SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 119-121

De cabeza

Las flores de Fibonacci

Una regla segura: cuando un matemático o un filósofo escribe con profundidad misteriosa, dice tonterías.

Alfred North Whitehead
An introduction to Mathematics

Casi todo el mundo ha oído hablar de Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci.

Sí, claro, el de la famosa sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,...; la de los girasoles, las piñas, las espirales, la del número de oro. Incluso hay un vídeo dedicado a él.

Son muchos menos los que saben que Fibonacci no pretendió en ningún momento armar este revuelo con una sucesión que, con el paso de los siglos, acabaría siendo la sucesión más famosa de la historia. De hecho, aparece como resultado de uno de los muchos y variados problemas que contiene el Liber Abaci, obra que catapultó a la fama a Leonardo en 1202. Es el problema 18 del capítulo 12, parte séptima, y en apariencia no es uno de las más interesantes:

> Un hombre tiene una pareja de conejos en un determinado local cercado, se quiere saber cuántos crían esa pareja en un año, cuando es natural que paran en un mes otra pareja, y en el segundo mes, los que nacen, parirán también.

Incluso el enunciado original no es muy afortunado.

El Liber Abaci es sin duda la más importante summa aritmética de la Edad Media. En esta obra, Leonardo introduce las cifras indo-arábigas en Occidente y proporciona las reglas para realizar las operaciones elementales con ellas. Su intención era brindar a los comerciantes una herramienta de cálculo mucho más potente que el tradicional ábaco, que, por cierto, a pesar de ser el protagonista del título no aparecerá en los contenidos.

Los títulos de los capítulos son bastante elocuentes para hacernos una idea del contenido de la obra:

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

Leonardo de Pisa (Fibonacci). Foto FMC

1. Lectura y escritura de los números en el sistema indo-arábigo.
2. Multiplicación de números enteros.
3. Suma de números enteros.
4. Resta de números enteros.
5. División de números enteros.
6. Multiplicación de números enteros por fracciones.
7. Fracciones.
8. Precios de las mercancías más comunes.
9. Comercio.
10. Relaciones de parentesco.
11. Conversión de Monedas.
12. Problemas y soluciones.
13. La regla de la falsa posición.
14. Raíces cuadradas y raíces cúbicas.
15. Proporciones, geometría y álgebra.

Sus fines y destinatarios estaban bastante claros. Aunque no deja de sorprendernos el capítulo décimo, sobre las relaciones de parentesco, tema nada baladí entre comerciantes de aquella época, y de cualquier otra, en la que aparecen repartos de herencias.

El capítulo 12 es el que dará a Fibonacci la popularidad de que goza en nuestros días. De hecho, este capítulo y el último contienen una colección de problemas que harían las delicias de cualquier aficionado a las matemáticas recreativas.

Como muestra, dos ejemplos que nos sonarán familiares:

- Un hombre entró a una huerta que tenía siete puertas y tomó un cierto número de manzanas. Al abandonar la huerta le dio al primer guardia la mitad de las manzanas que llevaba más una. Al segundo guardia la mitad de las manzanas que le quedaban más una. Hizo lo mismo con los guardias de cada una de las cinco puertas que le faltaban. Cuando se fue de la huerta le quedaba una manzana; ¿cuántas manzanas había tomado en un principio?

- Dos torres de 30 y 40 pies de altura están situadas a 50 pies una de otra. Entre ellas hay una fuente. Desde lo alto de cada torre, dos pájaros inician al mismo tiempo el vuelo hacia la fuente y la alcanzan simultáneamente. ¿Dónde estaba la fuente?

Más de veinte años después de la publicación del Liber Abaci, la fama de Leonardo como hombre sabio y versado en cálculo se había extendido por toda Italia. En 1225, Federico II, rey de las Dos Sicilias, ya coronado por el Papa como emperador, hace un descanso en Pisa y formula el deseo de conocer al famoso genio matemático. Federico II era un hombre culto y preocupado por las matemáticas y la filosofía, no como los gobernantes actuales, como demuestra que en su séquito viajaran como asesores Juan de Palermo y Teodoro, dos reputados filósofos. Se ve que es una costumbre que ha perdurado hasta nuestros días, donde podemos observar que la cabeza visible del principal imperio cuenta entre sus asesores con hombres sabios, reputados científicos y notables filósofos. En esa época Fibonacci pasaba de los 50 años; el joven emperador apenas contaba 30.

Para probar la sabiduría de Leonardo ante el emperador le plantearon tres problemas. De sus soluciones tenemos noticias gracias al propio Leonardo pues incluyó sus respuestas en otras dos obras suyas: Liber Quadratorum (la mayor aportación a la teoría de números entre Diofanto y Fermat) y Flos. Extraño título este último, aunque si lo vemos completo adquiere su sentido y de paso nos dice mucho del carácter de Fibanacci: Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometricam (Flor de soluciones de algunas cuestiones sobre números y geometría)... Porque las soluciones matemáticas también pueden ser como flores.

Primer problema

Encontrar un número de tal manera que su cuadrado aumentado o disminuido en 5 unidades siga siendo un cuadrado.

Segundo problema

Encontrar un número tal que su cubo más el doble de su cuadrado más 10 veces él mismo sea igual a 20.

Para ello sólo se podrán utilizar las proposiciones del Libro X de los Elementos de Euclides.

En lenguaje algebraico actual, resolver la ecuación

$$10x + 2x^2 + x^3 = 20$$

Tercer problema

Tres hombres se reparten al azar una suma de dinero. Después, el primero aporta a un fondo común la mitad de su parte, el segundo un tercio de la suya y el tercero un sexto de la suya. Dividen este fondo común en tres partes iguales y se lo reparten entre sí. Al final el primero tiene la mitad de la suma inicial, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte. ¿Cuál era la suma inicial?

Han pasado casi ocho siglos y los tres problemas de Juan de Palermo, y sus soluciones, siguen siendo auténticas flores matemáticas. E intentar resolverlos sin hacer trampas, es decir, como lo hizo Fibonacci, constituye un reto para cualquier matemático.

Aclaraciones y pistas

Del primer problema

Fibonacci descubrió pronto, como seguro que tú, lector, ya habrás deducido, que ningún número entero cumple esa condición. Así que el resultado tiene que ser una fracción.

Leonardo utilizó algunos resultados que tienen que ver con las ternas pitagóricas y con las identidades notables; en concreto, que $m^2 - n^2$, $2mn$ y $m^2 + n^2$ forman una terna pitagórica siendo m y n enteros y $0 < n < m$.

Y que

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

Combinando adecuadamente estos dos resultados podrás llegar a lo que injustamente se conoce como identidad de Fibonacci, auténtica llave para encontrar la solución.

Del segundo problema

Fibonacci dedujo enseguida que la solución es un número comprendido entre 1 y 2. Pero también afirmó que la solución no era una fracción, ni tampoco una magnitud inconmensurable de los tipos que Euclides recoge en el libro X de los Elementos. Por otra parte, aunque eso él no lo podía saber, aún quedaban tres siglos para que Tartaglia y Cardano atacasen el problema de la cúbica. Así que a Leonardo no le quedó más remedio que buscar una buena aproximación a la solución de la ecuación. No sabemos cómo lo hizo, pero obtuvo ésta, expresada además en notación sexagesimal:

$$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{30}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}$$

Utiliza algún método de aproximación de las soluciones, incluso un ordenador y descubrirás que Fibonacci era un auténtico genio.

Del tercer problema

Está claro que se trata de resolver un sistema de ecuaciones, con soluciones enteras. Fibonacci lo resolvió mucho antes de que se inventasen los determinantes... ¡Ánimo!

Es un excelente problema para plantear a los alumnos de 2º de bachillerato en lugar de los aburridos sistemas de siempre.

Postre

Y para postre, un problema que me mandó un antiguo alumno, que también tiene que ver con la teoría de números, en concreto con los números perfectos, tema que también estudió Leonardo de Pisa:

> Demostrar que no existen dos números naturales m y n tales que $3^m \cdot 5^n$ sea un número perfecto.

¡Suerte!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORENO R. (2004): *Fibonacci. El primer matemático medieval*, Nivola, Madrid, 2004

MARTÍN CASALDERREY, F.(2000): *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas del Renacimiento italiano*, Nivola, Madrid.

http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/Indizea.asp