SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 85-92

iMÁTgenes 19, 20 y 21

Por quinta vez puso cuatro motas de tinta en el papel, les puso nombres (A, B, C, D) y los unió con segmentos para formar un cuadrilátero. Luego señaló los puntos medios de sus cuatro lados y los conectó formando otro cuadrilátero (P, Q, R, S). Ahí estaba el problema. Ese cuadrilátero interior siempre resultaba ser un paralelogramo pusiera como pusiera los cuatro puntos originales. ¿Acaso había orden en el caos? Por un momento pensó que quizá había truco, que tal vez sucedía así porque la gente ponía los puntos de formas similares. Pero ya había probado configuraciones muy raras, incluso dejó que los segmentos del cuadrilátero ABCD se interceptasen, y siempre obtenía idéntico resultado. No, lo que parece cumplirse para cualquier caso no es ningún truco, sino un teorema que demostrar.

Como el tema de entonces en clase de matemáticas era la Geometría Analítica del plano consideró los vértices del cuadrilátero ABCD como los extremos de cuatro vectores de posición. Con ello los vértices del cuadrilátero interior PQRS pasaron a tener una relación cuantificada con aquellos: P=(A+B)/2, Q=(B+C)/2, R=(C+D)/2, S=(D+A)/2.

Pensó que PQRS sería un paralelogramo si sus lados opuestos eran paralelos. Un modo de verlo sería comprobar que los vectores PQ y RS lo eran. Unos sencillos cálculos le mostraron que los vectores PQ y SR tenían las mismas componentes: Q–P=R–S=(C–A)/2. Luego eran paralelos y el cuadrilátero construido con los puntos medios (PQRS) era un paralelogramo.

Había resuelto el problema, pero no se sentía satisfecha. El razonamiento era sencillo y no había cometido errores. Sin embargo, sentía que no comprendía el fenómeno. Esa resolución no le servía de explicación y lo que ella quería era comprender. Se pasó un buen rato concentrada en los dibujos sin que se le ocurriese nada hasta que acabó observando que podían completarse con algunas líneas más. ¿Significaba eso que no había usado todos los datos? Unió con segmentos los vértices opuestos del cuadrilátero original y aparecieron las diagonales: BD y AC. Ambas le salieron paralelas a los lados del cuadrilátero interior (PQRS).

Entonces, mientras, por culpa del ansia, recorría con el bolígrafo, una y otra vez, la diagonal (BD) y el lado del cuadrilátero interior paralelo a ella (PS), se le ocurrió algo. El exagerado grosor que acabaron teniendo esos segmentos los destacó sobre las demás líneas del dibujo y lo vio. Vio que el grupo formado por esos dos segmentos y el vértice (B) sobre el que se abrían le recordó diseños similares que había visto antes en la pizarra. Así que reprodujo aparte ese fragmento del dibujo. La nueva figura consistía en dos triángulos (APS y ABD), uno (APS) encajado en el otro (ABD). Puesto que P y S eran los puntos medios de dos de los lados (AB y AD) del triángulo mayor (ABD) el recíproco del teorema de la paralela media (si en un triángulo se traza una paralela a un lado por el punto medio de otro, dicha paralela divide el tercer lado en dos partes iguales) le aseguraba que PS era paralelo a BD, la diagonal del cuadrilátero.

Repitió lo mismo con relación a C, el vértice opuesto, y llegó a la conclusión de que QR era también paralelo a BD. ¡La misma diagonal! Ahí estaba el quid *de la cuestión. Los lados opuestos PS y QR del cuadrilátero interior eran paralelos a un mismo segmento, la diagonal BD. Luego eran paralelos entre sí y el cuadrilátero interior era un paralelogramo. Por fin entendía. Anotaría en su diario matemático eso que ella llamaba una experiencia matemática:*

Resolví el problema con un argumento algebraico. Esperaba que esa demostración, además de certificar el teorema, me explicase sus causas, pero no fue así. Quizá el teorema y el argumento que lo probaba correspondían a diferentes niveles de abstracción. El teorema se planteó en un ámbito geométrico euclidiano y elemental, no analítico. El uso de ideas de Geometría Analítica cambió el contexto del problema situándolo en un nivel más abstracto. Eso facilitó una demostración sencilla, pero no esclarecedora. Comprendí el fenómeno cuando fui capaz de desarrollar una prueba en un nivel similar al del planteamiento. Mi conclusión no es el rechazo a los argumentos algebraicos, sino la necesidad de ser consciente de lo que abstraen y comprimen y de ser capaz de descomprimirlos cuando sea preciso. Dicho de otro modo, una puede encadenar los pasos lógicos de una demostración y aceptarla como prueba, pero eso no significa que lo comprenda: demostrar no es explicar. ■

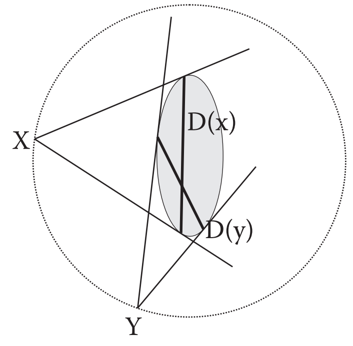
Miquel Albertí Palmer
imatgenes.suma@fespm.org

Acabo de transcribir en palabras una larga serie de imágenes. Por eso mi experiencia matemática es doble. Por un lado, los teoremas de los que hablo, el de la paralela doble y el famoso teorema de Varignon del paralelogramo. Por otra parte, la transcripción. No siempre logra uno el éxito deseado, pero sirve para aprender a pensar porque lo escrito es una línea con principio y fin. Para escribir hay que ordenar las ideas de modo sucesivo. Aunque se agrupen en segmentos más o menos extensos (párrafos, frases, palabras), hay que poner en fila el volcado de ideas. A eso nos obliga la linealidad de la escritura, a encadenar pensamientos. Lo básico para pensar con lógica.

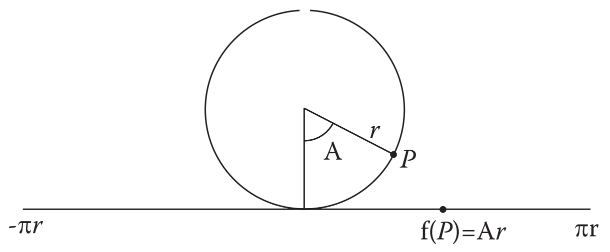
Cuando leas las masas rectangulares de letras y palabras de esta página, todo ello bidimensional, recuerda que tu lectura sigue una línea y que si acabas por recorrer con tu mirada todo el rectángulo de la hoja es porque esa línea excede su amplitud. La línea de tu lectura es ahora la línea de tus pensamientos. Y no sólo la de esta página, también la revista entera. Y la de cualquier libro. La medida hay que realizarla sin descontar los espacios en blanco entre frases o entre párrafos porque son los que, distinguiendo una palabra de otra, hacen posible la lectura. Tampoco hay que suprimir los puntos y aparte ni los cambios de línea para destacar un diálogo. En esos claros reposa la lectura y se facilita la comprensión del texto. Contándolo así, el texto de *El Quijote* editado por Ramón Sopena SA en 1966 (sin contar las ilustraciones) se extiende hasta los 3,5 km.

En la iMATgen 16 vimos cómo desde el exterior de un polígono regular podemos conocer el número de sus lados. La iMATgen se desarrolló en un contexto arquitectónico. Se construyen todo tipo de torres, pero de entre todas las posibles plantas que podrían tener, las más corrientes son las cuadradas, hexagonales, octogonales y circulares. ¿Dónde hay un campanario de planta triangular? Al contemplar una torre de planta circular, ¿cómo podemos estar seguros de que ciertamente su sección transversal es un círculo y no una elipse? Ahora no disponemos de lados ni de aristas para referenciar nuestros cálculos. Tampoco la visión de una sección de la torre ayudaría porque tanto la sección no ortogonal de un cilindro circular y de uno elíptico son elipses.

Lo único plausible es dar una vuelta alrededor de la construcción y observar si su diámetro aparente varía o no. Para hacerlo bien habría que describir una circunferencia con centro en la base de la construcción y eso es algo muy difícil. Sólo en una torre de base circular permanecerá invariable desde cualquier punto de vista que equidiste de su centro. En cambio, el diámetro de una torre de planta elíptica ese diámetro aparente no será constante:



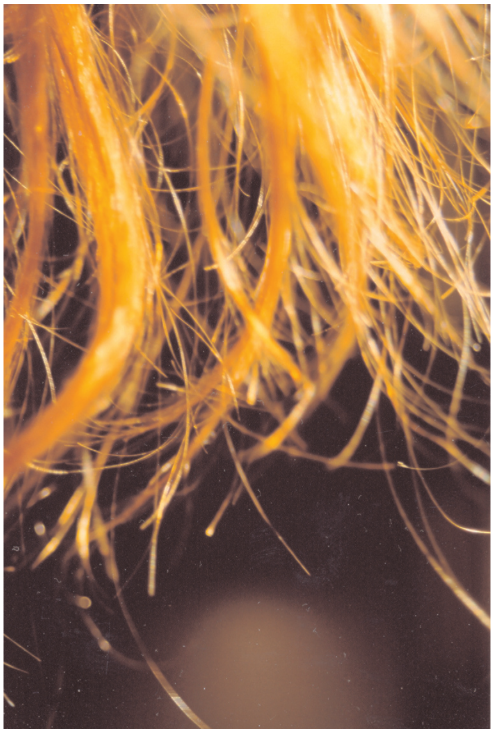
En la iMATgen 17 supimos que hay gente que vive dentro de tubos de bambú, aunque modificados. Esa modificación provenía de una doble transformación del cilindro. Primero, un corte longitudinal mediante el cual la sección circular del cilindro pierde un punto (uno, en la ficción; más de uno, en la realidad) mientras que el cilindro pierde una recta. Luego se extiende sobre el plano mediante una transformación continua cuya visualización transversal es:



El recuerdo de la iMATgen 18 plantea cuestiones interesantes. Supongamos que en una carrera de cien metros lisos los ocho atletas llegan igualados a la meta. ¿Puede la Foto Finish enfocarlos con nitidez sin que nadie salga movido? ¿Dónde habría que colocar la cámara? La profundidad de campo de la fotografía, es decir, el intervalo de enfoque nítido, debería ser de unos 8 metros (un metro por calle). Eso es casi imposible si la cámara está muy cerca de la pista porque el intervalo a enfocar iría desde 0 hasta 8 metros. Además, lo expuesto en la iMATgen 18 nos dice que la velocidad con la que el corredor más cercano sería percibido podría ser casi infinita y el riesgo de que saliese movido, confuso, por muy rápido que parpadee el diafragma, será muy grande. Conviene colocar la cámara a cierta distancia de la pista y a cierta altura, para evitar así que un atleta oculte a los demás. Al subir la cámara del suelo aumentamos también la distancia mejorando el enfoque. De hecho, la ubicación ideal podría calcularse teniendo en cuenta la velocidad de los atletas y los parámetros ópticos de la cámara. ■

iMATgen 19

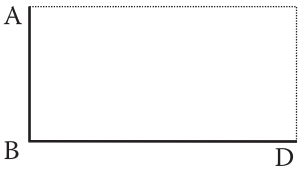
Cabellos brillantes de extremos desiguales. Despeinados, pero sin nudos. Ondas que la gravedad no domina por completo y que no han sido cortadas desde hace tiempo. Cabellos vivos, salvajes, libres. Si te imaginas cogiendo un mechón entre los dedos podrás entrever su finura y docilidad. Cabellos dorados de una melena femenina cuya realidad también incluye un cobrizo luminoso que sólo el Sol de una tarde calurosa puede encender.



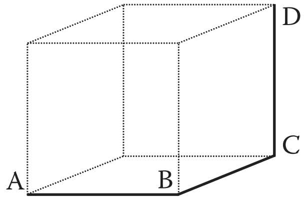
Mechones de curvas espaciales que la imagen reproduce en un plano. Comprender la imagen es comprender la diferencia entre una curva plana y una curva espacial. Eso transforma la imagen en iMATgen. Todo el mundo es capaz de distinguir una curva plana de una espacial, pero no es suficiente liquidar el asunto utilizando esos adjetivos. ¿Qué tiene una curva en el espacio que no tenga una curva plana? Eso es lo que vamos a analizar para entender mejor la imagen.

Para comprender cómo es una curva espacial y ver qué es lo que la distingue de una curva plana construiremos una a partir de un segmento. Sea *AD* ese segmento:

Este segmento es una curva unidimensional, no es una curva plana. Para apartarlo de la recta lo doblamos por un punto B entre *A* y *D* provocándole un vértice de ángulo recto:

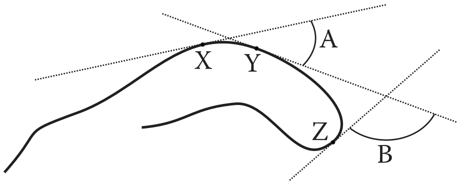


La poligonal *ABD* es una curva plana, bidimensional, que se desarrolla en el plano definido precisamente por esos tres puntos. Añadiremos una tercera dimensión a esa poligonal si doblamos uno de sus dos segmentos, *AB* o *BD*, por otro punto, pero siempre y cuando ese pliegue determine un plano distinto al definido por *A*, *B* y *D*. Por ejemplo, doblaremos *BD* por su punto medio *C* de manera que el plano *BCD* sea perpendicular al plano *ABC*:

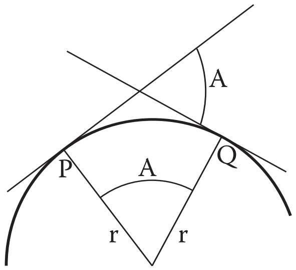


La poligonal *ABCD* obtenida es la curva espacial más esquemática y simple. Es tridimensional porque se desarrolla en dos planos, *ABC* y *BCD*, ortogonales. Con relación al segmento *BC*, los segmentos *AB* y *CD* están girados 90º uno con respecto al otro. En lenguaje corriente se diría que es una curva retorcida. He ahí el carácter espacial de una curva y lo que la distingue de una curva plana, que su plano tangente, el plano en el que se desarrolla, no es el mismo en todos sus puntos.

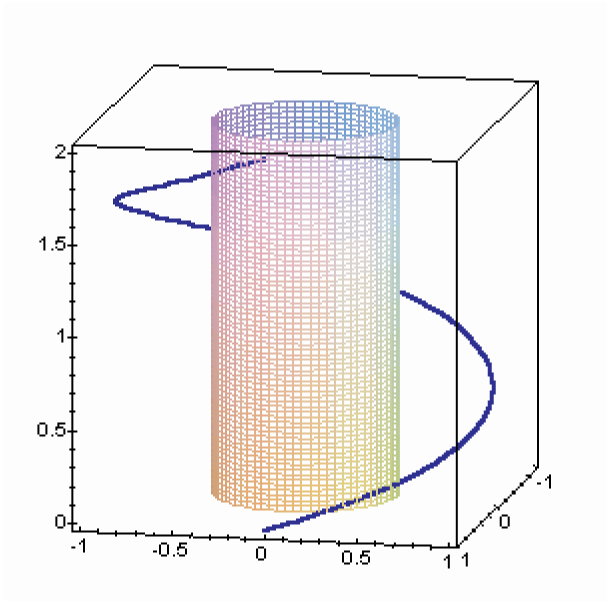
Hemos hablado de una curva poligonal aunque no sea ésta la idea de curva espacial más corriente. Ya sea considerada como un cúmulo de puntos o como el vestigio de un punto en movimiento, una curva es una línea que se aparta de lo recto, que cambia de dirección. Ese cambio de dirección se visualiza mediante la tangente a la curva. En la curva siguiente la variación de dirección entre *X* e *Y* es un ángulo *A*. Entre *Y* y *Z* es *B*:



La proporción entre la variación del ángulo de dirección entre dos puntos de una curva y la longitud del tramo en el que se produce esa variación recibe el nombre de *Curvatura media* (K_m) del tramo. La curvatura media de la más elemental de las curvas planas no poligonales, un arco de circunferencia, es constante. En efecto, si *P* y *Q* son dos puntos sobre un arco circular de radio r correspondientes a una amplitud de *A* rad (véase la figura), la variación de la dirección también es *A* porque las tangentes en cada punto son ortogonales a sus radios. *Y*, dado que la longitud del arco es $A{\cdot}r$, la curvatura media será $K_m=A/(Ar)=1/r$:



Del mismo modo que una curva plana precisa dos dimensiones para desarrollarse en un espacio bidimensional y abandonar la dimensión única de la recta, una curva espacial necesita la tercera dimensión para abandonar el plano. Entre las curvas espaciales más sencillas está la que se obtiene levantando uniformemente del plano una circunferencia de radio 1: (cos t, sen t, t). Las dos primeras componentes de esta expresión, cos t y sen t, determinan la circunferencia. La tercera coordenada, t, levanta cada punto hasta una altura t:



El plano en el que evoluciona una curva plana suave, sin picos, queda determinado por su vector tangente y el vector ortogonal a éste, el llamado vector normal a la curva. Es un plano común a todos los puntos de la curva. Pero en una curva espacial el vector tangente y el vector normal determinan un plano variable llamado plano *osculador*. Es el plano en el que evoluciona la curva y es distinto en cada punto. En la curva poligonal espacial *ABCD* de la que hemos hablado al principio, el plano osculador en el punto *B* (plano *ABC*) y el plano osculador en *C* (plano *BCD*) son ortogonales.

La variación del ángulo del plano osculador de una curva espacial determina su *Torsión*. Cuando el plano tangente no cambia de dirección la torsión nula y la curva es plana, sólo posee curvatura. La representada más arriba se llama *Hélice* y es común en ámbitos técnicos (escaleras de caracol, cuerdas, muelles) y naturales (rizos de la vid, enredaderas). En ella resulta la diagonal de un cuadrado enrollado en un tubo. En cada punto el plano osculador forma 45º con el eje del tubo, pero el ángulo *j* entre los planos osculadores de los puntos P(t_0) y P(t) es:

$$\varphi = \arccos\left(\cos^2\left(\frac{t_0 - t}{2}\right)\right)$$

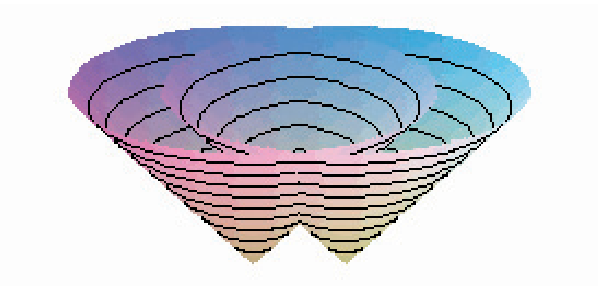
Esas son las curvas de la fotografía: hélices naturales cuya curvatura y torsión suelen modificarse a veces enrollando mechones de pelo más o menos gordos en rulos (tubos, cilindros) más o menos finos. La gravedad estira el pelo, pero no varía su aspecto helicoidal, ya que la Geometría Diferencial demuestra que toda curva espacial suave es tangente a una hélice. Las melenas nórdicas y andinas, muy lacias, ceden dócilmente a la gravedad. Sus cabellos de torsión y curvatura pequeñas caen lánguidos sin apenas liarse. En cambio, los rizos diminutos del cabello africano, de gran curvatura y torsión, resisten la caída. Todas son ***Melenas helicoidales***. ■

iMATgen 20

Justo en medio de la llamada *Avenida de los volcanes*, a los pies del Cotopaxi, está Latacunga. A 80 Km. hacia el oeste de Latacunga se encuentra Zumbagua. Desde aquí, continuando 10 Km más hacia el norte, se llega hasta la boca de un cráter. Pero las dimensiones del viaje no se reducen a esas porque también se asciende hasta los 4000 m de altitud. Y es allí arriba donde el cráter alberga una laguna de agua esmeralda llamada Quilotoa. A sus alrededores pastan las llamas que cuidan los niños, pastores jóvenes de los Andes ecuatorianos. Los de la foto eran cuatro hermanos. La mayor, la más alta, mandaba en el grupo. De acuerdo con las reglas de la colonización española deberían hablar castellano, pero por lo visto las grandes altitudes andinas son aún hoy reducto de cóndores y gente austera que solo el quechua puede sobrevolar.

Llaman la atención las miradas de los críos. Ninguno, salvo el más pequeño, mira a la cámara. Pero de todos, es la mayor la que más girada tiene la cabeza hacia lo que capta su atención. Los demás giran los ojos, pero apenas mueven la cabeza. Miran en escorzo, sobre todo el pequeño que busca la protección de su hermana. Difícil saber lo que están mirando, pero sí podemos saber cómo ven lo que miran y el efecto que tiene en su mirada el hecho de girar o no la cabeza. He ahí lo fundamental para comprender la imagen.

Tenemos dos ojos. Cada uno ve en un cono de luz determinado por un ángulo sólido, un cono, de amplitud A. Fuera de ese cono no hay visión. Dentro de él, en cada ojo, la visión es bidimensional. La tridimensionalidad se crea con la superposición, es decir, la intersección de dos imágenes, una correspondiente a cada ojo:



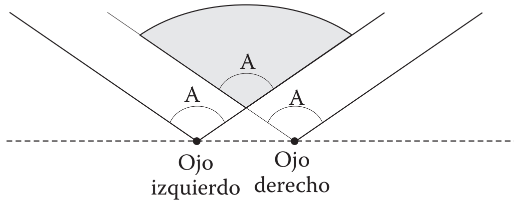
En la intersección de esos conos percibimos las cosas en tres dimensiones. Pero esa región de visión 3-D no es otro cono. Suponiendo que los conos tengan vértices en los puntos $P_1(-1,0,0)$ y $P_2(1,0,0)$ y que sus amplitudes sean de 90º. Las ecuaciones de los dos conos son

$$(x+1)^2+y^2=z^2$$
$$y(x-1)^2+y^2=z^2$$

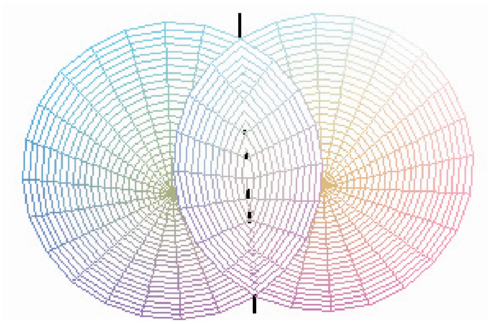
El sistema que forman tiene como solución:

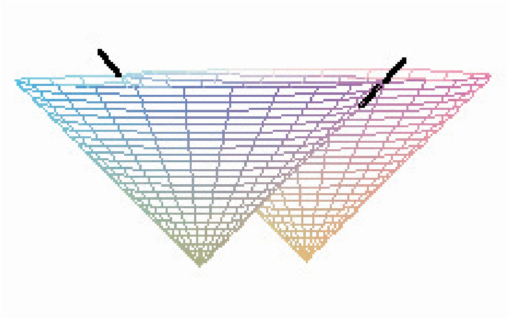
$$\left.\begin{aligned}(x+1)^2+y^2&=z^2\\(x-1)^2+y^2&=z^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=0\\z^2-y^2&=1\end{aligned}\right\}$$

Se trata de la hipérbola z^2-y^2=1 del plano YZ con vértice en (0,0,1), foco en (0,0,$\sqrt{2}$) y asíntotas $z=\pm y$. Por tanto, la región de visión *3-D* tiene perfil hiperbólico. Su amplitud horizontal coincide con el ángulo A:

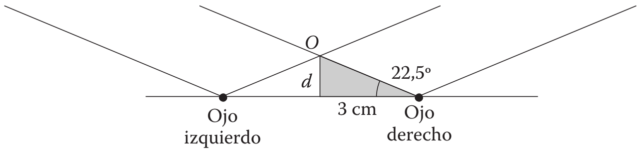


Pero la amplitud vertical viene determinada por esa hipérbola que se abre hacia dos asíntotas que forman un ángulo A. He aquí dos perspectivas distintas de esa región junto con su perfil vertical hiperbólico resaltado en azul:



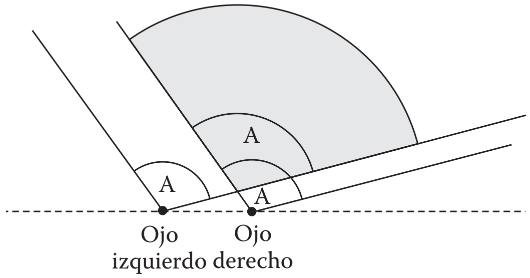


En el ojo humano el valor de A se acerca a los 135º. En mi caso particular, la distancia interocular es de 6,2 cm, lo que significa que el vértice O de mi región de visión 3-D está a una distancia $d=3{,}1\cdot\mathrm{tg}\ 22{,}5º=1{,}284$ cm:

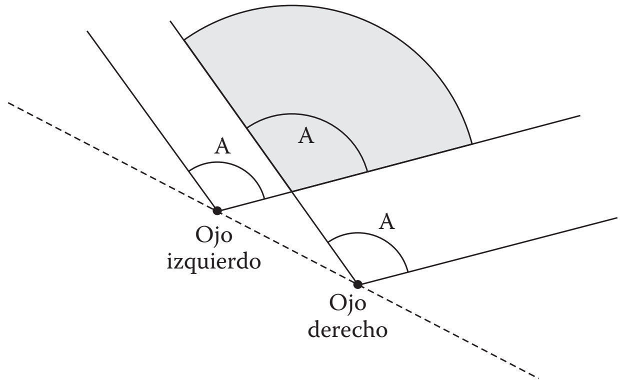


Ahí está mi 'tercer ojo'. El triángulo determinado por ese 'tercer ojo' y los otros dos constituye una zona de invisibilidad ínterocular que se agranda según la separación de los ojos y a medida que se disponen más hacia los lados de la cabeza, como sucede en los toros y, sobre todo, en los peces. Gracias a ello el torero puede posar la mano encima de su cabeza sin temor. El matador extiende el brazo hacia el cielo y luego lo baja manteniéndolo extendido, trazando un gran arco. El toro ve la mano del torero cuando apunta hacia el cielo y puede ver como ésta inicia el descenso, pero llega un momento en que la mano entra en esa zona invisible para el animal. El toro la pierde de vista y siente que algo se le ha posado en la frente.

Cuando el centro de nuestra atención se sitúa fuera de esa zona no percibimos las cosas con tanta claridad porque no las vemos en tres dimensiones. Nos vemos obligados a girar los ojos:



Y no sólo los ojos, también la cabeza porque, de lo contrario, la visión será distorsionada al encontrarse el objeto a diferente distancia de cada ojo:



Sólo la joven más alta ve bien claro lo que mira. Los demás verían mejor lo que miran girando la cabeza. Como sincero reconocimiento a Miguel de Guzmán tomaré prestado para esta iMATgen un título suyo: ***Mirar y ver***. No lo hay mejor. ■

iMATgen 21

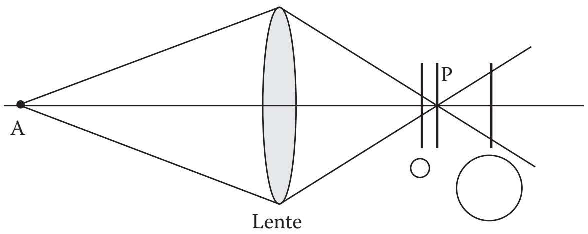
Círculos de colores rodeados de oscuridad. Blanco, amarillo, naranja, verde y rojo sobre negro. Discos que se interceptan formando figuras ahusadas. Destellos captados por una cámara fotográfica. Luces en la noche. Hay bombillas esféricas que se perciben como luces circulares, pero las hay también con otras formas. ¿Eran esféricas o circulares todas esas luces captadas por la cámara? ¿Tal vez los farolillos de colores que iluminaban una fiesta? ¿O tenían quizá formas diversas?

¿Qué hay realmente bien enfocado en la imagen? Entiéndase por enfocar el definir con claridad los perfiles de las figuras, no el hecho de centrar un objeto en un rectángulo, o sea, encuadrar. En la imagen no hay nada bien enfocado. Los contornos más claros se aprecian en círculos que no son nada, que son transparentes, fantasmagóricos. Esos círculos no parecen ser objetos sólidos, sino reflejos luminosos en un cristal.

Los objetos de los que provienen esos círculos son invisibles. Comprender la imagen pasa por responder dos preguntas: ¿Pueden proceder de objetos distintos? ¿Cómo se explica que todos tengan forma circular?

Uno de los aspectos primordiales a tener en cuenta cuando se hace una fotografía es el enfoque. La imagen que quedará impresa en la película pasa por una lente situada a cierta distancia de la película. Esa distancia determinará la nitidez de la imagen. Puesto que la película fotográfica es un plano, enfocar consiste en situar la lente a una distancia apropiada para que la escena captada se vea con la máxima claridad, sin zonas borrosas. De lo contrario, la imagen queda desenfocada.

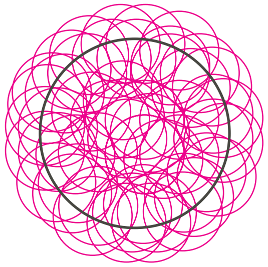
La escena fotografiada, de hecho, la luz de esa escena, se registra en la película fotográfica (sensible a la luz) mediante una proyección realizada por una lente convergente, el objetivo. Por ejemplo, fotografiar el punto A (véase la figura) significa recoger en la película la luz que procede de él. La lente recoge el cono de luz procedente de A y transforma su amplitud. Enfocar bien quiere decir colocar el plano de la película justo en el vértice del nuevo cono (P) en el que la lente ha transformado la luz que venía de A. De este modo la imagen del punto A en la película será otro punto. De lo contrario, será la intersección de un plano (la película) con un cono, es decir, un círculo. Ese círculo será tanto mayor o menor según la distancia de la película al punto de enfoque:



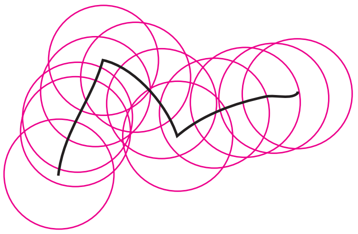
Los círculos que se forman cuando la película no se sitúa en la distancia de enfoque se llaman círculos de confusión. Debido a que el ojo humano tiene una precisión limitada y no puede distinguir entre un punto y un disco muy pequeño (alrededor de 0.2mm de diámetro), el error en el enfoque admite cierta tolerancia. Por tanto, si la película se sitúa muy cerca del plano de enfoque los círculos de confusión resultan imperceptibles. Pero cuando la distancia se hace demasiado grande, los círculos de confusión pueden llegar a ser enormes.

Esos son precisamente los círculos que aparecen en la fotografía. La imagen se tomó intencionadamente desenfocada. Pero la explicación no acaba aquí porque tanto la argumentación como la figura anterior se refieren a un único punto. Si el objeto a fotografiar no se reduce a un punto cada uno de los puntos que lo conforman genera un cono de luz. La suma de todos esos conos determina una imagen borrosa si el plano de la película no está en el lugar adecuado.

Si los discos luminosos de la imagen no provienen de puntos únicos, pero, pese a todo, son circulares, ¿cómo explicar su forma? Una explicación es que procedan de objetos circulares. En efecto, si trazamos un círculo de radio r en cada punto de un círculo de radio R, el resultado será otro círculo de radio $r+R$:



¿Y si el objeto original no es circular? En tal caso el desenfoque produce un círculo para cada uno de sus puntos. Por ejemplo, en el caso de una curva:

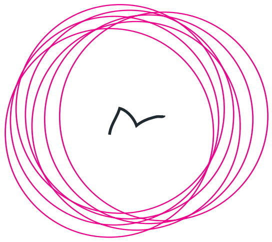


El resultado es una figura cuya forma es la misma que perfilar la curva original, una paralela a ésta. Los círculo de confusión centrados en los puntos de la curva $[x(t),y(t)]$ de extremos P y Q forman una región de perfiles $[X(t),Y(t)]$ paralelos a la curva original, uno por encima y otro por debajo:

$$\begin{cases} X(t) = x(t) \mp r \cdot \sin\left(\arctan\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\right) \\[2ex] Y(t) = y(t) \pm r \cdot \cos\left(\arctan\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)\right) \end{cases}$$

La franja determinada por ambos perfiles se cierra con arcos circulares centrados en P y Q, los extremos de la curva $[x(t),y(t)]$.

En el caso de que el original no sea una curva, sino una región, el desenfoque produce un perfilado paralelo al perfil de la región (véase SUMA 48: Introducción a las iMÁTgenes 13,14,15). El resultado puede acabar siendo un círculo cuando el desenfoque es muy exagerado, es decir, cuando la película se halla lo más lejos posible de la distancia de enfoque. Véase la curva anterior más desenfocada aún:



Cuanto mayor es el desenfoque, más circular es la representación del objeto fotografiado. Por tanto, es posible que los círculos de confusión sean desenfoques de realidades no circulares, como sucede aquí. El rojo, verde y amarillo de la imagen son los colores de un semáforo. Hice la fotografía de noche, en una calle, y apaisada. Después la giré 90º a la izquierda para que no pudiera adivinarse en seguida qué era. Si se devuelve a su posición girando la revista 90º a la derecha cobrará sentido. Los discos verdes son luces desenfocadas de un semáforo. En realidad, esas luces están formadas por una serie finita de destellos distribuidos en un círculo, por lo que su desenfoque circular sí procede de objetos también circulares. No ocurre lo mismo con los discos rojos. Éstos son desenfoques de las luces de posición y de frenado de varios automóviles, que no tienen forma circular. Las amarillas son luces de las farolas que iluminan la calle. La foto que ilustra esta iMATgen no es una imagen confusa, sino una imagen ***Con fusiones circulares***.