SUMA 50
Noviembre 2005, pp. 53-63

Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci

Las fracciones continuas, una de las herramientas más utilizadas a lo largo de la historia de las Matemáticas, han sido por completo apartadas del currículo de secundaria. En este trabajo se desarrolla una propuesta de enseñanza-aprendizaje en la que se utilizan como recurso didáctico. Mediante la utilización de modelos geométricos, los alumnos conjeturan sobre las propiedades elementales de estas fracciones y descubren el conjunto de los números metálicos, cuyo representante más conocido es el número de oro. En el proceso seguido, las sucesiones generalizadas de Fibonacci desempeñarán un papel fundamental.

The continued fractions - one of the most used tools throughout the history of Mathematics - have been entirely relegated from secondary school level. In this essay we carry out a proposal of learning and teaching in which they are used as a didactic resource. By means of geometrical patterns, the students conjecture about the elementary properties of these fractions and they find out the Metallic Means Family, whose best-known member is the Golden Mean. The generalized Fibonacci sequences will play a fundamental role in the followed process.

En Teoría de números, los números de Pisot-Vijayaraghavan se definen como el conjunto de números reales algebraicos mayores que 1, cuyos elementos conjugados tienen módulo menor que la unidad. Forman parte de ese conjunto de números las soluciones positivas de las ecuaciones

$$x^2 - nx - 1 = 0 \quad n = 1,2,3,\ldots$$

que constituyen una clase de números irracionales objeto de recientes investigaciones en Arquitectura y que han sido bautizados como números metálicos[1] El nombre se debe a que constituyen la generalización del número de oro.

Este trabajo es una muestra más de cómo el razonamiento geométrico puede servir de puente entre la Teoría de números y el Álgebra. El punto de partida son las fracciones continuas, uno de los más antiguos conceptos de la Teoría de números, que considerado desde el punto de vista geométrico, basándonos en el concepto del *gnomon*[2] de Aristóteles, nos conduce de forma intuitiva y natural a un concepto tan actual como es el de número metálico. En el proceso quedará patente su estrecha relación con las sucesiones recurrentes de Fibonacci.

Empecemos recordando algunas definiciones de las fracciones continuas. Una fracción continua es una expresión de esta forma

$$b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}$$

en donde

$$a_i, b_i \in \mathbb{Z}$$

Si para cualquier i se cumple $a_i = 1$ y b_i es entero positivo, la fracción continua se denomina simple. Si b_i es entero positivo, pero $a_i = -1$ se denomina reducida:

Fracción continua general

$$6 + \cfrac{2}{7 - \cfrac{1}{3 + \ldots}}$$

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete

Fracción continua simple

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\ldots}}$$

Fracción continua reducida

$$2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2-\ldots}}$$

Si existe un número natural k, verificando las condiciones $b_i=b_{i+k}$ y $a_i=a_{i+k}$, para todo i, la fracción continua se dice que es periódica pura. Si esas condiciones se satisfacen a partir de un cierto i, simplemente se llama periódica. La fracción continua se dice finita, cuando existe un n_0 tal que para todo $n>n_0$ se verifica $a_n=0$. En caso contrario se dice infinita.

La fracción continua en realidad está representando una sucesión de números racionales, los llamados convergentes de la fracción continua, que se definen de esta manera:

$$C_1=b_1 \quad C_2=b_1+\frac{a_2}{b_2} \quad C_3=b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}},\ldots$$

Si la fracción es simple, la sucesión C_1, C_2, C_3, ... siempre converge a un número real que queda determinado por esa fracción continua, ya que la representación es única. Sin embargo, usar en general el término *convergente* es ciertamente un abuso de lenguaje, pues en general cualquier fracción continua no converge. Por ejemplo, para el caso

$$2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cdots}}}$$

$$C_1=2, C_2=1, C_3=0, C_4=2-\frac{1}{0}, C_5=2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_3}}\rightarrow 2,$$

$$C_6=2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_4}}\rightarrow 1, C_7=2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{C_5}}\rightarrow 0, C_8=2-\frac{1}{1-0}\ldots$$

Las fracciones continuas finitas aparecen muy pronto en la historia de las Matemáticas. El hindú Aryabhata (476-550) ya las utiliza para resolver ecuaciones diofánticas. Más tarde, en el siglo XVI, los matemáticos italianos Bombelli y Cataldi encuentran aproximaciones de raíces cuadradas por medio de fracciones continuas infinitas. Esto supuso un gran hallazgo, pero ni ellos ni ningún matemático de la época se dedicó al estudio de sus propiedades. Habría que esperar un siglo más, a Wallis (Opera Mathematica, 1695), que comienza a dar los primeros pasos y más tarde a Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) y Lagrange (1736-1813), que establecen definitivamente sus fundamentos teóricos.

La historia de las fracciones continuas en el aula de Secundaria ha seguido una trayectoria verdaderamente desafortunada y, como se verá en este trabajo, tremendamente injusta.

En la antigua FP, las fracciones continuas aparecían en los planes de estudio de las ramas técnicas, pero con escaso protagonismo, por el enfoque excesivamente clásico que recibían.

> *El hindú Aryabhata (476-550) utiliza las fracciones continuas para resolver ecuaciones diofánticas.*

En BUP no aparecían explícitamente. Desprovistas de utilidad, por inercia siguieron apareciendo en los libros de texto, pero degradadas a mero ejercicio de *compleja elegancia* para practicar el cálculo de fracciones. Puede parecer que algo tan vacío de contenido no merezca un lugar en el currículo de la LOGSE, pero nada más lejos de la realidad.

En este trabajo no se pretende desarrollar una unidad didáctica sino sólo presentar una propuesta metodológica que recoge una secuencia de actividades que permite trabajar indistintamente diversos conceptos y procedimientos de distintos bloques de contenidos del currículo de 4º de ESO, en concreto de álgebra, análisis y geometría, de forma unificada. Todas las actividades que se proponen pueden ser realizadas por alumnos de 4º de ESO. La formalización de los resultados se puede abordar en Bachillerato.

La resolución de un sencillo problema de embaldosado conduce a una fracción continua finita y sugiere un modelo geométrico para su representación, convirtiendo automáticamente a las fracciones continuas en un sorprendente recurso didáctico para trabajar y entrelazar contenidos de todo tipo: divisibilidad, número irracional, aproximaciones, desigualdades, radicales, progresiones, sucesiones, ecuaciones de 2º grado, semejanza, número de oro, números metálicos…

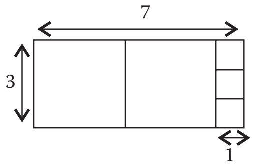
Los materiales que se van a necesitar son hojas de papel cuadriculado o tramas cuadradas, regla y compás, calculadora y, como herramienta opcional pero recomendable, el programa de geometría Cabri Géomètre II.

Actividad 1

Queremos embaldosar una habitación rectangular de 3 m por 7 m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas, no necesariamente iguales. ¿De qué forma se puede hacer usando el mínimo número posible de baldosas? ¿Cómo lo harías si la habitación es de 22 m por 6 m? ¿Se puede hacer con cualquier habitación? ¿Qué conclusiones sacas?

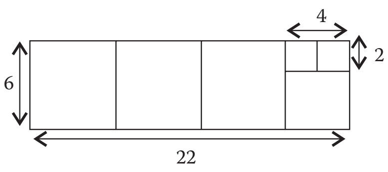
Un número es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua finita.

El problema no presenta dificultad si se sugiere a los alumnos que utilicen un modelo geométrico dibujando un rectángulo en una cuadrícula.



2 baldosas de lado 3
3 baldosas de lado 1 → $7\cdot 3=2\cdot 3^2+3\cdot 1^2$

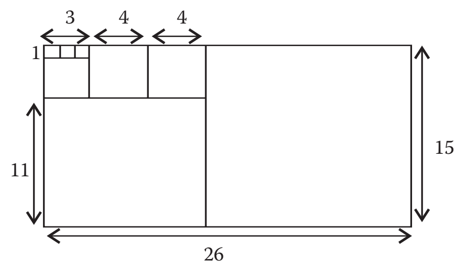
En realidad estamos representando gráficamente la división entera de 7 entre 3, pues 2 es el cociente entero y 1 el resto entero. Podemos escribir por tanto $7/3=2+1/3$ y esta expresión es ya una fracción continua. Para la segunda habitación volveremos al modelo geométrico, pero ahora propondremos escribir la fracción de una forma especial,



3 baldosas de lado 6
1 baldosa de lado 4
2 baldosa de lado 2

$$\frac{22}{6}=3+\frac{4}{6}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{4}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 22\cdot 6=3\cdot 6^2+4^2+2\cdot 2^2$$

El proceso termina cuando la fracción tiene el numerador menor que el denominador. ¿Que encontramos en el numerador de $2/4$? Continuamos con otra habitación.



$$\frac{26}{15}=1+\frac{11}{15}=1+\cfrac{1}{\cfrac{15}{11}}=\ldots=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\rightarrow$$

1 baldosa de lado 15
1 baldosa de lado 11
2 baldosa de lado 4
1 baldosa de lado 3
3 baldosa de lado 1

Observemos que el lado de las baldosas más pequeñas coincide con el máximo común divisor de las dimensiones de la habitación. En realidad la fracción continua finita de a/b es una visualización del algoritmo de Euclides para el cálculo del mcd(a, b).

Cocientes	1	1	2	1	3	Nº baldosas
26	15	11	4	3	1	Lados baldosas
Restos	11	4	3	1	0	

Está claro que siempre se puede embaldosar una habitación de dimensiones enteras y es el momento de formalizar un poco las cosas. Hemos escrito las fracciones anteriores de una forma especial. Las hemos representado por una fracción continua simple finita. Es evidente que *cualquier fracción racional se puede representar por una fracción continua simple finita*. Además, fracciones distintas pero equivalentes corresponden a una misma fracción continua simple. Es obvio que *cualquier fracción continua finita corresponde a una fracción racional*, puesto que basta con efectuar las operaciones que están indicadas para obtenerla. Podemos conjeturar la primera propiedad: *Un número es racional si y solamente si se puede representar por una fracción continua finita*[3]. Evidentemente, la fracción simple que representa al número racional es única.

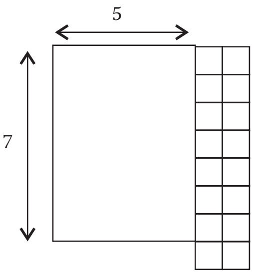
También podemos representar el mismo número en forma reducida finita, pero en este caso no de forma única. Regresemos al modelo geométrico para representar el número $5/7$.

$$\frac{5}{7}=1-\frac{2}{7}=1-\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}=1-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2}}$$

$$\frac{5}{7}=2-\frac{9}{7}=2-\frac{1}{\frac{7}{9}}=2-\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=2-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{9}{2}}}=2-\frac{1}{1-\frac{1}{5-\frac{1}{2}}}$$

La primera expresión se representa por la figura

$$1-\frac{1}{4-\frac{1}{2}}$$



En ella el rectángulo 7×5 se obtiene como un cuadrado de lado 7, al que se quita un rectángulo 2×7. Ese rectángulo es igual a 4 cuadrados de lado 2, quitándole 2 cuadrados de lado 1.

Cualquier fracción racional se puede representar por una fracción continua simple finita.

La segunda expresión correspondería a 2 cuadrados de lado 7, al que se quita un rectángulo 7×9. Este rectángulo se expresa como un cuadrado de lado 9, menos un rectángulo 2×9, que es a su vez igual a 5 cuadrados de lado 2, menos 2 de lado 1.

En la siguiente actividad pedimos a los alumnos que embaldosen por el mismo procedimiento una habitación imaginaria con una dimensión irracional. Esto les conducirá a un proceso iterativo infinito que permitirá reflexionar sobre el concepto de número irracional. Sólo será necesario que sepan construir segmentos de longitud irracional a partir del teorema de Pitágoras. Es importante que el dibujo se realice con precisión, para que las conjeturas que se formulen a partir de él sean correctas, y que sea lo suficientemente grande como para poder permitir por lo menos tres iteraciones. El uso del programa Cabri permite aumentar el número de iteraciones.

Actividad 2

Imagina una habitación rectangular de dimensiones 1 m por $\sqrt{3}$ m. ¿Podrías embaldosarla con las condiciones anteriores? ¿Cuál sería el lado de la baldosa más pequeña? ¿Cuántas baldosas tendrías que utilizar? ¿Sabrías escribir una fracción continua que represente a $\sqrt{3}$? ¿Qué pasa si la habitación es de 1 m por $\sqrt{5}$ m? ¿Y si es de 1 m. por $\sqrt{2}$ m? ¿Qué conclusiones sacas?

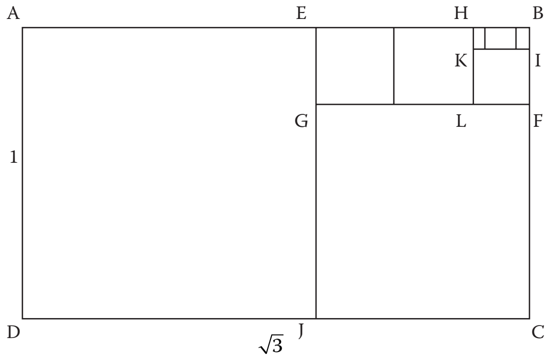


Figura 1

Después de varias iteraciones nos damos cuenta de que hay una regularidad en la sucesión de números de cuadrados del mismo tamaño que se van dibujando y que parece ser que el proceso no va a terminar nunca. La figura sugiere que el rectángulo *EBFG* es semejante al *HBIK*, pero es necesario que los alumnos lo comprueben. En efecto

$$GF=DC-DJ=\sqrt{3}-1,\quad EG=1-GJ=1-\left(\sqrt{3}-1\right)=2-\sqrt{3}$$
$$KI=GF-2EG=3\sqrt{3}-5,\quad HK=EG-IF=7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{GF}{KI}=\frac{EG}{HK}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}-5}=\frac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)=\left(3\sqrt{3}-5\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=11\sqrt{3}-19$$

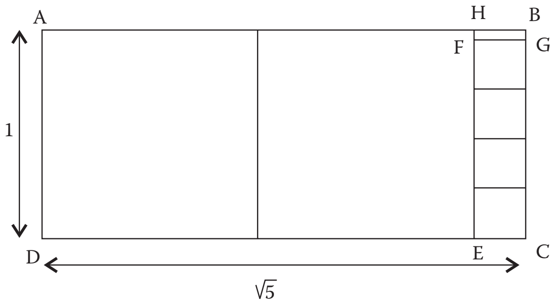
Todos los cuadrados son semejantes, por tanto el rectángulo blanco de la parte superior derecha también será semejante al *EBFG* y a *HBIK*, y el proceso sigue indefinidamente. De esta forma, el número de baldosas cuadradas necesarias es infinito y el lado de las baldosas tiende a cero. En el caso de que viviéramos eternamente, podríamos embaldosar la habitación.

La fracción continua correspondiente a $\sqrt{3}$ podría escribirse como en la actividad anterior, solo que sería una fracción continua simple infinita periódica.

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots}}}}$$

Como la fracción no es finita, $\sqrt{3}$ no puede ser racional y, en consecuencia, es irracional.

En el caso de $\sqrt{5}$, repitiendo el proceso con el rectángulo *HBGF*, se vuelven a dibujar cuatro cuadrados y queda un rectángulo de *forma parecida* al inicial. Para confirmarlo, los alumnos comprobarán que los rectángulos *HBCE* y *HBGF* son semejantes:



$$BC = 1, \quad HB = \sqrt{5} - 2,$$

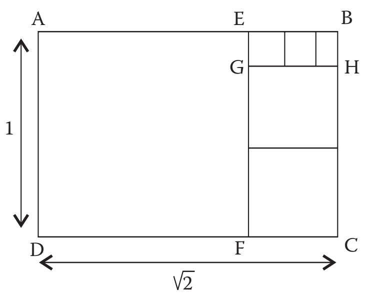
$$BG = 1 - 4\,HB = 1 - 4\left(\sqrt{5} - 2\right) = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\frac{BC}{HB} = \frac{HB}{BG} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{9 - 4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5} - 2\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Obtenemos que

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}$$

una función continua es también infinita periódica, luego $\sqrt{5}$ es un número irracional. Para $\sqrt{2}$ construimos un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1 (también se puede utilizar una hoja de papel DIN A4).



$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

El modelo geométrico también justifica que $\sqrt{2}$ es irracional.

Con alumnos de Bachillerato podría formalizarse el procedimiento geométrico de forma algebraica. Veamos el caso particular de $\sqrt{3}$. Hacemos

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right)$$

y procedemos como en el caso de la fracción continua finita:

$$\sqrt{3} - 1 = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3} - 1}} = \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3} + 1}{2}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3} - 1}{2}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3} - 1}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3} + 1}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)}}$$

$$\sqrt{3} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} \Rightarrow \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

En el desarrollo anterior, la fracción

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1}$$

es la razón entre las dimensiones del rectángulo *EBCJ* (Figura 1,pág. 56), la fracción

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3}}$$

la razón de *EBFG* y volvemos a encontrar la fracción

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1}$$

como la razón que corresponde a *HBFL*, que resulta ser semejante a *EBCJ* y el proceso sigue indefinidamente.

El procedimiento seguido muestra que, de alguna manera, sumando cuadrados, podemos *aproximarnos* cada vez más a los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$, pero las aproximaciones que se obtienen así no son racionales. Continuaremos definiendo los convergentes de una fracción continua.

Actividad 3

Calcula los convergentes de las fracciones continuas de la Actividad 2. Compáralos con el valor que proporciona la calculadora para $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$. ¿Qué observas?

Los convergentes de

$$\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$$

son C_1=1, C_2=2, C_3=1,666..., C_4=1,75, C_5=1,7272..., etc. y se cumplen las desigualdades

$$C_1 < C_3 < C_5 < L < \sqrt{3} < L < C_6 < C_4 < C_2$$

Los convergentes de $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$ cumplen las mismas desigualdades y los alumnos encuentran uno de los resultados generales de la teoría de fracciones continuas simples:

> Los convergentes de los lugares impares forman una sucesión creciente de aproximaciones racionales por defecto del número representado, mientras que los de los lugares pares son una sucesión decreciente de aproximaciones racionales por exceso.

Es interesante que traten de dar una explicación algebraica manipulando desigualdades y hagan conjeturas sobre la convergencia de las aproximaciones. Esta es una buena ocasión para trabajar con ellos de forma intuitiva la convergencia de una sucesión, especialmente porque *están viendo* el límite.

Pueden encontrar gráficamente las fracciones simples de otros radicales cuadráticos, pero deben elegirse con precaución, pues pueden ser necesarias muchas iteraciones y la precisión del dibujo puede no ser suficiente, bien porque el rectángulo inicial no sea suficientemente grande o bien por las limitaciones de la pantalla del ordenador. Un ejemplo sería $\sqrt{13}$, cuya fracción simple tiene b_1=3 y periodo b_1=b_2=b_3=b_4=b_5=1, b_6=6.

La fracción continua de un número irracional cuadrático puede encontrarse fácilmente de forma algebraica utilizando el método de Bombelli y Cataldi (Boyer, 1986 pág. 486):

$$\sqrt{2} = 1 + x \Rightarrow 2 = (1+x)^2 \Rightarrow 2 = 1 + 2x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2+x) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2+x}$$

$$x = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

Aplicando esta técnica a

$$\sqrt{13} = 3 + x$$

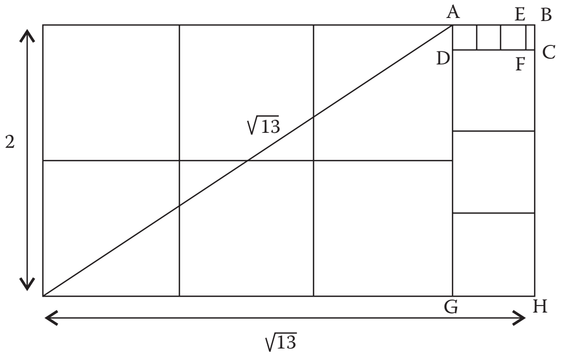
obtendríamos

$$x(6+x) = 4$$

y por tanto

$$x = \frac{4}{6+x} \Rightarrow x = \cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cdots}} = \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{13} = 3 + \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}$$

Es una fracción continua general y se puede comprobar que converge más rápidamente que la simple. Podemos dar también su interpretación geométrica, pero ahora consideraremos un rectángulo de altura 2.



> *La fracción continua de un número irracional cuadrático puede encontrarse fácilmente de forma algebraica utilizando el método de Bombelli y Cataldi.*

En este caso, en el primer paso señalamos un cuadrado de lado 2 y una mitad y, por tanto, el primer cociente es 3/2. Los demás van a ser 3, porque

$$AG = 2 \qquad GH = \sqrt{13} - 3 = AB$$

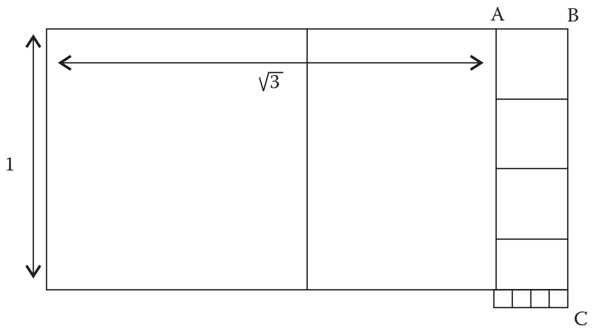
$$AD = 2 - 3\left(\sqrt{13} - 3\right) = 11 - 3\sqrt{13}$$

$$\frac{AG}{AB} = \frac{GH}{AD}$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3}{2} + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}} \Rightarrow \sqrt{13} = 3 + \cfrac{2}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}$$

En Bachillerato se podría trabajar también el método gráfico para encontrar fracciones reducidas de raíces cuadradas. Ahora el signo menos se debe interpretar como que restamos un rectángulo a una serie de cuadrados que cubren por exceso al rectángulo de partida en cada paso. Veamos el procedimiento en un caso particular, por ejemplo $\sqrt{3}$



En el primer paso utilizamos 2 cuadrados para cubrir por exceso al rectángulo inicial de lados 1 y $\sqrt{3}$, que se expresa como 2 cuadrados de lado 1, al que quitamos un rectángulo de lado 1 y

$$AB = 2 - \sqrt{3}$$

que se cubre con 4 cuadrados de lado AB y se puede expresar como 4 cuadrados menos un trozo que se expresa por exceso como 4 cuadrados más pequeños, y así sucesivamente, porque el rectángulo de lados AB y

$$BC = 4\left(2 - \sqrt{3}\right) = 8 - 4\sqrt{3}$$

es semejante al formado por los 4 pequeños de la parte inferior, de lados

$$7 - 4\sqrt{3} \text{ y } 28 - 16\sqrt{3}$$

$$\frac{8 - 4\sqrt{3}}{28 - 16\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$$

La complejidad es evidente. El procedimiento geométrico ahora presenta más inconvenientes que ventajas, por eso parece conveniente razonar algebraicamente.

Actividad 4 (ampliación)

Encuentra algebraicamente fracciones continuas reducidas para $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, haciendo

$$\sqrt{2} = 2 - x \text{ y } \sqrt{3} = 2 - x$$

Utiliza sus convergentes para obtener aproximaciones racionales. Compáralas con las aproximaciones obtenidas a partir de las fracciones simples. ¿Qué sucede si haces $\sqrt{3} = 3 - x$? ¿Qué conclusiones sacas?

En el primer caso:

$$\sqrt{2} = 2 - x \Rightarrow 2 = (2 - x)^2 \Rightarrow 2 = 4x - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(4 - x) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \cfrac{2}{4 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{2}{4 - \cdots}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cdots}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cdots}}}$$

Sus convergentes son $C_1=2$, $C_2=1{,}5$, $C_3=1{,}42857$... *Son todas aproximaciones por exceso. La sucesión de convergentes converge más rápidamente que la obtenida a partir de la fracción simple.*

En el segundo se obtiene

$$\sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$$

y sucede lo mismo. Son propiedades generales de las fracciones reducidas. Los alumnos pueden investigar otros radicales.

Al imponer

$$\sqrt{3} = 3 - x$$

se obtiene

$$\sqrt{3} = 3 - \cfrac{6}{6 - \cfrac{6}{6 - \cfrac{6}{6 - \cdots}}} = 3 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{1 - \cdots}}}$$

La representación de un número por una fracción continua reducida no es única.

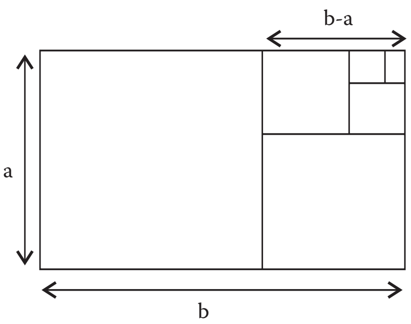
Todas las fracciones obtenidas para esos números irracionales, ya sean simples o reducidas, son periódicas. Surge una nueva conjetura: *¿La fracción continua infinita de todos los números irracionales es periódica?* En este caso nos equivocamos. El proceso iterativo que representa cualquier fracción continua periódica, simple o reducida, muestra que el número que determina es siempre solución de una ecuación polinómica de segundo grado. Por ejemplo, si nos fijamos en la estructura de la fracción simple de $\sqrt{3}$, observamos que se cumple

$$x=\sqrt{3}-1,\ x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}\Rightarrow x=\frac{2+x}{x+3}\Rightarrow x^2+2x-2=0$$

Pero sólo las raíces cuadradas pueden ser solución de una ecuación de segundo grado de coeficientes enteros, por tanto parece que sólo van a poder ser periódicas las fracciones de los irracionales cuadráticos. En efecto, otra propiedad de las fracciones continuas dice: *Un número es irracional cuadrático si y sólo si se puede expresar como fracción continua infinita periódica*.[4]

En la siguiente actividad se proporcionará como material un rectángulo de oro de tamaño suficientemente grande como para que puedan repetir la iteración por lo menos tres veces.

Actividad 5
Este rectángulo representa el plano, a escala desconocida, de una habitación de dimensiones *a* y *b*. Utiliza los procedimientos de las anteriores actividades para conocer la razón de sus dimensiones.



$$\frac{b}{a}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

En efecto, es un rectángulo áureo. Como sabemos tiene la propiedad de que *al quitarle un cuadrado de lado igual a su dimensión menor queda un rectángulo semejante al inicial.*

Intervenimos para hacer una observación: *Los puntos suspensivos de la fracción indican que el proceso no tiene fin.* Por tanto, todos los denominadores son también ϕ:

$$\phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}\Rightarrow\phi=1+\frac{1}{\phi}\Rightarrow\phi^2=\phi+1$$

y de esta forma ϕ es la solución positiva de la ecuación

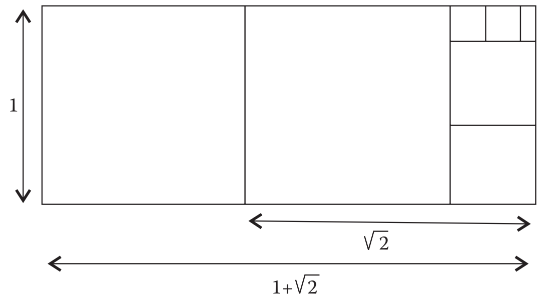
$$x^2-x-1=0$$

es decir

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Con la actividad siguiente encontraremos la generalización natural del número de oro.

Actividad 6
En la Actividad 2 has *embaldosado* un rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1. Si añades a la izquierda un cuadrado de lado 1, obtienes otro rectángulo. ¿Qué puedes afirmar de él a la vista de la figura? ¿Cuál sería la razón de sus lados?



La representación geométrica nos dice que al quitar 2 cuadrados de lado igual a la altura nos queda otro rectángulo semejante al inicial. Por tanto se cumple:

$$\varphi=1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}\Rightarrow\varphi=2+\frac{1}{\varphi}\Rightarrow\varphi^2=2\varphi+1$$

La fracción obtenida tiene la misma estructura que la de ϕ, y es la solución positiva de la ecuación

$$x^2-2x-1=0$$

también similar a la que se obtenía en la Actividad 5. Este número φ es el llamado número de plata y el rectángulo considerado, el rectángulo de plata.

El número de oro y el número de plata forman parte de la familia *M* de los números metálicos. El estudio de estos números es muy reciente[5]. Son números irracionales de la forma

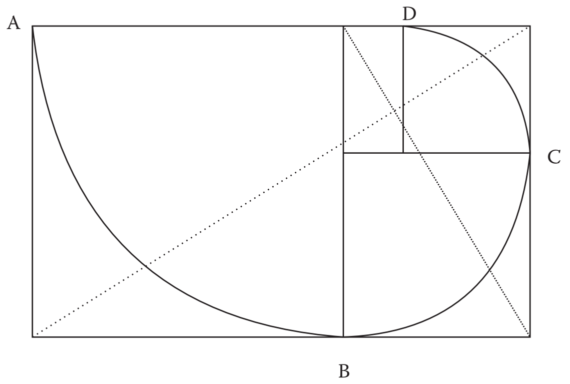
$$\phi_p = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cdots}} \qquad p = 1,2,3,\ldots$$

y son respectivamente, la solución positiva de las correspondientes ecuaciones

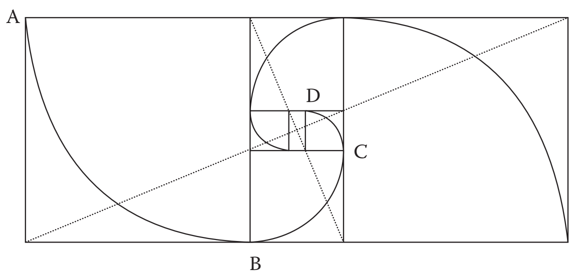
$$x^2 - px - 1 = 0$$

Los rectángulos cuyas dimensiones están en las proporciones definidas por el número ϕ_p forman la clase de los rectángulos métálicos R_p. Utilizando el lenguaje de Aristóteles, un rectángulo es metálico de clase R_p. Si y solo si su gnómon es la unión de p cuadrados.

Los números metálicos comparten propiedades generales. Veamos una de ellas. En el rectángulo de oro se puede inscribir una espiral formada por arcos de circunferencia, de longitudes que forman una progresión geométrica de razón $1/\phi$ y longitud total igual a $(1+\phi)\pi/2$.



En el caso del rectángulo de plata se puede inscribir una espiral doble de esta forma



Si el arco AB tiene de radio 1, el arco BC es de radio

$$\varphi - 2 = \sqrt{2} - 1$$

luego los sucesivos arcos están en progresión geométrica de razón

$$r = \varphi - 2 = \frac{1}{\varphi}$$

y la suma de los arcos de una rama es $(1+\phi)\pi/4$. Por tanto la espiral doble tiene una longitud de $(1+\phi)\pi/2$.

En la siguiente actividad se presenta un modelo geométrico de los convergentes de ϕ. En ella subyace la idea del *crecimiento de pseudognomones cuadrados.*[6]

El número de oro y el número de plata forman parte de la familia M de los números metálicos.

Actividad 7

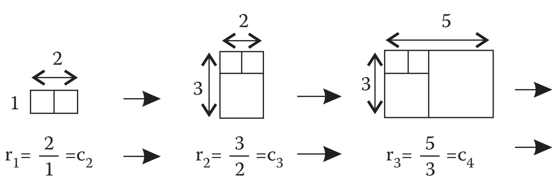
Dibuja un cuadrado de lado 1, y añádele a su derecha otro igual. A este rectángulo lo llamaremos R_1. Ahora añade a R_1 un cuadrado en la parte inferior de lado igual a su base. A esta transformación la llamaremos "+1*a*". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_2 y añadimos a su derecha otro cuadrado de lado igual a su altura. Esta será la transformación "+1*d*". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_3, y aplicamos de forma sucesiva las transformaciones "+1*a*" y "+1*d*" indefinidamente:

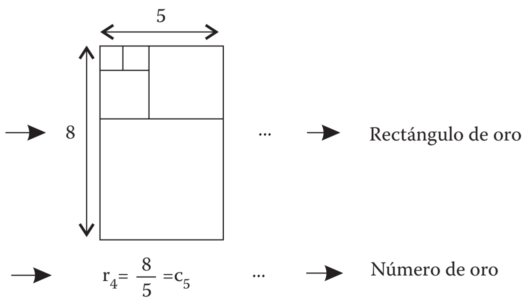
$$R_1 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_2 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_3 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_4 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_5 \rightarrow \cdots$$

Construye la sucesión de rectángulos. ¿Qué observas en ellos? ¿Y en sus dimensiones?

Las razones r_1, r_2, r_3,... entre las dimensiones de los rectángulos son precisamente los convergentes de ϕ.

Además, por la forma en que hemos construido los rectángulos, las fracciones obtenidas son los cocientes de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.



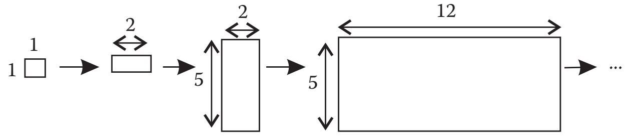


Los rectángulos son cada vez *más parecidos* al áureo. Los rectángulos R_1, R_3, R_5, … son *más alargados* que el de oro (los convergentes son aproximaciones por exceso), y los R_2, R_4, R_6, … son *menos alargados* (los convergentes son aproximaciones por defecto). Si el proceso pudiera repetirse indefinidamente, obtendríamos un rectángulo de oro de área infinita.

Actividad 8
Investiga qué modificaciones se deben hacer en las transformaciones anteriores para que los rectángulos se aproximen al rectángulo de plata. ¿Qué pasaría si en la Actividad 7 empezáramos por un rectángulo? Intenta explicarlo.

Los convergentes del número de plata son: $C_1=2$, $C_2=5/2$, $C_3=12/5$, $C_4=29/5$...

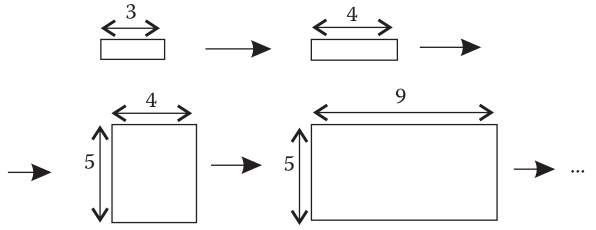
Si partimos de un cuadrado de lado 1, las transformaciones que aplicaríamos para que los rectángulos tengan dimensiones en esas proporciones, son: "+1*d*" y luego sucesivamente la "+2*a*" y la "+2*d*" (que añaden respectivamente dos cuadrados hacia abajo y dos a la derecha).



La sucesión 1, 2, 5, 12, 29... es una sucesión generalizada de Fibonacci, que se obtiene por la ley de recurrencia:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=a_{n-2}+2a_{n-1} \text{ si } n=3, 4...$$

Veamos qué sucede si, por ejemplo, partimos en la Actividad 8 de un rectángulo 1x3



La sucesión de cocientes sería

$$\frac{4}{1}=4, \frac{5}{4}=1{,}25, \frac{9}{5}=1{,}8, \frac{14}{9}=1{,}\widehat{5}, \frac{23}{14}=1{,}6428571... \rightarrow ¿L?$$

Ahora los cocientes no coinciden con los convergentes de ϕ, pero forman una sucesión que parece que también converge. En efecto, la sucesión es: 1, 4, 5, 9, 14, 23,... y cumple

$$a_1=1, a_2=4, a_n=a_{n-2}+a_{n-1}, \; si \;\; n=3,4,5\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}, \; si \; n=3,4,5,\ldots$$

La sucesión de cocientes está acotada y la distancia

$$d\left(a_n, a_{n-1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

por tanto existe

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{1+L}{L}\Rightarrow L^2-L-1=0\Rightarrow L=\Phi$$

Pero, los valores de a_1 y a_2 no han intervenido en el proceso seguido: *La fracción continua de* ϕ *representa el límite de los cocientes* a_{n+1}/a_n *de términos de la sucesión generalizada de Fibonacci* $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, *n*=3,4,..., *sean cuales sean los valores de* a_1 *y* a_2.

En efecto, los cocientes también siguen una ley de recurrencia:

$$C_1=\frac{a_2}{a_1}$$

$$C_2=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_1}{a_2}=1+\frac{1}{\frac{a_2}{a_1}}=1+\frac{1}{C_1}$$

$$C_3=\frac{a_4}{a_3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{C_1}}$$

$$C_4=\frac{a_5}{a_4}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{C_1}}} \quad \cdots$$

Al adelantarnos en la sucesión C_n, vamos añadiendo coeficientes a la fracción, que siempre termina en C_1. El valor de C_1 depende de los valores a_1 y a_2, pero al hacer tender

$$n \to +\infty$$

la expresión se convierte en la fracción continua de ϕ, valga lo que valga C_1. Esto es lo que habíamos encontrado gráficamente. La *semilla* C_1 está representada en las dimensiones de la figura de partida (cuadrado o rectángulo) y el número obtenido está determinado únicamente por las transformaciones que hacemos, es decir, por la ley de recurrencia.

Lo mismo sucede con la sucesión de rectángulos que conducen al número de plata:

$$C_1 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$C_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2a_2 + a_1}{a_2} = 2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}} = 2 + \frac{1}{C_1}$$

$$C_3 = 2 + \frac{1}{C_2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{C_1}} \ldots$$

Hemos generalizado describiendo un *crecimiento de pseudognomones rectangulares formados por la unión de p cuadrados*. La sucesión de rectángulos tiende al rectángulo R_p.

Todos los resultados obtenidos se pueden resumir de esta forma: *El conjunto de las fracciones continuas*

$$F_p = p + \frac{1}{p + \cdots} \quad p = 1,2,3\ldots$$

coincide con el conjunto M de los números metálicos, que son las soluciones positivas del conjunto de ecuaciones

$$x^2 - px - 1 = 0,\ p = 1,2,3,\ldots$$

A cada número metálico

$$\phi_p = F_p$$

le corresponde la clase C_p *de sucesiones recurrentes definidas de la forma*

$$a_n = a_{n-2} + pa_{n-1}, \quad p = 3,4,\ldots$$

siendo a_1 *y* a_2 *cualquier número real, cumpliéndose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = F_p$$

Este resultado general muestra la estrecha relación que existe entre los números metálicos, las fracciones continuas y las sucesiones generalizadas de Fibonacci. ■

NOTAS

1 El término número metálico aparece por primera vez en 1998 en trabajos de V. W. de Spinadel.

2 Un gnomón es toda figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial.

3 Euler da este resultado en su artículo “De Fractionibus Continuis” (1737).

4 La condición suficiente se debe a Euler (1744). Más tarde Lagrange, en 1768, demostró la condición necesaria.

5 No existe unanimidad en la terminología utilizada. Algunos autores utilizan el término “silver mean” para referirse a cualquier número metálico que no sea el de oro.

6 “…partiendo de cualquier rectángulo inicial (incluso de un rectángulo infinitamente estrecho formado por un simple segmento de recta) y yuxtaponiendo indefinidamente un cuadrado sobre el lado mayor de los rectángulos progresivamente obtenidos, resulta un rectángulo creciente cuyo módulo tiende muy rápidamente a ϕ”. M.C. Ghyka (1979, p. 143).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

GHYKA, M. C. (1979): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidon, Barcelona.

JONES, G. Y JONES, M. (1977): *Elementary Number Theory*, Springer, London.

KLINE, M. (1972): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I, II y III*, Alianza Universidad, Madrid.

OLDS, C. (1963): *Continued Fraction*, Mathematical Association of America Books, Washington.

SPINADEL, V. (1998): "The Metallic Means and Design", en *Kim Williams (Ed.) Nexus II, Architecture and Mathematic*, Edizioni dell´Erba, Florencia.