte del carácter que posee.

Figura 1. Parte inferior de la fachada principal de una casa *batak*

Las franjas decorativas de la Figura 1 pueden clasificarse según su grupo de simetría. Pero más interesante aún es preguntarse cómo organizó su autor el espacio en el que se desarrollan. Cada franja se forma por la repetición sistemática de un motivo. ¿Cómo se las ingenió el artesano para asegurarse de que las tres franjas basadas en el trazado de las diagonales del rectángulo, y cuyo grupo de simetría[1] es *pmm2*, constaran de 25=12+1+12 unidades? Es decir, ¿cómo se dividieron esos tra-

Miquel Albertí Palmer
IES Vallès. Sabadell. Barcelona

vesaños en 25 partes iguales? ¿Cómo se dividieron otros en un número distinto? Entre las franjas de curvas encontramos, superposiciones de líneas aparte, grupos de simetría del tipo *p111*, *p112* y *pmm2*, pero ¿por qué en cada extremo esas franjas acaban con una figura ligeramente distinta?

Para los batak esas líneas continuas talladas en la casa garantizan buena y continua fortuna y protección a quienes la ocupan (Waterson, 1990). Por tanto, hay un estrecha relación entre su cultura, la simetría y la cuidada elaboración de los diseños ornamentales. Y puesto que estos son aspectos fundamentales de la geometría, en ellos se pone de manifiesto la relación entre cultura y matemáticas. Ahora bien, conocer qué matemáticas hay en esos diseños significa averiguar cómo se hicieron las cosas, qué referencias se tomaron, cómo se organizó el espacio que iban a ocupar, cómo se realizaron copias idénticas de una figura en diferentes puntos de ese espacio, etc. Intuía que su perfección era resultado de la aplicación de procesos matemáticos, pero cualquier consideración que yo hiciera sólo podría ser calificada de 'proyección matemática de mi conocimiento, no una identificación' (Albertí, 2005). De todos modos, no me hallaba en el camino equivocado para encontrar matemáticas porque diseñar es uno de los seis universales de actividad matemática descritos por Bishop (1999), pero durante el tiempo que pasé en Samosir no pude ver artesanos en acción.

La cultura minangkabau del oeste de Sumatra también decora las fachadas de sus casas tradicionales, en especial las de más alto rango social. Los motivos de sus diseños reproducen con mayor realismo las flores y hojas que representan. Hoy en día nadie vive ya en esas casas, la mayoría han sido restauradas y convertidas en museos.

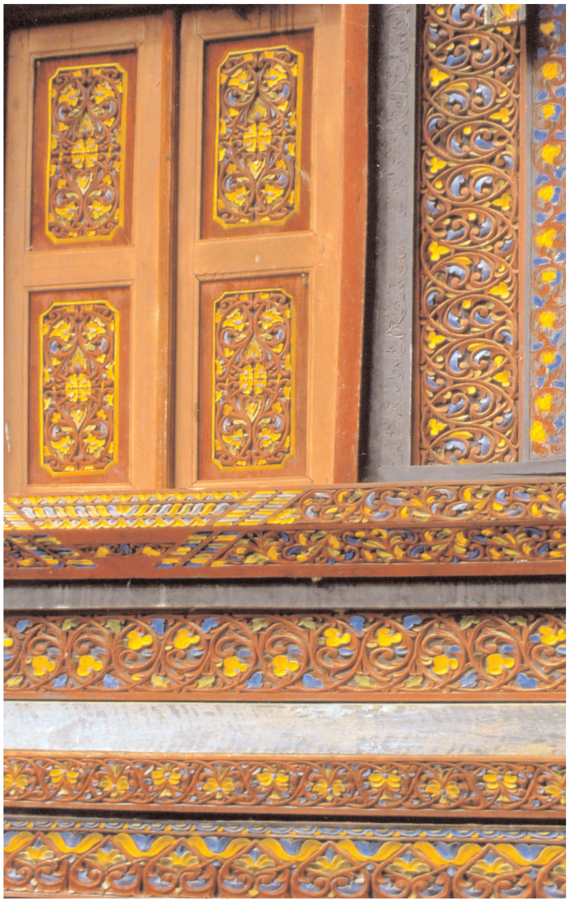


Figura 2. Detalle de la fachada de una casa *minangkabau*

En la Figura 2 vemos diseños 1D de tipo *p1a1*, *pm11* y *p112*. Como en el caso de los batak, algunos de estos diseños presentan elaboración tridimensional por superposición de líneas. En la ventana, los ejes de simetría de cada diseño son las mediatrices de los lados del rectángulo en el que se inscriben.

Cerca de Bukittinggi, centro cultural minangkabau, encontré un taller en el que estaban trabajando varios artesanos, cada uno sentado a su mesa labrando una tabla. Guiaba su labor un esbozo del diseño hecho sobre la madera. Pensé que hacían falta regla y compás para realizar figuras tan perfectas. Sin embargo, encima de las mesas sólo había mazas y gubias.

Pregunté a uno de los artesanos cómo hacían las figuras. Con un gesto me señaló un rincón del taller donde colgaban de la pared un montón de plantillas de papel con los diseños recortados. *Tomamos una plantilla, la sujetamos encima de la tabla y la perfilamos para luego tallarla*, me dijo.

Aunque no tuviese derecho a ello, mi decepción fue grande. Si había matemáticas, tenía que buscarlas en el proceso de construcción de las plantillas, pero su autor no estaba allí. Dar con él, en caso de que esto fuera posible, consumiría más tiempo del que disponía. Mis esperanzas de hallar lo que D'Ambrosio (1985) llamó *Etnomatemáticas* se desvanecían.

Figura 3. Estudiantes de una escuela elemental interesándose por mí

Dejé Sumatra y fui a Sulawesi. En las tierras altas de esta isla vive el pueblo Toraja. Su arquitectura también se caracteriza por las tallas que decoran sus construcciones, sobre todo las casas tradicionales (*Tongkonan*) y los graneros para el arroz (*Alang-alang*). Sus motivos representan también formas vegetales, pero son menos fieles a la realidad. Son más geométricos, más abstractos. A diferencia de los batak y los minangkabau, los toraja no tienen escritura. Ésta es probablemente la causa de que la talla, llamada *Pa' sura'* en la lengua local y cuyo significado es *como escribir*, sea una representación simbólica en la que los toraja expresan aspectos sociales, religiosos y cosmogónicos de su cultura (Lumowah, 1985; Nooy-Palm, 1988, Sandarupa, 1986).

Cada diseño recibe un nombre específico que lo distingue de todos los demás y se realiza en la fachada siguiendo una distribución simétrica con relación a su eje vertical central. La fachada norte, la principal, se divide en tres regiones horizontales y los espacios determinados por la simetría vertical de todas ellas se relaciona con aspectos vitales como la vida, la muerte y el sexo (Sandarupa, 1986). Volvemos a encontrar la simetría y su desarrollo ligados a la expresión cultural. Si para realizar los grabados se usan matemáticas, éstas no sólo se relacionarán con la cultura toraja, sino que serán fundamentales en una de sus manifestaciones.

La primera aproximación a los diseños la realicé en base a las simetrías que presentaban. Identifiqué grabados correspondientes a los 7 grupos de simetría 1D. En cambio, de los 17 grupos de simetría bidimensional no hallé ninguno relacionado con giros de 60º o 120º y su inexistencia, confirmada por el constructor Martheen Madoi y los artesanos Rombe' y Salle, obedece a causas culturales (Albertí, 2005). Sólo hay simetrías de rotación de 90º y 180º.

La ilustración 4 muestra la fachada norte de una casa tradicional toraja en la que se encuentran los 7 grupos de simetría en franja. De grupos de simetría del plano se identifican los siguientes: *pg*, *p2*, *p4*, *p4m*, *cm*. También aparece un círculo dividido en 8, 16 y 24 partes iguales.

Pero como antes, no era la existencia exhaustiva de grupos de simetría en la ornamentación toraja lo que me interesaba realmente, sino las matemáticas involucradas en su proceso de elaboración. En el taller toraja que visité no había plantillas. El artesano realizaba su tarea en las paredes verticales de la casa ya montada. Su punto de partida era el espacio rectangular determinado por el ensamblaje de las piezas y que ya había sido pintado de negro. Además de mazas y gubias, también se usaban navajas, lápices, listones de bambú y compases de bambú.

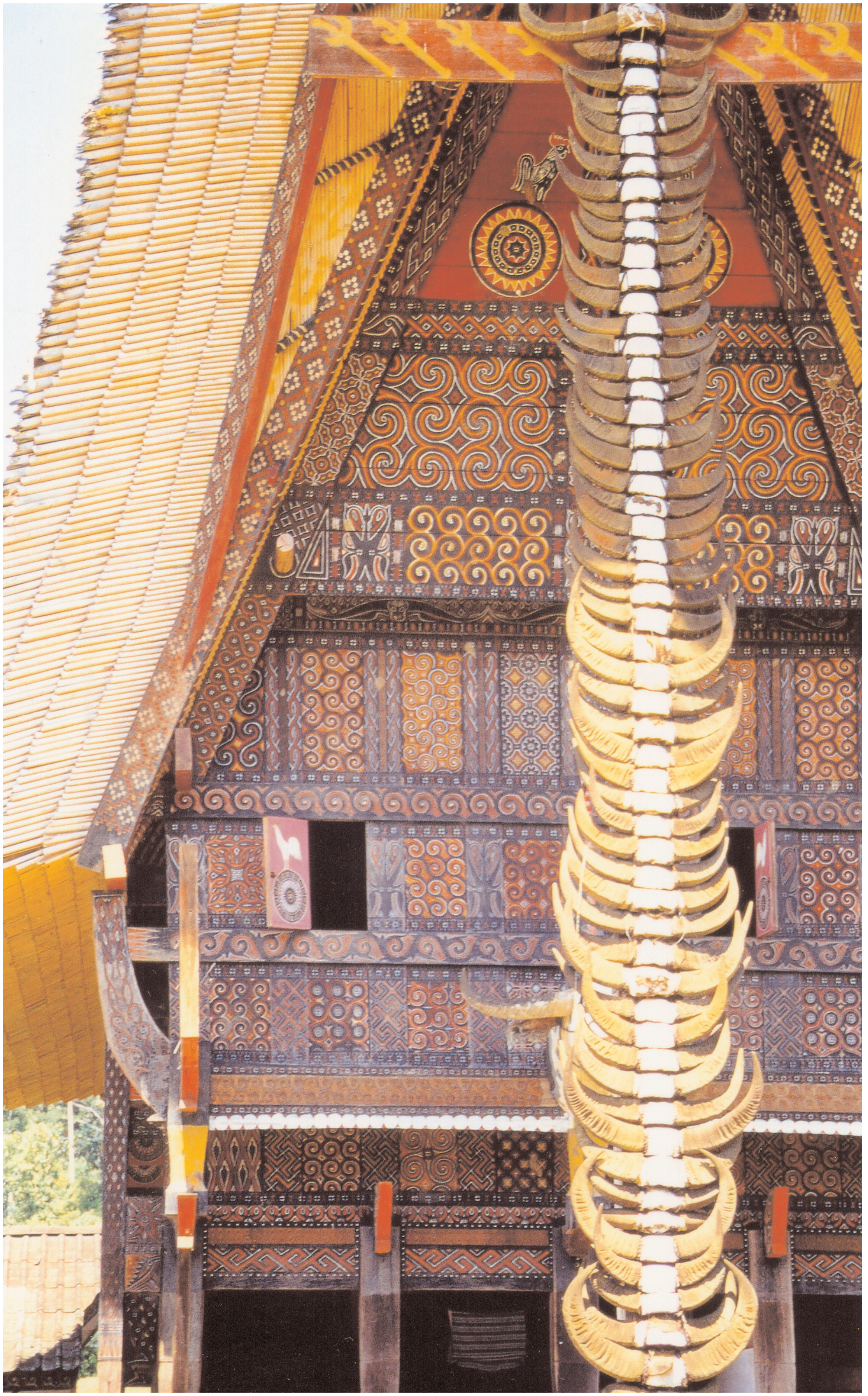


Figura 4. Fachada norte de un *tongkonan toraja*

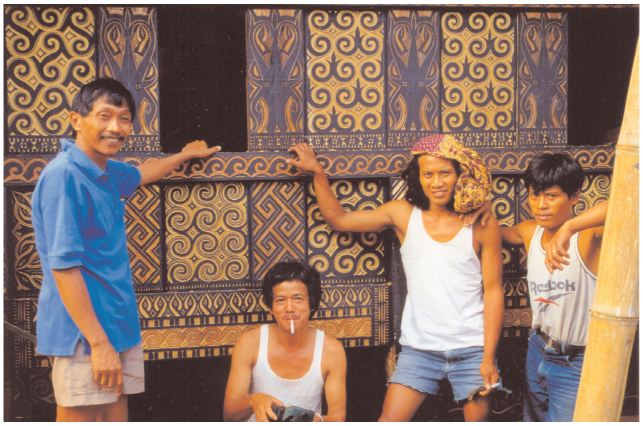
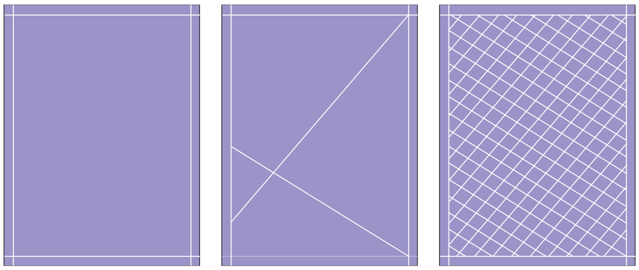


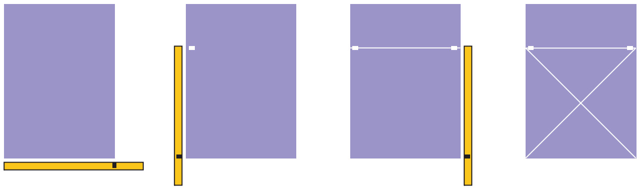
Figura 5. Salle (con tocado), Martheen (a la izquierda) y otros

En la Figura 5 vemos diseños en franja *p111*, *pm11* y *pmm2*. De grupos de simetría plana encontramos: *pgg* (arriba a la izquierda), *cm* (arriba centro y derecha), *p4* (bajo la mano de Martheen) y *pg* (los dos siguientes al anterior hacia la derecha).

Esta vez tuve la oportunidad de ver cómo se organizaba el espacio del diseño llamado *Pa' Sekong*. Salle, ayudándose de un listón de bambú, trazó primero los márgenes del espacio rectangular. Luego dibujó un segmento desde el vértice superior derecho hasta un punto, indeterminado para mí, del lado vertical izquierdo y otro segmento que lo cortaba en un ángulo que a mí me pareció recto. Finalmente, fue añadiendo paralelas a ambos segmentos equidistantes según la anchura del listón de bambú. Así completó la retícula que serviría de base al grabado:



Antes de que empezase a labrar las líneas del diseño, le pregunté si las rectas debían ser ortogonales. Como su respuesta fue afirmativa, coloqué un vértice de mi cuaderno de notas justo encima de una de las intersecciones de la retícula y le hice observar que no era este el caso[2]. *Es aproximadamente recto*, dijo, y, acto seguido, hizo lo siguiente. Ajustó el listón de bambú a la base del rectángulo y señaló en él la medida correspondiente a su anchura, después puso el listón sobre un lado vertical del rectángulo e hizo una señal homóloga. Repitió la misma operación en el otro lado vertical y unió ambos puntos con un segmento. Terminó trazando las diagonales de este cuadrado y afirmando que eran *siku-siku*, es decir, ortogonales:



Le pregunté por qué lo eran. *Pon el cuaderno encima*, me dijo. Lo hice y al ver que los vértices coincidían, sentenció: *lo son*. Su hermano mayor, Rois, artesano antes que Salle, corroboró esa afirmación. Los artesanos no justificaban sus resultados en demostraciones, sino en la efectividad práctica. Una prueba formal no les habría servido para mejorar el resultado. El caso era que, si Salle hubiese querido, la retícula habría sido cuadrícula y que si yo hubiese analizado su conocimiento sólo en base a mis observaciones habría cometido un grave error porque Salle sabía más de lo que mostraba su obra. Para conocer las matemáticas relacionadas con la realización de los grabados no era suficiente analizar el resultado ni observar el proceso, sino que resultaba imprescindible interpelar a sus autores. Un artesano podía saber más de lo que en realidad hacía. El análisis tenía que abarcar todas las etapas de la actividad, desde la observación visual de la *obra-acabada*, pasando por la observación de la *obra-en-curso* y hasta llegar a la interpelación de los autores, a la *obra-en-proyecto* (Albertí, 2005).

Figura 6. En medio de la actividad artesana

Le pregunté si esto lo había aprendido en la escuela. Me dijo que no, que apenas había ido a la escuela elemental, que todo lo relacionado con el oficio se lo había enseñado su abuelo. Su hermano Rois también me dijo lo mismo. Me pareció extraordinario. Había todo un conocimiento geométrico vivo al margen de la educación institucional, un conocimiento extra académico que pasaba de generación en generación y que parecía ser autóctono, eso que Ubiratán D'Ambrosio (1985) llamó *Etnomatemáticas*. La ornamentación arquitectónica constituía una expresión fundamental de la cultura toraja, una ornamentación que exigía rigor, precisión y geometría. Sin matemáticas los grabados toraja no serían como son. Las matemáticas se erigían en el pilar sobre el que se sostenía una manifestación cultural (Albertí, 2005).

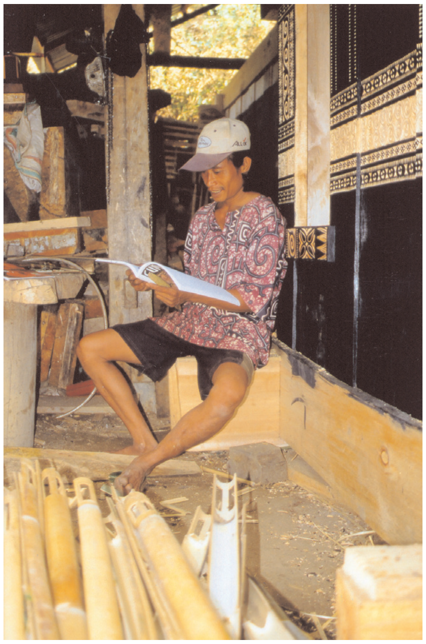


Figura 7. Rois interesado en mí

Mi viaje terminaba y yo no quería irme. Dejaría Sulawesi pensando en volver para conocer más la geometría relacionada con los grabados, para ver matemáticas *in the making*, que decía Pólya (1988), y comprobar que *la matemática tiene dos caras; es la ciencia rigurosa de Euclides, pero también es algo más... en proceso parece una ciencia experimental, inductiva. Ambos aspectos son tan viejos como la propia ciencia matemática* (Pólya, 1988, p. vii). Una ciencia cuyos orígenes los historiadores sitúan en los albores del lenguaje (Boyer, 1986; Collette, 1985; Rey-Pastor y Babini, 1985) y que, por tanto, no es exclusiva de la cultura occidental.

Al despedirnos, Salle quiso saber mi nombre. *Me llamo SUMA^{49}, que en bahasa es JUMLAH^{49}*, le dije. Por la noche me acosté pensando que la solución de Salle al problema del trazado de la retícula ortogonal proporcionaba, en efecto, una cuadrícula, pero de inclinación distinta a la del primer segmento trazado por él. ¿Cómo construir la cuadrícula en un rectángulo de modo que una de sus direcciones sea paralela a una dirección determinada? ¿Cómo la construiría Salle?

La mañana siguiente, antes de que los nenúfares volvieran a cerrarse, inicié el viaje de regreso. Los mismos aviones y autobuses que me habían traído a Indonesia me devolverían a Europa, pero gracias a las translaciones, giros y reflexiones axiales permanecería siempre en **SUMA**tra y en **SU**l**AW**esi. Cuando regrese allí seré, como mínimo, SUMA^{50}.

Figura 8. Junto a los nenúfares por la mañana

NOTAS

1 Notación de las tablas internacionales de cristalografía.

2 El lector puede hacer lo mismo con la retícula de la figura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTÍ, M. (2005): *Les matemàtiques com a pilar d'una manifestació cultural: l'ornamentació arquitectònica del poble toraja de Sulawesi.* Trabajo de investigación de doctorado no publicado dirigido por la Dra. Núria Gorgorió i Solà. UAB.

BISHOP, A. (1999): *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Versión castellana, del original en inglés de 1991, revisada por la Dra. Núria Gorgorió i Solá. Ediciones Paidós. Barcelona.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la Matemática*. Alianza ed. Madrid.

COLLETTE, J.-P. (1985): *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España editores. Madrid.

D'AMBROSIO, U. (1985): "Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics", en Powell,A.B. y Frankenstein, M.: *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics Edication*, State University of New York, 1997.

LUMOWAH, B. (1985): *Anjungan Sulawesi Selatan*. Tongkonan (Rumah Adat Toraja). Aksara Baru. Jakarta.

NOOY-PALM, H., KIS-JOVAK, J.I., SCHEFOLD, R. y SCHULZ-DORNBURG, U. (1988): *Banua Toraja*: *Changing Patterns in Architecture and Symbolism among the Sa'dan Toraja*. Sulawesi. Indonesia. Royal Tropical Institute. Amsterdam.

PÓLYA, G. (1988): *How to solve it.* A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press. New Jersey. Reedición del original de 1945.

REY-PASTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la matemática.* Editorial Gedisa. Barcelona.

SANDARUPA, S. (1986): *Life and Death in Toraja.* 21 Computer. Ujung Pandang.

WATERSON, R. (1990): *The Living House. An Anthropology of Architecture in South-East Asia.* Thames and Hudson. London.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 53-63

Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci

Las fracciones continuas, una de las herramientas más utilizadas a lo largo de la historia de las Matemáticas, han sido por completo apartadas del currículo de secundaria. En este trabajo se desarrolla una propuesta de enseñanza-aprendizaje en la que se utilizan como recurso didáctico. Mediante la utilización de modelos geométricos, los alumnos conjeturan sobre las propiedades elementales de estas fracciones y descubren el conjunto de los números metálicos, cuyo representante más conocido es el número de oro. En el proceso seguido, las sucesiones generalizadas de Fibonacci desempeñarán un papel fundamental.

The continued fractions - one of the most used tools throughout the history of Mathematics - have been entirely relegated from secondary school level. In this essay we carry out a proposal of learning and teaching in which they are used as a didactic resource. By means of geometrical patterns, the students conjecture about the elementary properties of these fractions and they find out the Metallic Means Family, whose best-known member is the Golden Mean. The generalized Fibonacci sequences will play a fundamental role in the followed process.

En Teoría de números, los números de Pisot-Vijayaraghavan se definen como el conjunto de números reales algebraicos mayores que 1, cuyos elementos conjugados tienen módulo menor que la unidad. Forman parte de ese conjunto de números las soluciones positivas de las ecuaciones

$$x^2 - nx - 1 = 0 \quad n = 1,2,3,\ldots$$

que constituyen una clase de números irracionales objeto de recientes investigaciones en Arquitectura y que han sido bautizados como números metálicos[1] El nombre se debe a que constituyen la generalización del número de oro.

Este trabajo es una muestra más de cómo el razonamiento geométrico puede servir de puente entre la Teoría de números y el Álgebra. El punto de partida son las fracciones continuas, uno de los más antiguos conceptos de la Teoría de números, que considerado desde el punto de vista geométrico, basándonos en el concepto del *gnomon*[2] de Aristóteles, nos conduce de forma intuitiva y natural a un concepto tan actual como es el de número metálico. En el proceso quedará patente su estrecha relación con las sucesiones recurrentes de Fibonacci.

Empecemos recordando algunas definiciones de las fracciones continuas. Una fracción continua es una expresión de esta forma

$$b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}$$

en donde

$$a_i, b_i \in \mathbb{Z}$$

Si para cualquier i se cumple $a_i = 1$ y b_i es entero positivo, la fracción continua se denomina simple. Si b_i es entero positivo, pero $a_i = -1$ se denomina reducida:

Fracción continua general

$$6 + \cfrac{2}{7 - \cfrac{1}{3 + \ldots}}$$

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete

Fracción continua simple

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\ldots}}$$

Fracción continua reducida

$$2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2-\ldots}}$$

Si existe un número natural k, verificando las condiciones $b_i=b_{i+k}$ y $a_i=a_{i+k}$, para todo i, la fracción continua se dice que es periódica pura. Si esas condiciones se satisfacen a partir de un cierto i, simplemente se llama periódica. La fracción continua se dice finita, cuando existe un n_0 tal que para todo $n>n_0$ se verifica $a_n=0$. En caso contrario se dice infinita.

La fracción continua en realidad está representando una sucesión de números racionales, los llamados convergentes de la fracción continua, que se definen de esta manera:

$$C_1=b_1 \quad C_2=b_1+\frac{a_2}{b_2} \quad C_3=b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}},\ldots$$

Si la fracción es simple, la sucesión C_1, C_2, C_3, ... siempre converge a un número real que queda determinado por esa fracción continua, ya que la representación es única. Sin embargo, usar en general el término *convergente* es ciertamente un abuso de lenguaje, pues en general cualquier fracción continua no converge. Por ejemplo, para el caso

$$2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cdots}}}$$

$$C_1=2, C_2=1, C_3=0, C_4=2-\frac{1}{0}, C_5=2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_3}}\to 2,$$

$$C_6=2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_4}}\to 1, C_7=2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_5}}\to 0, C_8=2-\frac{1}{1-0}\ldots$$

Las fracciones continuas finitas aparecen muy pronto en la historia de las Matemáticas. El hindú Aryabhata (476-550) ya las utiliza para resolver ecuaciones diofánticas. Más tarde, en el siglo XVI, los matemáticos italianos Bombelli y Cataldi encuentran aproximaciones de raíces cuadradas por medio de fracciones continuas infinitas. Esto supuso un gran hallazgo, pero ni ellos ni ningún matemático de la época se dedicó al estudio de sus propiedades. Habría que esperar un siglo más, a Wallis (Opera Mathematica, 1695), que comienza a dar los primeros pasos y más tarde a Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) y Lagrange (1736-1813), que establecen definitivamente sus fundamentos teóricos.

La historia de las fracciones continuas en el aula de Secundaria ha seguido una trayectoria verdaderamente desafortunada y, como se verá en este trabajo, tremendamente injusta.

En la antigua FP, las fracciones continuas aparecían en los planes de estudio de las ramas técnicas, pero con escaso protagonismo, por el enfoque excesivamente clásico que recibían.

> *El hindú Aryabhata (476-550) utiliza las fracciones continuas para resolver ecuaciones diofánticas.*

En BUP no aparecían explícitamente. Desprovistas de utilidad, por inercia siguieron apareciendo en los libros de texto, pero degradadas a mero ejercicio de *compleja elegancia* para practicar el cálculo de fracciones. Puede parecer que algo tan vacío de contenido no merezca un lugar en el currículo de la LOGSE, pero nada más lejos de la realidad.

En este trabajo no se pretende desarrollar una unidad didáctica sino sólo presentar una propuesta metodológica que recoge una secuencia de actividades que permite trabajar indistintamente diversos conceptos y procedimientos de distintos bloques de contenidos del currículo de 4º de ESO, en concreto de álgebra, análisis y geometría, de forma unificada. Todas las actividades que se proponen pueden ser realizadas por alumnos de 4º de ESO. La formalización de los resultados se puede abordar en Bachillerato.

La resolución de un sencillo problema de embaldosado conduce a una fracción continua finita y sugiere un modelo geométrico para su representación, convirtiendo automáticamente a las fracciones continuas en un sorprendente recurso didáctico para trabajar y entrelazar contenidos de todo tipo: divisibilidad, número irracional, aproximaciones, desigualdades, radicales, progresiones, sucesiones, ecuaciones de 2º grado, semejanza, número de oro, números metálicos…

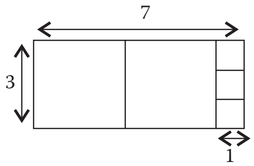
Los materiales que se van a necesitar son hojas de papel cuadriculado o tramas cuadradas, regla y compás, calculadora y, como herramienta opcional pero recomendable, el programa de geometría Cabri Géomètre II.

Actividad 1

Queremos embaldosar una habitación rectangular de 3 m por 7 m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas, no necesariamente iguales. ¿De qué forma se puede hacer usando el mínimo número posible de baldosas? ¿Cómo lo harías si la habitación es de 22 m por 6 m? ¿Se puede hacer con cualquier habitación? ¿Qué conclusiones sacas?

Un número es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua finita.

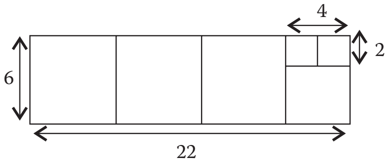
El problema no presenta dificultad si se sugiere a los alumnos que utilicen un modelo geométrico dibujando un rectángulo en una cuadrícula.



2 baldosas de lado 3
3 baldosas de lado 1

$\rightarrow$ $7\cdot 3=2\cdot 3^2+3\cdot 1^2$

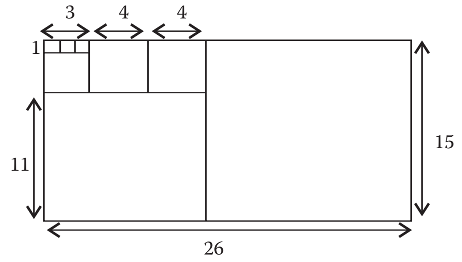
En realidad estamos representando gráficamente la división entera de 7 entre 3, pues 2 es el cociente entero y 1 el resto entero. Podemos escribir por tanto $7/3=2+1/3$ y esta expresión es ya una fracción continua. Para la segunda habitación volveremos al modelo geométrico, pero ahora propondremos escribir la fracción de una forma especial,



3 baldosas de lado 6
1 baldosa de lado 4
2 baldosa de lado 2

$$\frac{22}{6}=3+\frac{4}{6}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{4}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 22\cdot 6=3\cdot 6^2+4^2+2\cdot 2^2$$

El proceso termina cuando la fracción tiene el numerador menor que el denominador. ¿Que encontramos en el numerador de $2/4$? Continuamos con otra habitación.



$$\frac{26}{15}=1+\frac{11}{15}=1+\cfrac{1}{\cfrac{15}{11}}=\ldots=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\rightarrow$$

1 baldosa de lado 15
1 baldosa de lado 11
2 baldosa de lado 4
1 baldosa de lado 3
3 baldosa de lado 1

Observemos que el lado de las baldosas más pequeñas coincide con el máximo común divisor de las dimensiones de la habitación. En realidad la fracción continua finita de a/b es una visualización del algoritmo de Euclides para el cálculo del mcd(a, b).

Cocientes	1	1	2	1	3	Nº baldosas
26	15	11	4	3	1	Lados baldosas
Restos	11	4	3	1	0	

Está claro que siempre se puede embaldosar una habitación de dimensiones enteras y es el momento de formalizar un poco las cosas. Hemos escrito las fracciones anteriores de una forma especial. Las hemos representado por una fracción continua simple finita. Es evidente que *cualquier fracción racional se puede representar por una fracción continua simple finita*. Además, fracciones distintas pero equivalentes corresponden a una misma fracción continua simple. Es obvio que *cualquier fracción continua finita corresponde a una fracción racional*, puesto que basta con efectuar las operaciones que están indicadas para obtenerla. Podemos conjeturar la primera propiedad: *Un número es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua finita*[3]. Evidentemente, la fracción simple que representa al número racional es única.

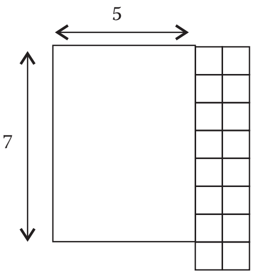
También podemos representar el mismo número en forma reducida finita, pero en este caso no de forma única. Regresemos al modelo geométrico para representar el número $5/7$.

$$\frac{5}{7}=1-\frac{2}{7}=1-\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}=1-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2}}$$

$$\frac{5}{7}=2-\frac{9}{7}=2-\frac{1}{\frac{7}{9}}=2-\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=2-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{9}{2}}}=2-\frac{1}{1-\frac{1}{5-\frac{1}{2}}}$$

La primera expresión se representa por la figura

$$1-\frac{1}{4-\frac{1}{2}}$$



En ella el rectángulo 7×5 se obtiene como un cuadrado de lado 7, al que se quita un rectángulo 2×7. Ese rectángulo es igual a 4 cuadrados de lado 2, quitándole 2 cuadrados de lado 1.

Cualquier fracción racional se puede representar por una fracción continua simple finita.

La segunda expresión correspondería a 2 cuadrados de lado 7, al que se quita un rectángulo 7×9. Este rectángulo se expresa como un cuadrado de lado 9, menos un rectángulo 2×9, que es a su vez igual a 5 cuadrados de lado 2, menos 2 de lado 1.

En la siguiente actividad pedimos a los alumnos que embaldosen por el mismo procedimiento una habitación imaginaria con una dimensión irracional. Esto les conducirá a un proceso iterativo infinito que permitirá reflexionar sobre el concepto de número irracional. Sólo será necesario que sepan construir segmentos de longitud irracional a partir del teorema de Pitágoras. Es importante que el dibujo se realice con precisión, para que las conjeturas que se formulen a partir de él sean correctas, y que sea lo suficientemente grande como para poder permitir por lo menos tres iteraciones. El uso del programa Cabri permite aumentar el número de iteraciones.

Actividad 2

Imagina una habitación rectangular de dimensiones 1 m por $\sqrt{3}$ m. ¿Podrías embaldosarla con las condiciones anteriores? ¿Cuál sería el lado de la baldosa más pequeña? ¿Cuántas baldosas tendrías que utilizar? ¿Sabrías escribir una fracción continua que represente a $\sqrt{3}$? ¿Qué pasa si la habitación es de 1 m por $\sqrt{5}$ m? ¿Y si es de 1 m. por $\sqrt{2}$ m? ¿Qué conclusiones sacas?

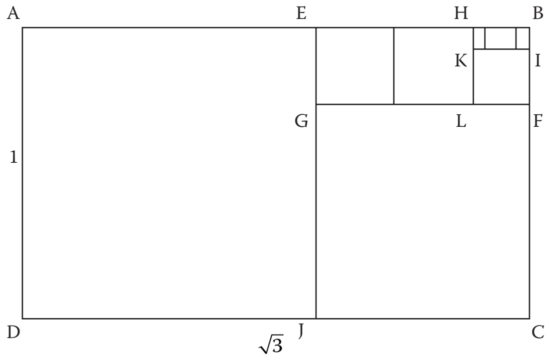


Figura 1

Después de varias iteraciones nos damos cuenta de que hay una regularidad en la sucesión de números de cuadrados del mismo tamaño que se van dibujando y que parece ser que el proceso no va a terminar nunca. La figura sugiere que el rectángulo *EBFG* es semejante al *HBIK*, pero es necesario que los alumnos lo comprueben. En efecto

$$GF = DC - DJ = \sqrt{3}-1,\quad EG = 1 - GJ = 1-\left(\sqrt{3}-1\right) = 2-\sqrt{3}$$
$$KI = GF - 2EG = 3\sqrt{3}-5,\quad HK = EG - IF = 7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{GF}{KI}=\frac{EG}{HK}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}-5}=\frac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)=\left(3\sqrt{3}-5\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=11\sqrt{3}-19$$

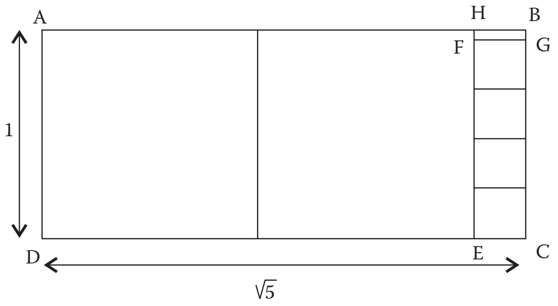
Todos los cuadrados son semejantes, por tanto el rectángulo blanco de la parte superior derecha también será semejante al *EBFG* y a *HBIK*, y el proceso sigue indefinidamente. De esta forma, el número de baldosas cuadradas necesarias es infinito y el lado de las baldosas tiende a cero. En el caso de que viviéramos eternamente, podríamos embaldosar la habitación.

La fracción continua correspondiente a $\sqrt{3}$ podría escribirse como en la actividad anterior, solo que sería una fracción continua simple infinita periódica.

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots}}}}$$

Como la fracción no es finita, $\sqrt{3}$ no puede ser racional y, en consecuencia, es irracional.

En el caso de $\sqrt{5}$, repitiendo el proceso con el rectángulo *HBGF*, se vuelven a dibujar cuatro cuadrados y queda un rectángulo de *forma parecida* al inicial. Para confirmarlo, los alumnos comprobarán que los rectángulos *HBCE* y *HBGF* son semejantes:



$$BC=1,\quad HB=\sqrt{5}-2,$$

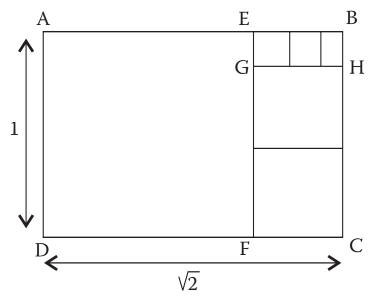
$$BG=1-4\,HB=1-4\left(\sqrt{5}-2\right)=9-4\sqrt{5}$$

$$\frac{BC}{HB}=\frac{HB}{BG}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}-2\right)^2=9-4\sqrt{5}$$

Obtenemos que

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}$$

una función continua es también infinita periódica, luego $\sqrt{5}$ es un número irracional. Para $\sqrt{2}$ construimos un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1 (también se puede utilizar una hoja de papel DIN A4).



$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

El modelo geométrico también justifica que $\sqrt{2}$ es irracional.

Con alumnos de Bachillerato podría formalizarse el procedimiento geométrico de forma algebraica. Veamos el caso particular de $\sqrt{3}$. Hacemos

$$\sqrt{3}=1+\left(\sqrt{3}-1\right)$$

y procedemos como en el caso de la fracción continua finita:

$$\sqrt{3}-1=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

$$\sqrt{3}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}\Rightarrow\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

En el desarrollo anterior, la fracción

$$\frac{\sqrt{3}-1}{1}$$

es la razón entre las dimensiones del rectángulo *EBCJ* (Figura 1,pág. 56), la fracción

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}$$

la razón de *EBFG* y volvemos a encontrar la fracción

$$\frac{\sqrt{3}-1}{1}$$

como la razón que corresponde a *HBFL*, que resulta ser semejante a *EBCJ* y el proceso sigue indefinidamente.

El procedimiento seguido muestra que, de alguna manera, sumando cuadrados, podemos *aproximarnos* cada vez más a los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$, pero las aproximaciones que se obtienen así no son racionales. Continuaremos definiendo los convergentes de una fracción continua.

Actividad 3

Calcula los convergentes de las fracciones continuas de la Actividad 2. Compáralos con el valor que proporciona la calculadora para $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$. ¿Qué observas?

Los convergentes de

$$\sqrt{3}=1{,}732050\ldots$$

son C_1=1, C_2=2, C_3=1,666..., C_4=1,75, C_5=1,7272..., etc. y se cumplen las desigualdades

$$C_1 < C_3 < C_5 < L < \sqrt{3} < L < C_6 < C_4 < C_2$$

Los convergentes de $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$ cumplen las mismas desigualdades y los alumnos encuentran uno de los resultados generales de la teoría de fracciones continuas simples:

> Los convergentes de los lugares impares forman una sucesión creciente de aproximaciones racionales por defecto del número representado, mientras que los de los lugares pares son una sucesión decreciente de aproximaciones racionales por exceso.

Es interesante que traten de dar una explicación algebraica manipulando desigualdades y hagan conjeturas sobre la convergencia de las aproximaciones. Esta es una buena ocasión para trabajar con ellos de forma intuitiva la convergencia de una sucesión, especialmente porque *están viendo* el límite.

Pueden encontrar gráficamente las fracciones simples de otros radicales cuadráticos, pero deben elegirse con precaución, pues pueden ser necesarias muchas iteraciones y la precisión del dibujo puede no ser suficiente, bien porque el rectángulo inicial no sea suficientemente grande o bien por las limitaciones de la pantalla del ordenador. Un ejemplo sería $\sqrt{13}$, cuya fracción simple tiene b_1=3 y periodo b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=1, b_6=6.

La fracción continua de un número irracional cuadrático puede encontrarse fácilmente de forma algebraica utilizando el método de Bombelli y Cataldi (Boyer, 1986 pág. 486):

$$\sqrt{2} = 1 + x \Rightarrow 2 = (1+x)^2 \Rightarrow 2 = 1 + 2x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2+x) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2+x}$$

$$x = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$$

Aplicando esta técnica a

$$\sqrt{13} = 3 + x$$

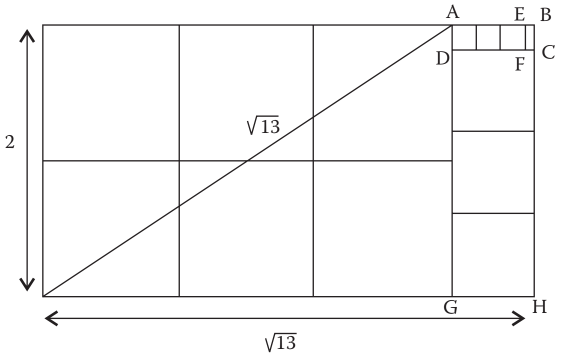
obtendríamos

$$x(6+x) = 4$$

y por tanto

$$x = \frac{4}{6+x} \Rightarrow x = \frac{4}{6+\frac{4}{6+\cdots}} = \frac{2}{3+\frac{1}{3+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{13} = 3 + \frac{2}{3+\frac{1}{3+\cdots}}$$

Es una fracción continua general y se puede comprobar que converge más rápidamente que la simple. Podemos dar también su interpretación geométrica, pero ahora consideraremos un rectángulo de altura 2.



La fracción continua de un número irracional cuadrático puede encontrarse fácilmente de forma algebraica utilizando el método de Bombelli y Cataldi.

En este caso, en el primer paso señalamos un cuadrado de lado 2 y una mitad y, por tanto, el primer cociente es 3/2. Los demás van a ser 3, porque

$$AG = 2 \qquad GH = \sqrt{13} - 3 = AB$$

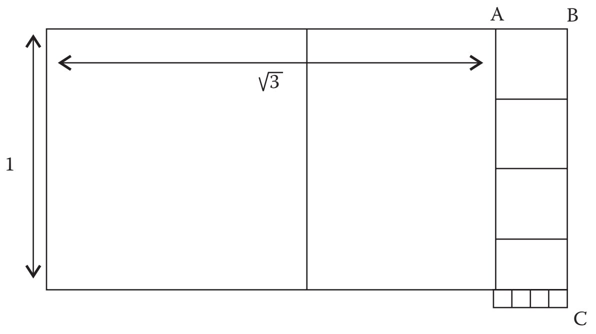
$$AD = 2 - 3\left(\sqrt{13} - 3\right) = 11 - 3\sqrt{13}$$

$$\frac{AG}{AB} = \frac{GH}{AD}$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{13} = 3 + \frac{2}{3+\frac{1}{3+\cdots}}$$

En Bachillerato se podría trabajar también el método gráfico para encontrar fracciones reducidas de raíces cuadradas. Ahora el signo menos se debe interpretar como que restamos un rectángulo a una serie de cuadrados que cubren por exceso al rectángulo de partida en cada paso. Veamos el procedimiento en un caso particular, por ejemplo $\sqrt{3}$



En el primer paso utilizamos 2 cuadrados para cubrir por exceso al rectángulo inicial de lados 1 y $\sqrt{3}$, que se expresa como 2 cuadrados de lado 1, al que quitamos un rectángulo de lado 1 y

$$AB = 2 - \sqrt{3}$$

que se cubre con 4 cuadrados de lado AB y se puede expresar como 4 cuadrados menos un trozo que se expresa por exceso como 4 cuadrados más pequeños, y así sucesivamente, porque el rectángulo de lados AB y

$$BC = 4\left(2 - \sqrt{3}\right) = 8 - 4\sqrt{3}$$

es semejante al formado por los 4 pequeños de la parte inferior, de lados

$$7 - 4\sqrt{3} \text{ y } 28 - 16\sqrt{3}$$

$$\frac{8 - 4\sqrt{3}}{28 - 16\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$$

La complejidad es evidente. El procedimiento geométrico ahora presenta más inconvenientes que ventajas, por eso parece conveniente razonar algebraicamente.

Actividad 4 (ampliación)
Encuentra algebraicamente fracciones continuas reducidas para $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, haciendo

$$\sqrt{2} = 2 - x \text{ y } \sqrt{3} = 2 - x$$

Utiliza sus convergentes para obtener aproximaciones racionales. Compáralas con las aproximaciones obtenidas a partir de las fracciones simples. ¿Qué sucede si haces $\sqrt{3} = 3 - x$? ¿Qué conclusiones sacas?

En el primer caso:

$$\sqrt{2} = 2 - x \Rightarrow 2 = (2 - x)^2 \Rightarrow 2 = 4x - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(4 - x) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \cfrac{2}{4 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{2}{4 - \cdots}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cdots}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cdots}}}$$

Sus convergentes son $C_1=2$, $C_2=1{,}5$, $C_3=1{,}42857$... *Son todas aproximaciones por exceso. La sucesión de convergentes converge más rápidamente que la obtenida a partir de la fracción simple.*

En el segundo se obtiene

$$\sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$$

y sucede lo mismo. Son propiedades generales de las fracciones reducidas. Los alumnos pueden investigar otros radicales.

Al imponer

$$\sqrt{3} = 3 - x$$

se obtiene

$$\sqrt{3} = 3 - \cfrac{6}{6 - \cfrac{6}{6 - \cfrac{6}{6 - \cdots}}} = 3 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{1 - \cdots}}}$$

La representación de un número por una fracción continua reducida no es única.

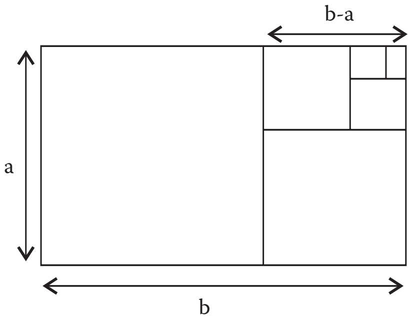
Todas las fracciones obtenidas para esos números irracionales, ya sean simples o reducidas, son periódicas. Surge una nueva conjetura: *¿La fracción continua infinita de todos los números irracionales es periódica?* En este caso nos equivocamos. El proceso iterativo que representa cualquier fracción continua periódica, simple o reducida, muestra que el número que determina es siempre solución de una ecuación polinómica de segundo grado. Por ejemplo, si nos fijamos en la estructura de la fracción simple de $\sqrt{3}$, observamos que se cumple

$$x=\sqrt{3}-1,\ x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}\Rightarrow x=\frac{2+x}{x+3}\Rightarrow x^2+2x-2=0$$

Pero sólo las raíces cuadradas pueden ser solución de una ecuación de segundo grado de coeficientes enteros, por tanto parece que sólo van a poder ser periódicas las fracciones de los irracionales cuadráticos. En efecto, otra propiedad de las fracciones continuas dice: *Un número es irracional cuadrático si y sólo si se puede expresar como fracción continua infinita periódica.*[4]

En la siguiente actividad se proporcionará como material un rectángulo de oro de tamaño suficientemente grande como para que puedan repetir la iteración por lo menos tres veces.

Actividad 5
Este rectángulo representa el plano, a escala desconocida, de una habitación de dimensiones *a* y *b*. Utiliza los procedimientos de las anteriores actividades para conocer la razón de sus dimensiones.



$$\frac{b}{a}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

En efecto, es un rectángulo áureo. Como sabemos tiene la propiedad de que *al quitarle un cuadrado de lado igual a su dimensión menor queda un rectángulo semejante al inicial.*

Intervenimos para hacer una observación: *Los puntos suspensivos de la fracción indican que el proceso no tiene fin.* Por tanto, todos los denominadores son también ϕ:

$$\phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}\Rightarrow\phi=1+\frac{1}{\phi}\Rightarrow\phi^2=\phi+1$$

y de esta forma ϕ es la solución positiva de la ecuación

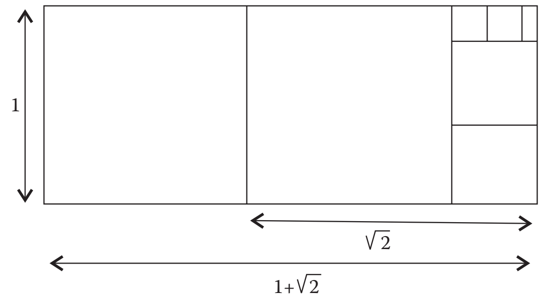
$$x^2-x-1=0$$

es decir

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Con la actividad siguiente encontraremos la generalización natural del número de oro.

Actividad 6
En la Actividad 2 has *embaldosado* un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1. Si añades a la izquierda un cuadrado de lado 1, obtienes otro rectángulo. ¿Qué puedes afirmar de él a la vista de la figura? ¿Cuál sería la razón de sus lados?



La representación geométrica nos dice que al quitar 2 cuadrados de lado igual a la altura nos queda otro rectángulo semejante al inicial. Por tanto se cumple:

$$\varphi=1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}\Rightarrow\varphi=2+\frac{1}{\varphi}\Rightarrow\varphi^2=2\varphi+1$$

La fracción obtenida tiene la misma estructura que la de ϕ, y es la solución positiva de la ecuación

$$x^2-2x-1=0$$

también similar a la que se obtenía en la Actividad 5. Este número φ es el llamado número de plata y el rectángulo considerado, el rectángulo de plata.

El número de oro y el número de plata forman parte de la familia *M* de los números metálicos. El estudio de estos números es muy reciente[5]. Son números irracionales de la forma

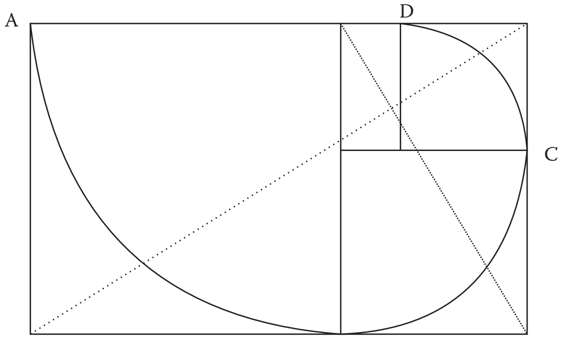
$$\phi_p = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cdots}} \qquad p = 1,2,3,\ldots$$

y son respectivamente, la solución positiva de las correspondientes ecuaciones

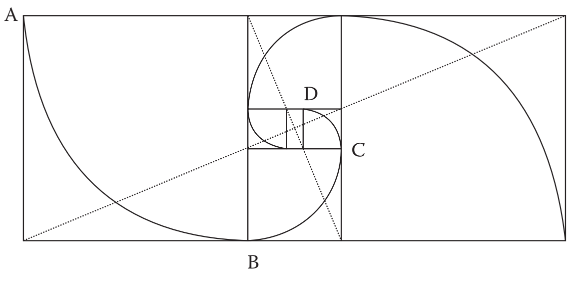
$$x^2 - px - 1 = 0$$

Los rectángulos cuyas dimensiones están en las proporciones definidas por el número ϕ_p forman la clase de los rectángulos métálicos R_p. Utilizando el lenguaje de Aristóteles, un rectángulo es metálico de clase R_p. Si y solo si su gnómon es la unión de p cuadrados.

Los números metálicos comparten propiedades generales. Veamos una de ellas. En el rectángulo de oro se puede inscribir una espiral formada por arcos de circunferencia, de longitudes que forman una progresión geométrica de razón $1/\phi$ y longitud total igual a $(1+\phi)\pi/2$.



En el caso del rectángulo de plata se puede inscribir una espiral doble de esta forma



Si el arco AB tiene de radio 1, el arco BC es de radio

$$\varphi - 2 = \sqrt{2} - 1$$

luego los sucesivos arcos están en progresión geométrica de razón

$$r = \varphi - 2 = \frac{1}{\varphi}$$

y la suma de los arcos de una rama es $(1+\phi)\pi/4$. Por tanto la espiral doble tiene una longitud de $(1+\phi)\pi/2$.

En la siguiente actividad se presenta un modelo geométrico de los convergentes de ϕ. En ella subyace la idea del *crecimiento de pseudognomones cuadrados.*[6]

El número de oro y el número de plata forman parte de la familia M de los números metálicos.

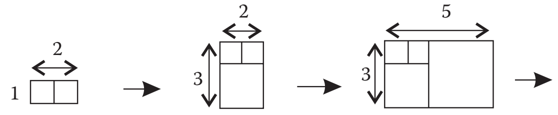
Actividad 7
Dibuja un cuadrado de lado 1, y añádele a su derecha otro igual. A este rectángulo lo llamaremos R_1. Ahora añade a R_1 un cuadrado en la parte inferior de lado igual a su base. A esta transformación la llamaremos "+1*a*". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_2 y añadimos a su derecha otro cuadrado de lado igual a su altura. Esta será la transformación "+1*d*". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_3, y aplicamos de forma sucesiva las transformaciones "+1*a*" y "+1*d*" indefinidamente:

$$R_1 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_2 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_3 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_4 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_5 \to \cdots$$

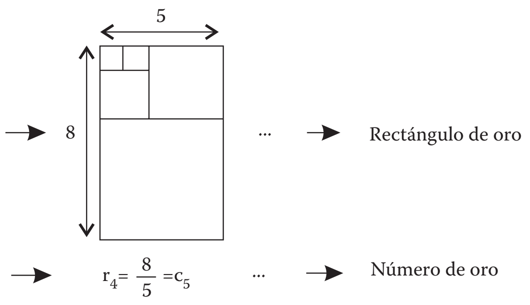
Construye la sucesión de rectángulos. ¿Qué observas en ellos? ¿Y en sus dimensiones?

Las razones r_1, r_2, r_3,... entre las dimensiones de los rectángulos son precisamente los convergentes de ϕ.

Además, por la forma en que hemos construido los rectángulos, las fracciones obtenidas son los cocientes de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.



$$r_1 = \frac{2}{1} = c_2 \rightarrow r_2 = \frac{3}{2} = c_3 \rightarrow r_3 = \frac{5}{3} = c_4 \rightarrow$$



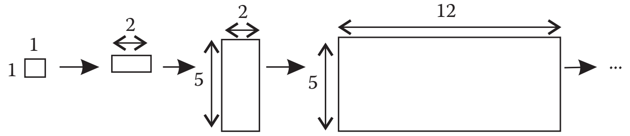
Los rectángulos son cada vez *más parecidos* al áureo. Los rectángulos R_1, R_3, R_5, … son *más alargados* que el de oro (los convergentes son aproximaciones por exceso), y los R_2, R_4, R_6, … son *menos alargados* (los convergentes son aproximaciones por defecto). Si el proceso pudiera repetirse indefinidamente, obtendríamos un rectángulo de oro de área infinita.

Actividad 8

Investiga qué modificaciones se deben hacer en las transformaciones anteriores para que los rectángulos se aproximen al rectángulo de plata. ¿Qué pasaría si en la Actividad 7 empezáramos por un rectángulo? Intenta explicarlo.

Los convergentes del número de plata son: C_1=2, C_2=5/2, C_3=12/5, C_4=29/5...

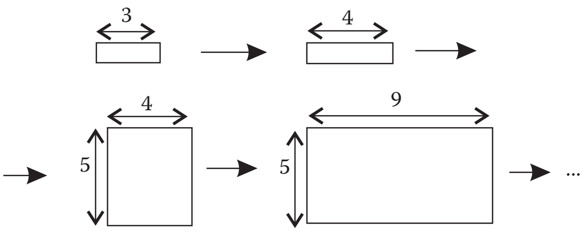
Si partimos de un cuadrado de lado 1, las transformaciones que aplicaríamos para que los rectángulos tengan dimensiones en esas proporciones, son: "+1*d*" y luego sucesivamente la "+2*a*" y la "+2*d*" (que añaden respectivamente dos cuadrados hacia abajo y dos a la derecha).



La sucesión 1, 2, 5, 12, 29... es una sucesión generalizada de Fibonacci, que se obtiene por la ley de recurrencia:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=a_{n-2}+2a_{n-1} \text{ si } n=3, 4...$$

Veamos qué sucede si, por ejemplo, partimos en la Actividad 8 de un rectángulo 1x3



La sucesión de cocientes sería

$$\frac{4}{1}=4,\frac{5}{4}=1{,}25,\frac{9}{5}=1{,}8,\frac{14}{9}=1{,}\widehat{5},\frac{23}{14}=1{,}6428571...\rightarrow ¿L?$$

Ahora los cocientes no coinciden con los convergentes de ϕ, pero forman una sucesión que parece que también converge. En efecto, la sucesión es: 1, 4, 5, 9, 14, 23,... y cumple

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_n=a_{n-2}+a_{n-1},\ si\ \ n=3,4,5\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}},\ si\ n=3,4,5,\ldots$$

La sucesión de cocientes está acotada y la distancia

$$d\left(a_n,a_{n-1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

por tanto existe

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{1+L}{L}\Rightarrow L^2-L-1=0\Rightarrow L=\Phi$$

Pero, los valores de a_1 y a_2 no han intervenido en el proceso seguido: *La fracción continua de ϕ representa el límite de los cocientes a_{n+1}/a_n de términos de la sucesión generalizada de Fibonacci $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, n=3,4,..., sean cuales sean los valores de a_1 y a_2.*

En efecto, los cocientes también siguen una ley de recurrencia:

$$C_1=\frac{a_2}{a_1}$$

$$C_2=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_1}{a_2}=1+\frac{1}{\dfrac{a_2}{a_1}}=1+\frac{1}{C_1}$$

$$C_3=\frac{a_4}{a_3}=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{C_1}}$$

$$C_4=\frac{a_5}{a_4}=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{C_1}}}\quad\cdots$$

Al adelantarnos en la sucesión C_n, vamos añadiendo coeficientes a la fracción, que siempre termina en C_1. El valor de C_1 depende de los valores a_1 y a_2, pero al hacer tender

$$n \to +\infty$$

la expresión se convierte en la fracción continua de ϕ, valga lo que valga C_1. Esto es lo que habíamos encontrado gráficamente. La *semilla* C_1 está representada en las dimensiones de la figura de partida (cuadrado o rectángulo) y el número obtenido está determinado únicamente por las transformaciones que hacemos, es decir, por la ley de recurrencia.

Lo mismo sucede con la sucesión de rectángulos que conducen al número de plata:

$$C_1 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$C_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2a_2 + a_1}{a_2} = 2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}} = 2 + \frac{1}{C_1}$$

$$C_3 = 2 + \frac{1}{C_2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{C_1}} \ldots$$

Hemos generalizado describiendo un *crecimiento de pseudognomones rectangulares formados por la unión de p cuadrados*. La sucesión de rectángulos tiende al rectángulo R_p.

Todos los resultados obtenidos se pueden resumir de esta forma: *El conjunto de las fracciones continuas*

$$F_p = p + \frac{1}{p + \cdots} \quad p = 1,2,3\ldots$$

coincide con el conjunto M de los números metálicos, que son las soluciones positivas del conjunto de ecuaciones

$$x^2 - px - 1 = 0,\ p = 1,2,3,\ldots$$

A cada número metálico

$$\phi_p = F_p$$

le corresponde la clase C_p de sucesiones recurrentes definidas de la forma

$$a_n = a_{n-2} + pa_{n-1}, \quad p = 3,4,\ldots$$

siendo a_1 y a_2 cualquier número real, cumpliéndose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = F_p$$

Este resultado general muestra la estrecha relación que existe entre los números metálicos, las fracciones continuas y las sucesiones generalizadas de Fibonacci. ■

NOTAS

1 El término número metálico aparece por primera vez en 1998 en trabajos de V. W. de Spinadel.

2 Un gnomón es toda figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial.

3 Euler da este resultado en su artículo “De Fractionibus Continuis” (1737).

4 La condición suficiente se debe a Euler (1744). Más tarde Lagrange, en 1768, demostró la condición necesaria.

5 No existe unanimidad en la terminología utilizada. Algunos autores utilizan el término “silver mean” para referirse a cualquier número metálico que no sea el de oro.

6 “...partiendo de cualquier rectángulo inicial (incluso de un rectángulo infinitamente estrecho formado por un simple segmento de recta) y yuxtaponiendo indefinidamente un cuadrado sobre el lado mayor de los rectángulos progresivamente obtenidos, resulta un rectángulo creciente cuyo módulo tiende muy rápidamente a ϕ”. M.C. Ghyka (1979, p. 143).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

GHYKA, M. C. (1979): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidon, Barcelona.

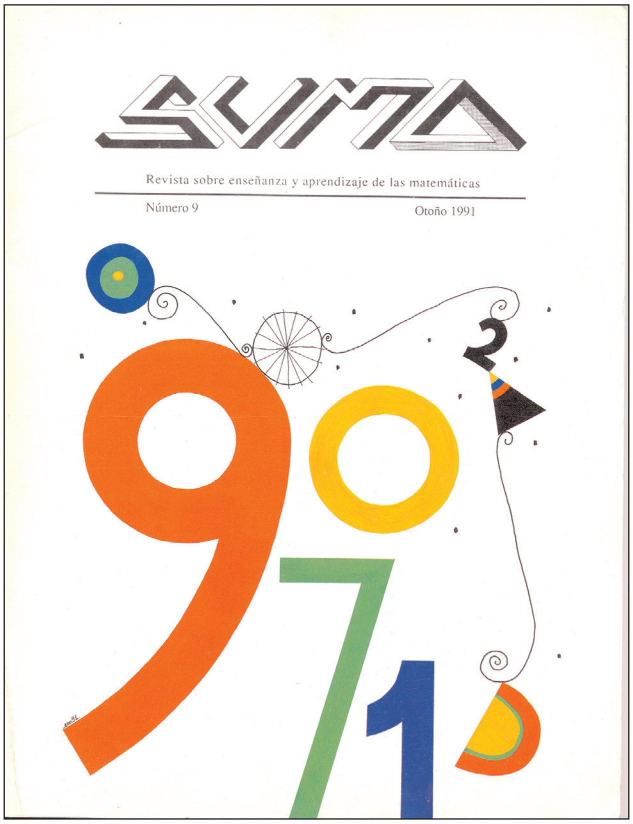
JONES, G. Y JONES, M. (1977): *Elementary Number Theory*, Springer, London.

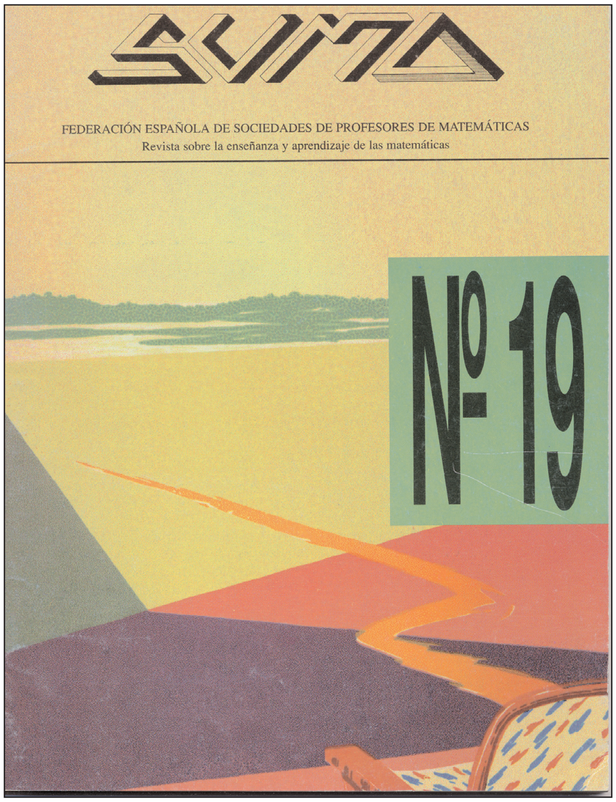
KLINE, M. (1972): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I, II y III*, Alianza Universidad, Madrid.

OLDS, C. (1963): *Continued Fraction*, Mathematical Association of America Books, Washington.

SPINADEL, V. (1998): "The Metallic Means and Design", en *Kim Williams (Ed.) Nexus II, Architecture and Mathematic*, Edizioni dell´Erba, Florencia.

SUMA *Huelva:* 1991-1995





Director: **Sixto Romero Sánchez**
Subdirector: **José A. Prado Tendero**
Administrador: **A. J. Redondo García**

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 65-68

¿Son justos los sorteos de tribunales basados en las letras de los apellidos?

Este trabajo pretende poner de manifiesto que cuando se realizan sorteos para seleccionar un grupo de personas en función de sus apellidos y se utiliza un método basado en el sorteo aleatorio de letras, se produce un resultado en el que no todos tienen la misma probabilidad de ser seleccionados y en algunos casos con unas probabilidades muy dispares.

This piece of work is aimed at showing that when selecting a group of people in a raffle following a surname criteria, using thereby a system based on a random letter raffle basis, the result is that not every candidate is likely to be selected, sometimes being the probabilities very different.

Disponemos de una lista de N personas ordenadas alfabéticamente por apellidos. Queremos realizar un sorteo para obtener, entre ellas, una muestra aleatoria de n personas, con $n < N$.

Se obtienen al azar dos letras, con reemplazamiento, que fijan un corte en la lista ordenada alfabéticamente por apellidos. Por ejemplo, si salen las letras "*UJ*" significa que el primer integrante de la lista cuyo primer apellido esté a continuación de estas letras es el primero de la muestra y a partir de él, en orden alfabético, se coge el resto de los n, donde si se acaba la letra Z se continúa por la A.

¿Tienen dos personas de la lista la misma probabilidad de ser elegidas en la muestra?

Respuesta

No.

Contraejemplo

Mediante un ejemplo real podemos ver cómo se distribuye el primer apellido entre las letras del abecedario. Cogeremos la lista de todos los profesores de Matemáticas que han participado en el concurso de traslados en Castilla La Mancha[i] en el curso 2004/05, donde los apellidos están distribuidos según la siguiente tabla:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I
N.º	16	6	24	6	2	7	31	5	4
Letra	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q
N.º	4	0	17	41	4	0	5	23	3
Letra	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
N.º	20	16	7	0	12	0	0	1	2

Son un total de 256.

Llamaremos A_1 al primer profesor de la letra A, A_2 al segundo profesor de la letra A,..., A_{16} al último de la letra A, B_1 al primero de la letra B, y así sucesivamente, hasta el Z_1 primer profesor de la letra Z y Z_2 el segundo y, en este caso, último de la letra Z.

José Antonio Pérez Porcel
IES Francisco García Pavón. Tomelloso. Ciudad Real

Supongamos que queremos extraer una muestra de 16 profesores de esta lista.

Mediante el sorteo de letras descrito anteriormente vamos a calcular la *probabilidad de ser elegido en la muestra* de algunos integrantes de la lista:

Llamaremos $P(A_1)$ a la probabilidad de ser elegido el profesor A_1 entre los 16 de la muestra. En la lista señalada anteriormente se puede observar que A_1 tiene de apellidos Alarcón Melero y T_7 tiene de apellidos Torrilla Gavidia, por lo que viendo la tabla podemos establecer que:

$$P(A_1) = P(1^a\,U) + P(1^a\,V) + P(1^a\,W) + P(1^a\,X) + P(1^a\,Y) + P(1^a\,Z) + P(1^a\,A \cap 2^a \leq L) + P(1^a\,T \cap 2^a \geq P) \qquad [1]$$

Con el significado de los siguientes sucesos:

$1^a\,U$ = Primera letra del sorteo sea la U

$1^a\,V$ = Primera letra del sorteo sea la V

$1^a\,W$ = Primera letra del sorteo sea la W

$1^a\,X$ = Primera letra del sorteo sea la X

$1^a\,Y$ = Primera letra del sorteo sea la Y

$1^a\,Z$ = Primera letra del sorteo sea la Z

$1^a\,A \cap 2^a \leq L$ = Primera letra del sorteo la A y segunda letra del sorteo sea *menor o igual* que L.

$1^a\,T \cap 2^a \geq P$ = Primera letra del sorteo la T y segunda letra del sorteo sea *mayor o igual* que P.

Utilizando la ley de Laplace:
Probabilidad de un suceso = casos favorables/casos posibles

Tendremos que:

$$P(1^a\,U) = P(1^a\,V) = P(1^a\,W) = P(1^a\,X) = P(1^a\,Y) = P(1^a\,Z) = 1/27$$

Los sucesos "$1^a\,A$" y "$2^a \leq L$" son experiencias independientes ya que la extracción de la primera letra, al ser con reemplazamiento, no influye en la segunda extracción.

Por lo tanto,

$$P(1^a\,A \cap 2^a \leq L) = P(1^a\,A) \cdot P(2^a \leq L) = (1/27)\,(12/27)$$

Análogamente,

$$P\,(1^a\,T \cap 2^a \geq P) = P\,(1^a\,T) \cdot P\,(2^a \geq P) = (1/27)\,(11/27)$$

Entonces partiendo de [1] tendremos que:

$$P(A_1) = P(1^a\,U) + P(1^a\,V) + P(1^a\,W) + P(1^a\,X) + P(1^a\,Y) +$$

$$+ P(1^a\,Z) + P(1^a\,A \cap 2^a \leq L) + P(1^a\,T \cap 2^a \geq P) =$$

$$= \frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\cdot\frac{12}{27}+\frac{1}{27}\cdot\frac{11}{27}=\frac{185}{729}=0{,}2538$$

es decir un 25,38%.

Utilizando la misma notación podemos ver que si B_1 tiene de apellidos Balsalobre García, entonces:

$$P(B_1) = P(1^a\,A \cap 2^a \geq M) + P(1^a\,B \cap 2^a = A) =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\frac{15}{27}+\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27}=\frac{16}{729}=0{,}0219$$

es decir un 2,19%.

Por lo que A_1 tiene ¡más de 11 veces de posibilidades de ser elegido que B_1!

Pero si vemos la probabilidad de ser elegido el profesor M_{41} que tiene de apellidos Muñoz Ventosa y teniendo en cuenta que M_{26} tiene de apellidos Molina Mendoza y M_{25} Molina Hita, tendremos que:

$$P(M_{41}) = P(1^a\,M \cap P \leq 2^a \leq U) =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\frac{6}{27}=\frac{6}{729}=0{,}0082=0{,}82\%$$

es decir, A_1 tiene ¡más de 30 veces de posibilidades de ser elegido que M_{41}!

Todo esto es consecuencia de no tener cada letra de la lista el mismo número de profesores, cosa prácticamente imposible en cualquier lista.

¿Dónde se realiza este tipo de sorteo?

Para formar los tribunales en las oposiciones para el ingreso en los cuerpos docentes, la legislación vigente[ii] establece que los vocales de dichos tribunales serán designados por sorteo entre los funcionarios de carrera de la misma especialidad. También para formar los tribunales de la prueba de acceso a la universidad (PAU) en Castilla La Mancha.

Las comunidades autónomas son las encargadas de organizar el proceso de constitución de los tribunales y algunas de ellas proceden a nombrar los vocales mediante el sorteo descrito anteriormente.

¿De qué forma podríamos realizar un sorteo equitativo?

Aquí proponemos dos métodos, que no son los únicos.

Primer método
Las listas de profesores por especialidades se enumeran y se sortea un número aleatorio para cada especialidad comprendido entre 1 y el número de integrantes N_i. Este número marcaría el corte a partir del cual se seleccionaría el número de vocales necesarios n_i.

Podría ser algo así:

Especialidad	Tamaño lista: N_i	n.º aleatorio de 1 a N_i	Tamaño muestra: n_i	Números seleccionados
Filosofía	270	123	16	del 123 al 138
Griego	75	35	8	del 35 al 42
Latín	132	37	8	del 37 al 44
Lengua Castelana	676	490	40	del 490 al 529
Geografía e historia	634	80	44	del 80 al 123
Matemáticas	658	180	32	del 180 al 211
Física y química	453	432	24	del 432 al 2
Biología y geología	447	37	28	del 37 al 64
Dibujo	363	234	20	del 234 al 253
Francés	236	16	20	del 16 al 35
Inglés	623	567	40	del 567 al 606
Música	235	98	28	del 98 al 125
Educación física	327	290	24	del 290 al 313
Tecnología	342	45	32	del 45 al 76
Economía	102	87	16	del 87 al 102
Psicología y pedagogía	311	267	32	del 267 al 298

Segundo método
Las listas de profesores por especialidades se enumeran y se sortea un número aleatorio entre 0 y 999. La razón de sortearlo entre 0 y 999 (y no entre 1 y 1000) es la facilidad para hacerlo simplemente con 10 bolas que contengan del 0 al 9 y realizar 3 extracciones con reemplazamiento.

Si el número aleatorio obtenido lo dividimos entre 1000, lo multiplicamos por N_i (número de profesores de la especialidad), le sumamos 1 y cogemos la parte entera de todo obtenemos un número x elegido al azar entre 1 y N_i. Este número marcaría el corte a partir del cual se seleccionaría el número n_i de vocales necesarios.

Podría ser algo así:

(Número aleatorio entre 0 y 999)/1000
$x = 0{,}256$

Especialidad	Tamaño lista: N_i	n.º aleatorio de 1 a N_i: parte entera de: $x \cdot N_i+1$	Tamaño muestra: n_i	Números seleccionados
Filosofía	270	70	16	del 70 al 85
Griego	75	20	8	del 20 al 27
Latín	132	35	8	del 35 al 42
Lengua Castelana	676	174	40	del 174 al 213
Geografía e historia	634	163	44	del 163 al 206
Matemáticas	658	169	32	del 169 al 200
Física y química	453	117	24	del 117 al 140
Biología y geología	447	115	28	del 115 al 143
Dibujo	363	94	20	del 94 al 113
Francés	236	61	20	del 61 al 80
Inglés	623	160	40	del 160 al 199
Música	235	61	28	del 61 al 88
Educación física	327	85	24	del 85 al 108
Tecnología	342	89	32	del 89 al 120
Economía	102	27	16	del 27 al 42
Psicología y pedagogía	311	81	32	del 81 al 112

Ventajas e inconvenientes de los dos métodos

Los dos métodos descritos hacen que todos los integrantes de cada lista tengan la misma probabilidad de ser seleccionados en la muestra. Señalaremos alguna ventaja e inconveniente de cada uno.

Primer método

- Ventajas: es más sencillo, requiere menos terminología matemática y es más fácil su comprensión.
- Inconvenientes: Hay que sortear varios números aleatorios de "tamaños" diferentes.

Segundo método

- Ventajas: Sólo hay que sortear un número aleatorio de una forma muy fácil, y al ser un solo número su difusión para conocimiento público es más viable.
- Inconvenientes: Requiere realizar más cálculos que pueden ser difíciles de entender y manejar para los "no matemáticos" y pueden repercutir en algún error.

Conclusiones

Este es un ejemplo que pone de manifiesto la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y justifica que cualquier profesional debe tener unos mínimos conocimientos matemáticos, en este caso, de aplicación práctica de la probabilidad. También podemos resaltar que una correcta aplicación de las matemáticas nos hace iguales ante la ley y por el contrario, una incorrecta utilización nos crea importantes agravios comparativos. ■

NOTAS

[i] Disponible en la página web: http://www.jccm.es/educacion

[ii] Real Decreto 334/2004, de 27 de febrero (B.O.E. de 28 de febrero) por el que se aprueba el Reglamento de ingreso, accesos y adquisición de nuevas especialidades en los cuerpos docentes que imparten las enseñanzas escolares del sistema educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GUTIÉRREZ, R., MARTÍNEZ, A. y RODRÍGUEZ, C. (1993): *Curso Básico de Probabilidad*, Pirámide.

RODRÍGUEZ, J. y ALBA, M. V. (1996): "Problemas de Cálculo de Probabilidades". Colección Apuntes, 1995/96. Universidad de Jaén.

RUIZ CAMACHO, M., MORCILLO AIXELÁ, M.C., GARCÍA GALISTEO, J. y CASTILLO VÁZQUEZ, C. (2000): *Curso de Probabilidad y Estadística*, Ed. Universidad de Málaga.

VÉLEZ, R. y HERNÁNDEZ, V. (1995): *Cálculo de Probabilidades 1*, UNED, Madrid.

En Internet:

http://www.jccm.es/educacion

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 69-70

La herencia matemática de Paulo Abrantes

El día 14 de julio de 2003 murió Paulo Abrantes. En SUMA 44, *noviembre 2003, dedicamos unas páginas a recordar su figura y su obra.*

Los días 14 y 15 de julio de 2005 se organizó en Lisboa un congreso internacional que bajo el título Educación Matemática: caminos y encrucijadas *le rindió homenaje.*

En él intervino la profesora María Jesús Luelmo. Recogemos en estás páginas su contribución, sumándonos así al merecido homenaje al profesor Paulo Abrantes, cordial amigo de tantas personas de nuestra Federación y del que aprendimos tanto.

Ante todo, quiero agradecer sinceramente al comité organizador de este encuentro la oportunidad de intervenir como uno de los muchos amigos y colegas extranjeros que Paulo Abrantes se fue ganando a lo largo de su vida profesional.

Van a permitirme que haga esta intervención en español, una lengua que Paulo hablaba muy bien. Recuerdo que cuando alguien se refería a esa cualidad suya, Paulo, con su gran modestia y su fino sentido del humor, respondía que era muy fácil, que realmente él se expresaba en *portuñol,* es decir, en portugués pero con un poquito de acento español. Le he oído también hablar en francés, en inglés, en otras lenguas... porque su interés en comunicarse con los demás, en comprender y ser comprendido, limaba las barreras idiomáticas.

No voy a hacer una narración sobre la trayectoria profesional de Paulo Abrantes: otros colegas lo están haciendo magníficamente a lo largo de estos encuentros. Pero me gustaría destacar en mi intervención las cualidades personales y profesionales que, desde mi punto de vista, fundamentan el atractivo que Paulo ha ejercido, y sin duda seguirá ejerciendo, en profesores de diferentes países. Mi idea central es que Paulo entendió la educación, y la educación matemática en particular, como un todo, como un rico entramado de personas –profesores, alumnos...– de instituciones –escuelas, administraciones educativas, sociedades de profesores...–, de actuaciones –proyectos, currículos...– y de investigaciones didácticas.

Pero lo más importante es que Paulo Abrantes supo dar el paso entre la teoría y la práctica, y a lo largo de su vida se comprometió con cada uno de estos aspectos, haciendo una apuesta personal, ética y política, por una educación matemática de calidad y para todos. Y este compromiso honesto,

María Jesús Luelmo
CIEAEM
SMPM Emma Castelnuovo

sereno, cotidiano, era percibido con claridad por quienes tuvimos la oportunidad de conocerle.

Todos sabéis bien que los inicios profesionales de Paulo fueron en la enseñanza secundaria, lo que marcó profundamente su carrera posterior como investigador, como docente universitario y como formador de profesores. Por convicción y por carácter, Paulo apostó siempre por el trabajo en equipo, equipos donde siempre participaban profesores de primaria o de secundaria junto con investigadores, en ocasiones de países diferentes.

Participó activamente en las sociedades de profesores de Matemáticas. Exhibía con orgullo su condición de socio fundador de la APM –*socio n.º 2*–, donde ocupó puestos de responsabilidad. En España contamos con él en muchas de las Jornadas organizadas por la FESPM (en la exposición de este congreso, hemos podido ver su cartel de las V JAEM en Castellón, adonde acudió con su equipo y presentó por primera vez el Proyecto Mat$_{789}$ en el grupo de Materiales Curriculares).

Los inicios profesionales de Paulo fueron en la enseñanza secundaria, lo que marcó profundamente su carrera posterior como investigador, como docente universitario y como formador de profesores.

Quiero referirme de modo especial a la vinculación de Abrantes con la CIEAEM (Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas), organización que está presente en este encuentro a través de tantas caras amigas. Paulo trabajó infatigablemente en la CIEAEM, de la que fue Vicepresidente entre 1993 y 1999. Su empeño en fomentar el diálogo entre docentes e investigadores, en lograr una enseñanza matemática de calidad para todos con el fin de formar ciudadanos más libres y críticos, encontró un marco adecuado en los objetivos que tradicionalmente ha defendido la CIEAEM.

Paulo fue introduciendo en las Conferencias de la CIEAEM a otros profesores portugueses (Leonor Santos, Joana Brocardo, Eduardo Veloso...) con los que formaba equipo y con los que presentaba públicamente, también en equipo, los resultados de sus trabajos. Su generosidad le llevaba a que durante los congresos de la CIEAEM, Paulo siempre estaba atento a los profesores de diferentes países que acudían por primera vez, acogiéndoles con simpatía e integrándoles con los más veteranos. Ese fue mi caso. La continuidad en el compromiso con la CIEAEM del grupo de colegas portugueses es sin duda uno de los mejores legados de Paulo Abrantes.

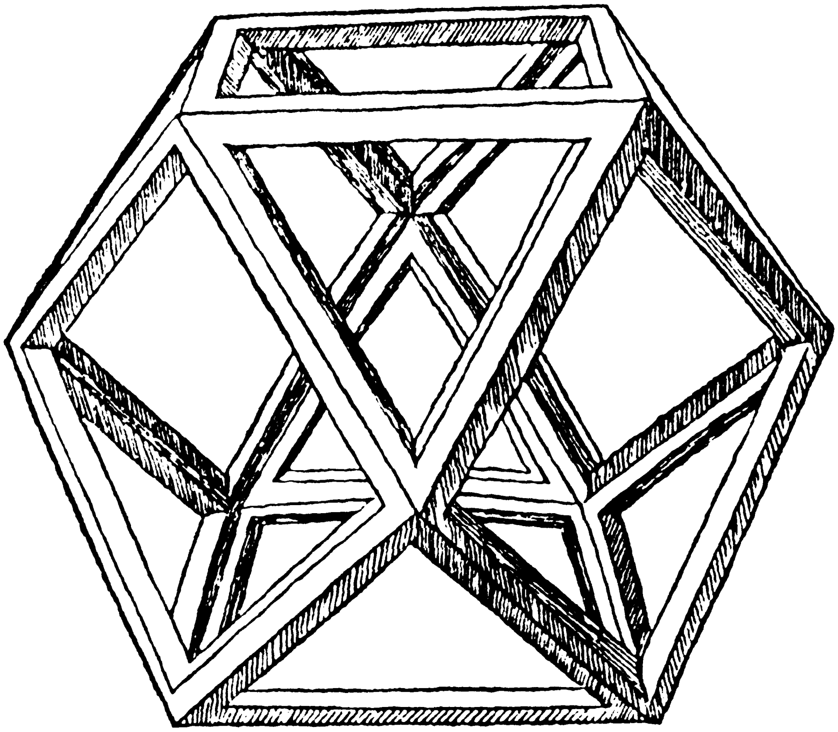
Es difícil deslindar los aspectos profesionales de Paulo de sus cualidades personales. Disfrutaba trabajando en equipo, facilitando que aflorara lo mejor de cada cuál, haciendo participar a los demás con generosidad en los éxitos propios. Su fino sentido del humor, su aguda comprensión de las personas y de las situaciones, le hacían pieza clave en cuantas reuniones participaba, siempre desde la discreción y el servicio al grupo. Ese espíritu de equipo se prolongaba en los partidos de fútbol *internacionales* –hemos visto una foto en la intervención de Rijke Dekker– o en las charlas en torno a una cerveza que seguían a los momentos de trabajo.

Para terminar, permítanme un recuerdo más personal. Nunca olvidaré la reunión n.º 42 de la CIEAEM en Szcykr. Allí, confinados todos los participantes en un hotel de los cárpatos polacos en plena naturaleza, sin mayores diversiones externas, organizamos por la noche una velada en la que cada grupo nacional interpretaba canciones de su país. Los portugueses comenzaron con *Grándola Vila Morena*. Un numeroso grupo de españoles – Vicente Rivière, Fernando Corbalán, Sixto Romero, Lola Vidal...– y de otros países –Christine Keitel ...– nos unimos a ellos. Recuerdo la complicidad de la mirada azul de Paulo tras los cristales de sus gafas mientras cantábamos, emocionados y serios, una de las canciones que simbolizó la vuelta a la democracia de nuestros países. Aunque ya nos conocíamos de años atrás, allí comenzó verdaderamente nuestra amistad con Paulo Abrantes, compartiendo música, ideas y trabajo.

Finalmente, gracias a los colegas portugueses que nos están dando la oportunidad, una vez más, de reunirnos en torno a la figura de Paulo Abrantes, ausente tan sólo en lo material, porque su espíritu sigue entre nosotros.

Paulo Abrantes, (1953-2003)

poliedro



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 73-78

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La semilla que germinó en el desierto (III)

Acercarse al Triángulo de Pascal en Secundaria es tan fácil que resulta inevitable. Transites por donde transites, como si se tratara de esa Roma imperial a la que conducían todos los caminos, siempre está ahí. Al menos en esa parte del currículo en que se debería permitir a la generalización ser argumento de una trama en la que el guión corre a cargo del álgebra y en la que ni siquiera se deja a la geometría que aporte los efectos especiales o a la probabilidad que añada alguna dosis de intriga.

Los artículos que siguen a continuación se construyen sobre media docena larga de problemas que sugieren otros tantos senderos por los que acercarse, desde la didáctica y la historia, a ese objeto matemático cuyas propiedades constituyen un recurso casi inagotable, a pesar de que, año tras año, pasen desapercibidas al homogéneo y monolítico mercado del libro de texto[1]. La referencia, el contraste y el punto de encuentro de todos estos artículos seguirá siendo Pascal a pesar de que, como ya hemos visto, de éste, como de tantos otros temas de matemáticas, los autores que se ocuparon de él fueran pléyade. Pero nos tememos que aún deberá de pasar mucho tiempo hasta que deje de tener sentido nuestra reivindicación de que las ideas[2], como la poesía o la música han de ser del viento para que las respire la vida. Más bien al contrario, la autoría conceptual, mercantilizada en propiedad intelectual, en lugar de debilitarse parece gozar cada día de mejor salud[3].

Seis problemas a la búsqueda de argumento

Estas seis vías de conexión con una estructura rica en relaciones y generosa en sorpresas pretenden ser además la excusa para plantear ciertas dudas razonables que permitan poner en entredicho algunas convicciones bastante generalizadas.

No se trata de convertir la emoción en anécdota ni las transgresiones en una sugerente colección de monstruos de feria. El reto está en hacer de ellas materia de aprendizaje. En conseguir que la herejía forme parte natural del trabajo de nuestros alumnos y alumnas. En animarles a poner en duda los asertos más insoslayables y en convertir esa forma de proceder en una actitud. En trascender los límites de la imaginación para cultivar con denuedo el pensamiento divergente, y a través de él, la creatividad. Y, en esa tesitura, lo difícil, desde un punto de vista didáctico, es encontrar el atractor que los lleve a las fronteras de lo *prohibido*. Estos seis problema buscan ese argumento que, a través del Triángulo de Pascal, invite al alumnado a la especulación empírica primero, a la generalización después y, en último término, a un mundo, el de los fractales, cuajado de sorpresas. Su estela nos conducirá hasta el final de esta larga serie de artículos que hemos dedicado a una de las más ricas herramientas de *matemática elemental*.

Bóveda del mauseleo de Omar Jayyan, en Nishapur, Irán

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

Comencemos con un planteamiento clásico, conocido, formalista en esencia, uno de esos invariantes de la bibliografía del libro de texto de la que hablábamos antes. No se puede decir que sea un bonito problema pero es breve, de eso no cabe duda:

Coeficientes

¿Qué relación guardan entre sí los coeficientes de los desarrollos de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$*... etc.?*

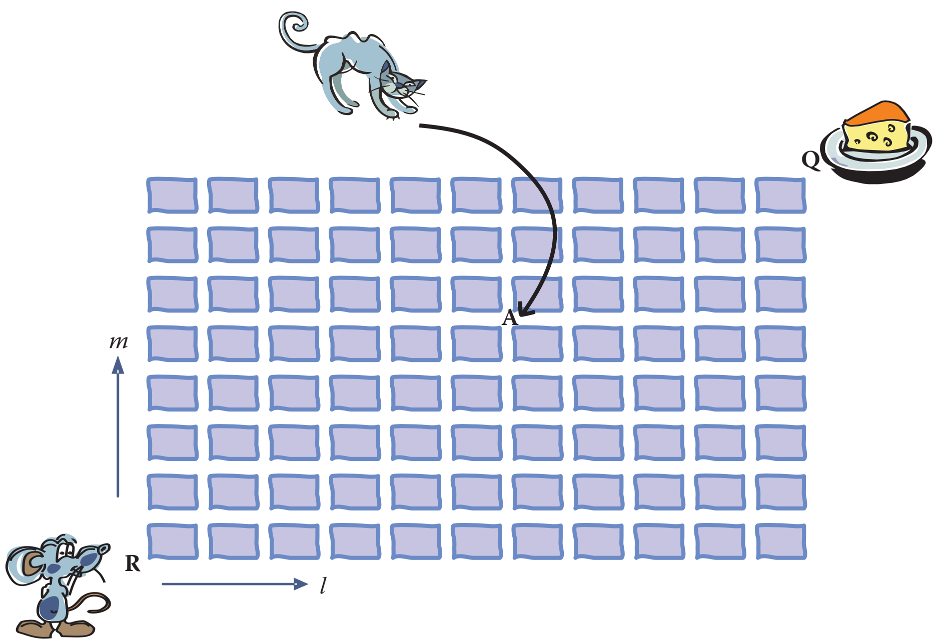
Si se trata de darle cuerpo al Triángulo Aritmético como verdad matemática, es decir de convertirlo en mónada inalterable, eterna, intemporal y abstracta y, por ende, con vida propia e independiente de cualquier otra realidad, sería innecesario cualquier otro enunciado. No así, si se le pretende dotar de sentido. Esta nueva[4] perspectiva nos obliga a cambiarlo y a no obviar la historia. Aunque para algunos historiadores de la ciencia el planteamiento escueto resulte suficiente, otros filósofos como Feyerabend entienden que la historia debiera ser tan compleja como la propia creación científica. Máxime si, como enseñantes, estamos obligados a analizar la esencia de la creatividad y no podemos hacer abstracción de las personas que participan de ella. Es de ahí, de esa ineludible y voluntariamente irrenunciable condición de profesores, de donde nace nuestro empeño en establecer, en torno al Triángulo Aritmético, ese paralelismo entre la creación científica a lo largo de la historia y la propia de nuestras aulas. Aun corriendo el riesgo de que esta presentación, fraccionada en artículos, dificulte seguir con fluidez esa concordancia.

La versión Dörrie

El enunciado que acabamos de formular, a pesar de que pudiera parecer sucinto en exceso, no deja de ser una versión ligeramente modificada del que Heinrich Dörrie denomina la *Expansión Binomial* de Omar Khayyam[5]. El noveno de sus *100 grandes problemas de las Matemáticas Elementales*[6]. La solución que aporta Dörrie, absolutamente algebraica y general, supone imaginar que se ha desarrollado $(a+b)^n$ como producto de n factores del tipo $(a+b)$ y, como consecuencia, que el coeficiente de $a^k b^p$ (con $k+p = n$) contabiliza todas las formas posibles de ordenar n letras en las que k de ellas son **a** y p son **b**. Lo que equivale al número de todos los posibles caminos de mínimo recorrido (n) que llevan de un extremo a otro de un rectángulo de dimensiones $k \times p$ cuando nos desplazamos, sin retroceder, por las líneas que lo conforman. Una versión de aula algo más sugerente, nacida de adaptar y novelar ligeramente otra que planteara el Grupo Cero, nos sirve aquí para introducir el segundo de los seis problemas a los que nos venimos refiriendo:

El ratón Melquiades

Os contaría una bonita historia sobre el ratón Melquiades, y Alisenda la ratona, pero os mentiría si os dijera que no fue la satisfacción del estómago la que guió los pasos de Melquiades aquel día en que olisqueó el queso prometido por Alisenda y, antes de emprender una búsqueda errática a través de las líneas de la cuadrícula que representan otras tantas calles,



El ratón Melquiades

pensó: ...¿cuántas formas diferentes habrá de llegar a él? Con el hambre que tiene, ni por un momento se le pasó por la imaginación retroceder.

En A *vive un gato, que es cojo pero no tonto, y si pasa Melquiades por sus bigotes, a buen seguro que se lo contará a sus nietos. ¿Qué probabilidad tiene Melquiades de salvar el pellejo en esta empresa? ¿Y de comerse el queso al que le había invitado Alisenda?*

Una variante, de este popular problema, se planteó en la VIII Olimpiada Matemática de Moscú[7] (1945): *Desde uno de los vértices de una retícula cuadrada parten* 2^{1000} *hombres. La mitad de ellos se encaminan en dirección* l*, y la otra mitad en dirección* m*. Al llegar al primer vértice, la mitad de ellos se encaminan en dirección* l*, y la otra mitad en dirección* m*. Lo mismo sucede en cada cruce. ¿Cuántos hombres llegarán a todos los cruces de la milésima serie?*

> *Proponer enunciados sugerentes y seductores es uno de esos fundamentos mínimos que debieran dar dignidad humana a nuestro trabajo didáctico.*

Sobre la importancia pedagógica de proponer enunciados sugerentes y seductores ya hemos hablado en multitud de ocasiones. Es uno de esos fundamentos mínimos que debieran dar dignidad humana a nuestro trabajo didáctico. Una conexión inexcusable —interdisciplinar si se quiere— con el mundo de la literatura y, a través de él, con la fantasía y la imaginación.

Acerca de supuestos y sobrentendidos

En 1074, en su *Álgebra*, Omar Jayyam hace referencia a que, en otro lugar, había escrito sobre la disposición de los coeficientes del binomio en el Triángulo y acerca de una regla que le permitía calcular las potencias *cuartas, quintas, sextas y de grado más elevado* de un binomio[8], ligándolo así al álgebra y a la resolución de ecuaciones. Pero, ¿en qué contexto enmarcar esa afirmación? ¿Es posible que los árabes conocieran de los babilonios[9] el procedimiento aritmético para calcular raíces cuadradas? Un método antiquísimo que data, posiblemente, de 1.800 años antes de Cristo y que consistía en suponer que si x era el cuadrado cuya raíz (lado) queríamos calcular y sospechábamos que a era su valor aproximado, entonces $x=a^2+e$, es decir $x = (a+c)^2 = a^2 + e$, con lo que $c^2 +2ac = e$. De esta forma, examinado el error, se trataba de encontrar una cantidad c con la que aproximar a. Si la aproximación era buena, c^2 debería ser insignificante respecto de $a{\cdot}c$ con lo que el nuevo valor de la raíz $a' \approx a+(e/2a)$ sería una buena aproximación con la que continuar el proceso recursivamente. Un método que pasaría a esta historia occidental de las matemáticas, de la que con tanta fruición bebemos, bajo el nombre de método de Herón (siglo I d. C.) y que, en este caso, hasta es probable que fuera el cauce a través del cual llegara, directa o indirectamente, a Omar Jayyam, dadas las evidentes conexiones que, desde al-Juwarizmi, existieron entre las obras de muchos autores árabes y las de Herón o Diofanto (≈ 250 d. C.).

Aunque también resulta razonable pensar que conociera el procedimiento hindú de Apastamba y Katyayana[10], emparentado con él, que aproximaba $\sqrt{2}$ con cinco cifras decimales exactas como suma de:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

No parece probable, sin embargo, que estuviera aludiendo a los trabajos de Halayudha en India en el siglo X o a la tradición que parte de al-Khalil ibn Ahmad (siglo VIII) que no hacen referencia al binomio.

Fueran cuales fueren los fundamentos en los que se apoyó Omar Jayyam, aunque haya razones para pensar que se pudiera haber planteado el problema que le adjudica Dörrie, es muy dudoso que utilizara un razonamiento combinatorio como el que él expone. La carencia de referentes bibliográficos del alemán dificulta sobremanera el conocer las razones en las que fundamenta su afirmación y ese detalle potencia, más si cabe, la fragilidad de su aserto. En cualquier caso, a nosotros, esta propuesta, novena de entre los *100 grandes problemas de las Matemáticas Elementales*, nos servirá de excusa para adentrarnos en los distintos orígenes de esta polivalente herramienta matemática y nos permitirá analizar el grado de conocimiento existente en el resto del mundo alrededor de esa fecha de 1074.

Ya hablamos en el artículo anterior del decisivo papel que jugó el Triángulo Aritmético en la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, de las aportaciones del *Chiu Chang* y del tratamiento en profundidad de Chin Chiu Shao (≈ 1250)[11]. Pero, lo que nos interesa aquí es la referencia que Yang Hui (≈1261) hace del trabajo de Chia Hsien contemporáneo de Jayyam. Esa alusión nos permite pensar que, alrededor de 1050, Chia había recopilado ya, en forma de tabla, los coeficientes del binomio hasta la sexta potencia a la que alude el insigne matemático árabe.

La obsesión de los historiadores de la ciencia por encontrar el origen último de un concepto o herramienta es tan fuerte que, casi sin darse cuenta, lo convierten en único. Esa preocupación casi enfermiza acaba por generar la sensación de que el resultado más importante es aquel que consigue adelantarse más en el tiempo. Pocas veces se toma en consideración que éste es un criterio incidental y que el nivel de desarrollo científico o técnico, cuando no económico y social, relativiza esa preeminencia temporal. En cualquier caso, lo que se obvia siempre sin excepción es que esa primera comparecencia del ingenio, desconectada de cualquier otra, tiene una importancia idéntica sea cual sea el lugar en el que se produce, como equiparable es, sin ningún lugar a dudas, el placer intelectual de quien consigue el resultado independientemente de su orden de prelación histórica. Crear en cada momento el ambiente propicio para que surja esa chispa que, a los ojos de sus protagonistas lo ilumina todo, debería ser nuestro reto como enseñantes.

La obsesión de los historiadores de la ciencia por encontrar el origen último de un concepto o herramienta es tan fuerte que, casi sin darse cuenta, lo convierten en único. Esa preocupación casi enfermiza acaba por generar la sensación de que el resultado más importante es aquel que consigue adelantarse más en el tiempo .

Y decimos esto porque, llegados a este punto, se podría pensar que fue el álgebra motor único y razón de ser del Triángulo Aritmético, del mismo modo que nuestros alumnos mantienen el convencimiento, por contra, de que está unido de forma exclusiva e indisoluble a la combinatoria. Ambas referencias resultan inevitables cuando se va a hablar de sus orígenes aunque, en este artículo, hayamos elegido dos propuestas didácticas cuyo desarrollo tiene que ver mucho más con la primera que con la segunda. Y es que, el problema de Alisenda y Melquiades, planteado en clase como un reto independiente, fuera de cualquier contexto que presuponga una vía de resolución predeterminada de antemano, heurísticamente hablando no es un problema de combinatoria[12], es un problema de recuentos.

Los recuentos en el origen árabe del Triángulo

Según Ahmed Djebbar [2001], la combinatoria surge en el entorno del mundo árabe desde dos perspectivas distintas. Una puramente matemática a partir de la propia actividad algebraica y astronómica y otra, las más fructífera, relacionada con la lingüística, la lexicografía, la gramática y la poesía.

Los antecedentes astronómicos los encontramos en el *Libro sobre las claves de la astronomía* en el que al-Biruni (—, 1048) enumera todas las fórmulas derivadas de un triángulo esférico y, antes que él, en la *Carta sobre la figura secante* en la que Thabit ibn Qurra (—, 901) utiliza tablas para enumerar y nombrar todos los casos de un mismo resultado geométrico. Dentro de este ámbito puramente algebraico de recuento sistemático de casos, Abu Kamil (—, 930), en el *Libro de las cosas raras en aritmética*[13], analiza de forma exhaustiva las soluciones de diferentes sistemas de ecuaciones indeterminados que expone bajo la forma de problemas de pájaros, siguiendo la tradición china e hindú en el enunciado y abordando la solución de forma diferente. Su modelo didáctico, ¡hace diez siglos!, presenta un marcado paralelismo con algunas tendencias didácticas actualmente en boga: una sucesión de ejercicios, cada vez más complejos, en los que se expone de forma detallada cómo llegar a la solución y en los que ésta se expresa como una enumeración ordenada de un conjunto de enteros.

Sin abandonar este marco algebraico, as-Samaw'al (—, 1175), en su *Libro luminoso sobre el álgebra* expone de forma retórica la fórmula del binomio y da la tabla que permite el desarrollo de $(a+b)^n$ hasta el valor $n=12$, añadiendo que se podría prolongar indefinidamente sin más que aplicar la fórmula

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

Al comienzo de su obra, el autor, explica que ha tomado la fórmula de al-Karaji (—, 1023), pero el texto al que hace referencia es, hasta el momento, desconocido. Sin embargo, esa alusión nos permite suponer[14] que los árabes conocían el desarrollo binomial para exponentes enteros cualesquiera al menos desde principios del siglo XI. No podemos saber si fue al-Karaji su inventor o cuales pudieron ser sus fuentes que en cualquier caso parecen preceder a Omar Jayyam. De hecho no existe en Youschkevitch [1976], Roshdi Rashed[15] [1977] o Ahmed Djebbar [2001] referencia alguna al problema de Omar Jayyam y mucho menos a una solución del tipo Dörrie que, indudablemente, hubiera sido favorecida por un simbolismo algebraico que tardaría siglos en llegar. Pero así se insinúa la historia muchas veces. Con una frase que a nada compromete se alimenta el subconsciente colectivo y se mitifican algunos de sus protagonistas. Se puede argumentar que es un pobre ejemplo, dada la escasa popularidad de la que parece gozar el texto, pero cuidado: se publicó, en alemán, en 1958 bajo el título *Triumph der Mathemathik*, se tradujo al inglés en 1965 y, que sepamos, se ha distribuido en EEUU, Inglaterra y Canadá.

De Marruecos a Irán

En el ámbito de la lingüística sería al-Khalil ibn Ahmad (718, 786) el precursor[16] del análisis combinatorio. Sus estudios lexicográficos y métricos contienen las primeras investigaciones y cálculos de tipo combinatorio que se conocen. Su objetivo era tratar de determinar cuántas y cuáles eran las posibilidades que ofrecían las 28 letras del alfabeto árabe a la hora de formar palabras de 2, 3, 4 o 5 letras. Después de él, especialistas en métrica como Akhfash (—, 793), gramáticos eminentes como Sibawayh (—, 796) e Ibn Jinni (—, 1000) y lexicógrafos como Ibn Durayd (—, 933), abordaron el mismo problema con las especificidades propias de la lengua árabe sobre el uso de vocales[17]. Unos estudios combinatorios que servirían a al-Kindi, en el siglo IX, para desarrollar la criptografía.

Es de esta larga tradición de tentativas de enunciado y justificación de fórmulas relacionadas con la lengua, de la que partirá el matemático magrebí Ibn Muᶜnim cuando, en el siglo XIII, escriba *La ciencia del cálculo*. La primera obra conocida en la que aparece un capítulo autónomo dedicado a la combinatoria. En él expone reglas generales, suficientemente demostradas según los criterios de la época, que permiten calcular no sólo el número de palabras que genera una determinada cantidad de letras en lengua árabe sino en cualquier otra, sea cual sea la longitud de su abecedario.

El primer problema, en el que Ibn Muᶜnim se plantea cuál es la cuantía de tintes diferentes para la seda que se pueden obtener a partir de varios colores primarios, le servirá de excusa para determinar el número de combinaciones de n objetos tomados de p en p. Pero resulta aún más novedosa la forma de obtener este número a partir de la construcción de una tabla numérica triangular. Esa es, de momento, la primera vez que el famoso triángulo aritmético aparece como resultado de un trabajo estrictamente combinatorio.

Ibn Muᶜnim se plantea cuál es la cuantía de tintes diferentes para la seda que se pueden obtener a partir de varios colores primarios, lo que le servirá de excusa para determinar el número de combinaciones de n *objetos tomados de* p *en* p.

Ibn Muᶜnim tratará también el problema de las permutaciones, con y sin repetición, y de las combinaciones con repetición. Pero será a mediados del siglo XIII cuando Nasir al-Din al-Tusi (1201, 1273) intente responder matemáticamente a uno de los grandes problemas metafísicos del Islam: ¿cómo es posible que una infinidad de cosas emanen del primer y único Principio? En el transcurso de su demostración calcula

$$\sum_{k=1}^{12}\binom{n}{k},$$

enuncia la propiedad

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

y efectúa la suma

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$

para valores concretos de m, n y p. A finales del siglo XIII las relaciones combinatorias de los términos del triángulo están definitivamente establecidas. En esa misma época, otro matemático magrebí, Ibn al-Banna retomará estos resultados y enunciará una fórmula[18] que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al triángulo. Mientras tanto, en Irán, y a principios del XIV, al-Farisi (—, 1319) utiliza el Triángulo Aritmético para determinar los órdenes numéricos, adelantándose notablemente a Pascal, a quien se le atribuye el resultado[19]. Determina así que, para formar el n-ésimo número figurado de orden k, puede recurrirse al siguiente criterio combinatorio:

Pero resulta aún más novedosa la forma de obtener este número a partir de la construcción de una tabla numérica triangular. Esa es, de momento, la primera vez que el famoso triángulo aritmético aparece como resultado de un trabajo estrictamente combinatorio.

$$F_n^k = \sum_p^n F_p^{k-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

En palabras de Djebbar, cabe pensar que a principios del siglo XIV una nueva disciplina, la combinatoria, perfectamente diferenciada de la aritmética, surge presta a desarrollarse por completo en el mundo islámico, aun cuando, ese desarrollo se viera truncado por la decadencia científica que acompañó el alumbramiento de los primeros tratados independientes de esta materia.

To be continued...

¿Dónde queda Pascal tras todo esto? Es verdad que hemos hecho que su sombra sea alargada, pero es necesario determinar con cierta precisión qué es realmente lo que aportó a la comprensión y conocimiento profundo de esta herramienta matemática que lleva su nombre. ¿Y dónde están los alumnos y alumnas que pretendemos que participen en esta historia colectiva de creación científica? A ambos dedicaremos la próxima entrega... ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a la ya referenciada en los dos artículos anteriores:

DJEBBAR, 2001, *Une histoire de la science arabe*. Éditions du Seuil. París.

YOUSCHKEVITCH, A. P., 1976. *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*. Editorial Vrin, París.

USPENSKI, V. A., 1978. El triángulo de Pascal. Editorial MIR, Moscú.

MORENO CASTILLO, R. 2002. Omar Jayyam. Poeta y matemático. Editorial Nivola, Tres Cantos, Madrid.

NOTAS

1 Hasta *El Corte Inglés* es consciente de ello. Este año ha titulado su reclamo publicitario: Libros de texto. Uniformidad colegial.

2 Las matemáticas entre ellas.

3 Pedimos disculpas si herimos la sensibilidad del lector con este tipo de reivindicaciones tan trasnochadas como denostadas en estos momentos por atentar contar el pétreo modelo neoliberal que tan incuestionable resulta en occidente.

4 Nueva, sí; al parecer siempre nueva, eternamente nueva.

5 Obtener la potencia *n*-ésima del binomio $a+b$ en potencias de a y b cuando n es un número positivo cualquiera. Enuncia Dörrie.

6 Heinrich Dörrie, 1965. *100 Great problems of Elementari Mathematics Their history and solution*. Dover, New York.

7 Uspenski [1978].

8 Boyer [1986] y Gheverghese [1996].

9 Una aproximación de la que dispondría Tolomeo 2000 años después en su tabla de cuerdas.

10 Sulbasutras (500 a. de C.).

11 Gheverghese [1991, pág. 248] opina que hasta Horner y Rufini no habría un avance sustancial sobre este tema.

12 Para los profes sí, porque lo conocimos como un ejercicio más de combinatoria. No insistiremos en la diferencia entre un problema y un ejercicio, ni analizaremos en qué momento un problema deja de serlo y pasa a ser ejercicio, pero sí lamentaremos el placer que nos robó un planteamiento heurístico tan ruin, el del ejercicio, para un problema tan bonito.

13 Una obra de la que se conoce una copia árabe realizada entre 1211 y 1218 por al-Gulfari y que sería traducida al hebreo antiguo, al castellano y, posiblemente, al latín.

14 Youschkevitch [1976].

15 R. Rashed fue el traductor al francés de la obra matemática de Jayyam.

16 Con las reservas que el conocimiento histórico impone a estas primicias.

17 En esta misma época (finales del siglo X) y en la India, Halayudha estudia distintas combinaciones de sonidos y agrupa en forma triangular (meruprastara) los coeficientes del binomio.

18 En modo alguno puede atribuirse la primicia histórica a Pascal. Pero, de las aportaciones del filósofo francés a la combinatioria hablaremos en próximos capítulos.

19 Pascal reivindica como propia esta denominación haciendo referencia a las progresiones aritméticas de orden 1, 2, 3, etc. que aparecen en el Triángulo y de las que expresa su término general al determinar el valor de una célula cualquiera del mismo.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 79-84

Stomachion. El cuadrado de Arquímedes

A cualquier persona que haya tenido alguna vez relación con los puzzles conocidos por el nombre de tangram, enseguida se le viene a la cabeza una figura geométrica dividida en trozos, que permiten recomponer la forma original, y a la vez, construir una gran variedad de imágenes, en general de objetos diversos, pero también de elementos geométricos. Usualmente la figura de la que se parte es un cuadrado, pero también existen tangram que provienen de triángulos, rectángulos, hexágonos, círculos, e incluso de figuras más curiosas como el tangram de huevo o el tangram corazón (ver Alsina, Burgues y Fortuny; 1988).

Indudablemente dentro de estos puzzles geométricos el más conocido es el Tangram Chino, que nos ha hecho pasar buenos ratos y que para nosotros, como profesores, es un excelente recurso didáctico ya que nos permite trabajar con nuestros alumnos muchos bloques temáticos del currículo de Matemáticas: fracciones, porcentajes, números irracionales, longitudes, áreas… hasta demostrar un caso particular del teorema de Pitágoras.

A lo largo de los siglos XIX y XX muchas personas se han dedicado a crear tangram de todo tipo, como por ejemplo el conocido creador de juegos norteamericano Sam Loyd.

Todos los puzzles citados tienen una buena aplicación educativa, pues el mero hecho de realizar figuras obliga a manejar conceptos de equivalencia de áreas, simetrías, descomposición de una figura en piezas menores, suma de longitudes, etc.

A lo largo de los siglos XIX y XX muchas personas se han dedicado a crear tangram de todo tipo, como por ejemplo el conocido creador de juegos norteamericano Sam Loyd. Por ello puede llegar a pensarse que estos puzzles geométricos son relativamente recientes; sin embargo, con estas páginas queremos mostrar que eso no es cierto.

En este artículo presentamos el rompecabezas más antiguo (del tipo tangram) del que se tiene referencia escrita, y cuyo autor no es otro que el conocido matemático griego Arquímedes. Se le conoce por *Stomachion* (en los textos griegos), *Syntemachion* o *Loculus de Arquímedes* (en los textos latinos).

La historia del *Stomachion*

Este puzzle geométrico se describe en trozos de manuscritos con copias de obras de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), correspondientes a un tratado que lleva ese nombre: Stomachion.

De todos es conocido que la mayoría de los escritos de los sabios griegos han sufrido grandes avatares para llegar a nuestros días. En general nos han llegado trozos que son copias de copias y que a lo largo de estos 22 siglos han ido apareciendo y desapareciendo misteriosamente como es el caso del *Palimpsesto* (un palimpsesto es un pergamino en el que el texto original ha sido lavado para poder escribir de nuevo sobre él). Este manuscrito sufrió la escasez de papel típica del

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

siglo XIII y en un afán de reutilización de sus hojas se *lavaron* los textos que contenía, copiados en el siglo X, entre los que estaba la única copia de El Método, para escribir encima rezos y lecturas religiosas. Después de siglos de uso, el manuscrito acabó en la biblioteca de un monasterio de Constantinopla. Johan Ludvig Heiberg, filólogo y erudito danés, lo encontró en 1906 en la biblioteca de la iglesia del Santo Sepulcro en Estambul. Y descubrió que debajo de los textos religiosos había símbolos matemáticos escritos en griego antiguo. Con lupa y fotografía transcribió gran parte de lo que contenía: una copia de los tratados de Arquímedes. Después el manuscrito volvió a perderse hasta los años 70, en que aparece en manos de una familia francesa, que lo vende en 1998 a un millonario americano por 2 millones de dólares. El manuscrito está actualmente depositado en el museo de Baltimore (Estados Unidos).

Entre todos los trabajos de Arquímedes, el *Stomachion* ha sido al que menos atención se le ha prestado. Todo el mundo pensaba que era un rompecabezas para niños, por lo que no tenía ningún sentido ni se encontraba explicación que interesara a un hombre como él.

El historiador de las Matemáticas Dr. Reviel Netz, después de estudiar el Palimpsesto, descubrió la razón de por qué este rompecabezas está junto a otros escritos de Arquímedes tan importantes como El Método, donde las Matemáticas y la Física son genialmente relacionadas. El Dr. Netz expone, después de traducir e interpretar los escritos de Arquímedes, que el *Stomachion* es utilizado por Arquímedes para escribir un tratado de Combinatoria (otros matemáticos que estudiaron los escritos de Arquímedes no podían pensar que en la antigua Grecia se tuviera conocimientos de Combinatoria, campo de las Matemáticas que despega con la llegada de la Informática).

El Dr. Netz afirma que Arquímedes no pretendía ensamblar las piezas de cualquier forma, sino que su trabajo va en la dirección de encontrar respuesta a la siguiente pregunta: ¿de cuántas maneras se pueden juntar las 14 piezas para formar un cuadrado?, contrastándola con el objetivo de la Combinatoria que es determinar las distintas maneras en que puede ser solucionado un problema dado. El Dr. Netz encargó a un grupo de expertos que trabajaran para encontrar la solución al reto que se planteaba Arquímedes: las maneras de unir las piezas de forma que se consiguiera un cuadrado.

El Dr. Guillermo H. Cutler, informático, diseñó un programa para que su ordenador diera la solución al problema planteado. En noviembre del 2003, el Dr. Cutler encontró las 536 maneras distintas de juntar las 14 piezas para formar un cuadrado, sin tener en cuenta las soluciones equivalentes producidas por las rotaciones, reflexiones o conmutaciones de piezas idénticas.

El rompecabezas *Stomachion*

El puzzle consiste en la disección de un cuadrado en 14 piezas poligonales: 11 triángulos, 2 cuadriláteros y un pentágono (ver figura 1).

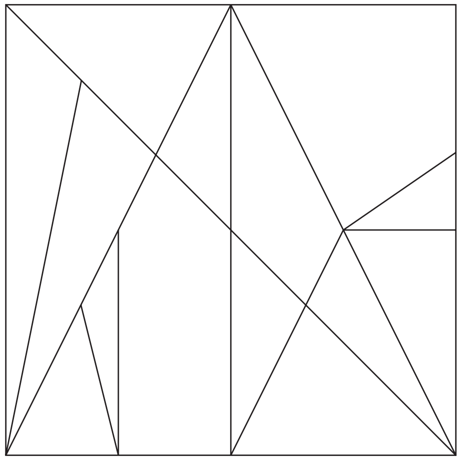


Figura 1. Puzzle *Stomachion*

A simple vista puede parecer que la división de las piezas es muy complicada, pero si superponemos una cuadrícula (procedimiento muy adecuado para trabajar con los tangram) veremos que la dificultad va disminuyendo. Basta incluir la disección del cuadrado en una cuadrícula de 12 unidades de lado para que se cumplan las siguientes propiedades:

Los vértices de todas las piezas son puntos de la cuadrícula, como se puede ver en el dibujo de la figura 2.

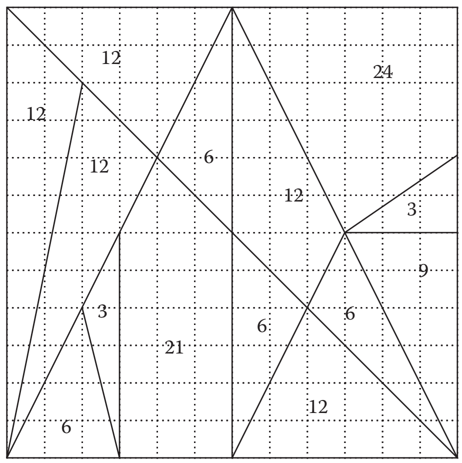


Figura 2. Puzzle *Stomachion* sobre cuadrícula

La superficie de cada pieza corresponde a un número entero de cuadrados unidad en los que está dividida la cuadrícula, según se observa en la figura anterior.

De la figura 2 puede obtenerse fácilmente qué fracción de la superficie total del cuadrado corresponde a cada pieza. Podemos verlo en la figura 3.

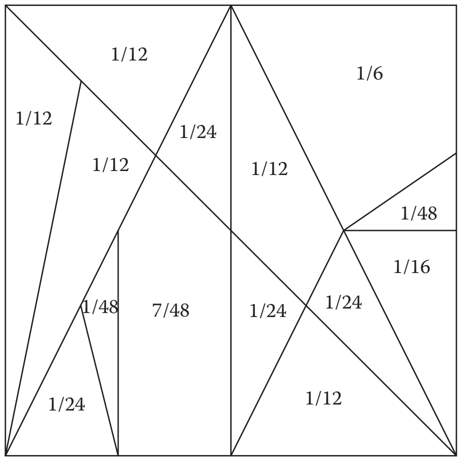


Figura 3. Fracciones de las distintas piezas

Los datos de las piezas están reunidos en la siguiente tabla:

N.º piezas	Tipo piezas	Área pieza (uds.)	Fracción cuadrado
2	Triángulos	3	1/48
1	Triángulo	9	1/16
4	Triángulos	12	1/12
1	Cuadrilátero	12	1/12
1	Pentágono	21	7/48
1	Cuadrilátero	24	1/6
14	Total del cuadrado	144	

Aplicación didáctica

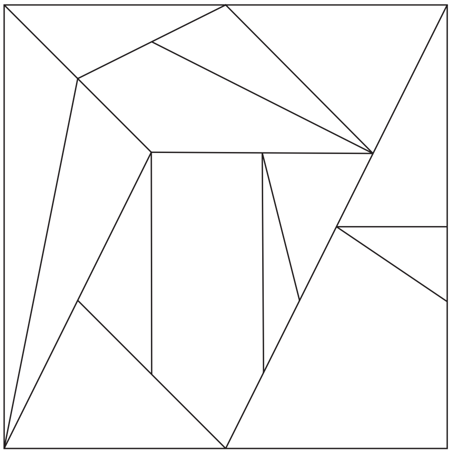
Lo interesante es cómo utilizar este puzzle en clase. Nosotros vamos a comentar aquellos aspectos que hemos tratado con los alumnos (algunos de ellos sacados de la documentación que hemos conseguido encontrar).

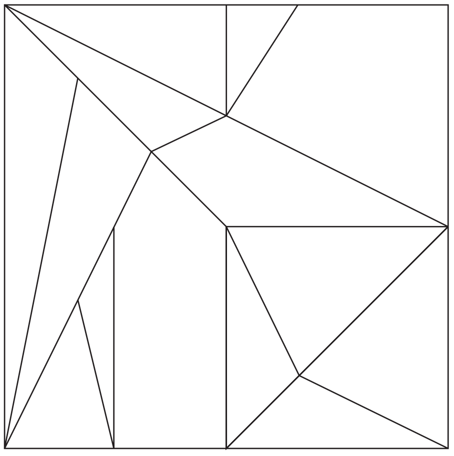
En primer lugar es interesante hacer una pequeña introducción histórica, sobre todo de su creador, Arquímedes, insistiendo en la importancia que daba a aplicar la matemática para resolver los problemas de la vida cotidiana (aunque en su época lo cotidiano fuese ser invadido por los romanos).

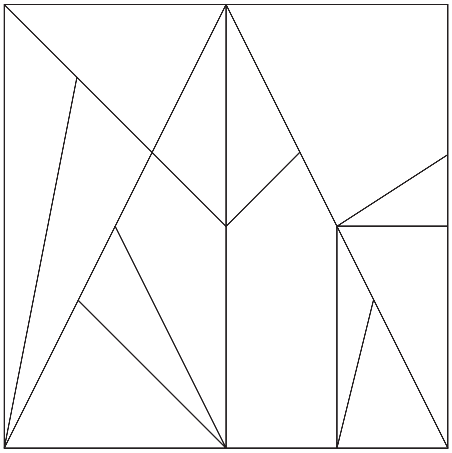
Como ya hemos hablado en otros artículos de esta sección, un aspecto importante es el diseño y construcción del puzzle en materiales diversos (cartón, panel, cartón pluma, acetato, etc.). Este aspecto puede ser tratado en colaboración con los compañeros de Tecnología, ya que puede representar un atractivo proyecto para cualquier curso.

En noviembre del 2003, el Dr. Cutler encontró las 536 maneras distintas de juntar las 14 piezas del puzzle para formar un cuadrado.

Una de las primeras formas de enfrentarse al puzzle es intentar reconstruir el cuadrado a partir de las piezas diseccionadas. Podemos asegurar que si no se tiene alguna solución por delante, este reto es muy complicado y en su desarrollo hay que aplicar muchos procedimientos matemáticos, sobre todo para ir completando ángulos rectos y uniendo longitudes de forma que aparezcan los lados del cuadrado. Y eso a pesar de existir 536 soluciones según comentamos antes. Algunas de esas soluciones podemos verlas a continuación.







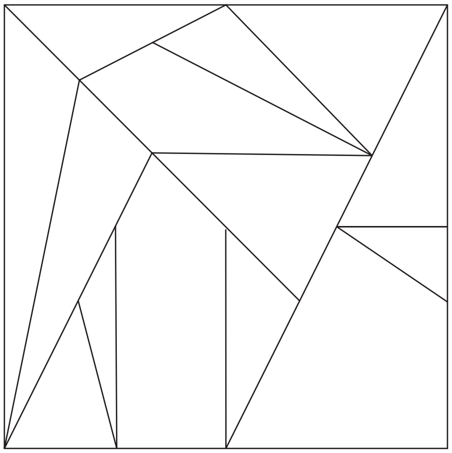
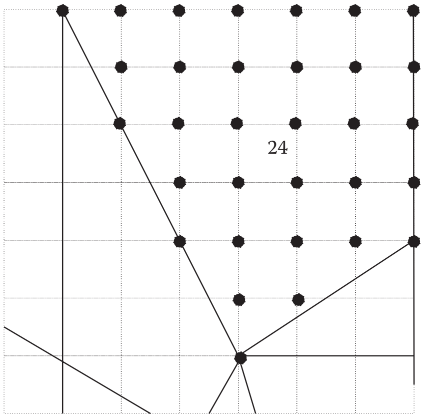


Figura 4. Algunas soluciones



Pieza de 24 puntos

En el desarrollo del trabajo es posible utilizar el teorema de Pick para calcular o verificar el área de cada una de las piezas o bien para intentar deducirlo. Recordemos que George Alexander Pick fue un matemático austríaco que nació en Viena en 1859 y murió en un campo de concentración nazi, alrededor de 1943.

El teorema de Pick dice que si un polígono P tiene sus vértices en una cuadrícula entonces su área es $A = (1/2)\cdot b + i - 1$, siendo b el número de puntos de la cuadrícula del borde poligonal e i el número de puntos interiores. Veamos un ejemplo.

La pieza de área 24 unidades cuadradas está representada en la figura siguiente. El número de puntos de la cuadrícula del borde poligonal es 14 y el número de puntos interiores 18. Por tanto:

$$A = (1/2)\cdot b + i - 1 = (1/2)\cdot 14 + 18 - 1 = 24$$

Si se pretende deducir la fórmula de Pick sería interesante mandar construir una tabla con todas las piezas, sus áreas (que están indicadas en la figura 2), el número de puntos del borde poligonal y el número de puntos interiores y a partir de ahí intentar hallar la relación que cumplen.

Se pueden establecer relaciones entre las distintas piezas ordenándolas según su área. Esta actividad, que en el Tangram Chino es casi trivial, en esta ocasión presenta mayor dificultad. Por supuesto es necesario calcular previamente las áreas utilizando la cuadrícula de la que hablamos al principio.

Con las piezas del Tangram Chino, al igual que con el Stomachion, es posible construir una serie de polígonos convexos.

Como se puede apreciar, entre las piezas hay triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, por lo que es muy interesante estudiar los ángulos de cada una de las piezas y comprobar, además, cómo se complementan unos con otros.

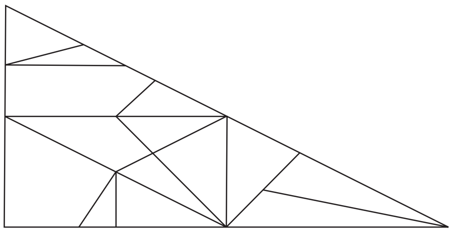
Se pueden componer figuras poligonales cuyas áreas correspondan a las fracciones del cuadrado con denominador 48 (se pueden obtener todas las fracciones desde 1/48 hasta la unidad).

Es interesante obtener las longitudes de los lados de las piezas, utilizando la figura 2 y considerando el cuadrado de lado unidad. Enseguida aparecerán números irracionales.

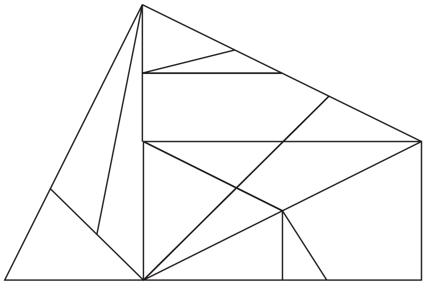
Es posible realizar composiciones con un número determinado de piezas de forma que las superficies que se consigan tengan determinadas propiedades numéricas. Antes de comenzar a trabajar con las piezas necesitamos estudiar esas propiedades para saber qué áreas tendrán las figuras resultantes. A continuación ponemos ejemplos de las que conocemos:

- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos que tengan la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos escalenos de modo que la superficie de uno sea doble que la del otro.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos escalenos de modo que la superficie de uno sea triple que la del otro (el pequeño es un triángulo escaleno rectángulo).
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar tres triángulos (A, B y C) de manera que la superficie de C sea triple y la de B sea doble que la de A.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar tres polígonos de manera que tengan todos ellos la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar cuatro polígonos de manera que tengan la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar seis polígonos de manera que tengan todos la misma superficie.
- Si la superficie del cuadrado es de 144 unidades cuadradas, haz las siguientes composiciones:
  – Reparte las 14 piezas del puzzle para formar tres polígonos de manera que sus superficies sean tres números múltiplos de 12.
  – Reparte las 14 piezas del puzzle para formar cinco triángulos de manera que sus superficies sean cinco números múltiplos de 6.
- Reparte las 14 piezas del puzzle para formar dos cuadrados iguales y un pentágono cóncavo.

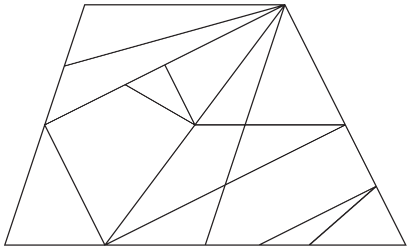
Con las piezas del Tangram Chino es posible construir una serie de polígonos convexos y con las piezas del *Stomachion* ocurre igual. Se pueden construir triángulos, cuadrados, rombos, rectángulos, romboides, trapecios, trapezoides, pentágonos, hexágonos… A continuación tenemos algunas posibilidades.



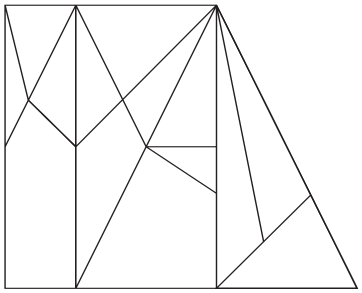
Triángulo



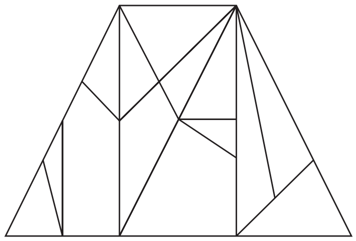
Trapezoide



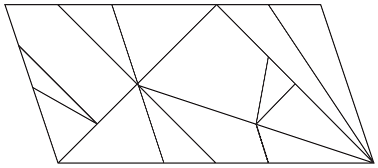
Trapecio



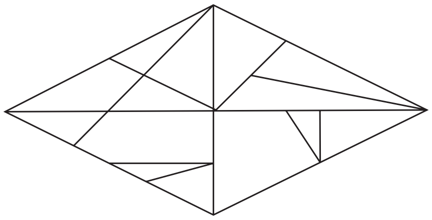
Trapecio rectángulo



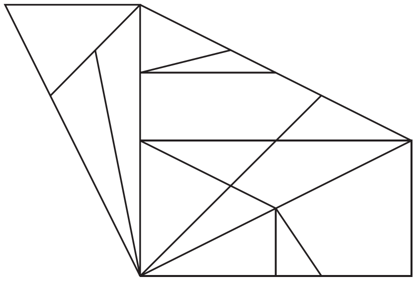
Trapecio isósceles



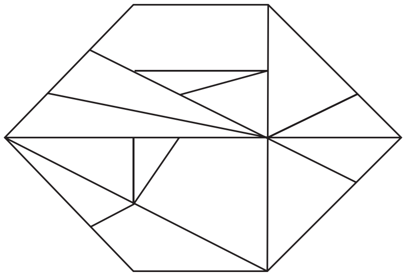
Romboide



Rombo

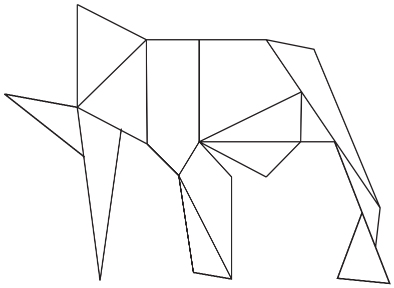


Pentágono

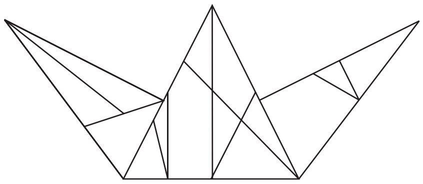


Hexágono

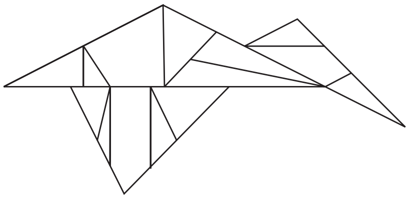
Igual que en la mayoría de Tangram, con las piezas del *Stomachion*, se pueden construir figuras no propiamente geométricas simulando a personas, animales y objetos. La cantidad depende del ingenio del que maneje el puzzle.



Elefante



Corona



Pájaro en vuelo

Por último queremos comentar un aspecto que puede desarrollar este puzzle, aunque nosotros no hemos llegado a ponerlo en práctica. Alrededor del rompecabezas puede organizarse una actividad interdisciplinar coincidiendo con alguna fecha señalada (semana cultural, final de trimestre, etc.) ya que pivotando en torno a la figura de Arquímedes hay muchos departamentos que podrían coordinarse para hacer algo en común. Se nos ocurren al menos las áreas de Matemáticas, Tecnología, Educación Plástica, Historia y Cultura Clásica. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C.; BURGUES, C. y FORTUNY, J. (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

TORIJA HERRERA, R. (1999): *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Editorial Nivola, Madrid.

http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html

Página de *The Mathematical Association of America* donde se pueden encontrar las 536 soluciones distintas.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 85-92

iMÁTgenes 19, 20 y 21

Por quinta vez puso cuatro motas de tinta en el papel, les puso nombres (A, B, C, D) y los unió con segmentos para formar un cuadrilátero. Luego señaló los puntos medios de sus cuatro lados y los conectó formando otro cuadrilátero (P, Q, R, S). Ahí estaba el problema. Ese cuadrilátero interior siempre resultaba ser un paralelogramo pusiera como pusiera los cuatro puntos originales. ¿Acaso había orden en el caos? Por un momento pensó que quizá había truco, que tal vez sucedía así porque la gente ponía los puntos de formas similares. Pero ya había probado configuraciones muy raras, incluso dejó que los segmentos del cuadrilátero ABCD se interceptasen, y siempre obtenía idéntico resultado. No, lo que parece cumplirse para cualquier caso no es ningún truco, sino un teorema que demostrar.

Como el tema de entonces en clase de matemáticas era la Geometría Analítica del plano consideró los vértices del cuadrilátero ABCD como los extremos de cuatro vectores de posición. Con ello los vértices del cuadrilátero interior PQRS pasaron a tener una relación cuantificada con aquellos: P=(A+B)/2, Q=(B+C)/2, R=(C+D)/2, S=(D+A)/2.

Pensó que PQRS sería un paralelogramo si sus lados opuestos eran paralelos. Un modo de verlo sería comprobar que los vectores PQ y RS lo eran. Unos sencillos cálculos le mostraron que los vectores PQ y SR tenían las mismas componentes: Q–P=R–S=(C–A)/2. Luego eran paralelos y el cuadrilátero construido con los puntos medios (PQRS) era un paralelogramo.

Había resuelto el problema, pero no se sentía satisfecha. El razonamiento era sencillo y no había cometido errores. Sin embargo, sentía que no comprendía el fenómeno. Esa resolución no le servía de explicación y lo que ella quería era comprender. Se pasó un buen rato concentrada en los dibujos sin que se le ocurriese nada hasta que acabó observando que podían completarse con algunas líneas más. ¿Significaba eso que no había usado todos los datos? Unió con segmentos los vértices opuestos del cuadrilátero original y aparecieron las diagonales: BD y AC. Ambas le salieron paralelas a los lados del cuadrilátero interior (PQRS).

Entonces, mientras, por culpa del ansia, recorría con el bolígrafo, una y otra vez, la diagonal (BD) y el lado del cuadrilátero interior paralelo a ella (PS), se le ocurrió algo. El exagerado grosor que acabaron teniendo esos segmentos los destacó sobre las demás líneas del dibujo y lo vio. Vio que el grupo formado por esos dos segmentos y el vértice (B) sobre el que se abrían le recordó diseños similares que había visto antes en la pizarra. Así que reprodujo aparte ese fragmento del dibujo. La nueva figura consistía en dos triángulos (APS y ABD), uno (APS) encajado en el otro (ABD). Puesto que P y S eran los puntos medios de dos de los lados (AB y AD) del triángulo mayor (ABD) el recíproco del teorema de la paralela media (si en un triángulo se traza una paralela a un lado por el punto medio de otro, dicha paralela divide el tercer lado en dos partes iguales) le aseguraba que PS era paralelo a BD, la diagonal del cuadrilátero.

Repitió lo mismo con relación a C, el vértice opuesto, y llegó a la conclusión de que QR era también paralelo a BD. ¡La misma diagonal! Ahí estaba el quid *de la cuestión. Los lados opuestos PS y QR del cuadrilátero interior eran paralelos a un mismo segmento, la diagonal BD. Luego eran paralelos entre sí y el cuadrilátero interior era un paralelogramo. Por fin entendía. Anotaría en su diario matemático eso que ella llamaba una experiencia matemática:*

Resolví el problema con un argumento algebraico. Esperaba que esa demostración, además de certificar el teorema, me explicase sus causas, pero no fue así. Quizá el teorema y el argumento que lo probaba correspondían a diferentes niveles de abstracción. El teorema se planteó en un ámbito geométrico euclidiano y elemental, no analítico. El uso de ideas de Geometría Analítica cambió el contexto del problema situándolo en un nivel más abstracto. Eso facilitó una demostración sencilla, pero no esclarecedora. Comprendí el fenómeno cuando fui capaz de desarrollar una prueba en un nivel similar al del planteamiento. Mi conclusión no es el rechazo a los argumentos algebraicos, sino la necesidad de ser consciente de lo que abstraen y comprimen y de ser capaz de descomprimirlos cuando sea preciso. Dicho de otro modo, una puede encadenar los pasos lógicos de una demostración y aceptarla como prueba, pero eso no significa que lo comprenda: demostrar no es explicar.

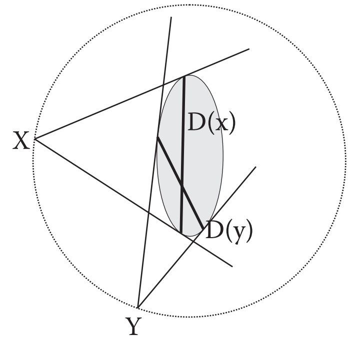
Miquel Albertí Palmer
imatgenes.suma@fespm.org

Acabo de transcribir en palabras una larga serie de imágenes. Por eso mi experiencia matemática es doble. Por un lado, los teoremas de los que hablo, el de la paralela doble y el famoso teorema de Varignon del paralelogramo. Por otra parte, la transcripción. No siempre logra uno el éxito deseado, pero sirve para aprender a pensar porque lo escrito es una línea con principio y fin. Para escribir hay que ordenar las ideas de modo sucesivo. Aunque se agrupen en segmentos más o menos extensos (párrafos, frases, palabras), hay que poner en fila el volcado de ideas. A eso nos obliga la linealidad de la escritura, a encadenar pensamientos. Lo básico para pensar con lógica.

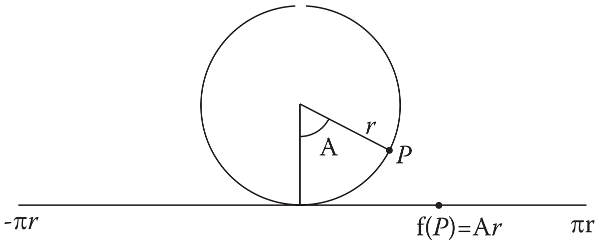
Cuando leas las masas rectangulares de letras y palabras de esta página, todo ello bidimensional, recuerda que tu lectura sigue una línea y que si acabas por recorrer con tu mirada todo el rectángulo de la hoja es porque esa línea excede su amplitud. La línea de tu lectura es ahora la línea de tus pensamientos. Y no sólo la de esta página, también la revista entera. Y la de cualquier libro. La medida hay que realizarla sin descontar los espacios en blanco entre frases o entre párrafos porque son los que, distinguiendo una palabra de otra, hacen posible la lectura. Tampoco hay que suprimir los puntos y aparte ni los cambios de línea para destacar un diálogo. En esos claros reposa la lectura y se facilita la comprensión del texto. Contándolo así, el texto de *El Quijote* editado por Ramón Sopena SA en 1966 (sin contar las ilustraciones) se extiende hasta los 3,5 km.

En la iMATgen 16 vimos cómo desde el exterior de un polígono regular podemos conocer el número de sus lados. La iMATgen se desarrolló en un contexto arquitectónico. Se construyen todo tipo de torres, pero de entre todas las posibles plantas que podrían tener, las más corrientes son las cuadradas, hexagonales, octogonales y circulares. ¿Dónde hay un campanario de planta triangular? Al contemplar una torre de planta circular, ¿cómo podemos estar seguros de que ciertamente su sección transversal es un círculo y no una elipse? Ahora no disponemos de lados ni de aristas para referenciar nuestros cálculos. Tampoco la visión de una sección de la torre ayudaría porque tanto la sección no ortogonal de un cilindro circular y de uno elíptico son elipses.

Lo único plausible es dar una vuelta alrededor de la construcción y observar si su diámetro aparente varía o no. Para hacerlo bien habría que describir una circunferencia con centro en la base de la construcción y eso es algo muy difícil. Sólo en una torre de base circular permanecerá invariable desde cualquier punto de vista que equidiste de su centro. En cambio, el diámetro de una torre de planta elíptica ese diámetro aparente no será constante:



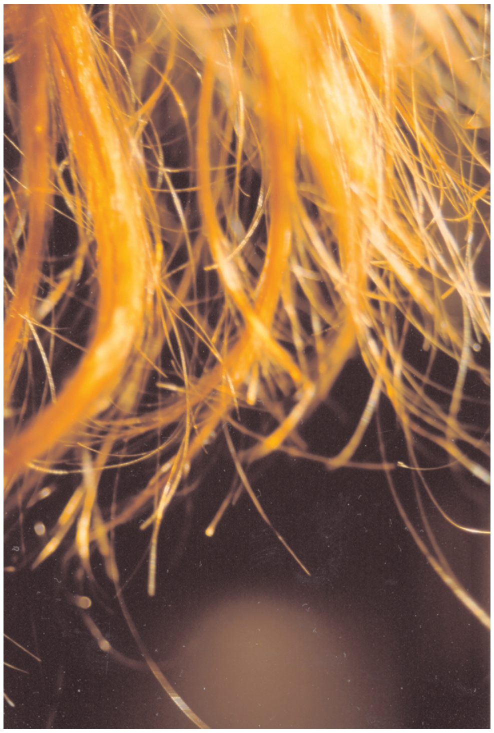
En la iMATgen 17 supimos que hay gente que vive dentro de tubos de bambú, aunque modificados. Esa modificación provenía de una doble transformación del cilindro. Primero, un corte longitudinal mediante el cual la sección circular del cilindro pierde un punto (uno, en la ficción; más de uno, en la realidad) mientras que el cilindro pierde una recta. Luego se extiende sobre el plano mediante una transformación continua cuya visualización transversal es:



El recuerdo de la iMATgen 18 plantea cuestiones interesantes. Supongamos que en una carrera de cien metros lisos los ocho atletas llegan igualados a la meta. ¿Puede la Foto Finish enfocarlos con nitidez sin que nadie salga movido? ¿Dónde habría que colocar la cámara? La profundidad de campo de la fotografía, es decir, el intervalo de enfoque nítido, debería ser de unos 8 metros (un metro por calle). Eso es casi imposible si la cámara está muy cerca de la pista porque el intervalo a enfocar iría desde 0 hasta 8 metros. Además, lo expuesto en la iMATgen 18 nos dice que la velocidad con la que el corredor más cercano sería percibido podría ser casi infinita y el riesgo de que saliese movido, confuso, por muy rápido que parpadee el diafragma, será muy grande. Conviene colocar la cámara a cierta distancia de la pista y a cierta altura, para evitar así que un atleta oculte a los demás. Al subir la cámara del suelo aumentamos también la distancia mejorando el enfoque. De hecho, la ubicación ideal podría calcularse teniendo en cuenta la velocidad de los atletas y los parámetros ópticos de la cámara.

iMATgen 19

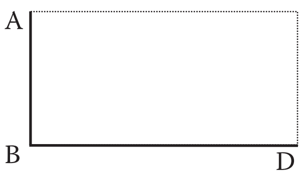
Cabellos brillantes de extremos desiguales. Despeinados, pero sin nudos. Ondas que la gravedad no domina por completo y que no han sido cortadas desde hace tiempo. Cabellos vivos, salvajes, libres. Si te imaginas cogiendo un mechón entre los dedos podrás entrever su finura y docilidad. Cabellos dorados de una melena femenina cuya realidad también incluye un cobrizo luminoso que sólo el Sol de una tarde calurosa puede encender.



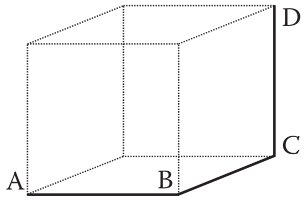
Mechones de curvas espaciales que la imagen reproduce en un plano. Comprender la imagen es comprender la diferencia entre una curva plana y una curva espacial. Eso transforma la imagen en iMATgen. Todo el mundo es capaz de distinguir una curva plana de una espacial, pero no es suficiente liquidar el asunto utilizando esos adjetivos. ¿Qué tiene una curva en el espacio que no tenga una curva plana? Eso es lo que vamos a analizar para entender mejor la imagen.

Para comprender cómo es una curva espacial y ver qué es lo que la distingue de una curva plana construiremos una a partir de un segmento. Sea *AD* ese segmento:

Este segmento es una curva unidimensional, no es una curva plana. Para apartarlo de la recta lo doblamos por un punto B entre *A* y *D* provocándole un vértice de ángulo recto:

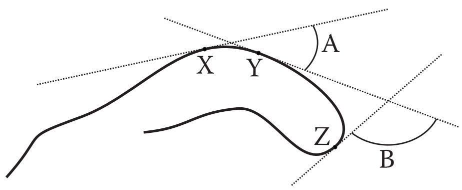


La poligonal *ABD* es una curva plana, bidimensional, que se desarrolla en el plano definido precisamente por esos tres puntos. Añadiremos una tercera dimensión a esa poligonal si doblamos uno de sus dos segmentos, *AB* o *BD*, por otro punto, pero siempre y cuando ese pliegue determine un plano distinto al definido por *A*, *B* y *D*. Por ejemplo, doblaremos *BD* por su punto medio *C* de manera que el plano *BCD* sea perpendicular al plano *ABC*:

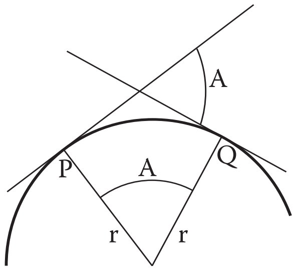


La poligonal *ABCD* obtenida es la curva espacial más esquemática y simple. Es tridimensional porque se desarrolla en dos planos, *ABC* y *BCD*, ortogonales. Con relación al segmento *BC*, los segmentos *AB* y *CD* están girados 90º uno con respecto al otro. En lenguaje corriente se diría que es una curva retorcida. He ahí el carácter espacial de una curva y lo que la distingue de una curva plana, que su plano tangente, el plano en el que se desarrolla, no es el mismo en todos sus puntos.

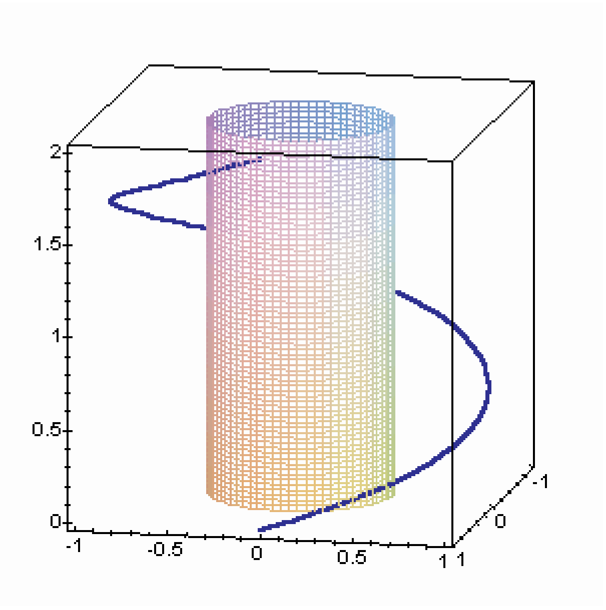
Hemos hablado de una curva poligonal aunque no sea ésta la idea de curva espacial más corriente. Ya sea considerada como un cúmulo de puntos o como el vestigio de un punto en movimiento, una curva es una línea que se aparta de lo recto, que cambia de dirección. Ese cambio de dirección se visualiza mediante la tangente a la curva. En la curva siguiente la variación de dirección entre *X* e *Y* es un ángulo *A*. Entre *Y* y *Z* es *B*:



La proporción entre la variación del ángulo de dirección entre dos puntos de una curva y la longitud del tramo en el que se produce esa variación recibe el nombre de *Curvatura media* (K_m) del tramo. La curvatura media de la más elemental de las curvas planas no poligonales, un arco de circunferencia, es constante. En efecto, si P y Q son dos puntos sobre un arco circular de radio r correspondientes a una amplitud de A rad (véase la figura), la variación de la dirección también es A porque las tangentes en cada punto son ortogonales a sus radios. *Y*, dado que la longitud del arco es $A \cdot r$, la curvatura media será $K_m = A/(Ar) = 1/r$:



Del mismo modo que una curva plana precisa dos dimensiones para desarrollarse en un espacio bidimensional y abandonar la dimensión única de la recta, una curva espacial necesita la tercera dimensión para abandonar el plano. Entre las curvas espaciales más sencillas está la que se obtiene levantando uniformemente del plano una circunferencia de radio 1: (cos t, sen t, t). Las dos primeras componentes de esta expresión, cos t y sen t, determinan la circunferencia. La tercera coordenada, t, levanta cada punto hasta una altura t:



El plano en el que evoluciona una curva plana suave, sin picos, queda determinado por su vector tangente y el vector ortogonal a éste, el llamado vector normal a la curva. Es un plano común a todos los puntos de la curva. Pero en una curva espacial el vector tangente y el vector normal determinan un plano variable llamado plano *osculador*. Es el plano en el que evoluciona la curva y es distinto en cada punto. En la curva poligonal espacial *ABCD* de la que hemos hablado al principio, el plano osculador en el punto *B* (plano *ABC*) y el plano osculador en *C* (plano *BCD*) son ortogonales.

La variación del ángulo del plano osculador de una curva espacial determina su *Torsión*. Cuando el plano tangente no cambia de dirección la torsión nula y la curva es plana, sólo posee curvatura. La representada más arriba se llama *Hélice* y es común en ámbitos técnicos (escaleras de caracol, cuerdas, muelles) y naturales (rizos de la vid, enredaderas). En ella resulta la diagonal de un cuadrado enrollado en un tubo. En cada punto el plano osculador forma 45º con el eje del tubo, pero el ángulo j entre los planos osculadores de los puntos P(t_0) y P(t) es:

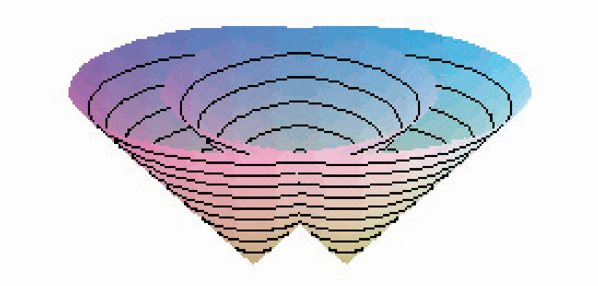
$$\varphi = \arccos\left(\cos^2\left(\frac{t_0 - t}{2}\right)\right)$$

Esas son las curvas de la fotografía: hélices naturales cuya curvatura y torsión suelen modificarse a veces enrollando mechones de pelo más o menos gordos en rulos (tubos, cilindros) más o menos finos. La gravedad estira el pelo, pero no varía su aspecto helicoidal, ya que la Geometría Diferencial demuestra que toda curva espacial suave es tangente a una hélice. Las melenas nórdicas y andinas, muy lacias, ceden dócilmente a la gravedad. Sus cabellos de torsión y curvatura pequeñas caen lánguidos sin apenas liarse. En cambio, los rizos diminutos del cabello africano, de gran curvatura y torsión, resisten la caída. Todas son ***Melenas helicoidales***. ■

Justo en medio de la llamada *Avenida de los volcanes*, a los pies del Cotopaxi, está Latacunga. A 80 Km. hacia el oeste de Latacunga se encuentra Zumbagua. Desde aquí, continuando 10 Km más hacia el norte, se llega hasta la boca de un cráter. Pero las dimensiones del viaje no se reducen a esas porque también se asciende hasta los 4000 m de altitud. Y es allí arriba donde el cráter alberga una laguna de agua esmeralda llamada Quilotoa. A sus alrededores pastan las llamas que cuidan los niños, pastores jóvenes de los Andes ecuatorianos. Los de la foto eran cuatro hermanos. La mayor, la más alta, mandaba en el grupo. De acuerdo con las reglas de la colonización española deberían hablar castellano, pero por lo visto las grandes altitudes andinas son aún hoy reducto de cóndores y gente austera que solo el quechua puede sobrevolar.

Llaman la atención las miradas de los críos. Ninguno, salvo el más pequeño, mira a la cámara. Pero de todos, es la mayor la que más girada tiene la cabeza hacia lo que capta su atención. Los demás giran los ojos, pero apenas mueven la cabeza. Miran en escorzo, sobre todo el pequeño que busca la protección de su hermana. Difícil saber lo que están mirando, pero sí podemos saber cómo ven lo que miran y el efecto que tiene en su mirada el hecho de girar o no la cabeza. He ahí lo fundamental para comprender la imagen.

Tenemos dos ojos. Cada uno ve en un cono de luz determinado por un ángulo sólido, un cono, de amplitud A. Fuera de ese cono no hay visión. Dentro de él, en cada ojo, la visión es bidimensional. La tridimensionalidad se crea con la superposición, es decir, la intersección de dos imágenes, una correspondiente a cada ojo:



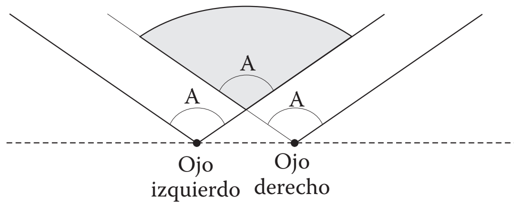
En la intersección de esos conos percibimos las cosas en tres dimensiones. Pero esa región de visión 3-D no es otro cono. Suponiendo que los conos tengan vértices en los puntos $P_1(-1,0,0)$ y $P_2(1,0,0)$ y que sus amplitudes sean de 90º. Las ecuaciones de los dos conos son

$$(x+1)^2+y^2=z^2$$
$$y(x-1)^2+y^2=z^2$$

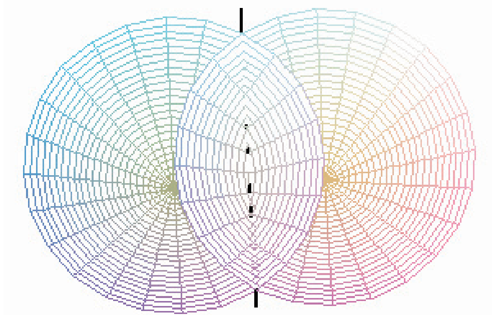
El sistema que forman tiene como solución:

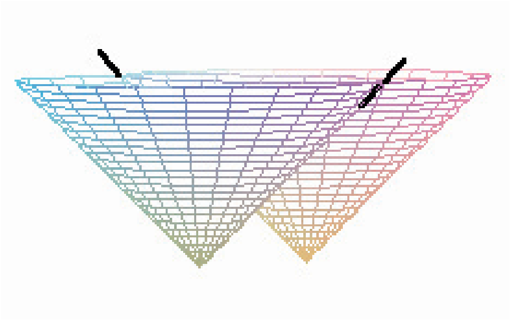
$$\left.\begin{matrix}(x+1)^2+y^2=z^2\\(x-1)^2+y^2=z^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x=0\\z^2-y^2=1\end{matrix}\right\}$$

Se trata de la hipérbola z^2-y^2=1 del plano *YZ* con vértice en (0,0,1), foco en (0,0,√2) y asíntotas $z=\pm y$. Por tanto, la región de visión *3-D* tiene perfil hiperbólico. Su amplitud horizontal coincide con el ángulo *A*:

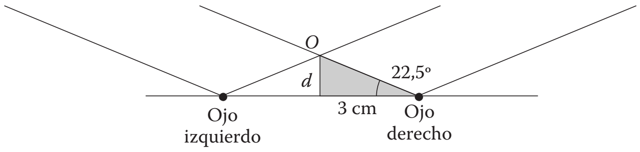


Pero la amplitud vertical viene determinada por esa hipérbola que se abre hacia dos asíntotas que forman un ángulo *A*. He aquí dos perspectivas distintas de esa región junto con su perfil vertical hiperbólico resaltado en azul:



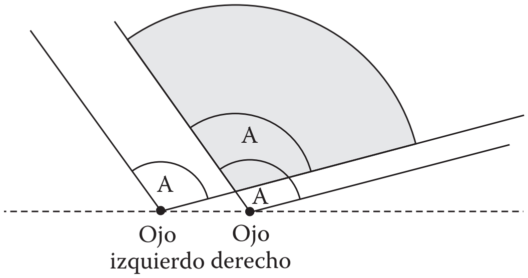


En el ojo humano el valor de A se acerca a los 135º. En mi caso particular, la distancia interocular es de 6,2 cm, lo que significa que el vértice O de mi región de visión 3-D está a una distancia d=3,1·tg 22,5º=1,284 cm:

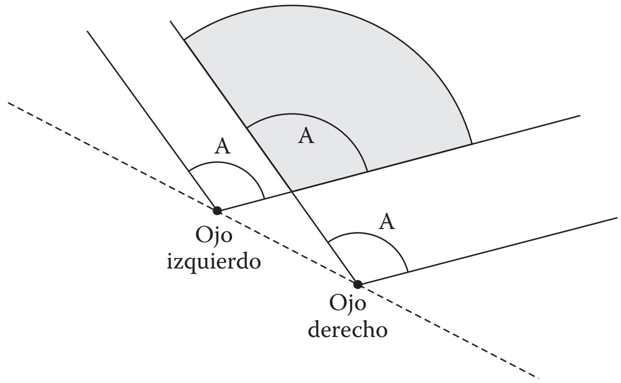


Ahí está mi 'tercer ojo'. El triángulo determinado por ese 'tercer ojo' y los otros dos constituye una zona de invisibilidad ínterocular que se agranda según la separación de los ojos y a medida que se disponen más hacia los lados de la cabeza, como sucede en los toros y, sobre todo, en los peces. Gracias a ello el torero puede posar la mano encima de su cabeza sin temor. El matador extiende el brazo hacia el cielo y luego lo baja manteniéndolo extendido, trazando un gran arco. El toro ve la mano del torero cuando apunta hacia el cielo y puede ver como ésta inicia el descenso, pero llega un momento en que la mano entra en esa zona invisible para el animal. El toro la pierde de vista y siente que algo se le ha posado en la frente.

Cuando el centro de nuestra atención se sitúa fuera de esa zona no percibimos las cosas con tanta claridad porque no las vemos en tres dimensiones. Nos vemos obligados a girar los ojos:



Y no sólo los ojos, también la cabeza porque, de lo contrario, la visión será distorsionada al encontrarse el objeto a diferente distancia de cada ojo:



Sólo la joven más alta ve bien claro lo que mira. Los demás verían mejor lo que miran girando la cabeza. Como sincero reconocimiento a Miguel de Guzmán tomaré prestado para esta iMATgen un título suyo: ***Mirar y ver***. No lo hay mejor. ■

iMATgen 21

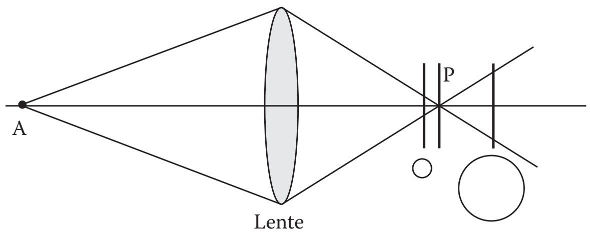
Círculos de colores rodeados de oscuridad. Blanco, amarillo, naranja, verde y rojo sobre negro. Discos que se interceptan formando figuras ahusadas. Destellos captados por una cámara fotográfica. Luces en la noche. Hay bombillas esféricas que se perciben como luces circulares, pero las hay también con otras formas. ¿Eran esféricas o circulares todas esas luces captadas por la cámara? ¿Tal vez los farolillos de colores que iluminaban una fiesta? ¿O tenían quizá formas diversas?

¿Qué hay realmente bien enfocado en la imagen? Entiéndase por enfocar el definir con claridad los perfiles de las figuras, no el hecho de centrar un objeto en un rectángulo, o sea, encuadrar. En la imagen no hay nada bien enfocado. Los contornos más claros se aprecian en círculos que no son nada, que son transparentes, fantasmagóricos. Esos círculos no parecen ser objetos sólidos, sino reflejos luminosos en un cristal.

Los objetos de los que provienen esos círculos son invisibles. Comprender la imagen pasa por responder dos preguntas: ¿Pueden proceder de objetos distintos? ¿Cómo se explica que todos tengan forma circular?

Uno de los aspectos primordiales a tener en cuenta cuando se hace una fotografía es el enfoque. La imagen que quedará impresa en la película pasa por una lente situada a cierta distancia de la película. Esa distancia determinará la nitidez de la imagen. Puesto que la película fotográfica es un plano, enfocar consiste en situar la lente a una distancia apropiada para que la escena captada se vea con la máxima claridad, sin zonas borrosas. De lo contrario, la imagen queda desenfocada.

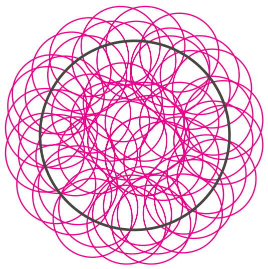
La escena fotografiada, de hecho, la luz de esa escena, se registra en la película fotográfica (sensible a la luz) mediante una proyección realizada por una lente convergente, el objetivo. Por ejemplo, fotografiar el punto A (véase la figura) significa recoger en la película la luz que procede de él. La lente recoge el cono de luz procedente de A y transforma su amplitud. Enfocar bien quiere decir colocar el plano de la película justo en el vértice del nuevo cono (P) en el que la lente ha transformado la luz que venía de A. De este modo la imagen del punto A en la película será otro punto. De lo contrario, será la intersección de un plano (la película) con un cono, es decir, un círculo. Ese círculo será tanto mayor o menor según la distancia de la película al punto de enfoque:



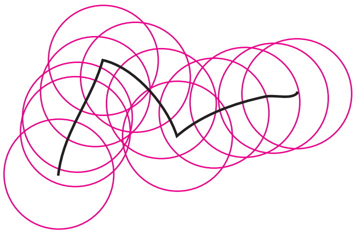
Los círculos que se forman cuando la película no se sitúa en la distancia de enfoque se llaman círculos de confusión. Debido a que el ojo humano tiene una precisión limitada y no puede distinguir entre un punto y un disco muy pequeño (alrededor de 0.2mm de diámetro), el error en el enfoque admite cierta tolerancia. Por tanto, si la película se sitúa muy cerca del plano de enfoque los círculos de confusión resultan imperceptibles. Pero cuando la distancia se hace demasiado grande, los círculos de confusión pueden llegar a ser enormes.

Esos son precisamente los círculos que aparecen en la fotografía. La imagen se tomó intencionadamente desenfocada. Pero la explicación no acaba aquí porque tanto la argumentación como la figura anterior se refieren a un único punto. Si el objeto a fotografiar no se reduce a un punto cada uno de los puntos que lo conforman genera un cono de luz. La suma de todos esos conos determina una imagen borrosa si el plano de la película no está en el lugar adecuado.

Si los discos luminosos de la imagen no provienen de puntos únicos, pero, pese a todo, son circulares, ¿cómo explicar su forma? Una explicación es que procedan de objetos circulares. En efecto, si trazamos un círculo de radio r en cada punto de un círculo de radio R, el resultado será otro círculo de radio $r+R$:



¿Y si el objeto original no es circular? En tal caso el desenfoque produce un círculo para cada uno de sus puntos. Por ejemplo, en el caso de una curva:

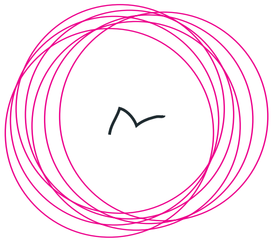


El resultado es una figura cuya forma es la misma que perfilar la curva original, una paralela a ésta. Los círculo de confusión centrados en los puntos de la curva $[x(t),y(t)]$ de extremos P y Q forman una región de perfiles $[X(t),Y(t)]$ paralelos a la curva original, uno por encima y otro por debajo:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) \mp r \cdot \sin\left(\arctan\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\right) \\ \\ Y(t) = y(t) \pm r \cdot \cos\left(\arctan\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\right) \end{cases}$$

La franja determinada por ambos perfiles se cierra con arcos circulares centrados en P y Q, los extremos de la curva $[x(t),y(t)]$.

En el caso de que el original no sea una curva, sino una región, el desenfoque produce un perfilado paralelo al perfil de la región (véase SUMA 48: Introducción a las iMÁTgenes 13,14,15). El resultado puede acabar siendo un círculo cuando el desenfoque es muy exagerado, es decir, cuando la película se halla lo más lejos posible de la distancia de enfoque. Véase la curva anterior más desenfocada aún:



Cuanto mayor es el desenfoque, más circular es la representación del objeto fotografiado. Por tanto, es posible que los círculos de confusión sean desenfoques de realidades no circulares, como sucede aquí. El rojo, verde y amarillo de la imagen son los colores de un semáforo. Hice la fotografía de noche, en una calle, y apaisada. Después la giré 90º a la izquierda para que no pudiera adivinarse en seguida qué era. Si se devuelve a su posición girando la revista 90º a la derecha cobrará sentido. Los discos verdes son luces desenfocadas de un semáforo. En realidad, esas luces están formadas por una serie finita de destellos distribuidos en un círculo, por lo que su desenfoque circular sí procede de objetos también circulares. No ocurre lo mismo con los discos rojos. Éstos son desenfoques de las luces de posición y de frenado de varios automóviles, que no tienen forma circular. Las amarillas son luces de las farolas que iluminan la calle. La foto que ilustra esta iMATgen no es una imagen confusa, sino una imagen ***Con fusiones circulares***. ■

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 93-96

Corrientes tres cuatro ocho...

El famoso tango *A media luz* amenizó durante décadas los más diversos encuentros románticos. Al margen de una bonita música de Edgardo Donato, la canción posee una letra de Carlos César Lenzi más que adecuada para finalidades muy concretas:

Y todo a media luz
que es un brujo el amor,
a media luz los besos,
a media luz los dos...

El estribillo, como el propio título, dá pie a que sus oyentes aprovechen el contenido literal del canto para perjudicar a Endesa y actuar en beneficio propio. Pero lo más sorprendente de esta popular canción son sus primeros versos:

Corrientes tres cuatro ocho,
segundo piso, ascensor,
no hay porteros ni vecinos
adentro, cóctel y amor...

A nuestro admirado profesor Santaló le gustaba contar que él, como tantos otros, había acudido a ver esta dirección real de Buenos Aires y había encontrado una vieja casa sin nada singular.

No es normal que las canciones incluyan direcciones callejeras, pero éstas son de gran interés para las personas que deseen llegar a un lugar urbano concreto y para los servicios de correos (código postal).

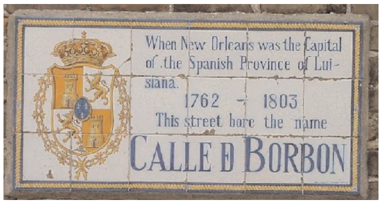
Corrientes, 348

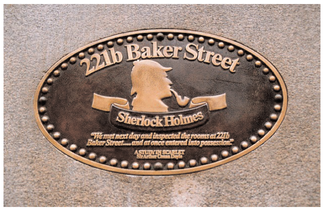
Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

Nueva York en 1847

En este clip hablaremos del tema de la numeración en las calles. Parece algo simple, pero la simplicidad es siempre efímera, pues cuando se profundiza en algo real surgen inmediatamente complejidades inesperadas.

¿Qué es una calle? Por supuesto "en una población, vía entre edificios o solares… exterior urbano de los edificios… camino entre dos hileras de árboles o de otras plantas…" pero… ¿Dónde están los límites entre calle, pasaje, avenida,





vía, ronda, rambla, travesía, carretera, etc.? Hay calles sin edificios (urbanizaciones recientes), calles sin continuidad (Consejo de Ciento y Mallorca en Barcelona tienen dos trozos separados), calles sinuosas, calles con escalones sin suelo plano (calle *Rompeculos,* en San Feliu de Pallerols), calles con escaleras mecánicas… y calles imaginarias (calle de la amargura, la calle de en medio, etc.). Las aglomeraciones urbanas han provocado la necesidad de que los ayuntamientos establezcan procedimientos para asignar nombres a las calles y aquí, de nuevo, surgen las situaciones más variopintas: calle Alcalá, calle Jaén, calle Jaime I, avenida 9 de Julio, Vía Augusta, calle Pitágoras, 3rd Avenue, calle 42…

Hay calles sin números, al no haber en ellas accesos a edificios, pero la mayoría de calles sí que se numeran. Y esto es lo que especialmente nos interesa. Los números naturales (desde el uno) sirven para hacer esta numeración… pero pueden aparecer letras adjuntas (6A, 25Bis...) o pueden no existir algunos números de una serie, etc. Normalmente, las plazas están numeradas correlativamente y las calles en cambio se numeran agrupando pares e impares en lados opuestos… ¿pero donde empieza el 1? Aquí hay que fijar criterios respecto de algún lugar referente. Si uno mira las ordenanzas de Sevilla encuentra un criterio claro:

> Los números pares estarán de forma continuada en la mano derecha de la calle y los impares en la izquierda.
>
> La numeración partirá desde el extremo o acceso más próximo al antiguo centro de la ciudad, hoy calle José Gestoso, tal como se estableció en el artículo 705 de las Ordenanzas Municipales aprobadas el 26 de septiembre de 1919.

Pero en otros lugares se usan otros criterios numerando manzanas o barrios y calles o dando distancias métricas enteras respecto de un punto cero de referencia.

Las 7.049 casas de Madrid en 1765 se numeraron (con azulejos) en relación a sus manzanas (había entonces 557). Esta confusión hizo que en una misma calle hubiese números repetidos. Suerte que en 1835 se puso orden y se tomó en cada calle el inicio de numeración el punto más cercano a la Puerta del Sol.

En la gran ciudad de Buenos Aires (200 km^2), con sus 46 barrios, las calles que atraviesan la ciudad en sentido Este-Oeste inician su numeración en la ribera del Río de la Plata pero las orientadas Norte-Sur modifican nombres y numeración a partir de la Avenida Rivadavia. La numeración va de 100 en 100 por *cuadra,* lo que da lugar, en las larguísimas calles principales, a numeraciones muy elevadas (Santa Fé al 3312…). Así, la Avenida Rivadavia juega un papel parecido a de la Quinta Avenida de Nueva York ,que clasifica las calles en –West (oeste de la avenida) y –East (este de la avenida).

Aún resulta más original la aritmética propia de la ciudad argentina de Miramar. Sus calles están numeradas de dos en dos, siendo pares las paralelas al mar e impares las perpendiculares. Para ir a la calle 30 nº 1150 puede hacerse lo siguiente: se multiplican los dos primeros dígitos del número por dos: 11×2=22; indicando el resultado que el lugar buscado de la calle 30 se encuentra entre la calle 21 (22–1) y la 23 (22+1). Para ir al 1840 de la calle 31, que es impar ,se calcula: 18×2=36 y el lugar se ubica entre la calle 36 y la 38 (=36+2).

En Tokio ni las calles tienen nombre ni las casas tienen número, pero sí hay una localización por manzanas. Roppongi 3-5-43 indicará barrio de Roppongi, área 3, manzana 5 y casa 43 (en la manzana). Vaya, lo que en Madrid ya se superó en el siglo XIX. *Lost in the street*…

Los códigos postales se basan en el sistema de direcciones más códigos añadidos para ciudades o incluso distribuidoras de correos. Así ,el Posnet Code del Servicio de Correos americano, incluye 5 dígitos de lugar más 4 de distribuidora, dando lugar a códigos de barras impresos con 10 dígitos (9 del código más 1 de control, cuya suma debe ser divisible por 10). También existen códigos con más dígitos al incorporar información de calle y número.

En los últimos años, el estudio de la complejidad urbana ha vivido un desarrollo importante. El tema afecta a comunicaciones, tráfico, comercio, etc. Los trabajos de Martin Rosvall muestran (por medio de la teoría de grafos y unas pocas funciones logarítmicas) la enorme complejidad de nuestras ciudades, a partir de calcular (ponderando) las dificultades para encontrar un lugar desde otro (preguntas necesarias para llegar).

El crecimiento de las grandes ciudades y los nuevos conceptos de áreas metropolitanas sólo ha empezado. Lo bueno aún está por venir. Nuestra dependencia del GPS es ya inevitable.

Para pensar un rato

Le propongo que se informe y piense en su propia ciudad o pueblo. ¿Cómo se identifican calles y casas? ¿Cómo se hacía y cómo se hace? ¿Qué puntos o calles sirven de referente?... Si tiene alguna curiosidad al respecto puede enviarla a *elclip.suma@fespm.org* y daremos cuenta de ello en otro clip.

PARA SABER MÁS

ALEXANDER, Ch., *Tres aspectos de matemáticas y diseño*, Tusquets Editores, Barcelona, 1969.

CARVALHO, R., PENN, A., "Scaling and universality in the micro-structure of urban space", *Physica A*, 32, 2004. pp.539-547.

ROSWALL, M., TRUSINA, A., MINNHAGEN P. y SNEPPEN, K., *Networks and cities: an information perspective*, 2004.

STEEN, L.A., *Matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1998.

En Internet:

http://web.mit.edu/urbanupgrading

acm.uva.es/p//v1/125.html

www.nova.es/~target/mad_e301.htm

www.urbanismosevilla.org/documentos/

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 97-104

Einstein y Cabrera, amigos para qué si no

La exposición *Albert & Blas Einstein y Cabrera* del Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas de Gran Canaria celebra el 2005 Año Mundial de la Física, como centenario de aquel 1905 *annus mirabilis* en el que Einstein no sólo encontró la ecuación matemática más conocida del mundo —$E=mc^2$ —, sino que hizo contribuciones fundamentales a la ciencia. La muestra se centra en la relatividad y demás contribuciones de Einstein y no elude ninguno de los aspectos más discutidos de la vida del hombre del siglo XX.

La exposición contiene multitud de elementos originales: películas de dibujos animados 3D, módulos interactivos, un taller–laboratorio on–line, documentos audiovisuales, etc.

Cabrera fue una figura clave en la renovación cultural de España.

Blas Cabrera acompaña a Einstein en la exposición, jugando un papel divulgador, empírico y de acercamiento al gran famoso personaje.

La presencia del canario Blas Cabrera está más que justificada desde una doble perspectiva, primero:

Blas Cabrera se constituyó en *padre de la Física Española* y no sólo en una figura relevante de la ciencia en España, sino en el representante de la ciencia española, que recogía la herencia de la anterior generación: la de Cajal y Torres Quevedo. Fue una figura clave en la renovación cultural de España. Dedicó una atención relevante a la revolución relativista y considerables esfuerzos para su difusión y divulgación en España y en hispanoamérica.

Jacinto Quevedo Sarmiento
museos.suma@fespm.org

Cabrera se relacionó con Einstein, tanto en Zurich (1912), como en España (1923) y en los Congresos Solvay (1930 y 1933).

Segundo: desde el punto de vista museográfico, se emplean elementos para estimular tres clases de interactividad con el visitante: Interactividad manual o de emoción provocadora (*Hands On*); Interactividad mental o de emoción inteligible (*Minds On*) e Interactividad cultural o de emoción cultural (*Heart On*). La complejidad del personaje Einstein y de la exposición, hace que encaje en esta tercera clase la presencia del canario Blas Cabrera.

Presento, a continuación, una descripción del área titulada *Einstein y Cabrera, amigos para qué si no*, una de las diez áreas históricas en que se divide la exposición.

Blas Cabrera, el insigne Físico canario

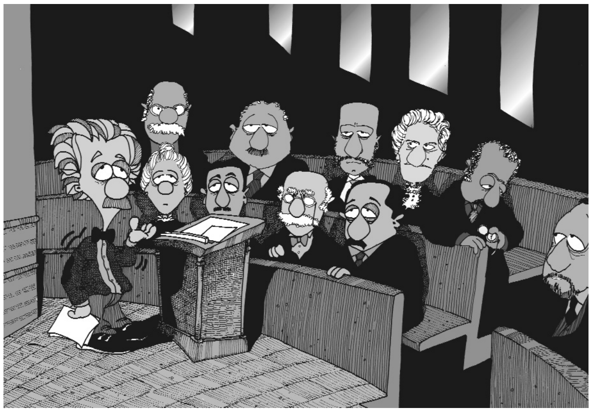
Breves apuntes biográficos de Blas Cabrera

1878. Nace en Arrecife de Lanzarote. En 1881 se traslada a Tenerife.
1890. Estudia bachillerato en el Instituto de Canarias en La Laguna.
1894. Se traslada a Madrid para estudiar Derecho. Entra en el círculo de Cajal, en las tertulias del Café Suizo. Se pasa a los estudios de Física.
1898. Licenciatura en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Central.
1901. Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad Central.
1903. Socio fundador de la Sociedad Española de Física y Química.
1905. Catedrático de Electricidad y Magnetismo en la Universidad Central.
1910. Miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
1911. Director del Laboratorio de Investigaciones Físicas (Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas).
1912. Pensionado de la Junta en Zurich.
1915. Viaje a Sudamérica con Fernando de los Ríos.
1916. Presidente de la Sociedad Española de Física y Química. Viaje a México.
1921. Miembro del Comité de Pesas y Medidas de París.
1923. Publica el libro “Principio de relatividad”. Anfitrión de Einstein en España.
1926. Donación de la Fundación Rockefeller para la creación del Instituto Nacional de Física y Química. Nuevo viaje a México.
1928. Académico de Ciencias de París. Miembro del Comité Solvay.
1929. Rector de la Universidad Central.
1932. Se inaugura el Instituto *Rockefeller* sede del Ins-tituto Nacional de Física y Química del que es su primer Director.
1933. Secretario del Comité Internacional de Pesas y Medidas.
1934. Presidente de la Academia de Ciencias de Madrid. Rector de la Universidad de Verano de Santander.
1936. Ingreso en la Academia Española de la Lengua. La rebelión militar le sorprende en Santander como rector de la Universidad de Verano.

1937. Abandona España y se instala en París.
1941. Se exilia a México. Trabaja en la Universidad Autónoma de México.
1945. Fallece en México el 1 de Agosto.

Primer encuentro (1912)

Blas Cabrera y Einstein se conocieron en 1912 en Zurich, Einstein recién llegado de Praga y trabajando en el ETH y Blas pensionado en el Laboratorio de Pierre Weiss. En los seis meses que permaneció Cabrera en Zurich, su trabajo experimental fue altamente valorado por Weiss y conocido por Einstein, con el que trabó amistad duradera.



Lo aprendido en Zurich hizo de Cabrera un maestro de la experimentación que le llevó al reconocimiento internacional.

A finales de 1922, Einstein emprende un largo viaje hasta Japón, de vuelta visita Palestina y luego, a finales de febrero de 1923, llega a España.

Einstein en España (1923)

En 1923, Blas Cabrera publicó su libro "Principio de relatividad"; en este mismo año se publicó también "Resolución de algunos problemas elementales de Mecánica Relativista restringida" de Puig Adam, producto de su tesis doctoral. Todo ello poco después de que José María Plans diera a conocer su "Mecánica Relativista". Éstos, junto a Rey Pastor y E. Terradas, se convierten en los principales difusores de las teorías de Einstein en España.

A finales de 1922, Einstein emprende un largo viaje hasta Japón, de vuelta visita Palestina y luego, a finales de febrero de 1923, llega a España. Esta es la cronología de su estancia en España:

Barcelona

22 de febrero. Llegada a Barcelona en tren desde Toulon, Francia.

23 de febrero. Visita a la Ciudad Condal.

24 de febrero. Tarde en Tortosa; a las 19:00 horas primera conferencia en el Instituto de Estudios Catalanes (Palau de la Generalitat).

25 de febrero. Visita a Poblet y Tarrasa con el presidente de la Mancomunidad; a las 18:00 horas, segunda conferencia.

26 de febrero. Visita, acompañado de E. Terradas, al rector de la Universidad de Barcelona. Recepción en la Escuela Industrial. Cena (organizada por Rafael Campanals en homenaje a Einstein) en la que se mandó imprimir un menú *relativista* en latín, muestra de buen humor y cariño.

Esteve Terradas

27 de febrero. 12:30 solemne recepción en el Ayuntamiento de Barcelona. Visita en canoa del Puerto de Barcelona. Conferencia en la Academia de Ciencias y Artes. Entrevista con Ángel Pestaña (dirigente de la Confederación Nacional del Trabajo, CNT).

Algunos periódicos dieron cuenta de la entrevista explicando que Ángel Pestaña le informa de la gravedad de la lucha social en Barcelona y que Einstein había contestado, según el Noticiero Universal del 28 de febrero que él también era revolucionario, aunque en el orden científico, y que las cuestiones sociales le preocupaban también muchísimo. La represión la juzgaba más bien hija de la *estupidez* que de la maldad y aconsejó a sus oyentes que leyeran al filósofo Spinoza, cuyas obras son *fuente de muchas cosas buenas y muy oportunos consejos*.

Posteriormente Einstein en ABC declaró:

> dije todo lo contrario de lo que escriben los periódicos.

Al llegar a Alemania Einstein dimitió del Comité de Intelectuales de Sociedad de Naciones; no fue, como se llegó a decir, por la ocupación francesa del Rhur, sino por el problema de Cataluña.

Al llegar a Alemania Einstein dimitió del Comité de Intelectuales de Sociedad de Naciones; no fue, como se dijo, por la ocupación francesa del Rhur, sino por el problema de Cataluña

Madrid

Foto de Einstein y Blas Cabrera. Madrid, marzo 1923

1 de marzo. Salida de Barcelona; llegada a Madrid por la noche.
2 de marzo. Visita al Museo del Prado.
3 de marzo. 18:30, primera conferencia (el Pensamiento general y el método de la Relatividad Especial) presentado por D. Pedro Carrasco en el Aula de Física de la Facultad de Ciencias. Asistieron, junto a hombres de ciencia, matemáticos, físicos y filósofos, varios políticos: el presidente del Gobierno Antonio Maura, el entonces ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes J. Salvatella y el médico Amalio Gimeno. 21:00 horas, banquete *de los doctores* en el Hotel Palace.

El Rey Alfonso XIII con Einstein, Blas Cabrera y Carracido. Madrid 1923

4 de marzo (domingo). 16:30, sesión de la Academia de Ciencias, presidida por S.M. el Rey Alfonso XIII. Nombramiento de Académico Correspondiente. Discursos de Blas Cabrera, A. Einstein, José Rodríguez Carracido (presidente de la Academia) y Joaquín Salvatella. En el acto estuvieron presentes personalidades como Leonardo Torres Quevedo, Cecilio Jiménez Rueda y Eduardo Torroja (matemáticos), Eduardo Hernández Pacheco (geólogo) e Ignacio Bolívar (zoólogo). Té en casa de los Marqueses de Villavieja.

Asistentes (casa de los Marqueses de Villavieja):

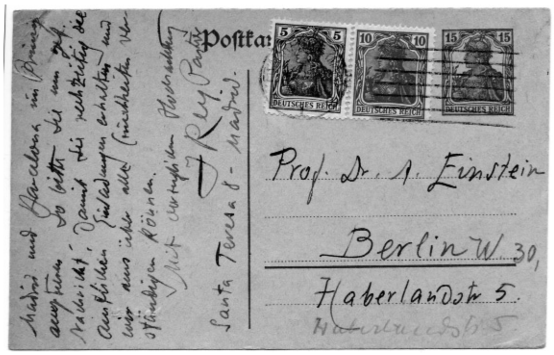
> Los hermanos Kocherthaler, familiares de Einstein, con sus esposas, el Sr. Salvatella, Rodríguez Carracido y Sra., el catedrático Sr. Blas Cabrera; el Dr. Marañón y su esposa, la Srta. de Maeztu, señores de Cossio, Dr. Alberto Jiménez y Sra., los doctores Asúa, Labora, Pittaluga, Aguiar, Hernando y Sacristán; el Dr. Obermayer (alemán), el arquitecto Sr. Ferreras, los artistas Sres. Moreno, Carbonero, Fdez. Bordas y Echevarría y los escritores y periodistas Sres. Ortega y Gasset, Salavarría, Maeztu, Gómez de la Serna, Morente, Rguez. Escalera, Asúa, marqués de Valdeiglesias y Marichalar.

Según ABC Ecos de Sociedad, 6 de marzo de 1923.

5 de marzo. Reunión especial en la Sociedad Matemática y nombramiento de miembro honorario. Asistieron Rey Pastor, director del Laboratorio Matemático, Blas Cabrera, Emilio Herrera, José María Plans y Julio Palacios entre otros (se supone que Puig Adam también asistió). 18:30, segunda conferencia *Pensamiento General y el método de la Relatividad General*.

Foto de Einstein con el Presidente de la Academia de Ciencias Carracido. Madrid 1923

El matemático Rey Pastor



Postal remitida a Einstein por Rey Pastor

6 de marzo. Excursión a Toledo.

...para un habitante de Zurich y Berlín, como es Einstein, tiene que ser inquietante caminar por un pueblo donde, a la ruina romana sucede un gesto visigodo que concluye en una forma árabe encajada en una grave arquitectura castellana. Aquí han venido, prietas y hacinadas, todas esas culturas. La ciudad sólo tiene escape hacia el Cielo...

Ortega y Gasset.

7 de marzo. 12:00 horas, audiencia del Rey y de la Reina Madre. 18:30, tercera conferencia *Problemas actuales de la Relatividad General*.

8 de marzo. 11:30, Universidad Central, acto solemne, nombramiento Doctor Honoris Causa y posterior banquete de honor. 18:30, conferencia en el Ateneo, presidida por D. Gregorio Marañón.

9 de marzo. Por la mañana, visita a El Escorial y Manzanares el Real. Por la tarde, en la Residencia de Estudiantes, recepción y breve conferencia–lección presentada y traducida por Ortega y Gasset.

10 de marzo. Visita al Museo del Prado. Almuerzo con el embajador alemán.

11 de marzo (domingo). Visita al Museo del Prado (¡y tercera!).

Einstein recibió la cantidad de 3.500 de las antiguas pesetas por las tres conferencias oficiales que impartió en Madrid, suma que equivalía al salario anual de un profesor universitario español.

Einstein recibió 3.500 pesetas por las tres conferencias oficiales que impartió en Madrid, suma que equivalía al salario anual de un profesor universitario español.

Zaragoza

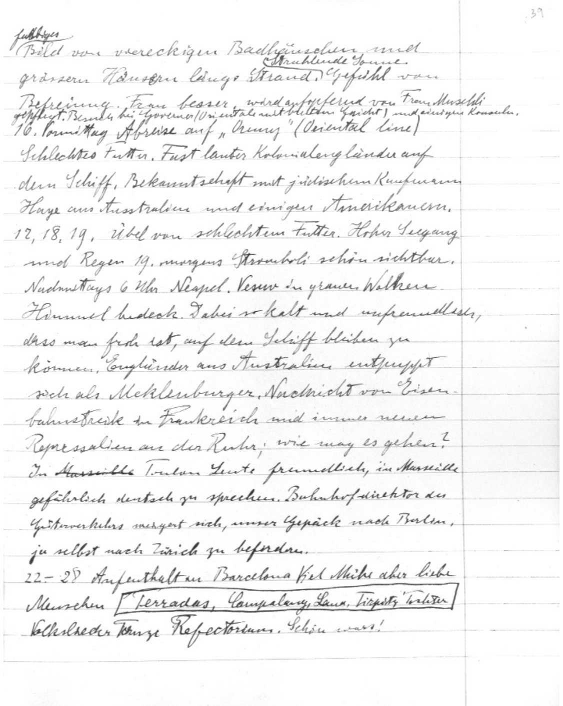
12 de marzo. Viaje a Zaragoza. Llegada a Zaragoza. 18:00, conferencia en la Academia de Ciencias. Fiesta en el Consulado alemán.

13 de marzo. Por la mañana, conferencia a los alumnos de la Facultad de Ciencias. Al mediodía, visita a la Universidad y posterior banquete en el Centro Mercantil. Visita a la ciudad: el Pilar, la Lonja y el

Castillo de la Aljafería. Cena en el Teatro Principal con representación de *La Viejecita*.

14 de marzo. Por la tarde salida en el *rápido del norte* para Bilbao, invitado por la Sociedad de Estudios Vascos. Otra versión es que salió directamente para Barcelona y Berlín.

Diario de Einstein


39
Bild von viereckigen Badhäuschen und
grösseren Häusern längs Strand. Strahlende Sonne. Gefühl von
Befreiung. Frau besser, wird aufopfernd von Frau [illegible]
gepflegt. Besuch bei Governor (Orientale mit [illegible] Gesicht) und einigen Konsuln.
16. Vormittag Abreise auf „Ormuz" (Oriental line)
Schlechtes Futter. Fast lauter Kolonialengländer auf
dem Schiff. Bekanntschaft mit jüdischem Kaufmann
Haye aus Australien und einigen Amerikanern.
12, 18, 19. übel von schlechtem Futter. Hoher Seegang
und Regen 19. morgens Stromboli schön sichtbar.
Nachmittags 6 Uhr Neapel. Vesuv in grauen Wolken
Himmel bedeckt. Dabei so kalt und unfreundlich,
dass man froh ist, auf dem Schiff bleiben zu
können. Engländer aus Australien entpuppt
sich als Mecklenburger. Nachricht von Eisen-
bahnstreik in Frankreich und immer neuen
Repressalien an der Ruhr; wie mag es gehen?
In ~~Marseille~~ Toulon Leute freundlich, in Marseille
gefährlich deutsch zu sprechen. Bahnhofdirektor des
Güterverkehrs weigert sich, unser Gepäck nach Berlin,
ja selbst nach Zürich zu befördern.
22.–28 Aufenthalt in Barcelona Viel Mühe aber liebe
Menschen Terradas, Campalans, Lana, Tirpitz' Tochter
Volkslieder Tänze Refectorium. Schön war's!

Página del Diario de Einstein
referente a su visita a España

22-28 de febrero. Estancia en Barcelona. Mucha fatiga, pero gente amable (Terradas, Campanals, Lana, la hija de Tirpitz), canciones populares, bailes, comida. ¡Ha sido agradable!

3 de marzo. Llegada a Madrid [El dato es inexacto: llega el propio día 1]. Partida de Barcelona, cálida despedida. Terradas, cónsul alemán y la hija de Tirpitz, etc.

4 de marzo. Paseo en coche con los Kocherthaler. Escribí una respuesta al discurso de Cabrera en la Academia. Por la tarde, una reunión en la Academia con el rey como presidente. Hermoso discurso del presidente de la Academia. Después, té con una aristócrata señorita. Por la tarde, en casa, sin embargo, totalmente católico.

5 de marzo. Por la tarde, reunión de la Sociedad de Matemáticas. Miembro honorario. Discusión sobre la relatividad general. Comida con Kuno Kocherthaler; visita a Cajal, maravilloso viejo. Seriamente enfermo. Invitación para cenar por Herr Vogel. Amable, humorístico, pesimista.

6 de marzo. Viaje a Toledo camuflado por muchas mentiras. Uno de los días más hermosos de mi vida. Cielo radiante. Toledo es como un cuento de hadas. Nos guía un entusiasta viejo que al parecer ha producido algunos trabajos importantes sobre El Greco. Las calles y la plaza del mercado, vista de la ciudad, el Tajo con algunos puentes de piedra, cuestas de piedra, agradables planicies, catedral, sinagoga. Puesta de sol con resplandecientes colores en nuestro regreso. Un pequeño jardín con una vista cerca de la sinagoga. Una magnífica pintura del Greco en una pequeña iglesia (entierro de un noble), entre las cosas más profundas que vi. Un día maravilloso.

7 de marzo. Doce en punto. Audiencia con el rey y la reina madre. Ella revela su conocimiento de la ciencia. Se ve que nadie le dice a ella lo que él está pensando. El rey, sencillo y digno, me produjo admiración. Por la tarde, la tercera conferencia en la Universidad. Auditorio atento que seguramente no comprendió casi nada debido a la dificultad de los problemas tratados. Embajador y familia, espléndido, gente íntegra. La fiesta, penosa, como de costumbre.

8 de marzo. Doctor honorífico. Auténticos discursos españoles acompañados de fuego de bengalas. El embajador alemán habló sobre las relaciones hispano–alemanas, largo discurso, pero el contenido era bueno, alemán de cabo a rabo. Nada retórico. Después, una visita a estudiantes de técnica. Hablar y hablar sólo, pero bienintencionado. Por la tarde, una conferencia. Seguidamente, una velada de música en casa de Kuno Kocherthaler. Un artista (director del conservatorio), Bordas, tocó el violín espléndidamente.

9 de marzo. Viaje a las montañas y Escorial. Un día maravilloso. Por la tarde, una recepción en la Residencia, con discursos por Ortega y por mí.

10 de marzo. Prado (contemplación principalmente de obras de Velázquez y Greco). Visitas de despedida. Comida con el embajador alemán. Pasé la tarde con Lina Kocherthaler y los Ullmann en una primitiva y diminuta sala de baile. Tarde alegre.

11 de marzo. Prado (magníficas obras de Goya, Rafael, Fra Angélico).

12 de marzo. Viaje a Zaragoza.

Conferencias Solvay

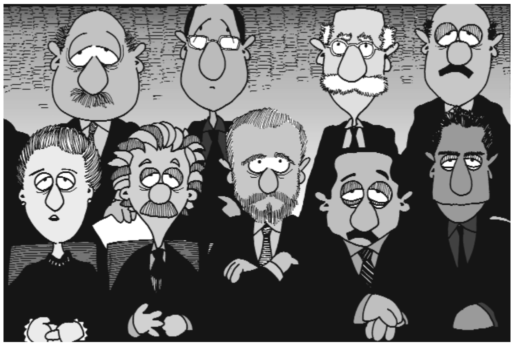
En 1928, a Cabrera le llega el momento cumbre de su carrera científica. Y fue al formar parte del Comité Científico de las *Conferencias Solvay* propuesto por Marie Curie y Albert Einstein. Estas conferencias, que se celebraban cada tres años, habían surgido, a partir de 1911, a propuesta de los físicos Max Plank y Walter Nernst. El belga Ernest Solvay, creador del procedimiento para la fabricación del bicarbonato sódico y hombre de gran fortuna, fue quien subvencionó dichas conferencias.

Cada conferencia trataba de un tema específico. La V Conferencia, en 1927, trató el tema *Los electrones y los fotones* y fue muy famosa por las interpretaciones opuestas, de la recién creada mecánica cuántica, de Bohr y Einstein.

En 1928 Cabrera fue elegido para formar parte del Comité Científico de las Conferencias Solvay propuesto por Marie Curie y Albert Einstein.

A la vez que Blas Cabrera fue elegido miembro del Comité Solvay, también lo eligieron miembro de la Academia de Ciencias de París a propuesta de Langevin y M. de Brogie.

En la VI Conferencia Solvay, en 1930, el tema que se trató fue las *Propiedades magnéticas de la materia*; Cabrera tuvo allí importantes contribuciones.



Congreso Solvay, 1930

Blas Cabrera siguió perteneciendo al Comité Solvay durante la preparación de la VII Conferencia, que se reunió en 1933 con el tema *Estructura y propiedades de los Núcleos Atómicos*.

A pesar de que Cabrera participó junto a Einstein en la preparación de la Conferencia, Albert no pudo asistir a la misma ya que se había ido definitivamente a Estados Unidos.

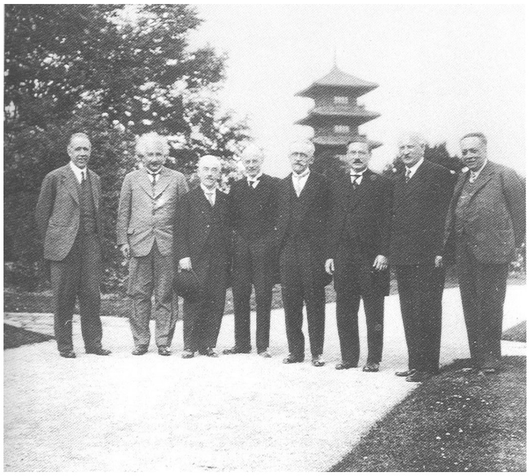


Foto realizada por la Reina Elizabeth de Bélgica.
Preparación del Congreso Solvay

Congreso Solvay, 1933

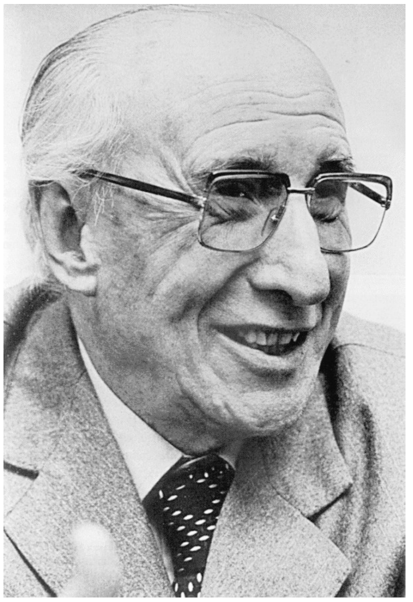
También Cabrera trabajó en la organización de la VIII Conferencia Solvay, cuyo tema iba a ser *Partículas elementales y sus interacciones* a celebrar en 1939, pero fue suspendida a causa de la Segunda Guerra Mundial.

Fichaje estrella. 1933

Fernando de los Ríos, ministro de Instrucción Pública del gabinete de Azaña, había presentado su Proyecto de Ley de Reforma Universitaria el 17 de marzo de 1933 con ánimo, entre otras cosas, de *propiciar una red universitaria coherente con estas tres finalidades: crear buenos profesores, investigadores competentes y favorecer la difusión pública de cuanto constituye el organismo de la cultura*. En estas coordenadas irrumpe el *azar Einstein*. Einstein anda suelto, puede ser una gran ocasión para ficharlo.

En el Proyecto de Ley de Reforma Universitaria el 17 de marzo de 1933, Fernando de los Ríos intenta fichar a Einstein, pero por la inestabilidad de España, éste se queda en EEUU.

Todo se enmaraña en una densa correspondencia entre el embajador español Ayala, el contacto de Einstein, profesor Yahuda y el propio Einstein. Al final, Einstein se fue y se quedó en EE.UU. Sin duda, a todo ello ayudó la inestabilidad de los gobiernos en España.



Santaló trabajó en la Universidad de Princeton (donde vivía y trabajaba Einstein) a finales de los años cuarenta

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabrera, B.: *Principio de relatividad*, Edición facsímil presentada por J.M. Sánchez Ron, Ed. Alta Fulla, Barcelona.

Glick, T.F. (1986): *Einstein y los españoles. Ciencia y sociedad en la España de entreguerras*, Alianza Editorial.

González de Posada, F. (1994): *Blas Cabrera ante Einstein y la relatividad*, Amigos de la cultura científica, Madrid.

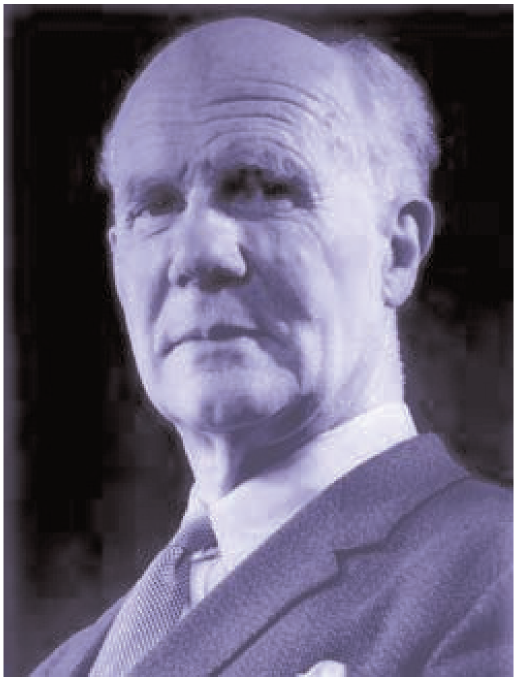
Romero de Pablos, A., Cabrera, Moles, Rey Pastor: *La europeización de la ciencia. Un proyecto truncado*, Nivola.

Sánchez Ron, J.M. (1999): *Cincel, martillo y piedra. Historia de la ciencia en España (siglos XIX y XX)*, Taurus.

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 105-108

Los orígenes de la matemática industrial y los métodos estadísticos

Hace setenta años, en 1935, veía la luz en Londres el libro *The application of statistical methods to industrial standardisation and quality control* (*La aplicación de los métodos estadísticos a la normalización industrial y al control de calidad*), editado por la British Standards Institution y escrito por Egon Pearson (1895-1980). Su autor era hijo del más famoso Karl Pearson (1857-1936), discípulo predilecto del fundador de la "escuela científica" de biometría, Francis Galton (1822-1911).



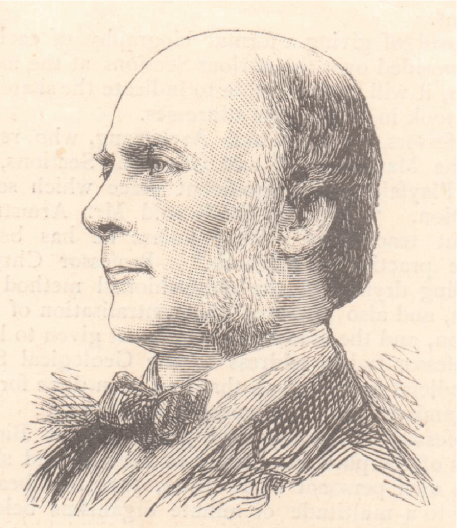
Egon Pearson (1895-1980)

Galton, yerno de Darwin, llevó adelante el proyecto de encontrar instrumentos cuantitativos para el estudio de la variabilidad genética. Con ideas como la *correlación* (que consideraba una versión débil de la idea de causa), Galton y sus seguidores consiguieron introducir por primera vez el pensamiento numérico en un campo refractario a él hasta entonces, la historia natural. Pero en realidad, fueron mucho más allá, puesto que los instrumentos matemáticos introducidos por los biómetras —las técnicas de inferencia estadística— demostraron pronto que eran potencialmente aplicables más allá de las ciencias de la vida, a todos los campos de la ciencia experimental y de la técnica. Precisamente hace 80 años fue publicado *Statistical methods for the research worker* (1925), un hito de la historia de la ciencia, el libro que difundió al conjunto de la comunidad científica los logros de los biómetras, escrito por el más joven y brillante discípulo, Ronald Fisher (1890-1962).

Fisher desarrolló una nueva disciplina, la genética de las poblaciones, cuya motivación de fondo era lograr una síntesis entre la teoría de la selección natural de Darwin y los descubrimientos de Mendel en el campo de la herencia genética. Durante su carrera, se ocupó también de problemas aplicados de agronomía, mostrando así la utilidad de estos nuevos instrumentos, no sólo en la investigación de algunos relevantes problemas científicos teóricos sino también en las aplicaciones prácticas de interés económico de la biología. La obra de Fisher nos acerca así a dos aspectos (uno genuinamente teórico, otro de carácter metodológico) de la ciencia del siglo XX, que mantienen hoy plena actualidad y son muy controvertidas: por una parte, las bases de la teoría de la evolución y su confirmación empírica y, por otra, el uso y abuso de la estadística en campos como la agricultura, la medicina y la investigación biotecnológica. Sin embargo, preferimos en esta ocasión recordar una obra semidesconocida y aparentemente marginal en el campo de la matemática: ¿dónde reside su interés?

Ana Millán Gasca
hace.suma@fespm.org

Pues bien, la publicación del libro de Pearson hijo es un evento que nos permite sondear los orígenes de la "matemática industrial". Es éste un aspecto de la cultura matemática típico del mundo del siglo XX y que sigue mostrando una gran vitalidad en Estados Unidos y en otros países industrializados, en términos de salida profesional de los licenciados y doctores en matemáticas, en términos de amplitud de los instrumentos matemáticos aplicados y de problemas abarcados y —dejando libre el terreno de prejuicios sobre lo que son "verdaderas" matemáticas— en términos de estímulo y motivación de progresos teóricos en matemáticas.



MR. FRANCIS GALTON

Estadística y control de calidad

El libro de Pearson se ocupa de un tema cuya importancia no ha cesado de aumentar en el mundo industrial y que, hoy en día, no sólo está en el centro de la vida de empresa sino que tiene un papel cultural mucho más amplio: se trata de las ideas de *calidad* y de *control de calidad*, que son consideradas una medida de la eficiencia y de la racionalidad entendidas en sentido "moderno",

La aplicación de los métodos estadísticos a la normalización industrial y al control de calidad *de Pearson se ocupa de un tema cuya importancia no ha cesado de aumentar: se trata de las ideas de* calidad *y de* control de calidad*, que, hoy en día son consideradas una medida de la eficiencia y de la racionalidad.*

es decir, según un punto de vista que marca una ruptura con la concepción de la empresa clásica de las relaciones productor--cliente y directivo/propietario-trabajador. La fe desmedida en este enfoque —que hoy se quiere aplicar a la administración pública, a los hospitales y hasta a los centros de enseñanza— se debe, no exclusivamente, pero si fuertemente a la existencia de los métodos estadísticos de control de calidad.

De hecho, y quizá pueda resultar chocante, el problema del control de calidad en las fábricas fue una motivación importante en los primeros pasos de la estadística. Un asiduo participante en las discusiones en el laboratorio de Karl Pearson en Londres a principios del siglo XX era William Gosset (1876-1937), mejor conocido bajo el pseudónimo Student que usaba para firmar sus memorias científicas, un químico y matemático inglés que trabajaba para la empresa cervecera Arthur Guinness Son and Company (inicialmente en Dublín y luego en la capital británica). Gosset, que se ocupaba de analizar en el laboratorio muestras de cerveza para controlar el producto, deseaba simplificar su trabajo desarrollando a tal fin criterios científicos. En este sentido, aunque iniciara sus investigaciones en solitario, era hijo de su época: en torno al cambio de siglo era cada vez más evidente que la industria, la distribución, los sistemas de transporte y las redes de comunicación presentaban problemas de control de proceso, de configuración, de sistema, que debían ser analizados independientemente de los aspectos mecánicos, químicos o eléctricos.

En los mismos años, en Estados Unidos, entre los científicos e ingenieros empleados en los laboratorios industriales de la empresa de telégrafos y teléfonos AT&T (American Telegraph and Telephone Company) y de la Western Electric (que manufacturaba los productos para los clientes AT&T), que en 1925 fueron reorganizados bajo el nombre de Bell Telephone Laboratories, se desarrolló una precoz comprensión de la importancia que revestían los aspectos que podríamos llamar *operativos* o *económico-organizativos* para garantizar el éxito empresarial. Los ingenieros se ocupaban de tendido de cables y del desarrollo técnico, los empleados y dirigentes de contabilidad y problemas financieros, pero existían otros problemas en los que se jugaban el futuro de la impresa: la gestión del tráfico telefónico, la medida del rendimiento y de la calidad, la satisfacción del cliente. En particular, en los Laboratorios Bell fueron desarrollados algunos de los primeros estudios de teoría de colas, por parte de Edward C. Molina (n. 1877), que estudió el papel de la distribución de Poisson en este ámbito, y de Thornton C. Fry (n. 1892), autor de *Probability and its engineering uses* (1928). Además fue desarrollada en términos generales la concepción moderna del control estadístico de calidad, presentada en varios artículos en la revista «Bell System Technical Journal» y en el libro *Economic control of quality of manufactured products* (1931) del fisico Walter A. Shewhart (1891-1967).

La carrera de Pearson se había desarrollado al inicio bajo la sombra del gran prestigio y fuerte personalidad del padre, y había sufrido además a causa de la controversia entre este último y Fisher. Sin embargo, a partir de mediados de los años veinte, gracias a su trabajo en colaboración con el especialista polaco Jerzy Newman (1894-1981) sobre los test de hipótesis (desarrollado en parte bajo la influencia de las ideas Gosset, con quien mantenía una estrecha correspondencia), había conquistado una gran reputación como estadístico teórico. En 1931 hizo un viaje a los Estados Unidos y visitó a Shewhart en Nueva York; y Shewhart acudió al año siguiente a Londres. En los años sucesivos el problema del control de calidad en la producción industrial de material bélico fue la motivación de nuevos estudios, que culminaron en los famosos trabajos sobre el análisis secuencia de Abraham Wald (1902-1950), un científico austriaco emigrado a los Estados Unidos.

Estadística matemática y control de proceso

La “verificación” de los productos defectuosos es un problema clásico de las fábricas mecanizadas, e incluso en la manufactura militar pre-industrial se exploró la posibilidad del uso del muestreo a este fin. La originalidad de Shewhart reside en el hecho de haber introducido una visión abstracta del problema general, basado sobre la idea de que cualquier sistema de producción —un conjunto integrado de máquinas en un proceso que lleva a obtener un cierto artículo— es un sistema aleatorio, esto es, más allá de la sofisticación tecnológica, existe una inevitable variabilidad de las diferentes características del producto. Sobre estos supuestos introducía una idea de “control” en el sentido típico del mundo de la técnica de “plegar” a los objetivos humanos (funcionales o económicos) un proceso; en este caso, no pretender eliminar la variabilidad, sino mantener estables las características estadísticas de un artículo, de manera que sólo en el caso de que se registre una variabilidad anómala se puede decidir una intervención técnica para encontrar y eliminar la causa física que compromete la calidad del producto. A este tipo de enfoque se sumó en periodos sucesivos otros elementos, como por ejemplo el interés no sólo por el punto de vista del productor-ingeniero, sino también del cliente-consumidor.

Otros escenarios y puntos de vista en la matemática industrial anterior a la Segunda Guerra Mundial

El interés por las aplicaciones industriales de la probabilidad y de la estadística no era una exclusiva del mundo anglosajón. El ingeniero francés Émile Cheysson (1836-1910), primer profesor de economía industrial de la Escuela de Ingenieros de Minas de París, fue uno de los primeros que había pensado que este tipo de métodos resultarían útiles para resolver problemas como la determinación de tarifas o la determinación de salarios, los llamamos problemas de decisión en terminología actual. Cheysson era consciente de que la estadística descriptiva no bastaba e intentó poner a punto técnicas gráficas que permitieran pasar de la estadística del “estado pasivo” a la del “estado activo”, usando sus palabras. En lenguaje moderno, se planteaba la exigencia de construir una inferencia estadística, precisamente el problema resuelto con gran éxito por los biómetras.

Iniciado el siglo XX, algunas contribuciones a la teoría de colas y al control estadístico de calidad aparecieron en revistas matemáticas en Alemania y en la Unión Soviética. En ambos países, como es bien sabido, se trabajaba en aquella época en la axiomatización del cálculo de probabilidades. Un interés cultural por este tema venía en ambos casos al encuentro de la realidad industrial y técnica: extraordinariamente avanzada en Alemania, en pleno fermento en la Unión Soviética donde se afrontaba el desafío del desarrollo industrial y la organización científica del trabajo. Entre los trabajos pioneros de la teoría de colas se cuentan los de la matemática alemana Hilda Geiringer (1893-1973) y de Aleksandr Y. Khinchin (1894-1959), del 1932. En Alemania fue publicado en 1927 el libro *Aplicaciones de la estadística a los problemas de la producción de masa*, escrito por Richard Becker, Hubert Plaut e Iris Runge.

Sin embargo, como han observado los historiadores franceses Denis Bayart e Pierre Crépel (1994), en el mundo industrial “continental” existía una menor apertura a la “visión estocástica de los procesos industriales”, porque ésta chocaba con la visión mecánica de los ingenieros industriales de tradición europea, que eran ingenieros mecánicos con una formación matemática y científica que condicionaba su *forma mentis*. Es interesante citar el ejemplo de Henri Le Chatelier (1850-1936), un líder de la ingeniería francesa de aquellos años. Defensor decidido de las ideas innovadoras del taylorismo y de la ingeniería mecánica estadounidense, sostenía la necesidad de enriquecer la formación teórica de los ingenieros franceses con un acercamiento a la realidad concreta de las empresas. Sin embargo, rechazaba radicalmente la idea de recurrir a explicaciones basadas sobre el aleatorio tanto en la esfera práctico-técnica como en la esfera científica.

Por otra parte, diferencias de punto de vista similares se registra en aquellos años también en otros sectores de aplicación de las matemáticas, como la biomatemática. Así, por ejemplo, en un artículo publicado en la revista *Biometrica* en 1927 Egon Pearson criticó los estudios matemáticos de Vito Volterra (1860-1940) sobre la dinámica de poblaciones analizando la correspondencia entre los datos estadísticos sobre la pesca en el Adriático que los habían motivado y la ley sobre la oscilación de las poblaciones establecida por Volterra a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. En lo que se refiere específicamente a la matemática industrial, probablemente estaban menos condicionados por el punto de vista tradicional los ingenieros industriales eléctricos (una especialidad en pleno desarrollo), como los ingenieros de los Laboratorios Bell y, en Europa, el holandés Baltasar van der Pol (1889-1959), director de los laboratorios de la Philips), así como los matemáticos de la generación siguiente a Volterra. Estos profesionales se mostraban más abiertos y libres de prejuicios respecto a los instrumentos matemáticos que podían ser usados en las aplicaciones.


Hilda Geiringer (1893-1973)

El desarrollo de la matemática industrial en la Unión Soviética es un caso de extremo interés y poco estudiado. Retomaremos el tema en otra ocasión, pues tiene que ver con otro filón de la matemática industrial, es decir, el de la optimización, que aunque cuenta con algunos precursores históricos notables como Gaspard Monge, se ha desarrollado esencialmente en el siglo XX (hemos hecho una breve referencia a estas cuestiones en *Suma* 46 “Las matemáticas entre la paz y la guerra”). Pero no queremos acabar aquí sin subrayar que, entre los matemáticos que hemos citado, aparecen dos mujeres. La primera, Geiringer, discípula y futura mujer de Richard von Mises (1883-1953), se ocupó de la teoría de colas porque trabajó un tiempo para la empresa pública de Correos y telégrafos alemana. La segunda era hija del famoso matemático Carl Runge (1856-1927), estudioso de análisis numérico (que en 1904 ocupó la primera cátedra alemana de matemática aplicada, creada en Göttingen por iniciativa de Felix Klein); uno de sus artículos sobre la “verificación” de calidad en los artículos de la producción en serie fue publicado en la revista técnica del consorcio Osram GmbH (fundado en 1919 por tres empresas que producían bombillas, la Siemens, la AEG y la Auer; el nombre deriva de osmio y wolframio). Geiringer, que era una judía austriaca, emigró con su marido a los Estados Unidos en 1933, el año de la subida al poder de Hitler. El nazismo, lo sabemos, aniquiló la cultura científica y técnica del área alemana; menos se suele pensar en el paso atrás que supuso para la carrera científica de mujeres como las dos citadas y, en general, para el acceso de las mujeres a la investigación matemática. ■

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 109-117

Escher II: Las matemáticas para pensar

Los pintores, como los matemáticos, trabajan con figuras. Clásicamente las figuras se caracterizan por su forma y su tamaño. Pero a partir del siglo XVIII empezó a surgir dentro de las matemáticas una forma nueva de pensar las figuras geométricas, en la que forma y tamaño resultan propiedades irrelevantes y son otros los aspectos que se estudian. A esta manera de mirar las figuras se la conoce por el nombre de topología. La topología nació en el siglo XVIII, concretamente de la mano de Leonard Euler, creció, muy despacio, a lo largo del siglo XIX y se hizo mayor de edad con Henri Poincaré a principios del siglo XX. De hecho Poincaré, que dedicó muchos años de su vida a desarrollar la topología marcando, de alguna manera, las líneas generales que durante casi cincuenta años siguió esta disciplina, fue capaz de darle una fuerza tal como herramienta, que en poco tiempo se convirtió en una de las piedras angulares de la matemática y física del siglo XX, afectando con ello también profundamente la manera en la que nuestra cultura mira a su alrededor. Por eso no es sorprendente encontrar también rastros de esta nueva manera en la obra de muchos pintores y artistas gráficos de la primera mitad del siglo XX. Curiosamente, muchos de estos artistas han conseguido que mucha gente, sin saberlo, se ponga a hacer topología en mitad de una galería de arte. Probablemente el caso más notorio sea el de Escher con sus reflexiones sobre las propiedades, posibles o imposibles, de las formas. Pero empecemos por el principio. No podemos hablar de cómo ilustra la obra de Escher tal o cual aspecto del hacer de la topología, si antes no definimos lo que es la topología. Así pues, ¿qué es la topología?

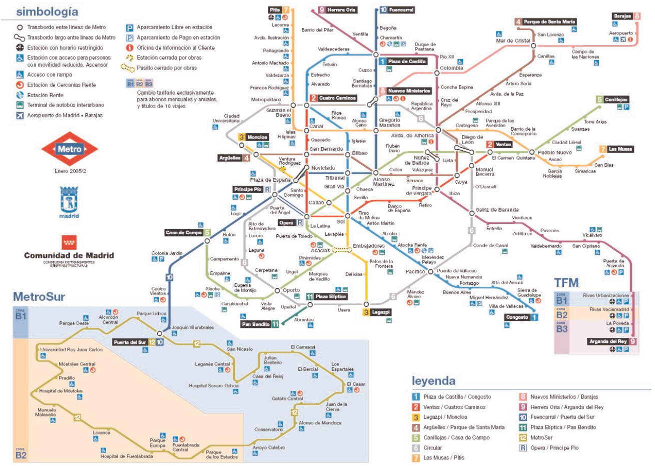


Figura 1. Plano de la Red del Metro de la Comunidad de Madrid

Este plano es un ejemplo espléndido de la topología en acción e ilustra el tremendo poder de esta rama de las matemáticas. Si tomamos un mapa a escala de la ciudad de Madrid, y lo superimponemos a este plano de la red del metro, nos daremos cuenta no sólo de que no casan el uno con otro, sino que, además, el plano del metro no se ajusta en absoluto a la realidad física de la red de vías salvo en dos aspectos: respeta el orden

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

en que las paradas están situadas en la red y las conexiones entre las distintas líneas. Todos los demás detalles les ignora y, sobre todo, no es fiel ni a distancias ni a direcciones. Ni está dibujado a escala, ni reproduce la trayectoria real del entramado. Sin embargo, esto no supone ningún problema para los viajeros. Que donde en el mapa aparece una línea recta, en el recorrido real haya diez curvas, o que la distancia entre dos paradas sea más o menos larga de lo que el plano parece indicar, es irrelevante a la hora de guiarse por el mapa para viajar en el metro por Madrid: la única información importante a la hora de programar un trayecto, la única información que es necesario que el plano dé con toda exactitud, es el nombre de los lugares donde subir y bajar y el nombre de las paradas en las que hacer trasbordo y cambiar de línea. Y esos dos detallos son, precisamente, los que se garantizan al respetar el orden y las conexiones en la gráfica (una gráfica es un conjunto de puntos o vértices y de líneas que los unen) que representa la red del Metro de la Comunidad de Madrid.

Si imprimiésemos este plano sobre una hoja de goma elástica y le fuésemos deformando hasta hacerle coincidir con la forma real del entramado de las vías, la configuración esencial de la gráfica no cambiaría, y el plano no resultaría ni más ni menos útil para los viajeros que antes. Lo mismo sucede con cualquier gráfica que dibujemos sobre un soporte elástico. Podemos estirar, podemos contraer, podemos doblar, pero mientras no rompamos nada, no alteraremos su configuración y se tratará, esencialmente, de la misma gráfica.

En el lenguaje de las matemáticas esta característica se describe diciendo que la configuración de una gráfica es una *propiedad topológica*, o bien que las gráficas son *objetos topológicos*. Con ello queremos decir que las gráficas son objetos que podemos estirar, contraer y deformar, y mientras no las rompamos ni les añadamos puntos o líneas nuevas, su configuración permanecerá inalterable.

Siempre que nos encontremos ante cualquier situación en la que la única información relevante sea cuántos objetos hay y cómo están conectados, un modelo topológico será el que mejor describa la situación. El plano de cualquier medio de transporte público, los circuitos eléctricos, los circuitos neuronales, los *chips* de ordenador, las redes telefónicas o la red Internet, son ejemplos de objetos topológicos.

La primera persona que resolvió un problema matemático haciendo topología fue el suizo Leonard Euler en el siglo XVIII. Mientras Euler vivía en San Petersburgo, trabajando como matemático en la corte de Catalina la Grande, llegaron a sus oidos noticias del siguiente problema: En aquel entonces, el río Pregel tenía un curso muy sinuoso al atravesar Königsberg y parece ser que siete puentes atravesaban su recorrido por la ciudad (que entonces era parte de Alemania, concretamente de Prusia y hoy lo es de Rusia con el nombre de Kaliningrad). Cuatro de ellos unían ambas orillas con la pequeña isla de Kneiphof (dos con cada orilla), un quinto puente unía Kneiphof con una segunda isla más grande y los puentes sexto y séptimo unían ésta con la tierra firme de ambos lados.

Cuenta la historia que uno de los entretenimientos favoritos de los habitantes de Königsberg era discutir el recorrido a seguir por una persona para dar un paseo por el pueblo cruzando una única vez cada uno de los siete puentes. Para empezar, nadie sabía si ese paseo era posible o no, pues nadie lograba diseñar un trayecto que recorriese una y sólo una vez cada uno de los siete puentes. En 1735 Euler presentó una memoria ante la Academia Rusa de San Petersburgo, en la que demostraba la imposibilidad de llevar a cabo un paseo por el pueblo de Koenisberg siguiendo las normas establecidas: pasar una vez, y solo una, por cada puente. Lo primero que hizo Euler fue llevar a cabo lo que podríamos llamar una *tarea de limpieza*: deshacerse del exceso de información seleccionando los datos esenciales de la situación e ignorando los detalles que sólo contribuyen a añadir ruido mental y confusión. La solución del problema no depende de la forma de los trozos de tierra ni de la distancia entre ellos, concluyó, sino de que estén o no conectados por puentes, unos puentes cuya forma y tamaño también resulta irrelevante. Lo único que importa es cuántos trozos de tierra hay, y si estan conectados entre sí o no. Llevando a cabo, muy elegantemente, lo que en matemáticas llamamos un proceso de abstracción, Euler simplificó la cuestión hasta reemplazar la tierra por puntos, los puentes por líneas que unen los puntos, y la situación por una gráfica.

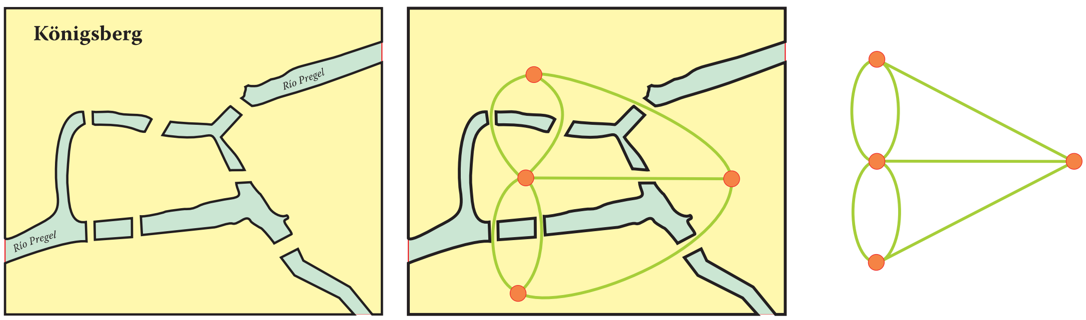


Figura 2. Los Puentes de Königsberg

Una vez que tenemos la gráfica, podemos, como hizo Euler, traducir el problema de Königsberg en una pregunta sobre la gráfica, y olvidarnos de puentes y río. ¿Podemos recorrer esta gráfica de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel? (recorrer una gráfica, consiste en pasar por todas sus líneas una sola vez). Antes o después, caeremos en la cuenta de que la respuesta está en el número de lineas que concurren en cada vértice, y por lo tanto sólo depende de la configuración de la gráfica. En efecto, supongamos que hay un recorrido que cumple con los requisitos, y que además empieza y acaba en el mismo punto. Puesto que cada vez que llego por una línea a un vértice tengo la posibilidad de salir de él por otra línea que no ha sido utilizada aún, las líneas que concurren en cada vértice puden ser emparejadas. Dicho con otras palabras, en todos los vértices tendrá que concurrir un número par de líneas.

Y lo mismo ocurrirá en todos los casos que queramos construir una gráfica se puede recorrer empezando y acabando en un mismo punto solo si en cada vértice de la gráfica concurren un número par de líneas. Y si la gráfica contiene, como mucho, dos vértices en los que concurren una cantidad impar de líneas, entonces podremos recorrerla, pero no podemos terminar el recorrido en el mismo punto donde empezamos. En su memoria Euler demostró que el comportamiento que acabamos de describir es, de hecho, una regla general que ocurre siempre. Se trata de lo que en matemáticas llamamos un teorema: una verdad.

La solución de Euler es de alguna manera geométrica, porque se basa en propiedades de las figuras involucradas: las orillas, las islas y los puentes. Pero no en las propiedades usuales en geometría, el tamaño y la forma, sino de algo tan impreciso como que estén o no adheridas unas a otras. Aunque la idea de Euler de prestar atención a otras propiedades de las figuras distintas de tamaño y forma (como, por ejemplo, la configuración que forman sus adherencias) era brillante, y de hecho, abrió una nueva puerta en el edificio de las matemáticas, la puerta de la Topología. En el siglo XVIII las matemáticas estaban fundamentalmente dedicadas al desarrollo del cálculo y al análisis y el nacimiento de la nueva rama pasó bastante despercibido.

Ya en el siglo XIX, el físico Kirchhoff (que, curiosamente había nacido en Königsberg, en 1824) se dió cuenta de que los problemas relacionados con la ramificación y el entrelazado de cables en los circuitos eléctricos eran problemas que podían resolverse mejor siguiendo la estrategia de Euler (describir los circuitos de conexiones y cables mediante gráficas de puntos y líneas y estudiar las propiedades de esas gráficas), y con ello dio un empujón muy grande a la topología, que fue creciendo a lo largo del siglo XIX poco a poco, pues llevó mucho tiempo entender y poner en palabras en qué consistía la nueva manera de mirar y de hacer. Aunque las ideas básicas de la topología son muy simples, trabajar con ellas es muy difícil. ¿Como medir, comparar o relacionar figuras y situaciones si no importan tamaños ni formas? ¿Cómo describir y representar los resultados de nuestras observaciones?

A la topología se la conoce por muchos nombres, las matemáticas de la plastilina, las matemáticas de la goma elástica, las matemáticas de los espejos de feria. Son las matemáticas de la continuidad, las matemáticas que estudian las propiedades de las figuras que permanecen inalterables bajo los cambios graduales.

A la topología se la conoce por muchos nombres, las matemáticas de la plastilina, las matemáticas de la goma elástica, las matemáticas de los espejos de feria. Son las matemáticas de la continuidad, las matemáticas que estudian las propiedades de las figuras que permanecen inalterables bajo los cambios graduales, cambios que, como el estirar una superficie elástica sobre la que hemos dibujado el plano de una red de metro, tienen lugar poco a poco y sin alteraciones dramáticas ni súbitas. Alteraciones dramáticas y súbitas en matemáticas se llaman discontinuidades. Los cambios pausados y graduales, contínuos. Un alfarero sentado en un torno va transformando de manera contínua una bola de barro en un plato, un vaso o un jarrón. No importa el tamaño ni la forma que tenga el objeto. Si se puede producir a partir de una bola de una forma continuada, para la topología se trata de una misma cosa. Un plato, un vaso o un jarrón son objetos topológicamente equivalentes. Para producir una taza con asa a partir de una bola de barro, el alfarero tendrá que producir un agujero, tendrá que romper adherencias. No podrá hacerlo sin cortar, sin discontinuidades, sin cambios abruptos. Pero una vez que tenga hecho el agujero en la bola, una vez que tenga una rosquilla entre las manos, podrá sin problema y con suavidad convertirla en una taza, un cilindro o el marco de un cuadro, todos ellos objetos equivalentes desde el punto de vista topológico.

La topología es un tipo de geometría, puesto que trabaja con figuras, pero una geometría en la que tamaños y formas no se tienen en cuenta. Una goma elástica, de las que utilizamos en el pelo, puede ser deformada de manera contínua en infinidad de polígonos distintos: triángulos, paralelogramos, etc. Todas esas formas geométricas para la topología son solo una. En la geometría usual, dos figuras son iguales si al colocar una sobre otra coinciden; en topología dos figuras son iguales si podemos transformar una en otra de manera continuada, sin crear nuevas adherencias ni romper las que haya. La geometría clasifica las figuras por su forma o tamaño; la topología, por sus adherencias y la posición relativa de unos puntos respecto a otros.

¿Cuáles son para la topología las características de una figura o superficie? El número de caras, el número de agujeros, si tiene o no interior y exterior, si tiene o no tiene borde, el número de trozos distintos que la componen, y ese tipo de cuestiones, cuestiones que, como ya se ha mencionado, empezaron a estudiarse con precisión a lo largo del siglo XIX. Uno de los matemáticos que se dedicó a investigar en la nueva disciplina fue el matemático alemán Ferdinand Möbius (1790-1868). Möebius, con sesenta y ocho años de edad, en 1858, descubrió la banda que lleva su nombre (descubierta también por Johann Benedict Listing, independientemente, unos meses antes). La idea le surgió durante una investigación en la geometría de los poliedros, que preparaba para presentarse a un premio de la Academia de París. En la memoria en que describe estos trabajos, Möbius nos explica cómo construir la superficie que ahora lleva su nombre: *tómese una tira larga de papel, sujétese un extremo con una mano y con la otra, rótese primero la banda ciento ochenta grados y luego acérquese el segundo extremo al primero, haciendo casar las esquinas correspondientes.*

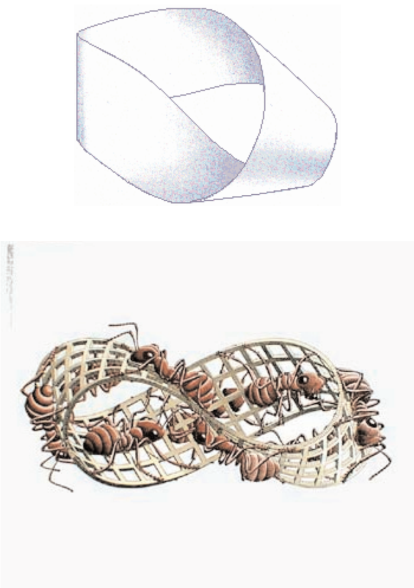


Figura 3. Las bandas de Möebius y de Escher

La banda de Möbius, como se la llama hoy en día, tiene una propiedad interesante: no es orientable, no tiene interior y exterior. Dicho de otra manera, sólo tiene una cara. Este hecho lo podemos comprobar si ponemos un dedo o un lapicero en cualquier punto de la cinta y lo deslizamos en cualquiera de las dos direcciones posibles: tras recorrerla en su totalidad, acabaremos regresando al punto de partida. Pero sigamos pensando, sigamos haciendo topología. ¿Que ocurriría si en vez de tratarse, como en el grabado de Escher, de hormiga enorme, fuese una hormiga muy, muy pequeña la que estuviese caminando a lo largo de la cinta de Möbius? Pues que no notaría ninguna diferencia entre ésta y cualquier cinta cilíndrica: localmente, la banda de Möbius no se distingue de cualquier otra cinta. Sus propiedades y perspectivas locales son completamente comunes. Es en el paso a lo global donde está la diferencia, es globalmente que distinguimos entre la banda de Möbius y la cinta del radiador de un coche. Para apreciar sus peculiaridades, hemos de abandonar su superficie y mirarla desde fuera, mirarla desde el espacio tridimensional euclídeo, por ejemplo.

Una vez en el espacio, la pregunta natural a hacerse es si existen en él más superficies cerradas que se comporten como la banda de Möebius. La respuesta es que sí. La más famosa de estas superficies es la *botella de Klein*, una superficie descubierta por el matemático alemán Félix Klein que además de tener una única cara no tiene borde y tampoco tiene interior ni exterior: esto es, interior y exterior coinciden. Teóricamente, podemos construir una botella de Klein con dos bandas de Möbius, pegando una a otra alrededor de sus bordes. Pero esto es sólo teoría, porque en la práctica es imposible llevar a cabo esta construcción en nuestro espacio usual tridimensional: la botella de Klein habita en un espacio de cuatro dimensiones. Lo máximo que podemos hacer es construir modelos en cristal o plástico en los que se permite que la botella se atraviese a sí misma y que nos dan una idea de cómo sería la botella caso de poder ser construida.

Figura 4. *Klein Bottle Playground*, Vito Acconci, 2000

No es extraño que la banda de Möbius y la botella de Klein hayan inspirado todo tipo de piezas en los últimos cien años.

Figura 6. *Túnel* (2004), Blanca Muñoz, Madrid

Además de sus aplicaciones prácticas en la industria, para ampliar la duración de cintas de vídeo o para reducir el desgaste en cintas transportadoras, esta propiedad de tener una única cara resulta tremendamente atractiva, porque supone todo un reto a nuestras preconcepciones sobre figuras y formas. Por eso no es extraño que la banda de Möbius y la botella de Klein hayan inspirado todo tipo de piezas en los últimos cien años. Pensemos en los cuentos de A.J. Deutcsh (*A subway named Möbius*, por ejemplo, de 1950, obra en la que se basa la película de Eduardo Mosquera *Moebius*), Lewis Carroll (*Sylvia y Bruno*, 1889) y Juan José Arreola (*Botella de Klein*, 1971) o las composiciones musicales de Nicolas Slonimsky (*Möbius Strip Tease*, 1965), Alexandr Radvilovich (*Möbus Band*, 1999) y Arnold Schoenberg (*Style and Idea*). Pero es en el mundo de la arquitectura, las artes plásticas y del diseño gráfico donde la influencia de estas piezas matemáticas es más patente. El número de compañías de reciclado y recogida de basuras por todo el mundo que tienen en su anagrama una banda de Móbius es enorme, y los edificios, esculturas y piezas tanto que reproducen banda o botella, como que las toman como punto de partida, son cada vez mayores[1].

Figura 7. *Möbius bench* (2001), Vito Acconci, Tokyo

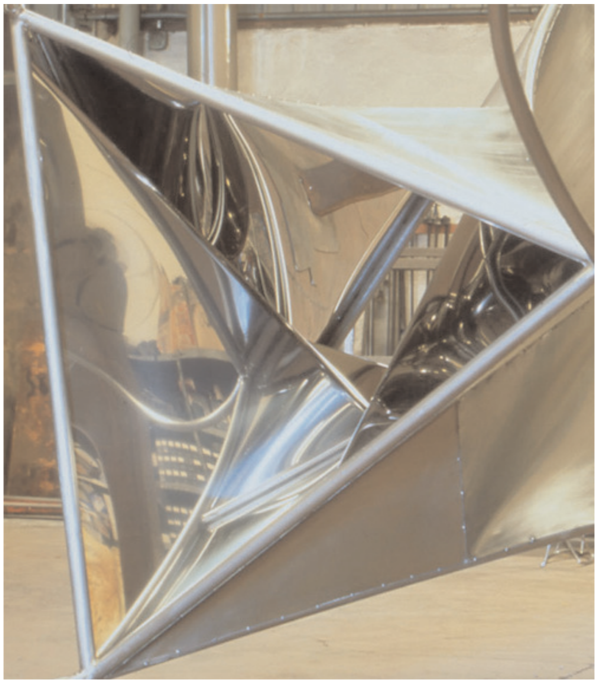


Figura 5. Rincón hexagonal (2004), Blanca Muñoz, Madrid

En 1887, el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio de 2.500 coronas a quien encontrase respuesta a una pregunta fundamental para la astronomía, en ese momento una ciencia en boga: *¿Es el estable el sistema solar?* El premio lo ganó el matemático francés Henri Poicaré con su ensayo *Sobre el problema de tres cuerpos y las ecuaciones dinámicas* (1890). Aunque en su trabajo Poincaré no consiguió contestar a la pregunta propuesta, avanzó tantísimo en la investigación del movimiento de los cuerpos celestes y de la estabilidad de los sistemas dinámicos complicados, que se le dió de igual manera el premio.

Poincaré hizo lo mismo que Euler cuando se enfrentó a los puentes de Könisberg: comenzar por simplificar el problema. ¿Qué es un sistema estable? Un sistema (como el sistema solar, el sistema nervioso o un ecosistema), es una colección de cuerpos y relaciones entre esos cuerpos, y cuando un sistema no cambia mucho bajo el efecto de perturbaciones pequeñas, se dice que es estable. Para saber si un sistema es estable o no, tendremos que producir pequeñas perturbaciones y estudiar cómo afectan éstas a los cuerpos y relaciones que formen el sistema que estemos estudiando. En el caso del sistema solar, habrá que estudiar cómo las distintas perturbaciones afectan a los movimientos de los planetas, que son movimientos periódicos. Esto quiere decir que un planeta recorre una trayectoria fija, en la que pasa por un mismo punto cada cierto periodo fijo de tiempo. Para saber si su movimiento se ve alterado o no por una perturbación, tendremos estudiar el efecto de la perturbación en su trayectoria, ¿deja de ser periódica?, ¿cambia el tiempo que el planeta tarda en recorrerla?

Poincaré se dió cuenta de que el que una curva sea cerrada o no, no tiene nada que ver con cómo sea de larga ni cuál sea su recorrido. El que sea cerrada es, por lo tanto, concluyó, una propiedad topológica de la curva.

Si queremos saber si la órbita de un planeta es periódica o no, no hace falta que sigamos su movimiento constantemente, basta con que identifiquemos su posición en un momento dado, fijemos el telescopio en ese punto del espacio y esperemos a ver si vuelve a pasar por él, midiendo el tiempo que tarda en hacerlo; si el planeta vuelve a regresar al mismo punto, es que su recorrido recorre una curva cerrada.

Poincaré se dió cuenta de que el que una curva sea cerrada o no, no tiene nada que ver con cómo sea de larga ni cuál sea su recorrido. De hecho, el que una curva sea cerrada no depende de su tamaño ni de su forma, y es, por lo tanto, concluyó Poincaré, una propiedad topológica de la curva, como la configuración es una propiedad topológica de una gráfica. Y haciendo topología fue como Poincaré ganó las 2500 coronas ofrecidas por el rey sueco.

Poincaré dedicó muchos años de su vida a desarrollar la topología, marcando, de alguna manera, las líneas generales que durante casi cincuenta años siguió esta disciplina. Se necesitaban nuevas palabras, nuevas herramientas y nuevos sistemas para codificar información, y el proceso de su construcción fue lento y difícil. Durante la primera mitad del siglo XX la topología se convirtió en una disciplina muy abstracta, sin conexión aparente con la realidad física de la que había surgido. No fue sino hasta mediada la década de los sesenta que se terminaron de identificar y colocar en su sitio las piezas esenciales, y la topología pudo ser utilizada de nuevo por la matemática y la física para entender y describir las reglas de la naturaleza.

El mensaje de Poincaré, como el de Hausdorff (ver SUMA n.º 47), estaba claro: no se trata de contar (como se hacía en la antigüedad: *todo es número*, nos cuenta un mito clásico), ni de medir (como se hacía en el Renacimiento: *todo es medible*, creían los renacentistas). Se trata de relacionar (como hace la matemática desde el siglo XX) allá donde se puede, que no es en todas partes.

Este nuevo punto de vista llevó a un intenso análisis en la esencia más abstracta de figuras y cuerpos, un estudio que fue llevado a cabo en matemáticas a principios del siglo XX (Poincaré, Hausdorff, Brouwer, Emmy Noether, Hopf, etc.) y que, al responder a una manera de mirar propia de su tiempo, queda muy bien reflejada en la obra de algunos de los pintores de la época.

> A los nuevos artistas-pintores se les han reprochado vivamente sus preocupaciones geométricas.
>
> Sin embargo, las figuras de la geometría son la base del dibujo. La geometría, ciencia que tiene por objeto el espacio, su medida y sus relaciones, fue en todo tiempo la regla misma de la pintura.
>
> Hasta ahora las tres dimensiones euclidianas bastaban a las inquietudes que el sentimiento de lo infinito despertó en el animo de los grandes artistas.
>
> Ciertamente, los nuevos pintores no se proponen, en mayor medida que los antiguos, ser geómetras.
>
> Pero se puede decir que la geometría es a las artes plásticas lo que la gramática es al arte del escritor.
>
> Hoy los sabios ya no se atienen a las tres dimensiones de la geometría euclidiana. Los pintores se han visto llevados naturalmente, y, por así decirlo, intuitivamente, a preocuparse por nuevas medidas posibles del espacio que, en el lenguaje figurativo de los modernos se indican todas juntas brevemente con el termino de cuarta dimensión. [...]
> Cuatro tendencias se han manifestado actualmente en el cubismo tal como yo lo he analizado. Dos de ellas son paralelas y puras.
>
> El cubismo científico es una de las tendencias puras. Es el arte de pintar composiciones nuevas con elementos tomados, no de la realidad visual, sino de la realidad del conocimiento.
>
> Todo hombre tiene el sentido de esta realidad interior. No es preciso ser culto para concebir, por ejemplo, una forma redonda.
>
> El aspecto geométrico que tan vivamente impresionó a quienes vieron las primeras telas científicas derivaba del hecho de que la realidad esencial se ofrecía en ellos con gran pureza y se eliminaba totalmente el elemento visual y anecdótico.

> Los pintores que pertenecen a esta tendencia son: Picasso, cuyo arte luminoso se relaciona también con la otra corriente pura del cubismo; Georges Braque, Metzinger, Albert Gleizes, la señorita Laurencin y Juan Gris.
>
> El cubismo físico, que es el arte de pintar composiciones con elementos extraídos en su mayor parte de la realidad virtual. (Apollinaire, 1913, secciones.III , VII)

Uno de los pintores que con más intensidad y de manera más consciente estudió la naturaleza abstracta de las formas, buscándolas en los diversos objetos, fue Juan Gris.

> Juan Gris llamaba a esta manera de pintar poética y, en sus exposiciones, se colocaba junto a los cuadros y los decoraba con rimas y metáforas, como él las llamaba, señalando al atónito observador similitudes que éste no había percibido antes. *¿No cree que la boca de esta jarra se parece a la pera, la que está a su lado? ¿La copa al as de corazones? Las cosas están encadenadas por relaciones* ([Kah], pág. 86).

Figura 8. *Guitarra y periódico*, J. Gris, 1925,
MCNAC Reina Sofía

Montañas, guitarra, periódicos, partitura, jarrón, pera, contraventana... Sin llegar al extremo de sus contemporáneos topólogos, para los cuales un círculo y un triángulo eran figuras equivalentes, Juan Gris no sólo ignoraba tamaños a la hora de establecer relaciones entre las diversas figuras, sino que además tampoco les exigía mantener sus proporciones a escala. Para Gris, dos triángulos encadenados componen siempre la misma forma, sin importar lo grandes o pequeños que sean, ni el tamaño de los ángulos que encierran. Las formas de la montaña, las diversas partes de la guitarra y el canto del jarrón en este cuadro, por ejemplo, no casan a escala, y sin embargo aparecen claramente destacadas como equivalentes por Gris en su lienzo y, de hecho, como equivalentes las reconocemos al mirar el cuadro. Y lo mismo ocurre con las formas ovales básicas que aparecen destacadas como equivalentes en el cuadro siguiente.

Figura 9. *Guitarra ante el mar* (1926), MNCAC Reina Sofía

La tremenda elaboración abstracta que sobre las diversas formas llevó a cabo la cultura occidental a lo largo de la primera mitad del siglo XX, cuajó en la década de los sesenta. En pintura, esta cristalización dió lugar a movimientos como el expresionismo abstracto, por ejemplo (espléndidamente representado por la obra de Esteban Vicente que puede verse en el Museo de Arte Contemporáneo de la ciudad de Segovia). En matemáticas, uno de los ejemplos más llamativos es precisamente el que ofrece la topología: como ya se ha mencionado, identificadas (y colocadas en su lugar), por fin, las piezas esenciales, la matemática y la física pudieron volver a utilizar sus herramientas para entender y describir las reglas de la naturaleza. Y no solo eso. A partir de los años sesenta del siglo pasado, la topología se fue convirtiendo en herramienta fundamental de prácticamente todas las disciplinas matemáticas, permitiendo poner estructuras en situaciones donde no las había, y permitiendo de esta manera que se diese de cohesión y cuerpo a mucha de la matemática que se estaba desarrollando. Basta pensar, por ejemplo, además de en los sistemas dinámicos ya mencionados, en cómo ha cambiado la topología disciplinas como la teoría de los números (los cuerpos locales o teoría de cuerpos de clases, por ejemplo) o la geometría algebraica (haces, esquemas, variedades, etc.).

Un momento crucial en esta cristalización que la topología experimentó a mediados del siglo XX, fue el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Amsterdam en 1954, un congreso muy significativo para la historia que estamos relatando. Por un lado, en él se otorgaron las medallas Fields a Jean Pierre Serre (Francia) y Kunihiko Kodaira (Japón), dos de los matemáticos que con mayor éxito han utilizado las herramientas de la topología para resolver problemas en campos como la geometría algebraica, la teoría de números o el análisis. Por otro lado, en ese congreso y en una conferencia con el título Teoría general de los sistemas dinámicos y la mecánica clásica, el matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov presentó a la comunidad internacional las ideas esenciales de la llamada después teoría de KAM (por Kolmogorov, Arnold y Moser): cómo utilizar —con éxito, como el tiempo ha demostrado— la maquinaria de la nueva y abstracta topología, para estudiar los problemas clásicos de los sistemas dinámicos. Y, finalmente, fue precisamente durante una visita a la exposición sobre la obra de Escher que con motivo de este congreso se organizó en Amsterdam, que el matemático inglés Roger Penrose vió por primera vez el grabado *Beldevere*.

Figura10. *Beldevere*, Escher

En 2004, Marta Rafols, de la Fundació La Caixa, me invitó a dar una serie de conferencias sobre Escher y las matemáticas con motivo de una exposición antológica que la Fundació presentó en algunos de sus centros en Cataluña. Buscando en las galerías de arte de Internet imágenes de grabados de Escher con los que ilustrar las ponencias, encontré un texto anónimo (que no he sido capaz de volver a encontrar) junto a una reproducción de este grabado, que decía (reproduzco las notas que tomé en mi cuaderno): *Cuando a mediados de los años cincuenta del siglo pasado Roger Penrose vió este grabado en una exposición que se organizó con motivo de un Congreso Internacional de Matemáticas, quedó fascinado, y una vez en Inglaterra, junto con su padre Lionel, un profesor de genética que usaba las matemáticas en su trabajo y también las estudiaba como hobby, se dedicaron a investigar figuras imposibles. Poco después padre e hijo enviaron una carta a Escher con alguna de estas figuras*. No se daba ninguna explicación más. El párrafo me intrigó. Durante los años que pasé en la Universidad de Michigan (EEUU), el matemático inglés John Conway solía visitar el departamento de matemáticas con cierta regularidad, y aprovechaba estas ocasiones para dar cursos a los alumnos del programa de doctorado de teoría de números, entre los que yo me encontraba. Sus clases estaban siempre salpicadas con anécdotas y juegos en los que antes o después, acaba surgiendo el nombre de Penrose, que acabó convirtiéndose en un mito para nosotros. ¿Qué vió el maestro de John Conway en este grabado que tanto le atrajo?, me pregunté inmediatamente, estudiándole con cuidado. La arquitectura es curiosa, y sin duda imposible. Pero no acaba de funcionar; resulta plana, burda, no es de las piezas más sugerentes llevadas a cabo por Escher. No, no puede ser la construcción del edificio Beldevere lo que llamó tanto la atención del sabio inglés, pensé.

La reproducción no era muy buena, y busqué en el catálogo de la exposición de la Caixa que Marta Rafols me había enviado junto con la invitación (Antich, 2004). En el índice, efectivamente, encontré el nombre Beldevere. Pero para mi sorpresa, cuando abrí la página correspondiente no encontré lo que me esperaba. Aunque había mantenido el mismo título, en este delicioso grabado —una de las piezas más hermosas del holandés—, Escher representaba sólo un detalle de la escena: la imagen de un hombrecillo sentado en un banco y sosteniendo entre las manos un cubo imposible. No me cupo la menor duda de que ese cubo fue lo que atrajo inmediatamente la atención de Penrose.

Figura 11: El cubo de las costillas de Escher

Efectivamente, como escuché explicar más tarde al propio Penrose (hijo) en el vídeo sobre Escher, realizado por Michele Emmer (2001), Lionel y Roger Penrose cayeron, como tantos otros, bajo el hechizo del cubo de las costillas, como le llamaba Escher. Un cubo que tiene la peculiarísima propiedad de que, como le ocurre a la banda de Mobius, sus propiedades locales y globales son muy distintas. La banda de Möbius localmente es plana y orientable, mientras que globalmente ni es plana (está cerrada en el espacio) ni es orientable (pues tiene una única cara); el cubo de las costillas localmente es un cubo normal y corriente (si enfocamos la imagen en cualquiera de sus vértices, no encontramos ninguna diferencia entre este cubo y la esquina de una habitación, por ejemplo), mientras que globalmente es imposible. No se puede construir materialmente.

Las reflexiones de los Penrose sobre el cubo de Escher les llevaron a construir ellos mismos otras figuras imposibles que luego enviaron al artista (Penrose,1958). Así conoció Escher dos de las figuras que lograron, una vez más, que las matemáticas le permitiesen superar los problemas que sus construcciones le planteaban. La primera de ellas fue el triángulo conocido como *el tribar*.

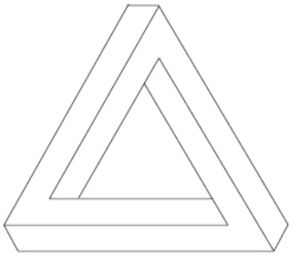


Figura 12. *El tribar* de Penrose

Este triángulo tiene la propiedad de que localmente es un triángulo como otro cualquiera, pero la configuración global, la figura completa, es imposible. De hecho, sus ángulos suman 270º grados en vez de 180º. Gracias a este triángulo, Escher pudo construir una de sus piezas más sorprendentes.

Figura 14. *La cascada*, Escher

La segunda pieza que los Penrose mostraron a Escher fue su escalera, con la que Escher construyó otra de sus imágenes más conocidas.

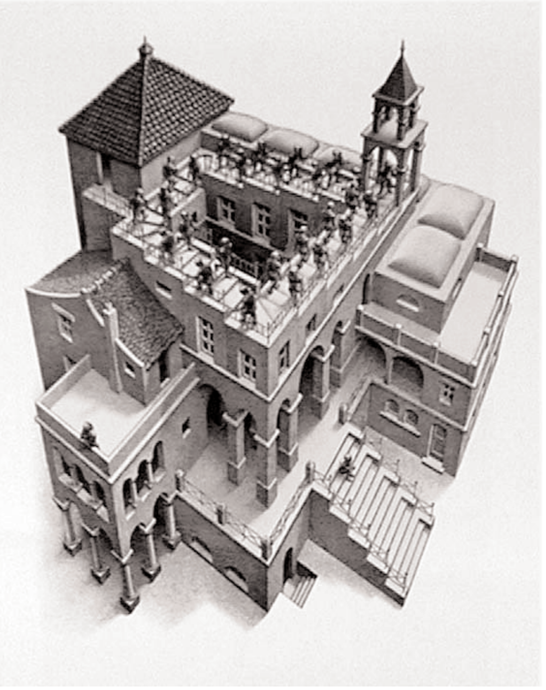


Figura 15. *Subiendo y bajando*, Escher

Estas construcciones de Escher resultan extraordinariamente sugerentes. Nos colocan ante la paradoja de que mundos imposibles puedan ser construidos sobre el papel con toda consistencia, metiéndonos así de lleno en uno de los problemas teóricos con los que se anda peleando hoy la especie: el paso de lo local a lo global. Un objeto puede ser coherente en cada una de sus partes, e incoherente en su totalidad: localmente es plausible, pero la configuración global no lo es. No se podría tener un objeto así en nuestro espacio tridimensional. Podemos dibujarlo, pero no podemos construirlo.

De nuevo la obra de Escher nos sirve maravillosamente para ilustrar lo que las matemáticas nos enseñan. En este caso, que el paso de lo local a lo global, ni es siempre obvio, ni es siempre único, ni es siempre posible. Aunque podamos dibujarlo. ■

NOTA

1 Agradecemos a Vito Acconci y Blanca Muñoz las fotografías de sus obras que acompañan este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTICH, X.,ed.: *Escher, la vida de las formas,* Fundació La Caixa 2004.

APOLLINAIRE, G.: *Manifiesto cubista,en Méditations esthétiques. Les peintres cubistes (*1913). Traducción al castellano:
www.ideasapiens.com/textos/ Arte/manifiesto%20cubista.htm

EMMER, M.: *El mundo fantástico de MC Escher*, video, 2001.

KAHNWEILER, D.-H: *El camino del Cubismo* (1963), Quaderns Crema. Barcelona, 1997.

PENROSE, R.: *Carta a Escher*, 1958.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Mabuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: -
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herranz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Albert Violant i Holz
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 119-121

Las flores de Fibonacci

Una regla segura: cuando un matemático o un filósofo escribe con profundidad misteriosa, dice tonterías.

Alfred North Whitehead
An introduction to Mathematics

Casi todo el mundo ha oído hablar de Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci.

Sí, claro, el de la famosa sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,...; la de los girasoles, las piñas, las espirales, la del número de oro. Incluso hay un vídeo dedicado a él.

Son muchos menos los que saben que Fibonacci no pretendió en ningún momento armar este revuelo con una sucesión que, con el paso de los siglos, acabaría siendo la sucesión más famosa de la historia. De hecho, aparece como resultado de uno de los muchos y variados problemas que contiene el Liber Abaci, obra que catapultó a la fama a Leonardo en 1202. Es el problema 18 del capítulo 12, parte séptima, y en apariencia no es uno de las más interesantes:

> Un hombre tiene una pareja de conejos en un determinado local cercado, se quiere saber cuántos crían esa pareja en un año, cuando es natural que paran en un mes otra pareja, y en el segundo mes, los que nacen, parirán también.

Incluso el enunciado original no es muy afortunado.

El Liber Abaci es sin duda la más importante summa aritmética de la Edad Media. En esta obra, Leonardo introduce las cifras indo-arábigas en Occidente y proporciona las reglas para realizar las operaciones elementales con ellas. Su intención era brindar a los comerciantes una herramienta de cálculo mucho más potente que el tradicional ábaco, que, por cierto, a pesar de ser el protagonista del título no aparecerá en los contenidos.

Los títulos de los capítulos son bastante elocuentes para hacernos una idea del contenido de la obra:

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

Leonardo de Pisa (Fibonacci). Foto FMC

1. Lectura y escritura de los números en el sistema indo-arábigo.
2. Multiplicación de números enteros.
3. Suma de números enteros.
4. Resta de números enteros.
5. División de números enteros.
6. Multiplicación de números enteros por fracciones.
7. Fracciones.
8. Precios de las mercancías más comunes.
9. Comercio.
10. Relaciones de parentesco.
11. Conversión de Monedas.
12. Problemas y soluciones.
13. La regla de la falsa posición.
14. Raíces cuadradas y raíces cúbicas.
15. Proporciones, geometría y álgebra.

Sus fines y destinatarios estaban bastante claros. Aunque no deja de sorprendernos el capítulo décimo, sobre las relaciones de parentesco, tema nada baladí entre comerciantes de aquella época, y de cualquier otra, en la que aparecen repartos de herencias.

El capítulo 12 es el que dará a Fibonacci la popularidad de que goza en nuestros días. De hecho, este capítulo y el último contienen una colección de problemas que harían las delicias de cualquier aficionado a las matemáticas recreativas.

Como muestra, dos ejemplos que nos sonarán familiares:

- Un hombre entró a una huerta que tenía siete puertas y tomó un cierto número de manzanas. Al abandonar la huerta le dio al primer guardia la mitad de las manzanas que llevaba más una. Al segundo guardia la mitad de las manzanas que le quedaban más una. Hizo lo mismo con los guardias de cada una de las cinco puertas que le faltaban. Cuando se fue de la huerta le quedaba una manzana; ¿cuántas manzanas había tomado en un principio?

- Dos torres de 30 y 40 pies de altura están situadas a 50 pies una de otra. Entre ellas hay una fuente. Desde lo alto de cada torre, dos pájaros inician al mismo tiempo el vuelo hacia la fuente y la alcanzan simultáneamente. ¿Dónde estaba la fuente?

Más de veinte años después de la publicación del Liber Abaci, la fama de Leonardo como hombre sabio y versado en cálculo se había extendido por toda Italia. En 1225, Federico II, rey de las Dos Sicilias, ya coronado por el Papa como emperador, hace un descanso en Pisa y formula el deseo de conocer al famoso genio matemático. Federico II era un hombre culto y preocupado por las matemáticas y la filosofía, no como los gobernantes actuales, como demuestra que en su séquito viajaran como asesores Juan de Palermo y Teodoro, dos reputados filósofos. Se ve que es una costumbre que ha perdurado hasta nuestros días, donde podemos observar que la cabeza visible del principal imperio cuenta entre sus asesores con hombres sabios, reputados científicos y notables filósofos. En esa época Fibonacci pasaba de los 50 años; el joven emperador apenas contaba 30.

Para probar la sabiduría de Leonardo ante el emperador le plantearon tres problemas. De sus soluciones tenemos noticias gracias al propio Leonardo pues incluyó sus respuestas en otras dos obras suyas: Liber Quadratorum (la mayor aportación a la teoría de números entre Diofanto y Fermat) y Flos. Extraño título este último, aunque si lo vemos completo adquiere su sentido y de paso nos dice mucho del carácter de Fibanacci: Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometricam (Flor de soluciones de algunas cuestiones sobre números y geometría)... Porque las soluciones matemáticas también pueden ser como flores.

Primer problema

Encontrar un número de tal manera que su cuadrado aumentado o disminuido en 5 unidades siga siendo un cuadrado.

Segundo problema

Encontrar un número tal que su cubo más el doble de su cuadrado más 10 veces él mismo sea igual a 20.

Para ello sólo se podrán utilizar las proposiciones del Libro X de los Elementos de Euclides.

En lenguaje algebraico actual, resolver la ecuación

$$10x + 2x^2 + x^3 = 20$$

Tercer problema

Tres hombres se reparten al azar una suma de dinero. Después, el primero aporta a un fondo común la mitad de su parte, el segundo un tercio de la suya y el tercero un sexto de la suya. Dividen este fondo común en tres partes iguales y se lo reparten entre sí. Al final el primero tiene la mitad de la suma inicial, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte. ¿Cuál era la suma inicial?

Han pasado casi ocho siglos y los tres problemas de Juan de Palermo, y sus soluciones, siguen siendo auténticas flores matemáticas. E intentar resolverlos sin hacer trampas, es decir, como lo hizo Fibonacci, constituye un reto para cualquier matemático.

Aclaraciones y pistas

Del primer problema

Fibonacci descubrió pronto, como seguro que tú, lector, ya habrás deducido, que ningún número entero cumple esa condición. Así que el resultado tiene que ser una fracción.

Leonardo utilizó algunos resultados que tienen que ver con las ternas pitagóricas y con las identidades notables; en concreto, que $m^2 - n^2$, $2mn$ y $m^2 + n^2$ forman una terna pitagórica siendo m y n enteros y $0 < n < m$.

Y que

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

Combinando adecuadamente estos dos resultados podrás llegar a lo que injustamente se conoce como identidad de Fibonacci, auténtica llave para encontrar la solución.

Del segundo problema

Fibonacci dedujo enseguida que la solución es un número comprendido entre 1 y 2. Pero también afirmó que la solución no era una fracción, ni tampoco una magnitud inconmensurable de los tipos que Euclides recoge en el libro X de los Elementos. Por otra parte, aunque eso él no lo podía saber, aún quedaban tres siglos para que Tartaglia y Cardano atacasen el problema de la cúbica. Así que a Leonardo no le quedó más remedio que buscar una buena aproximación a la solución de la ecuación. No sabemos cómo lo hizo, pero obtuvo ésta, expresada además en notación sexagesimal:

$$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{30}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}$$

Utiliza algún método de aproximación de las soluciones, incluso un ordenador y descubrirás que Fibonacci era un auténtico genio.

Del tercer problema

Está claro que se trata de resolver un sistema de ecuaciones, con soluciones enteras. Fibonacci lo resolvió mucho antes de que se inventasen los determinantes... ¡Ánimo!

Es un excelente problema para plantear a los alumnos de 2º de bachillerato en lugar de los aburridos sistemas de siempre.

Postre

Y para postre, un problema que me mandó un antiguo alumno, que también tiene que ver con la teoría de números, en concreto con los números perfectos, tema que también estudió Leonardo de Pisa:

> Demostrar que no existen dos números naturales m y n tales que $3^m \cdot 5^n$ sea un número perfecto.

¡Suerte! ■

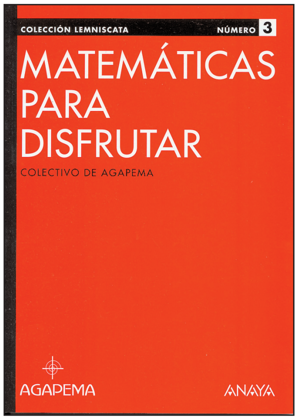
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORENO R. (2004): *Fibonacci. El primer matemático medieval*, Nivola, Madrid, 2004

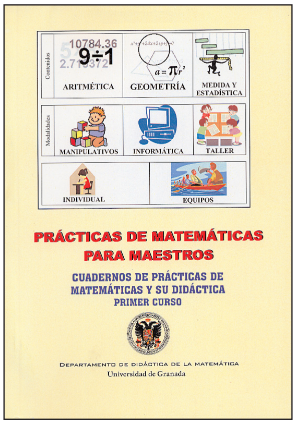
MARTÍN CASALDERREY, F.(2000): *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas del Renacimiento italiano*, Nivola, Madrid.

http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/Indizea.asp

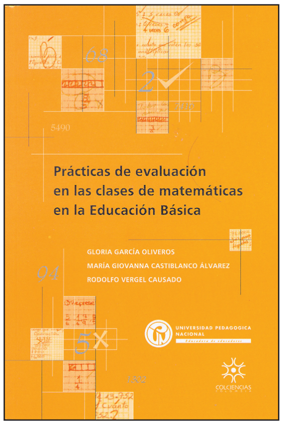
Publicaciones recibidas



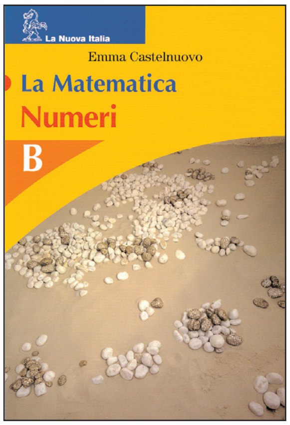
Matemáticas para disfrutar
Colectivo de AGAPEMA
AGAPEMA-ANAYA
Colección Lemniscata n.º 3
Madrid, 2005
136 páginas



Prácticas de Matemáticas para Maestros
P. Flores e I. Segovia (ed.)
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
Granada, 2004
ISBN: 84-933517-0-9
216 páginas



Prácticas de evaluación en las clases de matemáticas en la educación básica
G. García, M.ª G. Castiblanco y R. Vegel
Bogotá, 2005
ISBN: 958-8226-47-3
146 páginas



La Matemática (seis volúmenes):
Numeri A- Numeri B
Figure piane A-Figure piane B
Figure solide
Leggi Matematiche
Emma Castelnuovo
Milán, 2005
ISSN: 88-221-5593-9, 88-221-5592-0, 88-221-5589-0, 88-221-5588-2, 88-221-5585-8, 88-221-5584-X
280, 218, 252, 284, 234, 316 páginas

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 123-129

Biblioteca

Iniciamos en este número una nueva estructuración de la sección BIBLIOTECA. *A su contenido habitual le añadimos dos nuevos apartados que hoy comienzan. El primero se titula* Mi biblioteca particular *en la que pretendemos dar una visión más reposada de todas las lecturas que ha hecho una persona a lo largo de los años y cómo le han influido, con la intención de traer a colación no solo los libros que han aparecido hace poco sino también otros que tal vez sean clásicos, estén descatalogados o un poco olvidados, pero que sigan siendo importantes. Con la intención de dar pistas que hagan deseoso leerlos (o releerlos). Iremos encargando la contestación del cuestionario de la misma a personas concretas, pero invitamos a todos los lectores a que nos envíen respuestas que iremos incorporando a la sección, total o parcialmente.*

Otro apartado es En campo ajeno *y trata de recoger la presencia de las matemáticas, como parte de la cultura, en libros cuyo objeto fundamental no son las propias matemáticas (novelas sobre todo) y que corren el riesgo de pasar desapercibidos entre los profesionales de las mismas, a pesar de ofrecer puntos de vista enriquecedores a nivel personal y profesional.*

Esperamos que de este forma se logre una sección más rica e invito a todos a aportar sugerencias de mejora.

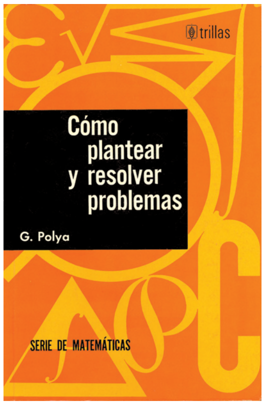
Mi biblioteca particular

Fernando Corbalán

Destaca unos pocos libros (uno o dos) de matemáticas (o de su enseñanza) que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial y explica por qué fue, así como si crees que siguen de actualidad.

Es difícil resumir en sólo unos pocos los libros que han tenido influencia en una vida, porque unos llegaron en el momento oportuno mientras que otros tuvieron que esperar a más tarde e incluso hubo de los que me di cuenta de su valía mucho tiempo después. Pero justamente se trata de hacer un ejercicio de concreción y yo me referiré a dos que para mí supusieron eso que se suele pedir a los libros importantes: que amplíen tu punto de vista, que añadan perspectivas diferentes a tu percepción de la realidad.

Esos libros fueron *Cómo plantear y resolver problemas*, de Polya (Trillas, Méjico, 1970) y *Experiencia matemática* de P.J. Davis y R. Hersh (Labor, Barcelona, 1988). El primero porque



Trillas,
México, 1970
215 páginas

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

supuso la asunción razonada de que el núcleo fundamental de las matemáticas lo constituía la resolución de problemas, algo que además se podía aprender y enseñar; que no nacíamos predestinados a ser buenos o malos resolutores de problemas. Es un libro sencillo y sin pretensiones solo en apariencia, pero que coloca cargas de profundidad en las líneas de flotación de las convicciones más profundas. Que solo parece aportar lugares comunes y píldoras de sentido común (que según la experiencia demuestra no es muy habitual) y que sin embargo logró a nivel histórico (y también para mí) algo al alcance de muy pocos: un cambio de paradigma. Y cuya sencillez no deja de aportar cosas nuevas tantas veces como se relea total o parcialmente. Hace ya unos años (*SUMA*, n.º 22, junio del 96), en un artículo que escribimos sobre el libro Jordi Deulofeu y yo decíamos:

> Su importancia ha sido impresionante en la enseñanza de las matemáticas desde su publicación, hace ya más de cincuenta años, en todo el mundo. Y a pesar de su 'edad' ya no muy juvenil es un libro que sigue vivo, no solo desde el punto de vista de su influencia actual, sino que lo es en el sentido editorial, es decir, que es un libro que se sigue vendiendo con regularidad, incluso en nuestro país, donde se puede encontrar en las librerías la reimpresión número 19, de mayo del 95. Ello ha hecho de How to solve it uno de los 'best seller' matemáticos más relevantes, traducido a 17 lenguas, entre las que están todas las importantes, y del que se han vendido más de un millón de ejemplares, cifra relevante para cualquier libro, y más para uno de didáctica de las matemáticas.

Y lo suscribo sin cambiar más que el número de su reimpresión y la edad, ya de 'jubilado'.

> *Siento tener que decir que no me gustaban las matemáticas. Muchas veces he reflexionado sobre esto. Creo que es porque en matemáticas no hay discusión posible. Si te equivocas, te equivocas, y basta.*
>
> *Malcolm X,* Autobiografía

El segundo supuso una llamada a la reflexión sobre la esencia de la tarea intelectual a la que había dedicado muchos años de mi vida y a la que esperaba seguir dedicando muchos otros esfuerzos en el futuro: sobre cuál era el contenido profundo de eso que llamamos matemáticas. Algo que uno cree ir intuyendo con el paso de los años, pero que sin embargo, si intentas poner en claro (escribiendo o hablando) ves que tienes dificultades profundas para explicar. Se constata, también en el terreno profesional, que aunque parece que vas aprendiendo, la realidad es que cada vez hay más cosas que desconoces. Y que sin embargo tienes que ir reflexionando sobre tu trabajo si no quieres caer en el mecanicismo, la rutina, el tedio y, en definitiva, algo parecido a la esquizofrenia: hacer ver que te interesa y te motiva algo que en realidad ha dejado de formar parte de tus preocupaciones. Y que lleva, en el terreno de la enseñanza, al adocenamiento y a la inutilidad, porque como decía Servais (cito de memoria), *es difícil transmitir entusiasmo por algo que a ti no te lo provoca*. Porque el libro es el resultado de las elucubraciones de los autores desencadenadas por la necesidad de impartir un curso universitario de primer ciclo de Fundamentos de las Matemáticas, destinado no sólo a futuros matemáticos sino a estudiantes de otras disciplinas, lo que les lleva a plantearse el fondo del asunto, de forma diferente a como se suele hacer en las asignaturas habituales, en que los asistentes ya son gente convencida de antemano, con los que hay toda una serie de subentendidos implícitos y formas de actuación sobreentendidas.

Ambos libros no sólo fueron importantes para mí en el momento de la primera lectura, sino que lo siguen siendo cada vez que los vuelves a coger en tus manos, cada vez que te aportan cosas nuevas.

Cita algún (o algunos) párrafo de ellos que nos permita apreciar su sentido y nos induzca a leerlo.

El libro de Polya da el conocido *Plan de Polya* para resolver problemas: para resolver un problema se necesita un plan que abarque las cuatro etapas siguientes:

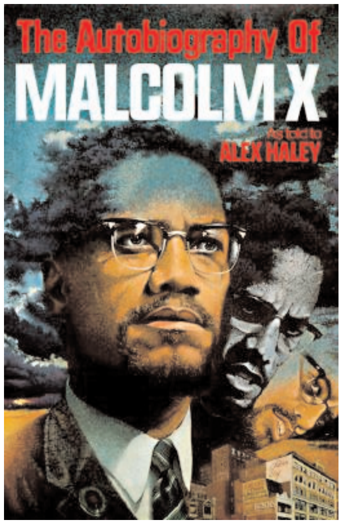
I Comprender el problema
II Concebir un plan
III Ejecución del plan
V Examinar la solución obtenida

que, a pesar de su sencillez y todos los refinamientos posteriores por varios autores, sigue siendo una buena guía de acción.

El núcleo del libro lo constituye la puesta a punto de la 'heurística moderna', que *trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular 'las operaciones típicamente útiles' en este proceso*. Para el estudio de la misma, dice que *buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problemas, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada* uno *de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema*. Es decir, que lo funadamental es la búsqueda de estrategias de resolución de problemas.

En *Experiencia matemática*, en la *Obertura* (pág. 21) se señala el recorrido que llevó al libro:

> Al dar comienzo a mi curso sobre los fundamentos de las matemáticas, planteé las cuestiones que juzgaba esenciales y a las que confiaba en haber dado respuesta, o al menos haber aclarado, hacia finales del semestre.
>
> ¿Qué es un número? ¿Qué es un conjunto? ¿Qué es una demostración? ¿Qué conocemos en matemáticas, y cómo lo conocemos? ¿Qué es el *rigor matemático*? ¿Qué es la intuición matemática?
>
> Al ir formulando estas preguntas me daba cuenta de que no conocía las respuestas. Ello no era sorprendente [...] Siempre existirán diferencias de opinión acerca de cuestiones de esta naturaleza. Lo que me inquietaba e incomodaba era que yo no sabía mi propia opinión sobre ellas [...] Comencé a hablar con otros matemáticos [...] Descubrí igualmente una notable sed de conversación y análisis de nuestras experiencias y convicciones personales. Este libro es parte del fruto cosechado en estos años de meditar, escuchar y discutir.



Portada de una edición en inglés de la autobigrafía de Malcolm X

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte...), ¿has encontrado algún libro interesante en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel importante? Indícalos y recoge algún párrafo de los mismos que nos indiquen su 'espíritu'.
Este pretende ser el objeto de la sección *En campo ajeno* que se inaugura en este número con la crítica de *El rescoldo* de Joaquín Leguina, en la que irán apareciendo más libros de este tipo. A ella me remito.

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias vitales?
La primera es del novelista Raúl Guerra Garrido en *Copenhague no existe* (Destino, Barcelona, 1979) relata: *Mi profe de matemáticas decía: 'Hay que ser liso, conciso y preciso, no confuso, difuso ni profuso'.* Un conciso retrato del profesor al uso. Otra es de Malcolm X, *Autobiografía*, (Txalaparta, Tafalla, 1991), líder negro en Estados Unidos en la década de los sesenta, luchador por los derechos de las minorías:

> Siento tener que decir que no me gustaban las matemáticas. Muchas veces he reflexionado sobre esto. Creo que es porque en matemáticas no hay discusión posible. Si te equivocas, te equivocas, y basta.

No es habitual una reflexión sobre el disgusto ante las matemáticas. Y una buena guía para la acción, que no está reñida con la curiosidad, la da el intelectual francés Jean Cocteau:

> Plantearse los menos problemas posibles es la única manera de resolverlos.

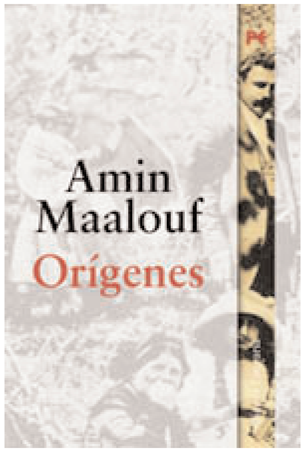
Si has encontrado alguna afirmación 'chocante' referida a las matemáticas en tus lecturas, Señálala.
Es de un periódico, *El País* (25/6/96), en la que el académico Francisco Rico decía:

> Las asignaturas técnicas, las matemáticas, no hacen ninguna falta: cualquier calculadora u ordenador te lo da todo hecho.

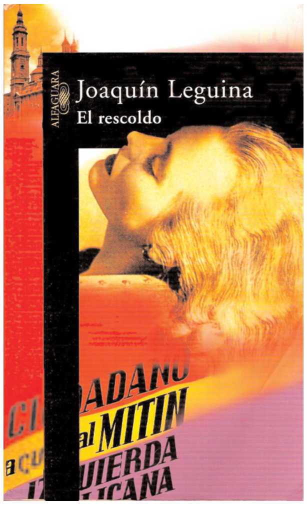
Me hizo darme cuenta del 'aprecio' que parte de la intelectualidad tiene por las ciencias y la necesidad de estar vigilante y dispuestos a batallar por el porvenir.

El último libro que has leído sobre matemáticas que consideras destacable y por qué.
Geometría cotidiana de Claudi Alsina y las razones están en la crítica del mismo aparecida en el anterior número de esta misma revista (*SUMA* n.º 49, pág. 116).

Tu último libro con las mismas característica de la pregunta anterior.
Orígenes de Amin Maalouf (Alianza, Madrid, 2004) sobre la historia de sus antepasados y cuyo título no es 'raíces', que dan una idea de falta de movimiento, mientras que la esencia humana es justamente el cambio y la mezcla, el mestizaje. Creo que Maalouf es uno de los más lúcidos pensadores sobre el nacionalismo y la identidad, tema que ya trató con brillantez en *Identidades asesinas* (Alianza, 2002) y que es de lectura imprescindible en estos tiempos en que cada vez estamos más cerca personas de orígenes distintos. Y aunque Maalouf es fuente de muchas reflexiones interesantes sobre las matemáticas (y las ciencias) no hay ninguna destacable en este libro. ■



En campo ajeno



El rescoldo
Joaquín Leguina
Ediciones Alfaguara
Madrid, 2004
ISBN 84-204-0165-X
266 páginas

En esta novela se va trazando un fresco de la sociedad española desde principios del siglo XX hasta el estallido de la Guerra Civil, ambientada en la provinciana Zaragoza de la época, pero en la que llegan unos insólitos influjos de modernidad y unos comportamientos libres y avanzados aún en nuestros días. Y en la que se dan cita las posiciones ideológicas tan presentes en la época, con la reacción y el clericalismo más negro por una parte, pero con las ansias de libertad bullendo y luchando por el fondo vital; y las huelgas, la opresión y los atentados (como el de Ascaso al cardenal Segura). En la trama imaginada se entrecruzan personajes tan reales como el artista y docente oscense Ramón Acín, paradigma del anarquista, sobre un fondo histórico en el que se prepara primero la República y más tarde el levantamiento militar el 36.

En esa época va viviendo un creíble aunque inimaginado trío formado por un maestro anarquista, un matemático de familia rica (Jesús Vió) y una universitaria, mujer adelantada a su época (prima y esposa de Vió), que avanzan a contracorriente en el pacato ambiente de una sociedad reaccionaria y que consiguen ir consolidando su difícil relación. Que explotará en el formidable estallido de julio del 36 dejando zonas de sombra que algunos de sus descendientes actuales se encargarán de iluminar con dificultad, levantando el velo del olvido que cubrió en los años de plomo de la dictadura, incluso en el ámbito familiar, los comportamientos juzgados inapropiados. Para lo que hará falta el concurso de nuevos persona-

El protagonista es un precoz talento aragonés, obsesionado por el Teorema de Fermat, al que un matemático zaragozano envía al núcleo de la matemática de los años 20. Allí contacta con el matemático Harold Lardy, especialista inglés en Teoría de Números.

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

jes influyentes en la política reciente, de nuevo bien hilvanados en el transcurrir de la trama.

No es el momento de hacer una pormenorizada crítica de los aspectos más literarios de *El rescoldo* (para la que por otra parte no me juzgo capacitado ni de lejos). Solo señalar que retoma en parte la trama de un cuento que ya apareció en otro volumen de Leguina (*Cuernos*), y que como la mayoría de sus obras se lee con facilidad y tiene una trama que avanza con ligereza y abundantes elementos sorpresivos hasta su final. Quizás se aprecia una cierta falta de profundidad en el dibujo de la psicología de los personajes, que se mueven por impulsos un poco primarios y cuyas actitudes se explican más que se deducen. Pero están inmersos en un decorado de fondo muy bien trabado y con buena documentación previa, lo que hace que muchas veces se tenga la sensación de estar asistiendo al desarrollo de la vida diaria de aquellos años.

En la producción literaria de Joaquín Leguina, que además de una conocido político con destacados puestos públicos es demógrafo de profesión, no es la primera vez que alguno de sus personajes tiene relación con las matemáticas. En *Tu nombre envenena mis sueños* (Plaza-Janés, Barcelona, 1992), llevada también al cine por la desaparecida Pilar Miró, uno de los protagonistas es policía y estudiante de Matemáticas, lo que le lleva a interesantes reflexiones e informaciones matemáticas.

Teorema de Fermat, Conjetura de Goldbach y otras minucias

Nos detendremos a continuación en los aspectos matemáticos del libro. El protagonista, Jesús Vió, es un precoz talento aragonés, obsesionado por el Teorema de Fermat, al que un matemático zaragozano envía al núcleo de la matemática de los años 20. Allí contacta con el matemático Harold Lardy, especialista inglés en Teoría de Números, con quien el protagonista tiene una estrecha relación: es el director de su tesis y su permanente contacto con el mundo del Teorema de Fermat. Cuando le encuentra en Cambridge, ya desde el primer momento, se encarga de comentar variados aspectos de las matemáticas que permiten al lector lego en matemáticas (que en principio es el destinatario natural de la novela) hacerse una idea bastante fidedigna de lo que pudo ser el ambiente matemático entre las dos guerras mundiales en Inglaterra. Empieza (pagina 34) diciendo:

> Es usted muy joven, pero eso en matemáticas resulta ser una ventaja. La etapa creadora comienza pronto en nuestro oficio y, ¡ay!, también se apaga muy temprano. La Matemática, más que cualquier otro arte o ciencia, está destinada a hombre jóvenes. Newton expuso sus más geniales ideas sobre fluxión y gravitación en 1666, cuando tenía veinticuatro años. Galois murió en un duelo a los veinte, Abel a los veintisiete, Riemman a los cuarenta. Si este es su camino, no lo desperdicie, porque es corto e intenso.

Cierto que en su intento de hacer asequibles los enunciados de teoremas o resultados sencillos pone en boca de destacados matemáticos ante auditorios de doctorandos inimaginables disertaciones (como el mismo Lardy demostrando por reducción al absurdo la demostración de la infinitud de la sucesión de números primos, pp. 35-36), pero la verdad es que la mayoría de las disertaciones están bien ensambladas en la narración.

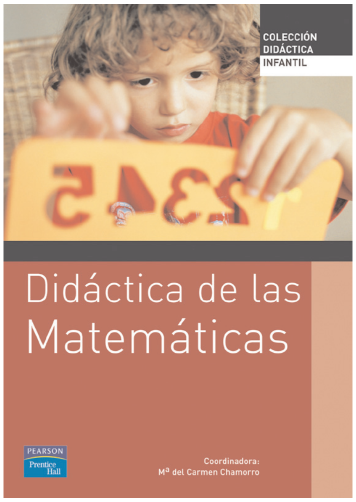
Por si había alguna duda sobre la personalidad de Lardy, su compañero de investigaciones es Littelgarden y había hecho llegar a Cambridge a un autodidacta hindú llamado Ramanutyan, tuberculoso y al que fue a visitar en un taxi de número bastante *soso*: el 1729, el menor que puede ser expresado de dos formas diferentes como suma de dos cubos. Otro de los protagonistas secundarios de la novela es un personaje de otra ficción remaquillado para la ocasión: el *tío Petros* de la novela de Doxiadis, empeñado también aquí en la Conjetura de Goldbach. Aparecen también todos los grandes con su nombre y sus logros verdaderos: Russell, Wittgenstein, Gödel, Turing... Y todos los artistas que conformaron el grupo de Bloomsbury.

Asistimos en vivo y en directo a los avatares de la matemática entre los años 20 y 40 y a los intentos de solución de los dos grandes enigmas matemáticos de la mano de Jesús Vió y Petros, envenenados a partir de un momento por la cruda realidad revelada por el teorema de indecibilidad de Gödel. Y a las grandes ideas que llevarán a la demostración del teorema de Fermat (formas modulares, curvas elípticas... aquí conjeturadas por la fértil mente del aragonés), de cuyos actos finales, con la demostración de Wiles, también seremos testigos en los años noventa, ya por intermedio de un descendiente que sigue los pasos de Vió.

Al hilo de la trama nos salen interesantes elucubraciones sobre hechos y teorías matemáticas, como que 26 es el único número entre un cuadrado y un cubo (pág. 45), el enunciado original de la conjetura de Goldbach (pp. 43-44), la indecibilidad y sus consecuencias (pág. 125) o los trabajos de Turing (pág. 128), que permiten ir haciéndose unas ideas claras, pero a la vez legibles con facilidad, de muchos problemas matemáticos transcendentes, poco o nada conocidos por el gran público, a los que se llega insertos en una trama interesante por muchos aspectos novelescos (para entendernos, no del tipo del *Teorema del loro* de interés sólo matemático) y que no permite dejarla.

Pienso que hubiera sido mejor obviar la presunta demostración *sencilla* (con los instrumentos matemáticos de la época) del Teorema de Fermat, que aparece al final del libro como un Anexo. Pero considero de justicia destacar un libro tan inhabitual desde el punto de vista de la presencia de las matemáticas en la producción literaria española. ■

Matemáticas en Educación Infantil



DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
PARA LA EDUCACIÓN INFANTIL
M.ª del Carmen Chamorro (Coordinadora y autora),
Juan Miguel Belmonte Gómez,
M.ª Luisa Ruiz Higueras y
Francisco Vecino Rubio
Pearson Educación
Madrid, 2005
ISBN 84-205-4807-3
424 páginas

La clase es el principal producto científico que elabora el profesor o la profesora. Dentro de la Pedagogía en general y de la Didáctica en particular, se han realizado numerosos trabajos sobre el tema de la clase. Todos los autores coinciden en su importancia y función dentro del proceso, independientemente de la definición que adopten. Hay múltiples análisis referentes a la planificación, preparación, estructura y a la necesidad de la creatividad del profesor en la clase, entre otros aspectos. Pero, aún siendo todo esto muy importante, nada lo es más que el conocimiento que el profesor o la profesora de Matemáticas tiene sobre su Didáctica. Qué, cómo, cuándo, por qué y para qué ha de enseñarse son preguntas que tienen respuesta científica desde las investigaciones que en ella se hacen y que permiten una mejor preparación y posterior desarrollo de la clase.

M.ª del Carmen Chamorro, que además de autora es la coordinadora de la obra, junto con Juan Miguel Belmonte Gómez y Francisco Vecino Rubio, pertenecen al Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid; M.ª Luisa Ruiz Higueras a su homólogo en la Universidad de Jaén. Forman todo un equipo dedicado a la investigación en Didáctica de las Matemáticas que ahora pone en nuestras manos el fruto de una realizada en Educación Infantil.

El libro se propone sobre todo una línea de trabajo coherente, científicamente fundada, para trabajar el área lógico-matemática, que va más allá de un repertorio de actividades atractivas sueltas.

Rafael Pérez Gómez
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Aunque es muy difícil cambiar la práctica docente del profesorado, los interesantes resultados de investigación que, cada vez con mayor frecuencia, viene ofreciéndonos el campo de la Didáctica de las Matemáticas deberían ser más que suficientes para propiciar tal cambio. Si se sabe más acerca de cómo se aprende, ¿por qué no cambiar la metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje? Más aún en esta etapa que, como sabemos, resulta fundamental para la vida adulta. En el primer párrafo del prólogo de este libro ya se dice:

> La mayoría de los padres, y parte de los enseñantes, creen que en Educación Infantil no es posible hacer un trabajo matemático de calidad, y que como mucho los niños pueden aprender a leer y escribir los primeros números. Prueba de ello son los aburridos manuales con sus respectivas fichas que los niños de Educación Infantil deben ir rellenando a lo largo del curso y que dan fe de una concepción del aprendizaje muy alejada de lo que la investigación ha desvelado, no sólo como conveniente, sino también posible.

Más adelante afirman:

> Este libro es, por el contrario, una apuesta arriesgada(...). Se propone sobre todo una línea de trabajo coherente, científicamente fundada, para trabajar el área lógico-matemática, que va más allá de un repertorio de actividades atractivas sueltas.

Doy fe de que el libro obedece a este propósito, por lo que deseo que sea de muchísima utilidad, sobre todo, al profesorado de Educación Infantil (esas *seños* a las que tanto admiración y cariño tengo). Digo que será útil *sobre todo* al profesorado de Infantil porque creo que también lo será para el resto del profesorado de Matemáticas, de cualquier nivel, ya que el Capítulo 1, Aprendizaje y Matemáticas. *La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil*, escrito por la profesora Ruiz Higueras, no tiene desperdicio alguno. Es imposible escribir un capítulo como este sin tener una gran formación didáctica y matemática. Aunque las actividades son relativas a la Educación Infantil, los comentarios y la información que en dicho capítulo figuran son válidos para cualquier otro nivel.

Especial interés tiene el discurso acerca de la construcción del conocimiento y las prácticas ostensivas al uso, causantes de tantos errores en el aprendizaje de las Matemáticas, que va siendo hora de desterrar. Análogas reflexiones corresponden al Capítulo 2, Herramientas de análisis en didáctica de las Matemáticas, en el que su autora, la profesora Chamorro Plaza, expone:

> ...es necesario que el futuro profesor disponga, en tanto que profesional de la enseñanza, de herramientas y técnicas profesionales que le permitan abordar la enseñanza de las Matemáticas con cierta garantía (...) La Didáctica de las Matemáticas es, hoy en día, una disciplina científica que dispone de resultados sólidamente probados, de conceptos y herramientas de diagnóstico, análisis y tratamiento de los problemas que se presentan en el aprendizaje de las Matemáticas en el contexto escolar. El objetivo de este capítulo es proporcionar al futuro maestro algunos de estos conceptos...

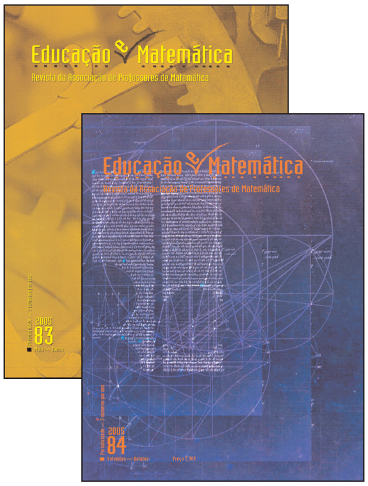
El rigor, fruto de una larga etapa como investigadora que iniciara en Francia (al igual que la profesora Ruiz Higueras, y esto se evidencia en el tratamiento de los temas que en este libro se hace), queda de manifiesto en esta magnífica aportación. Lógicamente, el capítulo es de sumo interés para todo el profesorado de Matemáticas.

> *Aunque este libro será útil sobre todo al profesorado de Infantil, creo que también lo será para el resto del profesorado de Matemáticas, especialmente el capítulo1:* La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil, *que no tiene desperdicio.*

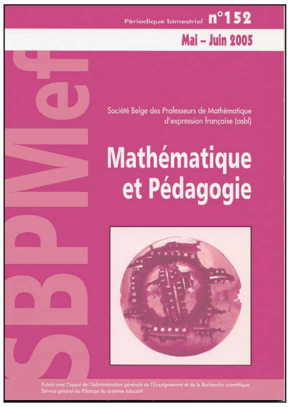
Así, nos encontramos con el resto de los capítulos, 12 en total y sin desperdicio alguno, destinados a aspectos concretos, ahora sí, de la Educación Infantil: el desarrollo del pensamiento simbólico, la actividad lógica, la construcción del número natural y de los primeros conocimientos numéricos, la aparición de la aritmética informal, la representación del espacio, el espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías, la construcción de magnitudes lineales, la introducción de la idea de problema en la Educación Infantil (tema de máximo interés) y, por último, el juego de enorme interés como recurso didáctico. A lo largo de 409 páginas que tiene el libro se presentan 121 actividades para realizar en clase (algunas para la Educación Primaria o Secundaria, pero la mayoría para Infantil) y 40 ejemplos de actuación en clase que incluyen el uso de materiales manipulativos para trabajar en el microespacio, fundamentalmente, de la clase. La edición, hecha a cuatro tintas, ha sido muy cuidada, lo que es de agradecer a la editorial Pearson.

En resumen, este libro pone de manifiesto que enseñar Matemáticas en la Educación Infantil, cito palabras de quienes lo han escrito: *requiere una cualificación profesional nada desdeñable y tiene la misma importancia que enseñar Matemáticas a un futuro ingeniero*. Doy fe de ello y felicito a M.ª Carmen, Luisa, Juan Miguel y Francisco por este trabajo bien hecho, que espero tenga el éxito editorial que merece. ■

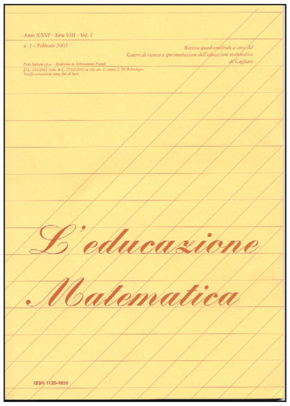
Publicaciones recibidas



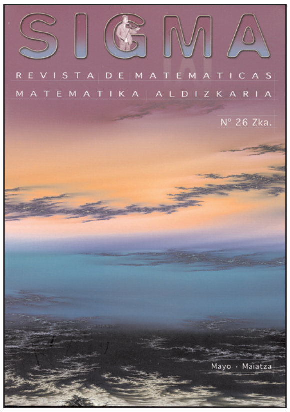
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
Revista de la Associação de Prof. de Matemática
Lisboa, 2005 ISSN: 0871-7222



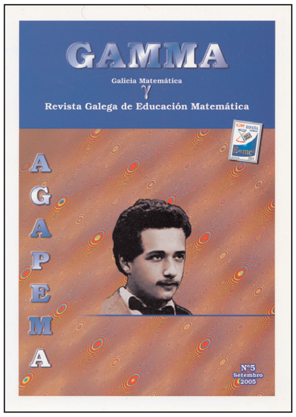
MATHÉMATIQUE ET PÉDAGOGIE
SBPM-ef
Mons, 2005 ISSN: 0773-7378



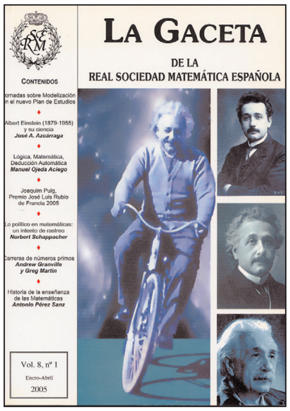
L'EDUCAZIONE MATEMATICA
CREEM di Cagliari
Cagliari, 2005 ISSN: 1120-4850



SIGMA. REVISTA DE MATEMÁTICAS
SCP Gobierno Vasco
ISSN: 1131-7787



GAMMA
Agapema
ISSN: 1578-2980



LA GACETA DE LA RSME
RSME
ISSN: 1138-8927

REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE
S. P. UCM, Madrid
ISSN: 1139-1138

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 131-132

PRIMER
Director: **Shane Carruth**.
Producción: *Shane Carruth EE. UU. 2004.*
Distribución: *Notro Films.*
Duración: *78 minutos*.

Aunque en SUMA 49 despedíamos la sección *CineMATeca*, el reciente estreno de esta película justifica su reapertura y nos sirve de disculpa para anunciar que, cuando la ocasión así lo requiera, volveremos a retomarla.

ARGUMENTO. Aarón y Abe son dos ingenieros que trabajan con otros dos compañeros en un garaje, produciendo tarjetas para ordenador. En su tiempo libre desarrollan un ambicioso ingenio que debería reducir la masa de los objetos. Pero descubren un efecto insospechado: pequeños desplazamientos en el tiempo. Amplían el dispositivo para que pueda actuar sobre personas. Enseguida caen en la tentación de trasladarse a sí mismos al pasado, 48 horas tan sólo, intentando aprovechar la presciencia que la situación permite para realizar operaciones bursátiles con beneficio seguro. Pero, una vez que han aprovechado la oportunidad, van a tener que enfrentarse a las consecuencias. Al viajar a un pasado próximo, van a coexistir con sus *dobles*: ellos mismos *de vuelta* con sí mismos *de ida* en el tiempo. Empieza un complejo desarrollo lógico y surge el drama ético.

COMENTARIO. Muchas veces hemos visto o leído relatos de máquinas del tiempo, casi siempre forzando el anacronismo en el pasado o en el futuro remotos; desde Un yanqui en la corte del Rey Arturo (Mark Twain) a La Máquina del Tiempo (H. G. Wells). Mark Twain viaja al año 528 y utiliza ese viaje a la Inglaterra feudal para reflexionar sobre la sociedad y la justicia; Wells viaja al futuro año 802.701 para reflexionar acerca del paso del hombre sobre la Tierra y su responsabilidad con respecto al porvenir.

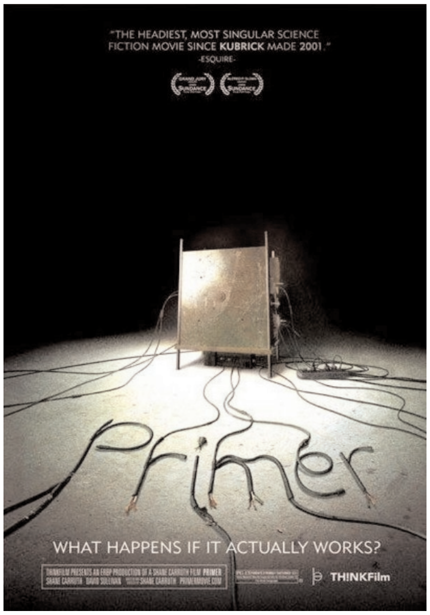
Pero no han faltado, en películas de ciencia ficción de la serie B, máquinas del tiempo niqueladas y dispuestas para aterrizar en el día y hora deseados, como si de coger un tren se tratara. En estos casos, faltaba la reflexión humanista o de cualquier tipo. Y llegados a este punto, rendimos homenaje al jocoso Armario del Tiempo de Mortadelo y Filemón (F. Ibáñez).

José María Sorando Muzás
decine.suma@fesmp.org

Lo novedoso de *Primer* reside en que su autor, licenciado en Matemáticas, recrea de manera verosímil el proceso de descubrimiento, repleto de dudas, intentos, razonamientos e intuiciones. La ambientación es actual, nada futurista; la historia se desarrolla en casas convencionales y polígonos industriales en las afueras de una ciudad. Los diálogos están plagados de terminología matemática, física, química, biológica e industrial; lo cual, lejos de distanciar al espectador, da verosimilitud a la historia. Y, una vez realizado el descubrimiento, el relato es puramente matemático. En palabras del autor:

> Se trata de partir de una premisa y de seguirla de una manera interesante hasta una conclusión lógica.

Al plantearse qué efectos puede tener el encuentro de los personajes con sus *dobles* en el pasado y cómo neutralizar cualquier posible variación de la cadena de acontecimientos (una simple llamada a un teléfono móvil puede romper esa simetría de realidades), el film sigue el método hipotético deductivo. La trama es presentada y resuelta como un auténtico problema matemático. Es por eso, sobre todo, que decimos que se trata de cine matemático; y no tanto porque en sus diálogos se citen conceptos matemáticos, como: parábolas, la paridad del número de trayectos entre el presente y el pasado como clave para que el viaje sea con o sin retorno, bucles, permutaciones, paradojas, recursividad, simetría, etc.



Es difícil seguir un discurso lógico riguroso como el de esta película de seguido, sin pausa. Convendría pararse a pensar cada inflexión en la densa trama de razonamientos y situaciones; en ocasiones, incluso volver hacia atrás... igual que cuando leemos un libro de Matemáticas. Por eso, una primera visión de la película nos invita a otra(s) posterior(es). Esperaremos a tenerla en formato doméstico.

El director. Shane Carruth es en esta obra, su ópera prima, un auténtico *hombre orquesta*: director, guionista, productor, director de fotografía, actor, montador y autor de la música. De él se dice en la información promocional de la película:

> La historia de cómo se hizo *Primer* es tan original como la propia película. Carruth, un licenciado en matemáticas que había trabajado durante poco tiempo en tres empresas de ingeniería, estaba insatisfecho con su elección profesional y decidió hacerse escritor. Empezó escribiendo relatos cortos, y estaba en mitad de una novela cuando se dio cuenta de que le interesaba más trabajar con imágenes que con palabras. En ese momento decidió abrirse camino en el mundo del cine, a pesar de que no tenía formación en ese campo. Por suerte, su amplia formación en matemáticas y ciencia habían hecho de Carruth un experto en la resolución de problemas, y supo aplicar dichas aptitudes al estudio del cine.
>
> Hay una parte muy importante de las matemáticas que no trata solamente de números –explica–. Se trata de quienes tienen delante un problema que parece irresoluble y que, sin embargo, si lo diseccionas puedes resolverlo.
>
> Carruth diseñó su propio plan de estudios y aprendió por su cuenta escritura de guiones, dirección, fotografía, mezcla de sonidos, montaje e interpretación.

La intención de Carruth es que

> (...) los pequeños detalles vayan revelando una perspectiva mayor. *Primer* podía ser un relato convincente sin necesidad de neones, efectos especiales ni cortinas de humo. La estética de láseres, extraterrestres y esas cosas no me va. La ciencia ficción es una de las mejores herramientas de que dispone un escritor, porque te permite abordar temas universales, cosas inherentes a haber nacido en este planeta, y eso es lo que me parece realmente interesante.

Primer no es una película apta para quienes buscan en el cine la evasión fácil. Le auguramos por ello una corta estancia en las carteleras. Pero al mismo tiempo, reúne elementos que la pueden convertir en una película de culto (su reconocimiento internacional en el prestigioso Festival de Cine Independiente de Sundance la avalan para tal fin). De hecho, se ha dicho que inaugura un género: el thriller intelectual. ■

SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 133-136

XVI Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo de ESO Madrid, 26 al 30 de junio de 2005

Foto de grupo de todos los participantes

Entre el 26 y el 30 de junio se ha celebrado en la Comunidad de Madrid, la *XVI Olimpiada Matemática Nacional* para alumnado de segundo de ESO. La fase nacional de la olimpiada, es una de las actividades que convoca anualmente la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Cada año una de las sociedades que la integran es la encargada de organizarla. En la edición correspondiente al curso 2004-2005, la organizadora ha sido la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*.

El equipo organizador estuvo formado por Carmen Calvo, Rosa Forniés, Alejandro González y Lydia Vivas. Posteriormente se incorporó Lola A. Talón. Constituido tras la aprobación de la candidatura madrileña, en la anterior edición celebrada en La Rioja, este equipo ha llevado a cabo su trabajo a lo largo de los dos últimos años.

Esta actividad supone el punto en el que confluyen las diferentes fases locales, provinciales, regionales o autonómicas organizadas por cada sociedad de la Federación. En esta edición, celebrada en Madrid, han participado un total de 66 alumnos y alumnas, acompañados de 26 profesores de todas las comunidades autónomas, y también, de los Institutos españoles en Andorra y Marruecos y, por primera vez, de los Institutos españoles en Lisboa, París y Roma.

Poco a poco va aumentando su proyección internacional de nuestra olimpiada ya que después de los contactos mantenidos durante este curso, casi con total seguridad, podemos

Alejandro González Prados
Coordinador del equipo organizador de la XVI Olimpiada Matemática Nacional

avanzar que la próxima edición también participará el Instituto español de Londres.

Como en todas las olimpiadas, en esta Olimpiada Matemática, se han realizado varias pruebas: una prueba de aula individual, pruebas de campo por equipos y un concurso de fotografía matemática.

Además, en el acto de inauguración celebrado el domingo día 26 de junio, se presentaron el *Taller de Juegos Matemáticos* y las exposiciones de *Filatelia* y *Fotografía Matemática*, que estuvieron abiertas en la residencia de los participantes durante todos los días de la Olimpiada. Del taller y las exposiciones se encargó Menchu Bas, socia de la SMPM.

Uno de los objetivos fundamentales de la Olimpiada es fomentar el gusto por las Matemáticas entre los más jóvenes, ofreciéndoles la posibilidad de enfrentarse a problemas en los que para resolverlos tienen que emplear distintas estrategias de razonamiento.

La primera prueba fue el lunes 27 por la mañana. Se trataba de la prueba individual de aula, que consistió en la resolución de cinco problemas en los que los alumnos debían combinar el razonamiento lógico deductivo, el análisis de posibilidades, la búsqueda de regularidades para obtener la ley general, la visión espacial y otras herramientas heurísticas. En la elaboración de los problemas de esta prueba colaboraron con el equipo organizador, Aurora Bell-lloch y Charo del Rincón, socias tambien de la SMPM *Emma Castenuovo.*

Ganadores de la prueba individual

El lugar elegido para la realización de esta prueba individual, fue el IES *Cardenal Cisneros*, uno de los institutos históricos y más emblemáticos de Madrid.

El equipo de correctores, formado por Inmaculada Fuentes, M.ª Ángeles Ortiz, Damián Valdelvira, Carmen da Veiga y Dolores Vela, destacaron de entre todos los participantes a: Alberto Molina Cardín, de Castilla la Mancha; Jaume Pujantell Traserra, de Cataluña; María Gavilà Lloret, de la Comunidad Valenciana; Alfonso Gómez-Jordana Mañas, de la Comunidad Valenciana y Pablo Coladas Mato, de Galicia.

Un mometno de la prueba de campo en La Pedriza

Otro de los objetivos de esta olimpiada es desarrollar la capacidad de trabajar en equipo, fomentando actitudes de colaboración. Por este motivo, los chicos y chicas que participan en esta actividad han de afrontar también la realización de una serie de pruebas por equipos.

Los equipos, de seis integrantes, estaban formados por alumnos y alumnas de diferentes procedencias. Para dejar constancia de la dimensión y el desarrollo histórico de las Matemáticas, cada equipo recibió el nombre de un personaje ilustre de la historia de nuestra ciencia, desde *Thales* y *Pitágoras* hasta *Puig Adam* y *Miguel de Guzmán*, pasando por *Hypatia*, *Al-Khwarizmi*, *Descartes*, *Euler*, *Gauss*… Ya en la inauguración de la Olimpiada, los participantes pudieron tomar conciencia de las aportaciones de todos ellos.

La primera parte de la prueba por equipos se celebró el lunes 27 por la tarde en el Parque del Retiro. Esta prueba fue diseñada por Amparo Hernández, Charo del Rincón, Lola del Olmo y Mercedes Pastor.

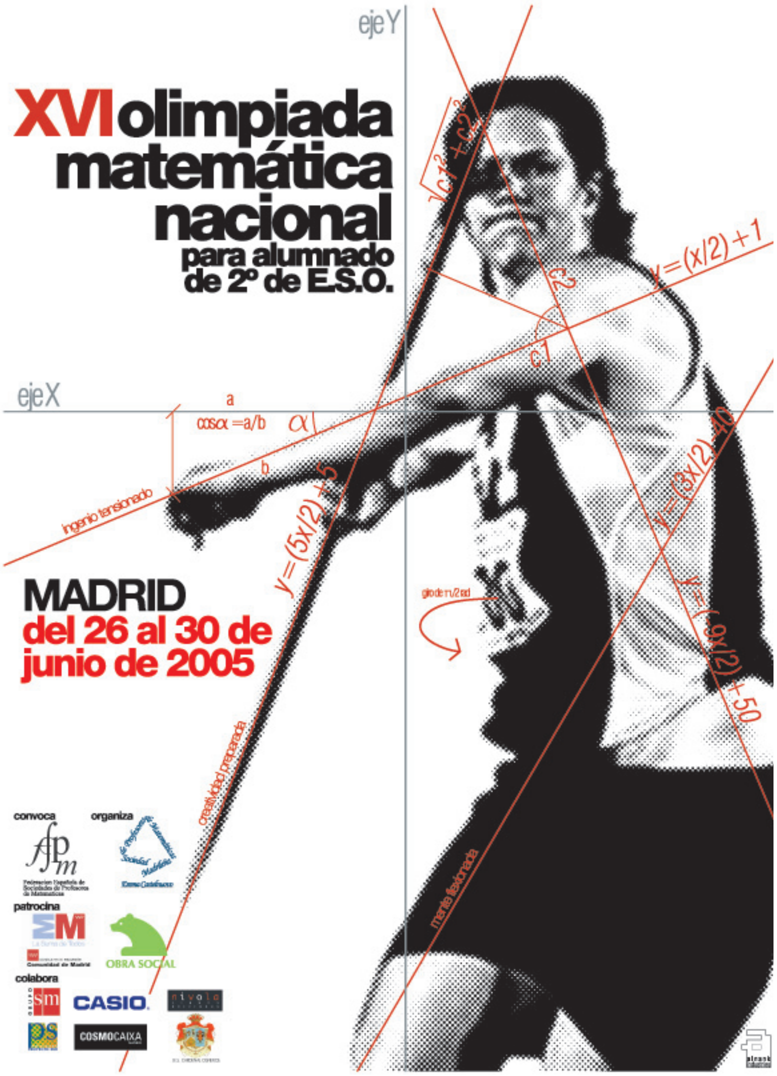
La segunda parte de la prueba por equipos se realizó el martes 28, en La Pedriza, paraje natural ubicado en el Parque Regional de la Cuenca Alta del Manzanares. Esta prueba, diseñada por Alfredo Marcos Cabellos, tuvo, por tanto, contexto en la Naturaleza.

Este tipo de pruebas por equipos persiguen mostrar que las Matemáticas no terminan en la pizarra del aula, que es muy enriquecedor hacer Matemáticas fuera, con objetos cotidianos, verlas en los elementos de la Naturaleza. De este modo, se es capaz de descubrir la importancia real de las Matemáticas y disfrutar haciéndolas y aprendiéndolas.

El equipo mejor clasificado en las pruebas de campo, fue el equipo *Euler* formado por Elena Aznar Pérez, de Aragón, Antonio Cebrián García, de Castilla la Mancha; Alfonso Gómez-Jordana Mañas, de la Comunidad Valenciana; Carolina Ballari Alazraki, del IES Liceo Español en Roma; Rita Rojo Santamaría, de la Comunidad de Madrid y Jon Fernández Ortega, de Navarra.

En el transcurso de la Olimpiada también se celebró un Concurso de Fotografía Matemática. Para ello, cada uno de los equipos iba provisto de una cámara fotográfica para poder ir sacando fotografías. Juan A. Martínez Calvete, Presidente de la SMPM, fue el encargado del diseño de esta prueba.

El equipo *Miguel de Guzmán* fue el ganador del Concurso de Fotografía. Estaba formado por: Javier Lacambra Lasheras, de Aragón; Illán García Amor, de Asturias; Daniel Díez Garzón, de Castilla y León; Ana María Rodríguez Bermejo, de Extremadura; Miriam Boukamza, de los Institutos Españoles en Marruecos y Cristina Ramos Alonso, de la Comunidad de Madrid.



Cartel de la XVI Olimpiada Matemática Nacional. Madrid

A través del Concurso de Fotografía, se persigue que los alumnos y alumnas reflejen desde su perspectiva la presencia de las Matemáticas en distintos ámbitos como la naturaleza, el arte, la ciencia o los objetos cotidianos. De esta forma se pretende que los participantes asimilen el hecho de que las Matemáticas están presentes y son algo tangible en nuestro entorno más cercano.

El tercer día de estancia en Madrid, el miércoles 29 de junio, se realizó una visita al Museo de la Ciencia Cosmocaixa de Alcobendas. En él, los participantes realizaron un taller de juegos matemáticos, visitaron la exposición permanente del museo, una de las exposiciones temporales y vieron en el Planetario un audiovisual de simulación 3D de alta definición sobre la *Arquitectura del Universo*.

Equipo mejor clasificado en las pruebas de campo

Por la tarde, y para relajarnos, se realizó una visita turística guiada en autobús descapotado a la ciudad de Madrid.

Cabe destacar la repercusión que la Olimpiada ha tenido en los medios de comunicación. Prensa, radio y televisión se han hecho eco de su celebración. Concretamente tres cadenas de televisión —TVE, Telemadrid y Canal Sur— cubrieron distintas actividades de la Olimpiada. Confiamos en que este hecho contribuya al reconocimiento definitivo de todo el trabajo que, durante tantos años de manera altruista y voluntaria, han dedicado y dedican tantos profesores y profesoras para conseguir que las Matemáticas se perciban como una ciencia útil, una ciencia práctica y cercana a la realidad.

Recepción en el IES *Cardenal Cisneros*

El último día, el jueves 30 de junio, después de la charla-conferencia *Desafíos Matemáticos en la historia* impartida por Antonio Pérez Sanz, también socio de la SMPM, se entregaron los premios. Este acto de clausura se celebró en el salón de actos del IES *Hotel Escuela* de la Comunidad de Madrid, en el que estuvieron alojados los participantes durante toda la Olimpiada.

Los profesores coordinadores de las distintas Sociedades

Además de la FESMP colaboraron como patrocinadores: la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y la Obra Social de Caja Madrid. Sin su colaboración institucional y económica, la XVI Olimpiada Matemática Nacional no habría podido desarrollarse adecuadamente.

En la clausura participaron, en representación de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, D.ª Carmen González Fernández, Viceconsejera de Educación y el D. Andrés Torres, Subdirector General de Centros. En representación de la Obra Social de Caja Madrid, intervino la D.ª Carmen Estrada Llaquet, Directora de Programación y Coordinación Educativa y Cultural. Por parte de la Federación intervinieron su Presidente D. Serapio García Cuesta y D. Alejandro González Prados, coordinador del equipo organizador.

También colaboraron en la XVI Olimpiada Matemática Nacional el Grupo Editorial SM, Casio, Canon, Nivola, Proyecto Sur de Ediciones, Cosmocaixa y el IES Cardenal Cisneros. Para todos ellos nuestro agradecimiento.

Por último, dejamos constancia del apoyo que el equipo organizador ha recibido de la Junta Directiva de la SMPM y de la FESPM, así como de los miembros de la Comisión Nacional de Olimpiadas: Pedro J. Martínez y Albert Violant. Agradecemos también las aportaciones puntuales de un gran número de socios y socias de la SMPM.

Para terminar, animamos a nuestros compañeros de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*, que han tomado el relevo para organizar la *XVII Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de 2º de ESO* y también al resto de profesores y profesoras que anónimamente trabajan con el alumnado en el aula para que, cada año, la Olimpiada siga siendo realidad.

La clausura

SUMA 50
Noviembre 2005, pp.137-141

XII Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas Albacete 4, 5, 6 y 7 de julio de 2005

Como Quijotes y Sanchos nos entregamos a la labor que nos propuso un ilusionado Serapio cuando la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) encargó a la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas (SCMPM) la organización de las XII JAEM.

Un pequeño grupo de profesores de la Comisión Organizadora, Juan Emilio, Ramón y Bernardino, nos encontrábamos en el parque WARNER acompañando a los alumnos finalistas de la Olimpiada Matemática Provincial de Albacete y desde ese momento no tuvimos ningún tipo de miedos al lanzarnos por las más arriesgadas atracciones.

Sin apenas darnos cuenta (es una manera de hablar) se puso en marcha la maquinaria JAEMística, primero se reunió a la Junta Directiva, después a la Asamblea de la SCMPM y ya no pudimos pararlo: ¡adelante!.

Nos gustaría iniciar esta crónica animando al resto de sociedades de profesores de Matemáticas, ya que al principio todo se ve casi imposible, pero al final funciona, sobre todo porque sabemos del esfuerzo y del empeño personal que realizan los compañeros, y lo único que se reciben son apoyos y colaboración.

Nuestra Sociedad ha tenido en las JAEM un gran impulso y puesta a punto.

Comité Organizador de las XII JAEM
Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas

Se empezó por el *Comité de Programas*, que es el que establece los Núcleos Temáticos, selecciona a los ponentes y admite las comunicaciones y talleres en cada uno de los núcleos y siempre de acuerdo con el objetivo principal de estas jornadas: el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas.

El *Comité de Programas* lo nombra la Junta de Gobierno y ha estado compuesto por:

Pep Sales Rufí, Secretario General de la FESPM

Carmen da Veiga, de la Sociedad Madrileña *Emma Castelnouvo*

Luis Balbuena Castellano, de la Sociedad Canaria Isaac Newton.

Serapio García Cuesta, Presidente de la Sociedad Castellano-Manchega y Presidente de la FESPM

Juan Emilio García Jiménez, Vicepresidente de la Sociedad Castellano-Manchega.

Salvador Guerrero Hidalgo, de la Sociedad Andaluza *Thales*.

José Antonio Mora Sánchez de la Sociedad Valenciana *Al -Khwarizmi*.

Serapio García Cuesta, Presidente de la FESPM

Ha realizado cuatro reuniones con anterioridad a la celebración de las XII JAEM tres en Madrid y la última en Albacete, para comprobar "in situ" lo que se nos venía encima. Además se han intercambiado cantidades que tienden a infinito de correos-e, (como dice Pedro J.) y de llamadas telefónicas.

Comité de Honor:

José María Barreda y Fontes. Presidente de la Junta de Comunidades de Castilla La Mancha.

José Valverde Serrano. Consejero de Educción y Ciencia de la Junta de Comunidades de Castilla La Mancha.

Ernesto Martínez Atáz. Rector de la Universidad de Castilla La Mancha.

Pedro Antonio Ruiz Santos. Presidente de la Diputación Provincial de Albacete.

Manuel Pérez Castell. Alcalde de Albacete.

La *Comisión Organizadora* o *Comité Local* se formó a partir de un núcleo inicial al que fueron sumándose (nunca restándose) más compañeros que se desvivieron para que todo fuera un éxito. En ella se realizó la planificación del desarrollo de las JAEM y lo más difícil, ¿cómo conseguir los medios para ello?.

Esta Comisión estuvo formada por: Antonio Bueno Aroca, Bernardino del Campo López, Carlos Martínez Sánchez, Consuelo Puche Bernal, Gloria Mª Martínez Ruiz, Inmaculada Illán, Isabel Bustos Molina, Jesús Carcelén Gandía, Jesús García Segovia, Joaquín Jiménez Ramos, Juan José Fernández Romera, Juan Emilio García Jiménez, Juan Martínez-Tébar Giménez, Mª Esther López Herráiz, Margarita Marín Rodríguez, María Sotos Serrano, Martín Fernández Carrión, Mercedes Fernández Guerrero, Miguel Adán Oliver, Paloma Castedo Garví, Paloma Gavilán Bouzas, Ramón Cuenca Cuenca, Santiago Turégano Moratalla, Serapio García Cuesta y Vicente Pascual Fidalgo.

Cada uno de ellos se encargó de un Núcleo Temático y de una tarea específica, siendo todos coordinados por lo que al final se llamó Oficina Técnica.

La primera misión fue la obtención de los medios necesarios para el desarrollo de la actividad científica, es decir, de los euros. ¡Sin problemas!. Fue increíble. Las instituciones y empresas regionales y locales han sido especialmente sensibles con la importancia que estas jornadas tienen para la Sociedad.

Contamos desde el primer momento con el apoyo de la Consejería de Educación de la Junta de Comunidades de Castilla la Mancha, y en especial, del Consejero, D. José Valverde, del Director General de Política Educativa, D. Pedro Pablo Novillo y del Delegado Provincial de Albacete, D. Valentín Castellanos.

La Diputación Provincial y el Ayuntamiento de Albacete nos ofrecieron su apoyo institucional.

Las entidades financieras estuvieron a gran altura, así la Obra Social de Caja de Castilla La Mancha (C.C.M.) financió la exposición de la medida, y colaboró con material: carpetas y carteras para los asitentes. La Fundación La Caixa financió la exposición sobre la forma y la conferencia inaugural de D. Jorge Wagensberg.

Las editoriales y empresas del mundo educativo no se quedaron atrás: Editorial Anaya, Santillana, Edebé, Proyecto Sur, Calculadoras Casio, Tarquin Publications, Librería Popular, Librería Herso y Juegos con Causa.

Viajes Halcón se encargó de los alojamientos y transporte.

Mención especial para D.Antonio Roncero, Vicerrector del Campus de Albacete, de la Universidad de Castilla La Mancha (UCLM), que tras la primera visita que le hicimos sólo le faltó asistir a las reuniones quincenales del comité local, pues fue uno más de nosotros, ya que no sólo nos resolvío todas las cuestiones referentes a las aulas de la Universidad, (cuyas instalaciones reunían los requisitos necesarios: amplitud, cercanía entre los edificios, ordenadores, cañones de proyección, personal dispuesto a ayudar...), sino que nos aportaba soluciones a problemas que todavía no habían surgido.

Un inconveniente al menos sí que hubo: el calor que hizo en los primeros días de Julio, pero aún así seguimos pensando que son las fechas idóneas para esta actividad, si bien cuesta creerse que más de 600 profesores de toda España y de algunos otros países, dediquemos días de nuestras vacaciones a seguir trabajando.

Actividades de las XII JAEM

Se clasificaron en los siguientes *núcleos temáticos*:

1. Las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) al servicio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.
2. Seguimos con los números y las funciones.
3. Geometría: La Bella Durmiente. La Geometría ¿sigue olvidada?
4. Estadística y Probabilidad. Como impedir el odio a la Estadística.
5. Matemáticas básicas ¿qué es eso? ¿Qué Matemáticas se necesitan para los profesionales? Currículum.
6. Materiales para construir las matemáticas. La matemática se hace tangible.
7. El papel de las pruebas y competiciones matemáticas en la educación matemática. Diversidad, precocidad, talentos matemáticos. Proyecto PISA.
8. Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.
9. El Quijote y las Matemáticas.

Conferencias Plenarias (4)

D. Jorge Wagensberg: *La emergencia de las formas en la naturaleza.*

D. Guy Brousseau: *Didáctica de las Matemáticas y su relación con el aprendizaje y la enseñanza.*

D. Francisco Martín Casalderrey: *Mirar y ver con los ojos de Venus.*

D. Claudi Alsina Català: *Isla Innovación (el crucero matemático de nuestra vida).*

Jorge Wegensberg, durante su conferencia

Ponencias

Se presentaron treinta y ocho ponencias

Núcleo 1

D. Antoni Gomà: *La calculadora Wiris mucho más que una calculadora: un recurso didáctico*.

D. Tomás Queralt Llopis / D. Julio Rodrigo Martínez: *El estudio de funciones con calculadora gráfica*.

D. Sergio Darias Beautell: *Tecnología, Didáctica y Matemáticas: en busca del equilibrio.*

D. Rafael Bracho López: I*nnovación tecnológica y educativa en el aula de Matemáticas en el marco de la experiencia TIC andaluza.*

Durante el concierto inaugural

Núcleo 2

Dña. Alicia Bruno Castañeda: *Una visión de la enseñanza-aprendizaje de los números negativos*

Dña. Ana García Azcárate: *Cuando "los alumnos no saben operar". Materiales lúdicos para el refuerzo de las destrezas numéricas*

D. Ángel Ramírez Martínez: *¿Y si rompemos las cadenas de Ahmes y Descartes?*

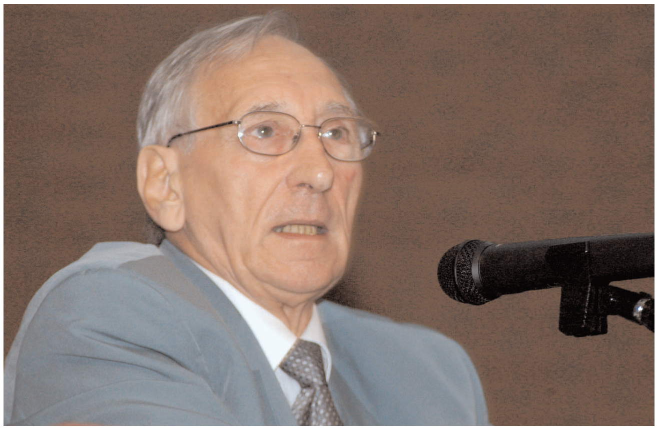
Núcleo 3

D. Floreal Gracia Alcaine: *La Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria*

D. Santiago López Arca: *Click+cliiiick: Ficciones y realidades para mirar y ver geometría*

D. Manuel Pazos Crespo: *El sueño de la Geometría*

D. Pedro Miguel González Urbaneja: *La Geometría en la Arquitectura de Gaudí*



El profesor Guy Brouseau

Núcleo 4

D. José Luis Álvarez García: *Estadística, ¿el patito feo de la programación? Algunos centros de interés para desarrollar la Estadística en la ESO*

D. J.A. García Cruz: *La construcción del significado en la enseñanza de la inferencia estadística.*

Dña. Belén Cobo Merino: *La estadística en los currículos de la educación obligatoria. ¿Qué hay y qué se hace?*

Núcleo 5

D. Rafael Pérez Gómez: *Matemáticas para la Sociedad del Conocimiento*

D. Antonio Marín del Moral: *Mirada a la educación matemática de Secundaria desde las competencias profesionales*

D. Joan Gómez i Urgellés: *Matemáticas y profesiones: una relación necesaria.*

Núcleo 6

D. Antonio Ledesma López: *Papiromatemática*

D. Luis Berenguer Cruz: *Entre la Tiza y la Pizarra Digital*

D. José Miras Ruiz: *El trabajo de Matemáticas en los cursos de Primaria.*

D. Santiago Turégano Moratalla.

Núcleo 7

D. Eugenio Hernández: *Las ideas de Miguel de Guzmán en el proyecto ESTALMAT*

D. Luis Rico Romero: *Competencias matemáticas y evaluación en el informe PISA de la OCDE*

D. Tomás Recio Muñiz: *Ya lo decía yo! (La urgente necesidad de analizar PISA03 en el contexto socio-educativo español)*

D. Salvador Caballero Rubio: *Matemáticas en los programas específicos de atención a la diversidad: diversificación curricular y adaptación curricular en grupo*

D. Pedro J. Martínez: *Las olimpíadas matemáticas, un potente recurso para la Educación Matemática en la Escuela*

D. Raúl Ibáñez Torres: *Divulgamat*

Núcleo 8

Dña. Mª Antonia Canals: *Cómo es y cómo podría ser la matemática en la escuela*

Dña. Mequé Edo Basté: *Educación Matemática y competencia social en la formación inicial*

Dña. Margarita Marín: *Sigue los dictados de tu mente... lee matemáticamente. Proyecto Kovalevskaya*

D. José Antonio Fernández Bravo: *Análisis de la interacción entre el pensamiento y la Matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje*

Núcleo 9

D. Juan Antonio García Cruz.: *Matemáticas y navegación en la época de Cervantes*

D. Rafael Ángel Martínez Casado: *Curiosidades y casualidades matemáticas en El Quijote*

D. Luis Balbuena Castellano y D. Juan Emilio García Jiménez.: *El Quijote y las Matemáticas*

D. Ángel Requena Fraile: *Con motivo del cuarto centenario*

Dña María J. Ríos, D. Javier Montero y D. Francisco Parra: *Encontrando el Lugar de la Mancha con las Matemáticas*

El profesor Antonio Roldán, agradeciendo el *Premio Gonzalo Sánchez Vázquez* a los valores humanos.

Núcleo 10

Dña. Isabel Julia Dos Reis de Herrera: Realidades y retos de la educación matemática.

Dña. Rosa M. Ros: Y ahora "Ciencia en Acción".

Hubo además sesenta y ocho comunicaciones, treinta y tres talleres y ocho presentaciones en la sección del Zoco Matemático. Se entregó el *IV Premio Gonzalo Sánchez Vázquez* a D. **Antonio Roldán,** cuya dedicación a la enseñanza de las matemáticas fue presentada por D. Antonio Pérez y se realizó un emotivo homenaje a D. Miguel de Guzmán Ozámiz.

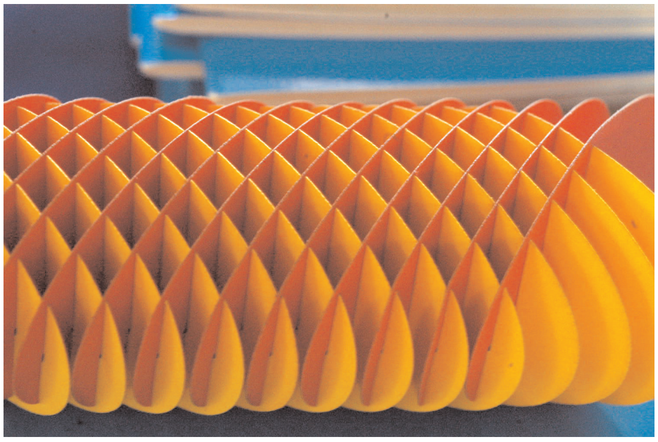
También se realizaron las siguientes exposiciones: *Instrumentos y Unidades de Medida tradicionales,* de la Sociedad Extremeña de Educacion Matematica *Ventura Reyes Prosper; Y después fue... ¡La Forma!,* Obra Social *La Caixa.* Fotografía Matemática: *Anda con ojo*, de Pilar Moreno, cedida por DivulgaMAT (Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas), integrado en la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

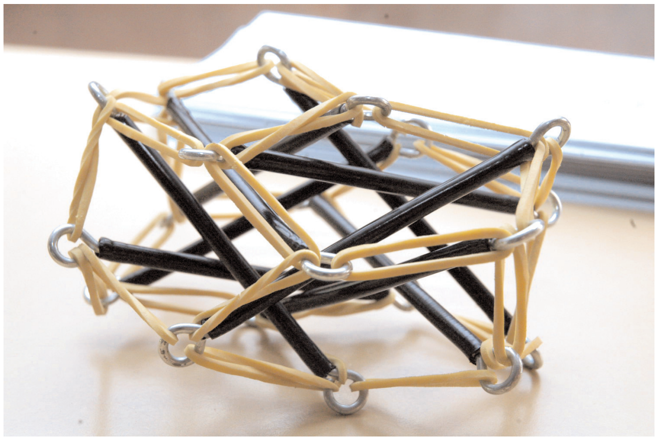
Y todo ello se acompañó con un amplio programa cultural.

El diario *La Tribuna de Albacete* obsequió cada día a los asistentes con un ejemplar del periódico.

El comité Organizador ha realizado una valoración positiva y gratamente satisfactoria de las XII JAEM siendo confirmada por las opiniones y mensajes que hemos recibido de aquellos asistentes que así lo han manifestado. Esperamos seguir recibiendo más sugerencias que sin duda les haremos llegar a los próximos organizadores: La SAEM *Thales.*

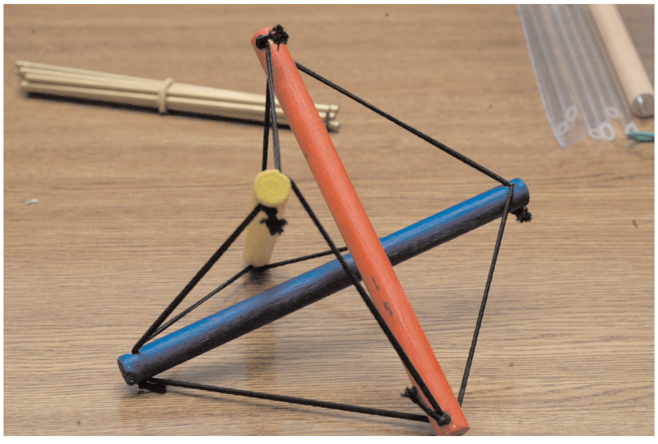
Nos vemos en Granada en el 2007. ■

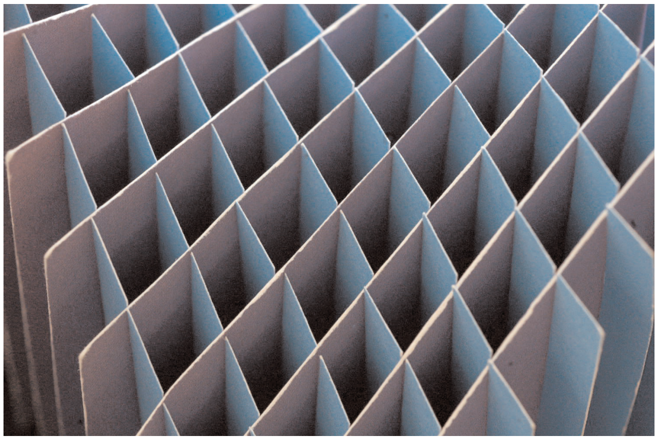




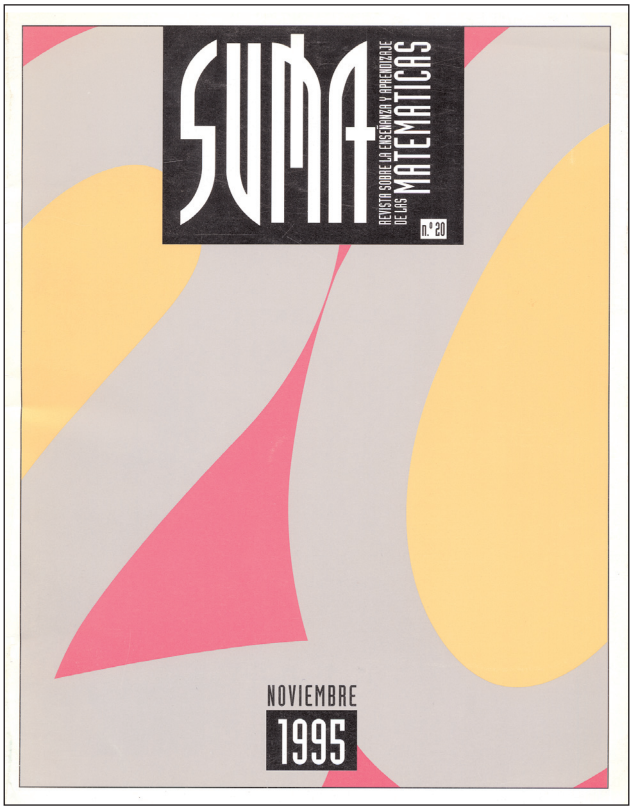
XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Granada, 2007





SUMA *Zaragoza:* 1995-2003



Directores: JULIO SANCHO ROCHER Y
EMILIO PALACIÁN GIL
Administrador: JOSÉ J. POLA GRACIA

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: 912 911 879
por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: ____________________ NIF/CIF: __________

Dirección: ____________________ Teléfono: __________

Población: ____________________ CP: __________

Provincia: ____________________ País: __________

Correo electrónico: ____________________ Fax: __________

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________	
☐ N.os sueltos ____________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ____________________

Código Cuenta Cliente: Entidad: |_|_|_|_| Oficina: |_|_|_|_| DC: |_|_| Cuenta: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

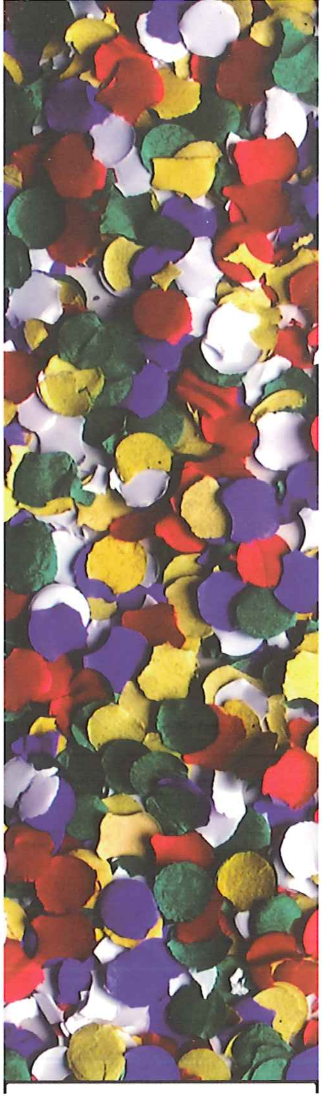
Banco/Caja: ____________________

Agencia n.º: __________ Dirección: __________

Población: __________ Provincia: __________

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X