SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 79-84

Stomachion. El cuadrado de Arquímedes

A cualquier persona que haya tenido alguna vez relación con los puzzles conocidos por el nombre de tangram, enseguida se le viene a la cabeza una figura geométrica dividida en trozos, que permiten recomponer la forma original, y a la vez, construir una gran variedad de imágenes, en general de objetos diversos, pero también de elementos geométricos. Usualmente la figura de la que se parte es un cuadrado, pero también existen tangram que provienen de triángulos, rectángulos, hexágonos, círculos, e incluso de figuras más curiosas como el tangram de huevo o el tangram corazón (ver Alsina, Burgues y Fortuny; 1988).

Indudablemente dentro de estos puzzles geométricos el más conocido es el Tangram Chino, que nos ha hecho pasar buenos ratos y que para nosotros, como profesores, es un excelente recurso didáctico ya que nos permite trabajar con nuestros alumnos muchos bloques temáticos del currículo de Matemáticas: fracciones, porcentajes, números irracionales, longitudes, áreas… hasta demostrar un caso particular del teorema de Pitágoras.

A lo largo de los siglos XIX y XX muchas personas se han dedicado a crear tangram de todo tipo, como por ejemplo el conocido creador de juegos norteamericano Sam Loyd.

Todos los puzzles citados tienen una buena aplicación educativa, pues el mero hecho de realizar figuras obliga a manejar conceptos de equivalencia de áreas, simetrías, descomposición de una figura en piezas menores, suma de longitudes, etc.

A lo largo de los siglos XIX y XX muchas personas se han dedicado a crear tangram de todo tipo, como por ejemplo el conocido creador de juegos norteamericano Sam Loyd. Por ello puede llegar a pensarse que estos puzzles geométricos son relativamente recientes; sin embargo, con estas páginas queremos mostrar que eso no es cierto.

En este artículo presentamos el rompecabezas más antiguo (del tipo tangram) del que se tiene referencia escrita, y cuyo autor no es otro que el conocido matemático griego Arquímedes. Se le conoce por *Stomachion* (en los textos griegos), *Syntemachion* o *Loculus de Arquímedes* (en los textos latinos).

La historia del *Stomachion*

Este puzzle geométrico se describe en trozos de manuscritos con copias de obras de Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), correspondientes a un tratado que lleva ese nombre: Stomachion.

De todos es conocido que la mayoría de los escritos de los sabios griegos han sufrido grandes avatares para llegar a nuestros días. En general nos han llegado trozos que son copias de copias y que a lo largo de estos 22 siglos han ido apareciendo y desapareciendo misteriosamente como es el caso del *Palimpsesto* (un palimpsesto es un pergamino en el que el texto original ha sido lavado para poder escribir de nuevo sobre él). Este manuscrito sufrió la escasez de papel típica del

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

siglo XIII y en un afán de reutilización de sus hojas se *lavaron* los textos que contenía, copiados en el siglo X, entre los que estaba la única copia de El Método, para escribir encima rezos y lecturas religiosas. Después de siglos de uso, el manuscrito acabó en la biblioteca de un monasterio de Constantinopla. Johan Ludvig Heiberg, filólogo y erudito danés, lo encontró en 1906 en la biblioteca de la iglesia del Santo Sepulcro en Estambul. Y descubrió que debajo de los textos religiosos había símbolos matemáticos escritos en griego antiguo. Con lupa y fotografía transcribió gran parte de lo que contenía: una copia de los tratados de Arquímedes. Después el manuscrito volvió a perderse hasta los años 70, en que aparece en manos de una familia francesa, que lo vende en 1998 a un millonario americano por 2 millones de dólares. El manuscrito está actualmente depositado en el museo de Baltimore (Estados Unidos).

Entre todos los trabajos de Arquímedes, el *Stomachion* ha sido al que menos atención se le ha prestado. Todo el mundo pensaba que era un rompecabezas para niños, por lo que no tenía ningún sentido ni se encontraba explicación que interesara a un hombre como él.

El historiador de las Matemáticas Dr. Reviel Netz, después de estudiar el Palimpsesto, descubrió la razón de por qué este rompecabezas está junto a otros escritos de Arquímedes tan importantes como El Método, donde las Matemáticas y la Física son genialmente relacionadas. El Dr. Netz expone, después de traducir e interpretar los escritos de Arquímedes, que el *Stomachion* es utilizado por Arquímedes para escribir un tratado de Combinatoria (otros matemáticos que estudiaron los escritos de Arquímedes no podían pensar que en la antigua Grecia se tuviera conocimientos de Combinatoria, campo de las Matemáticas que despega con la llegada de la Informática).

El Dr. Netz afirma que Arquímedes no pretendía ensamblar las piezas de cualquier forma, sino que su trabajo va en la dirección de encontrar respuesta a la siguiente pregunta: ¿de cuántas maneras se pueden juntar las 14 piezas para formar un cuadrado?, contrastándola con el objetivo de la Combinatoria que es determinar las distintas maneras en que puede ser solucionado un problema dado. El Dr. Netz encargó a un grupo de expertos que trabajaran para encontrar la solución al reto que se planteaba Arquímedes: las maneras de unir las piezas de forma que se consiguiera un cuadrado.

El Dr. Guillermo H. Cutler, informático, diseñó un programa para que su ordenador diera la solución al problema planteado. En noviembre del 2003, el Dr. Cutler encontró las 536 maneras distintas de juntar las 14 piezas para formar un cuadrado, sin tener en cuenta las soluciones equivalentes producidas por las rotaciones, reflexiones o conmutaciones de piezas idénticas.

El rompecabezas *Stomachion*

El puzzle consiste en la disección de un cuadrado en 14 piezas poligonales: 11 triángulos, 2 cuadriláteros y un pentágono (ver figura 1).

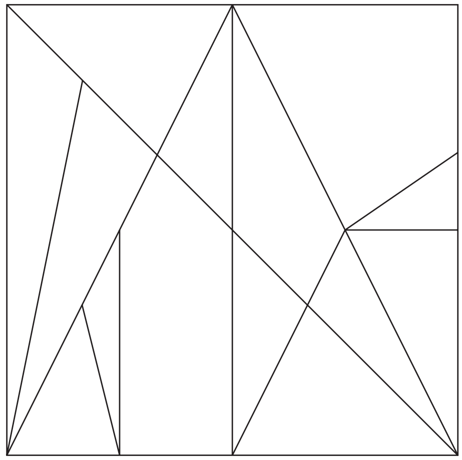


Figura 1. Puzzle *Stomachion*

A simple vista puede parecer que la división de las piezas es muy complicada, pero si superponemos una cuadrícula (procedimiento muy adecuado para trabajar con los tangram) veremos que la dificultad va disminuyendo. Basta incluir la disección del cuadrado en una cuadrícula de 12 unidades de lado para que se cumplan las siguientes propiedades:

Los vértices de todas las piezas son puntos de la cuadrícula, como se puede ver en el dibujo de la figura 2.

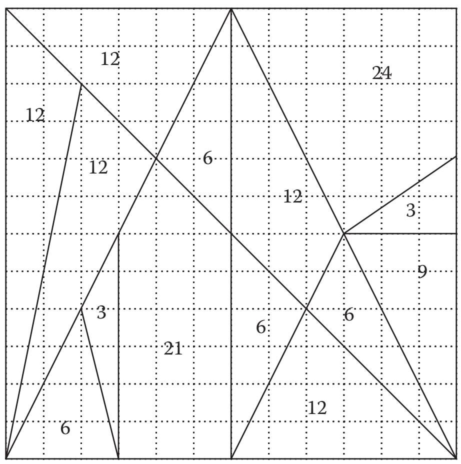


Figura 2. Puzzle *Stomachion* sobre cuadrícula

La superficie de cada pieza corresponde a un número entero de cuadrados unidad en los que está dividida la cuadrícula, según se observa en la figura anterior.

De la figura 2 puede obtenerse fácilmente qué fracción de la superficie total del cuadrado corresponde a cada pieza. Podemos verlo en la figura 3.

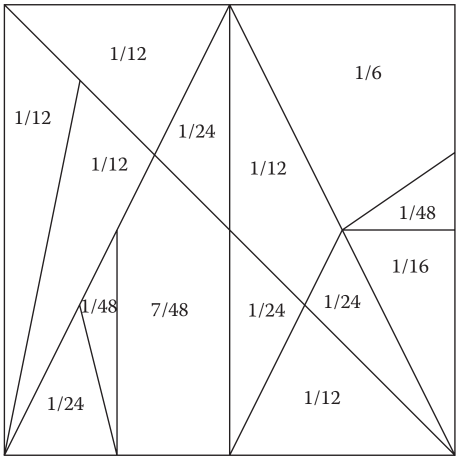


Figura 3. Fracciones de las distintas piezas

Los datos de las piezas están reunidos en la siguiente tabla:

N.º piezas	Tipo piezas	Área pieza (uds.)	Fracción cuadrado
2	Triángulos	3	1/48
1	Triángulo	9	1/16
4	Triángulos	12	1/12
1	Cuadrilátero	12	1/12
1	Pentágono	21	7/48
1	Cuadrilátero	24	1/6
14	Total del cuadrado	144	

Aplicación didáctica

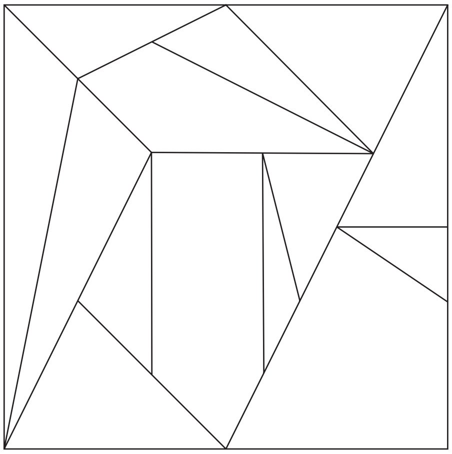
Lo interesante es cómo utilizar este puzzle en clase. Nosotros vamos a comentar aquellos aspectos que hemos tratado con los alumnos (algunos de ellos sacados de la documentación que hemos conseguido encontrar).

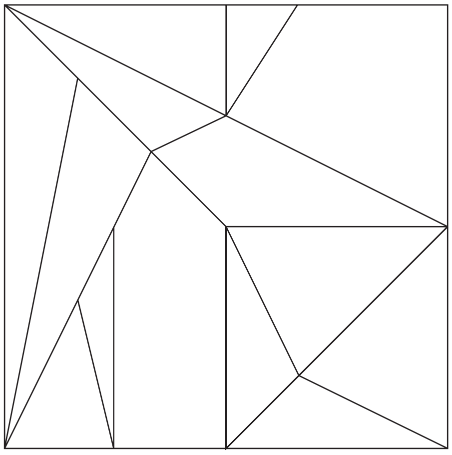
En primer lugar es interesante hacer una pequeña introducción histórica, sobre todo de su creador, Arquímedes, insistiendo en la importancia que daba a aplicar la matemática para resolver los problemas de la vida cotidiana (aunque en su época lo cotidiano fuese ser invadido por los romanos).

Como ya hemos hablado en otros artículos de esta sección, un aspecto importante es el diseño y construcción del puzzle en materiales diversos (cartón, panel, cartón pluma, acetato, etc.). Este aspecto puede ser tratado en colaboración con los compañeros de Tecnología, ya que puede representar un atractivo proyecto para cualquier curso.

En noviembre del 2003, el Dr. Cutler encontró las 536 maneras distintas de juntar las 14 piezas del puzzle para formar un cuadrado.

Una de las primeras formas de enfrentarse al puzzle es intentar reconstruir el cuadrado a partir de las piezas diseccionadas. Podemos asegurar que si no se tiene alguna solución por delante, este reto es muy complicado y en su desarrollo hay que aplicar muchos procedimientos matemáticos, sobre todo para ir completando ángulos rectos y uniendo longitudes de forma que aparezcan los lados del cuadrado. Y eso a pesar de existir 536 soluciones según comentamos antes. Algunas de esas soluciones podemos verlas a continuación.





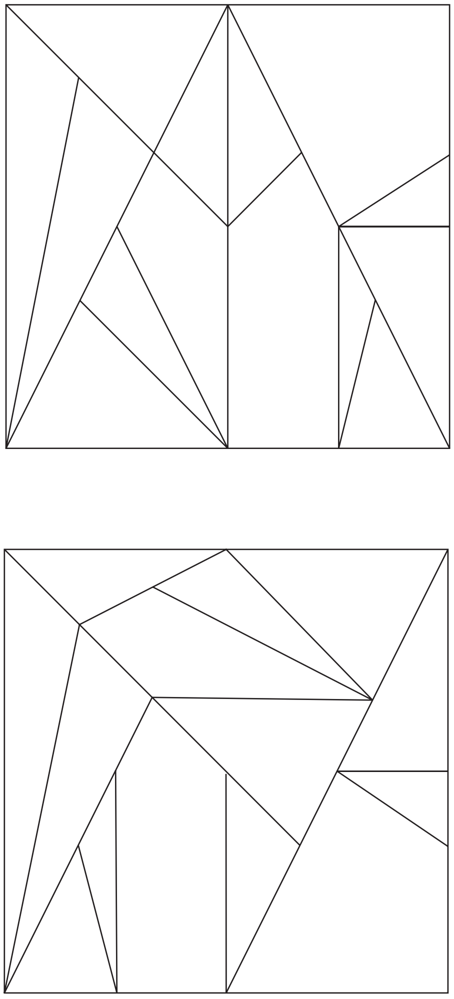
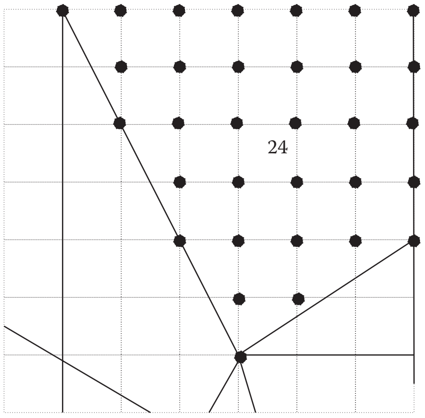


Figura 4. Algunas soluciones



Pieza de 24 puntos

En el desarrollo del trabajo es posible utilizar el teorema de Pick para calcular o verificar el área de cada una de las piezas o bien para intentar deducirlo. Recordemos que George Alexander Pick fue un matemático austríaco que nació en Viena en 1859 y murió en un campo de concentración nazi, alrededor de 1943.

El teorema de Pick dice que si un polígono P tiene sus vértices en una cuadrícula entonces su área es $A = (1/2)\cdot b + i - 1$, siendo b el número de puntos de la cuadrícula del borde poligonal e i el número de puntos interiores. Veamos un ejemplo.

La pieza de área 24 unidades cuadradas está representada en la figura siguiente. El número de puntos de la cuadrícula del borde poligonal es 14 y el número de puntos interiores 18. Por tanto:

$$A = (1/2)\cdot b + i - 1 = (1/2)\cdot 14 + 18 - 1 = 24$$

Si se pretende deducir la fórmula de Pick sería interesante mandar construir una tabla con todas las piezas, sus áreas (que están indicadas en la figura 2), el número de puntos del borde poligonal y el número de puntos interiores y a partir de ahí intentar hallar la relación que cumplen.

Se pueden establecer relaciones entre las distintas piezas ordenándolas según su área. Esta actividad, que en el Tangram Chino es casi trivial, en esta ocasión presenta mayor dificultad. Por supuesto es necesario calcular previamente las áreas utilizando la cuadrícula de la que hablamos al principio.

Con las piezas del Tangram Chino, al igual que con el Stomachion, es posible construir una serie de polígonos convexos.

Como se puede apreciar, entre las piezas hay triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, por lo que es muy interesante estudiar los ángulos de cada una de las piezas y comprobar, además, cómo se complementan unos con otros.

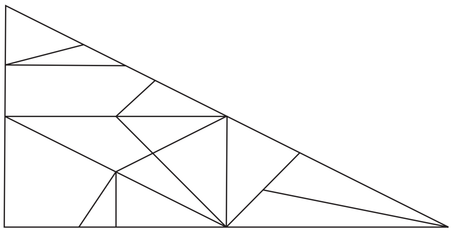
Se pueden componer figuras poligonales cuyas áreas correspondan a las fracciones del cuadrado con denominador 48 (se pueden obtener todas las fracciones desde 1/48 hasta la unidad).

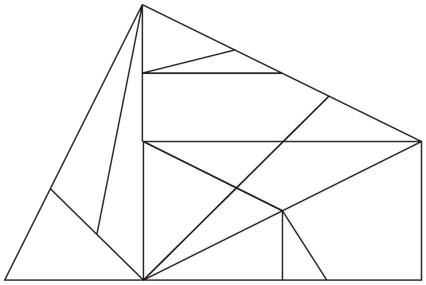
Es interesante obtener las longitudes de los lados de las piezas, utilizando la figura 2 y considerando el cuadrado de lado unidad. Enseguida aparecerán números irracionales.

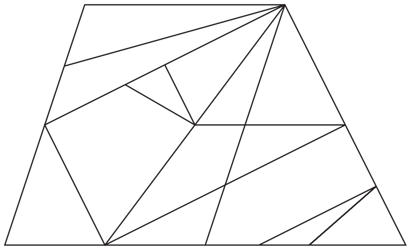
Es posible realizar composiciones con un número determinado de piezas de forma que las superficies que se consigan tengan determinadas propiedades numéricas. Antes de comenzar a trabajar con las piezas necesitamos estudiar esas propiedades para saber qué áreas tendrán las figuras resultantes. A continuación ponemos ejemplos de las que conocemos:

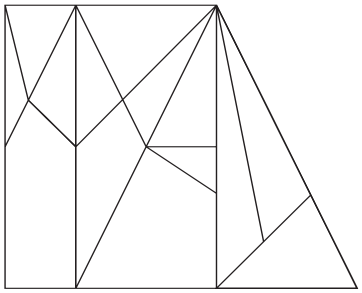
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos que tengan la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos escalenos de modo que la superficie de uno sea doble que la del otro.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar dos triángulos escalenos de modo que la superficie de uno sea triple que la del otro (el pequeño es un triángulo escaleno rectángulo).
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar tres triángulos (A, B y C) de manera que la superficie de C sea triple y la de B sea doble que la de A.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar tres polígonos de manera que tengan todos ellos la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar cuatro polígonos de manera que tengan la misma superficie.
- Reparte las 14 piezas del *Stomachion* para formar seis polígonos de manera que tengan todos la misma superficie.
- Si la superficie del cuadrado es de 144 unidades cuadradas, haz las siguientes composiciones:
  – Reparte las 14 piezas del puzzle para formar tres polígonos de manera que sus superficies sean tres números múltiplos de 12.
  – Reparte las 14 piezas del puzzle para formar cinco triángulos de manera que sus superficies sean cinco números múltiplos de 6.
- Reparte las 14 piezas del puzzle para formar dos cuadrados iguales y un pentágono cóncavo.

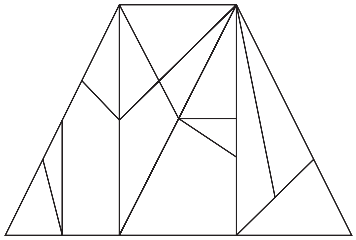
Con las piezas del Tangram Chino es posible construir una serie de polígonos convexos y con las piezas del *Stomachion* ocurre igual. Se pueden construir triángulos, cuadrados, rombos, rectángulos, romboides, trapecios, trapezoides, pentágonos, hexágonos... A continuación tenemos algunas posibilidades.

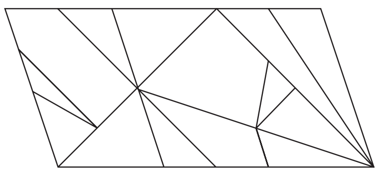

Triángulo

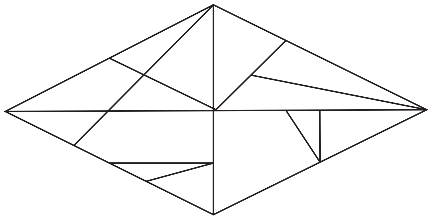

Trapezoide


Trapecio

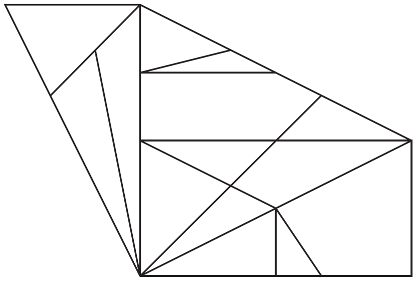

Trapecio rectángulo


Trapecio isósceles

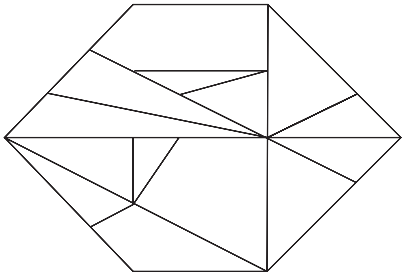

Romboide



Rombo

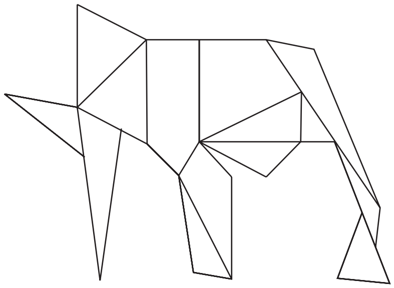


Pentágono

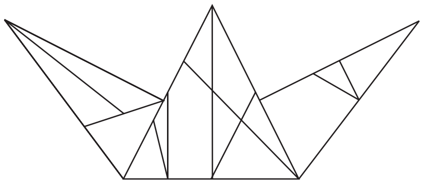


Hexágono

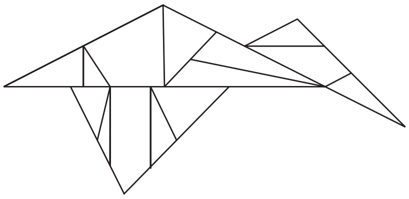
Igual que en la mayoría de Tangram, con las piezas del *Stomachion*, se pueden construir figuras no propiamente geométricas simulando a personas, animales y objetos. La cantidad depende del ingenio del que maneje el puzzle.



Elefante



Corona



Pájaro en vuelo

Por último queremos comentar un aspecto que puede desarrollar este puzzle, aunque nosotros no hemos llegado a ponerlo en práctica. Alrededor del rompecabezas puede organizarse una actividad interdisciplinar coincidiendo con alguna fecha señalada (semana cultural, final de trimestre, etc.) ya que pivotando en torno a la figura de Arquímedes hay muchos departamentos que podrían coordinarse para hacer algo en común. Se nos ocurren al menos las áreas de Matemáticas, Tecnología, Educación Plástica, Historia y Cultura Clásica. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C.; BURGUES, C. y FORTUNY, J. (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

TORIJA HERRERA, R. (1999): *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Editorial Nivola, Madrid.

http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html

Página de *The Mathematical Association of America* donde se pueden encontrar las 536 soluciones distintas.