SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 73-78

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La semilla que germinó en el desierto (III)

Acercarse al Triángulo de Pascal en Secundaria es tan fácil que resulta inevitable. Transites por donde transites, como si se tratara de esa Roma imperial a la que conducían todos los caminos, siempre está ahí. Al menos en esa parte del currículo en que se debería permitir a la generalización ser argumento de una trama en la que el guión corre a cargo del álgebra y en la que ni siquiera se deja a la geometría que aporte los efectos especiales o a la probabilidad que añada alguna dosis de intriga.

Los artículos que siguen a continuación se construyen sobre media docena larga de problemas que sugieren otros tantos senderos por los que acercarse, desde la didáctica y la historia, a ese objeto matemático cuyas propiedades constituyen un recurso casi inagotable, a pesar de que, año tras año, pasen desapercibidas al homogéneo y monolítico mercado del libro de texto[1]. La referencia, el contraste y el punto de encuentro de todos estos artículos seguirá siendo Pascal a pesar de que, como ya hemos visto, de éste, como de tantos otros temas de matemáticas, los autores que se ocuparon de él fueran pléyade. Pero nos tememos que aún deberá de pasar mucho tiempo hasta que deje de tener sentido nuestra reivindicación de que las ideas[2], como la poesía o la música han de ser del viento para que las respire la vida. Más bien al contrario, la autoría conceptual, mercantilizada en propiedad intelectual, en lugar de debilitarse parece gozar cada día de mejor salud[3].

Seis problemas a la búsqueda de argumento

Estas seis vías de conexión con una estructura rica en relaciones y generosa en sorpresas pretenden ser además la excusa para plantear ciertas dudas razonables que permitan poner en entredicho algunas convicciones bastante generalizadas.

No se trata de convertir la emoción en anécdota ni las transgresiones en una sugerente colección de monstruos de feria. El reto está en hacer de ellas materia de aprendizaje. En conseguir que la herejía forme parte natural del trabajo de nuestros alumnos y alumnas. En animarles a poner en duda los asertos más insoslayables y en convertir esa forma de proceder en una actitud. En trascender los límites de la imaginación para cultivar con denuedo el pensamiento divergente, y a través de él, la creatividad. Y, en esa tesitura, lo difícil, desde un punto de vista didáctico, es encontrar el atractor que los lleve a las fronteras de lo *prohibido*. Estos seis problema buscan ese argumento que, a través del Triángulo de Pascal, invite al alumnado a la especulación empírica primero, a la generalización después y, en último término, a un mundo, el de los fractales, cuajado de sorpresas. Su estela nos conducirá hasta el final de esta larga serie de artículos que hemos dedicado a una de las más ricas herramientas de *matemática elemental*.

Bóveda del mauseleo de Omar Jayyan, en Nishapur, Irán

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

Comencemos con un planteamiento clásico, conocido, formalista en esencia, uno de esos invariantes de la bibliografía del libro de texto de la que hablábamos antes. No se puede decir que sea un bonito problema pero es breve, de eso no cabe duda:

Coeficientes

¿Qué relación guardan entre sí los coeficientes de los desarrollos de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$... *etc.?*

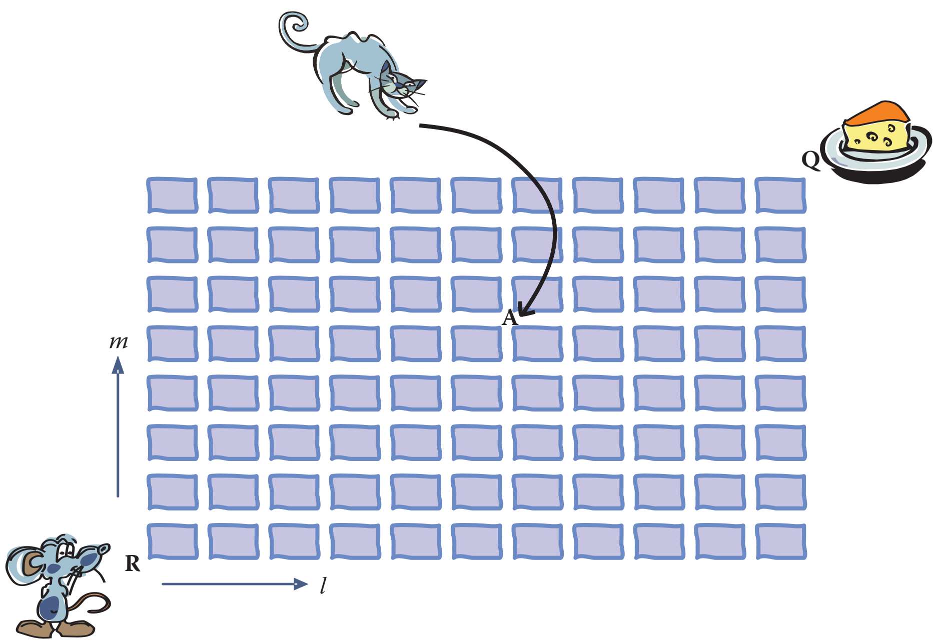
Si se trata de darle cuerpo al Triángulo Aritmético como verdad matemática, es decir de convertirlo en mónada inalterable, eterna, intemporal y abstracta y, por ende, con vida propia e independiente de cualquier otra realidad, sería innecesario cualquier otro enunciado. No así, si se le pretende dotar de sentido. Esta nueva[4] perspectiva nos obliga a cambiarlo y a no obviar la historia. Aunque para algunos historiadores de la ciencia el planteamiento escueto resulte suficiente, otros filósofos como Feyerabend entienden que la historia debiera ser tan compleja como la propia creación científica. Máxime si, como enseñantes, estamos obligados a analizar la esencia de la creatividad y no podemos hacer abstracción de las personas que participan de ella. Es de ahí, de esa ineludible y voluntariamente irrenunciable condición de profesores, de donde nace nuestro empeño en establecer, en torno al Triángulo Aritmético, ese paralelismo entre la creación científica a lo largo de la historia y la propia de nuestras aulas. Aun corriendo el riesgo de que esta presentación, fraccionada en artículos, dificulte seguir con fluidez esa concordancia.

La versión Dörrie

El enunciado que acabamos de formular, a pesar de que pudiera parecer sucinto en exceso, no deja de ser una versión ligeramente modificada del que Heinrich Dörrie denomina la *Expansión Binomial* de Omar Khayyam[5]. El noveno de sus *100 grandes problemas de las Matemáticas Elementales*[6]. La solución que aporta Dörrie, absolutamente algebraica y general, supone imaginar que se ha desarrollado $(a+b)^n$ como producto de n factores del tipo $(a+b)$ y, como consecuencia, que el coeficiente de $a^k b^p$ (con $k+p = n$) contabiliza todas las formas posibles de ordenar n letras en las que k de ellas son **a** y p son **b**. Lo que equivale al número de todos los posibles caminos de mínimo recorrido (n) que llevan de un extremo a otro de un rectángulo de dimensiones $k \times p$ cuando nos desplazamos, sin retroceder, por las líneas que lo conforman. Una versión de aula algo más sugerente, nacida de adaptar y novelar ligeramente otra que planteara el Grupo Cero, nos sirve aquí para introducir el segundo de los seis problemas a los que nos venimos refiriendo:

El ratón Melquiades

Os contaría una bonita historia sobre el ratón Melquiades, y Alisenda la ratona, pero os mentiría si os dijera que no fue la satisfacción del estómago la que guió los pasos de Melquiades aquel día en que olisqueó el queso prometido por Alisenda y, antes de emprender una búsqueda errática a través de las líneas de la cuadrícula que representan otras tantas calles,



El ratón Melquiades

pensó: ...¿cuántas formas diferentes habrá de llegar a él? Con el hambre que tiene, ni por un momento se le pasó por la imaginación retroceder.

En A *vive un gato, que es cojo pero no tonto, y si pasa Melquiades por sus bigotes, a buen seguro que se lo contará a sus nietos. ¿Qué probabilidad tiene Melquiades de salvar el pellejo en esta empresa? ¿Y de comerse el queso al que le había invitado Alisenda?*

Una variante, de este popular problema, se planteó en la VIII Olimpiada Matemática de Moscú[7] (1945): *Desde uno de los vértices de una retícula cuadrada parten* 2^{1000} *hombres. La mitad de ellos se encaminan en dirección* l*, y la otra mitad en dirección* m*. Al llegar al primer vértice, la mitad de ellos se encaminan en dirección* l*, y la otra mitad en dirección* m*. Lo mismo sucede en cada cruce. ¿Cuántos hombres llegarán a todos los cruces de la milésima serie?*

Proponer enunciados sugerentes y seductores es uno de esos fundamentos mínimos que debieran dar dignidad humana a nuestro trabajo didáctico.

Sobre la importancia pedagógica de proponer enunciados sugerentes y seductores ya hemos hablado en multitud de ocasiones. Es uno de esos fundamentos mínimos que debieran dar dignidad humana a nuestro trabajo didáctico. Una conexión inexcusable —interdisciplinar si se quiere— con el mundo de la literatura y, a través de él, con la fantasía y la imaginación.

Acerca de supuestos y sobrentendidos

En 1074, en su *Álgebra*, Omar Jayyam hace referencia a que, en otro lugar, había escrito sobre la disposición de los coeficientes del binomio en el Triángulo y acerca de una regla que le permitía calcular las potencias *cuartas, quintas, sextas y de grado más elevado* de un binomio[8], ligándolo así al álgebra y a la resolución de ecuaciones. Pero, ¿en qué contexto enmarcar esa afirmación? ¿Es posible que los árabes conocieran de los babilonios[9] el procedimiento aritmético para calcular raíces cuadradas? Un método antiquísimo que data, posiblemente, de 1.800 años antes de Cristo y que consistía en suponer que si x era el cuadrado cuya raíz (lado) queríamos calcular y sospechábamos que a era su valor aproximado, entonces $x=a^2+e$, es decir $x = (a+c)^2 = a^2 + e$, con lo que $c^2 + 2ac = e$. De esta forma, examinado el error, se trataba de encontrar una cantidad c con la que aproximar a. Si la aproximación era buena, c^2 debería ser insignificante respecto de $a\cdot c$ con lo que el nuevo valor de la raíz $a' \approx a+(e/2a)$ sería una buena aproximación con la que continuar el proceso recursivamente. Un método que pasaría a esta historia occidental de las matemáticas, de la que con tanta fruición bebemos, bajo el nombre de método de Herón (siglo I d. C.) y que, en este caso, hasta es probable que fuera el cauce a través del cual llegara, directa o indirectamente, a Omar Jayyam, dadas las evidentes conexiones que, desde al-Juwarizmi, existieron entre las obras de muchos autores árabes y las de Herón o Diofanto (≈ 250 d. C.).

Aunque también resulta razonable pensar que conociera el procedimiento hindú de Apastamba y Katyayana[10], emparentado con él, que aproximaba √2 con cinco cifras decimales exactas como suma de:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

No parece probable, sin embargo, que estuviera aludiendo a los trabajos de Halayudha en India en el siglo X o a la tradición que parte de al-Khalil ibn Ahmad (siglo VIII) que no hacen referencia al binomio.

Fueran cuales fueren los fundamentos en los que se apoyó Omar Jayyam, aunque haya razones para pensar que se pudiera haber planteado el problema que le adjudica Dörrie, es muy dudoso que utilizara un razonamiento combinatorio como el que él expone. La carencia de referentes bibliográficos del alemán dificulta sobremanera el conocer las razones en las que fundamenta su afirmación y ese detalle potencia, más si cabe, la fragilidad de su aserto. En cualquier caso, a nosotros, esta propuesta, novena de entre los *100 grandes problemas de las Matemáticas Elementales*, nos servirá de excusa para adentrarnos en los distintos orígenes de esta polivalente herramienta matemática y nos permitirá analizar el grado de conocimiento existente en el resto del mundo alrededor de esa fecha de 1074.

Ya hablamos en el artículo anterior del decisivo papel que jugó el Triángulo Aritmético en la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, de las aportaciones del *Chiu Chang* y del tratamiento en profundidad de Chin Chiu Shao (≈ 1250)[11]. Pero, lo que nos interesa aquí es la referencia que Yang Hui (≈1261) hace del trabajo de Chia Hsien contemporáneo de Jayyam. Esa alusión nos permite pensar que, alrededor de 1050, Chia había recopilado ya, en forma de tabla, los coeficientes del binomio hasta la sexta potencia a la que alude el insigne matemático árabe.

La obsesión de los historiadores de la ciencia por encontrar el origen último de un concepto o herramienta es tan fuerte que, casi sin darse cuenta, lo convierten en único. Esa preocupación casi enfermiza acaba por generar la sensación de que el resultado más importante es aquel que consigue adelantarse más en el tiempo. Pocas veces se toma en consideración que éste es un criterio incidental y que el nivel de desarrollo científico o técnico, cuando no económico y social, relativiza esa preeminencia temporal. En cualquier caso, lo que se obvia siempre sin excepción es que esa primera comparecencia del ingenio, desconectada de cualquier otra, tiene una importancia idéntica sea cual sea el lugar en el que se produce, como equiparable es, sin ningún lugar a dudas, el placer intelectual de quien consigue el resultado independientemente de su orden de prelación histórica. Crear en cada momento el ambiente propicio para que surja esa chispa que, a los ojos de sus protagonistas lo ilumina todo, debería ser nuestro reto como enseñantes.

La obsesión de los historiadores de la ciencia por encontrar el origen último de un concepto o herramienta es tan fuerte que, casi sin darse cuenta, lo convierten en único. Esa preocupación casi enfermiza acaba por generar la sensación de que el resultado más importante es aquel que consigue adelantarse más en el tiempo .

Y decimos esto porque, llegados a este punto, se podría pensar que fue el álgebra motor único y razón de ser del Triángulo Aritmético, del mismo modo que nuestros alumnos mantienen el convencimiento, por contra, de que está unido de forma exclusiva e indisoluble a la combinatoria. Ambas referencias resultan inevitables cuando se va a hablar de sus orígenes aunque, en este artículo, hayamos elegido dos propuestas didácticas cuyo desarrollo tiene que ver mucho más con la primera que con la segunda. Y es que, el problema de Alisenda y Melquiades, planteado en clase como un reto independiente, fuera de cualquier contexto que presuponga una vía de resolución predeterminada de antemano, heurísticamente hablando no es un problema de combinatoria[12], es un problema de recuentos.

Los recuentos en el origen árabe del Triángulo

Según Ahmed Djebbar [2001], la combinatoria surge en el entorno del mundo árabe desde dos perspectivas distintas. Una puramente matemática a partir de la propia actividad algebraica y astronómica y otra, las más fructífera, relacionada con la lingüística, la lexicografía, la gramática y la poesía.

Los antecedentes astronómicos los encontramos en el *Libro sobre las claves de la astronomía* en el que al-Biruni (—, 1048) enumera todas las fórmulas derivadas de un triángulo esférico y, antes que él, en la *Carta sobre la figura secante* en la que Thabit ibn Qurra (—, 901) utiliza tablas para enumerar y nombrar todos los casos de un mismo resultado geométrico. Dentro de este ámbito puramente algebraico de recuento sistemático de casos, Abu Kamil (—, 930), en el *Libro de las cosas raras en aritmética*[13], analiza de forma exhaustiva las soluciones de diferentes sistemas de ecuaciones indeterminados que expone bajo la forma de problemas de pájaros, siguiendo la tradición china e hindú en el enunciado y abordando la solución de forma diferente. Su modelo didáctico, ¡hace diez siglos!, presenta un marcado paralelismo con algunas tendencias didácticas actualmente en boga: una sucesión de ejercicios, cada vez más complejos, en los que se expone de forma detallada cómo llegar a la solución y en los que ésta se expresa como una enumeración ordenada de un conjunto de enteros.

Sin abandonar este marco algebraico, as-Samaw'al (—, 1175), en su *Libro luminoso sobre el álgebra* expone de forma retórica la fórmula del binomio y da la tabla que permite el desarrollo de $(a+b)^n$ hasta el valor n=12, añadiendo que se podría prolongar indefinidamente sin más que aplicar la fórmula

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$$

Al comienzo de su obra, el autor, explica que ha tomado la fórmula de al-Karaji (—, 1023), pero el texto al que hace referencia es, hasta el momento, desconocido. Sin embargo, esa alusión nos permite suponer[14] que los árabes conocían el desarrollo binomial para exponentes enteros cualesquiera al menos desde principios del siglo XI. No podemos saber si fue al-Karaji su inventor o cuales pudieron ser sus fuentes que en cualquier caso parecen preceder a Omar Jayyam. De hecho no existe en Youschkevitch [1976], Roshdi Rashed[15] [1977] o Ahmed Djebbar [2001] referencia alguna al problema de Omar Jayyam y mucho menos a una solución del tipo Dörrie que, indudablemente, hubiera sido favorecida por un simbolismo algebraico que tardaría siglos en llegar. Pero así se insinúa la historia muchas veces. Con una frase que a nada compromete se alimenta el subconsciente colectivo y se mitifican algunos de sus protagonistas. Se puede argumentar que es un pobre ejemplo, dada la escasa popularidad de la que parece gozar el texto, pero cuidado: se publicó, en alemán, en 1958 bajo el título *Triumph der Mathemathik*, se tradujo al inglés en 1965 y, que sepamos, se ha distribuido en EEUU, Inglaterra y Canadá.

De Marruecos a Irán

En el ámbito de la lingüística sería al-Khalil ibn Ahmad (718, 786) el precursor[16] del análisis combinatorio. Sus estudios lexicográficos y métricos contienen las primeras investigaciones y cálculos de tipo combinatorio que se conocen. Su objetivo era tratar de determinar cuántas y cuáles eran las posibilidades que ofrecían las 28 letras del alfabeto árabe a la hora de formar palabras de 2, 3, 4 o 5 letras. Después de él, especialistas en métrica como Akhfash (—, 793), gramáticos eminentes como Sibawayh (—, 796) e Ibn Jinni (—, 1000) y lexicógrafos como Ibn Durayd (—, 933), abordaron el mismo problema con las especificidades propias de la lengua árabe sobre el uso de vocales[17]. Unos estudios combinatorios que servirían a al-Kindi, en el siglo IX, para desarrollar la criptografía.

Es de esta larga tradición de tentativas de enunciado y justificación de fórmulas relacionadas con la lengua, de la que partirá el matemático magrebí Ibn Mu^{c}nim cuando, en el siglo XIII, escriba *La ciencia del cálculo*. La primera obra conocida en la que aparece un capítulo autónomo dedicado a la combinatoria. En él expone reglas generales, suficientemente demostradas según los criterios de la época, que permiten calcular no sólo el número de palabras que genera una determinada cantidad de letras en lengua árabe sino en cualquier otra, sea cual sea la longitud de su abecedario.

Ibn Mu^{c}nim se plantea cuál es la cuantía de tintes diferentes para la seda que se pueden obtener a partir de varios colores primarios, lo que le servirá de excusa para determinar el número de combinaciones de n *objetos tomados de* p *en* p.

El primer problema, en el que Ibn Mu^{c}nim se plantea cuál es la cuantía de tintes diferentes para la seda que se pueden obtener a partir de varios colores primarios, le servirá de excusa para determinar el número de combinaciones de n objetos tomados de p en p. Pero resulta aún más novedosa la forma de obtener este número a partir de la construcción de una tabla numérica triangular. Esa es, de momento, la primera vez que el famoso triángulo aritmético aparece como resultado de un trabajo estrictamente combinatorio.

Ibn Mu^{c}nim tratará también el problema de las permutaciones, con y sin repetición, y de las combinaciones con repetición. Pero será a mediados del siglo XIII cuando Nasir al-Din al-Tusi (1201, 1273) intente responder matemáticamente a uno de los grandes problemas metafísicos del Islam: ¿cómo es posible que una infinidad de cosas emanen del primer y único Principio? En el transcurso de su demostración calcula

Pero resulta aún más novedosa la forma de obtener este número a partir de la construcción de una tabla numérica triangular. Esa es, de momento, la primera vez que el famoso triángulo aritmético aparece como resultado de un trabajo estrictamente combinatorio.

$$\sum_{k=1}^{12}\binom{n}{k},$$

enuncia la propiedad

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

y efectúa la suma

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$

para valores concretos de m, n y p. A finales del siglo XIII las relaciones combinatorias de los términos del triángulo están definitivamente establecidas. En esa misma época, otro matemático magrebí, Ibn al-Banna retomará estos resultados y enunciará una fórmula[18] que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al triángulo. Mientras tanto, en Irán, y a principios del XIV, al-Farisi (—, 1319) utiliza el Triángulo Aritmético para determinar los órdenes numéricos, adelantándose notablemente a Pascal, a quien se le atribuye el resultado[19]. Determina así que, para formar el n-ésimo número figurado de orden k, puede recurrirse al siguiente criterio combinatorio:

$$F_n^k = \sum_p^n F_p^{k-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

En palabras de Djebbar, cabe pensar que a principios del siglo XIV una nueva disciplina, la combinatoria, perfectamente diferenciada de la aritmética, surge presta a desarrollarse por completo en el mundo islámico, aun cuando, ese desarrollo se viera truncado por la decadencia científica que acompañó el alumbramiento de los primeros tratados independientes de esta materia.

To be continued...

¿Dónde queda Pascal tras todo esto? Es verdad que hemos hecho que su sombra sea alargada, pero es necesario determinar con cierta precisión qué es realmente lo que aportó a la comprensión y conocimiento profundo de esta herramienta matemática que lleva su nombre. ¿Y dónde están los alumnos y alumnas que pretendemos que participen en esta historia colectiva de creación científica? A ambos dedicaremos la próxima entrega... ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a la ya referenciada en los dos artículos anteriores:

DJEBBAR, 2001, *Une histoire de la science arabe*. Éditions du Seuil. París.

YOUSCHKEVITCH, A. P., 1976. *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*. Editorial Vrin, París.

USPENSKI, V. A., 1978. El triángulo de Pascal. Editorial MIR, Moscú.

MORENO CASTILLO, R. 2002. Omar Jayyam. Poeta y matemático. Editorial Nivola, Tres Cantos, Madrid.

NOTAS

1 Hasta *El Corte Inglés* es consciente de ello. Este año ha titulado su reclamo publicitario: Libros de texto. Uniformidad colegial.

2 Las matemáticas entre ellas.

3 Pedimos disculpas si herimos la sensibilidad del lector con este tipo de reivindicaciones tan trasnochadas como denostadas en estos momentos por atentar contar el pétreo modelo neoliberal que tan incuestionable resulta en occidente.

4 Nueva, sí; al parecer siempre nueva, eternamente nueva.

5 Obtener la potencia n-ésima del binomio $a+b$ en potencias de a y b cuando n es un número positivo cualquiera. Enuncia Dörrie.

6 Heinrich Dörrie, 1965. *100 Great problems of Elementari Mathematics Their history and solution*. Dover, New York.

7 Uspenski [1978].

8 Boyer [1986] y Gheverghese [1996].

9 Una aproximación de la que dispondría Tolomeo 2000 años después en su tabla de cuerdas.

10 Sulbasutras (500 a. de C.).

11 Gheverghese [1991, pág. 248] opina que hasta Horner y Rufini no habría un avance sustancial sobre este tema.

12 Para los profes sí, porque lo conocimos como un ejercicio más de combinatoria. No insistiremos en la diferencia entre un problema y un ejercicio, ni analizaremos en qué momento un problema deja de serlo y pasa a ser ejercicio, pero sí lamentaremos el placer que nos robó un planteamiento heurístico tan ruin, el del ejercicio, para un problema tan bonito.

13 Una obra de la que se conoce una copia árabe realizada entre 1211 y 1218 por al-Gulfari y que sería traducida al hebreo antiguo, al castellano y, posiblemente, al latín.

14 Youschkevitch [1976].

15 R. Rashed fue el traductor al francés de la obra matemática de Jayyam.

16 Con las reservas que el conocimiento histórico impone a estas primicias.

17 En esta misma época (finales del siglo X) y en la India, Halayudha estudia distintas combinaciones de sonidos y agrupa en forma triangular (meruprastara) los coeficientes del binomio.

18 En modo alguno puede atribuirse la primicia histórica a Pascal. Pero, de las aportaciones del filósofo francés a la combinatioria hablaremos en próximos capítulos.

19 Pascal reivindica como propia esta denominación haciendo referencia a las progresiones aritméticas de orden 1, 2, 3, etc. que aparecen en el Triángulo y de las que expresa su término general al determinar el valor de una célula cualquiera del mismo.