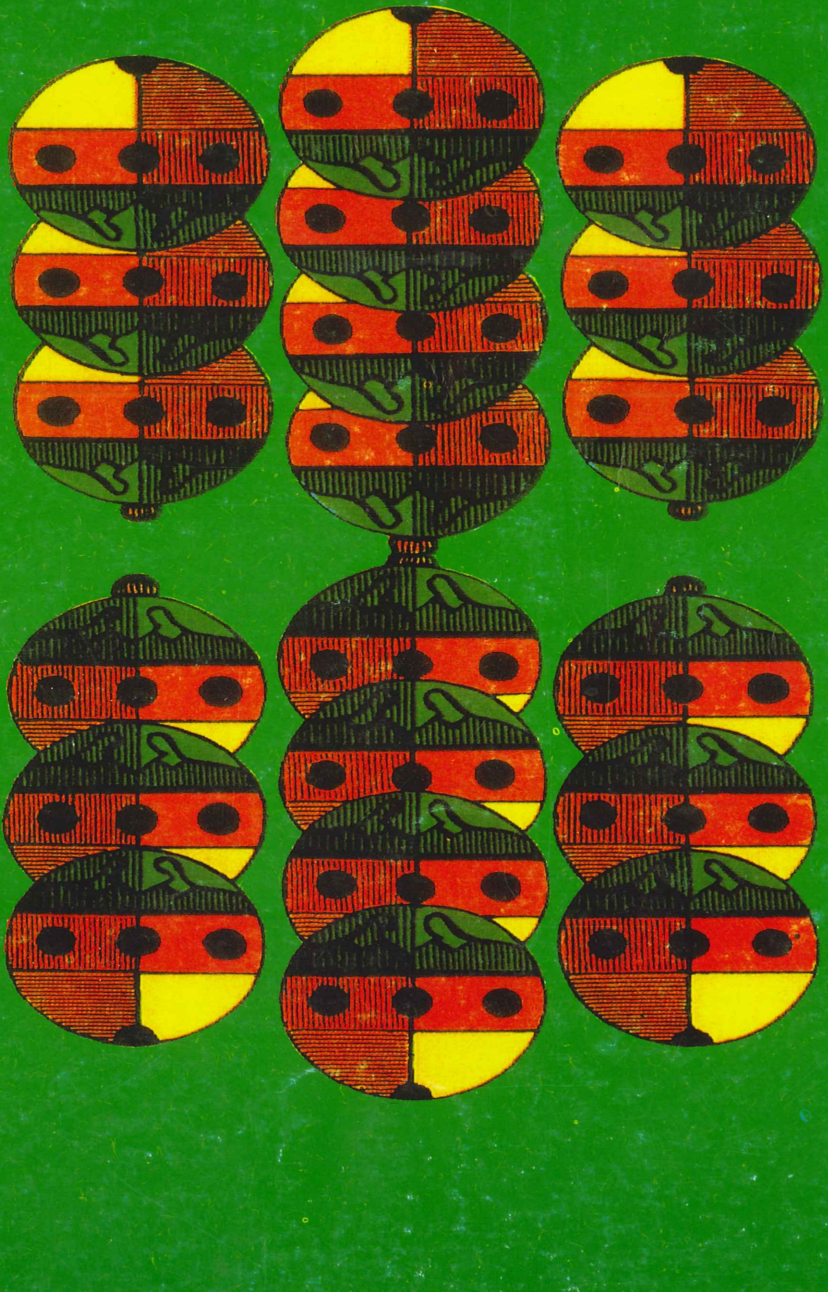
SUMA 5

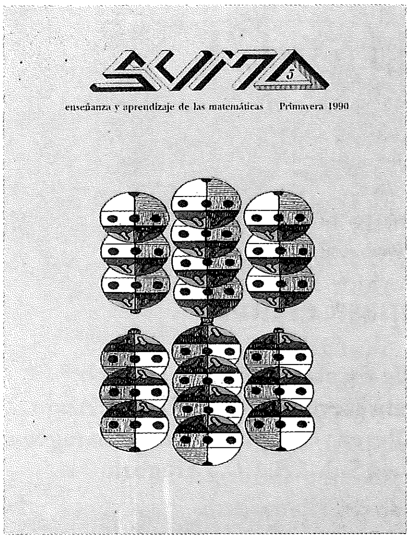
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas   Primavera 1990



PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R., SNPM «Tornamira», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SNPM «Tornamira», C.P. «M.ª Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

SUMA
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Primavera 1990



Fernando Hernández Rojo

Artículos

Ideas para la clase

Edita:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Jacinto Quevedo Sarmiento
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Charo Nomdedeu
C/. Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: Juan José Pacual Bonís
Dto. Matemáticas. EUPEGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Depósito legal: Gr. 752-1988

Fotocomposición: Lozano

Impresión: Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada).

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1017. 18080 (Granada)

Condiciones de suscripción
Particulares: 2500 ptas. (tres números)
Centros: 3000 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1000 ptas. (más gastos de envío)

Recursos para el aula

Información

Miscelanea

Editorial

No me gusta firmar un Editorial. Es preferible que sea el equipo que sostiene a SUMA quien lo haga. Pero a veces uno se siente en la obligación de manifestarse, personalmente, sobre determinados procesos que se están llevando a cabo. Desde la publicación del último número de SUMA han sucedido hechos de tal trascendencia e importancia histórica que creo deben quedar reflejados en estas páginas.

Hace muy pocos años, era costumbre finalizar los encuentros entre Grupos y Sociedades de Profesores de Matemáticas de nuestro país con la firma de un comunicado de condena del apartheid en Suráfrica. En el proceso de maduración de estas lineas he revuelto mis documentos sobre el particular y observo que el último es la respuesta del ilusionado **Mzobanzi Mboya**, Profesor de la School of Education of the University of Cape Town, a mi solidaridad con su iniciativa de envio de cartas de condena siguiendo una cadena en árbol. El joven profesor debe estar de enhorabuena ya que con la anunciada legalización del Congreso Nacional Africano por el presidente De Klerk se dió como consecuencia inmediata la liberalización del lider **Nelson Mandela**, el preso más admirado y querido del mundo, y el inicio de la llamada era post-apartheid. Vivir en libertad es la mayor aspiración del ser humano y, por tanto, debe ser uno de los valores sobre los que se apoya cualquier sociedad civilizada. Parece, pues, que el final de nuestros encuentros, desde ahora, será otro.

Esta recuperación de la libertad no ha sido exclusiva de Suráfrica. Europa del Este, en realidad parte de Centro-Europa, ha visto por fín el final de los regímenes dictatoriales a los que se veía sometida desde el final de la Segunda Guerra Mundial, 1945. La etapa de tolerancia abierta por el líder ruso Gorvachov ha hecho posible que los ciudadanos de Berlín se llevasen como recuerdo, como un mal recuerdo, todo un símbolo de lo que vengo hablando: el muro de Berlín. Parece que los modelos educativos soviéticos, rumanos, búlgaros, húngaros, polacos, etc., deberán ser incorporados a nuestros foros de discusión para su mejor conocimiento.

Otro de mis valores, éste no demasiado compartido en los tiempos que corren, es el gusto por la belleza. Nuevamente hay que congratularse por el gran evento cultural que ha supuesto la Gran Exposición del Año como se ha titulado a la realizada en el Museo del Prado sobre Velázquez. Es cierto que, en el lado negativo, ha sido un consumo de cultura. Casi nadie de los que han formado esas largas colas analizó que el 80% de los cuadros exhibidos los puede ver en cualquier momento. Es penoso ver pasar a las personas sin la más minima consideración a otras obras allí presentes porque "hoy toca Velázquez", decían, cuando la mayoría de los visitantes es casi seguro que no volverán a ningún museo durante muchos años. De todos modos, reunir cuadros dispersos en el mundo para ofrecer la contemplación del conjunto formado por cortesanos -desde reyes a bufones- paisajes, mitología e historia y religión, es obra loable. Como profesores de matemáticas podríamos haber hecho un recorrido de la mano de los espejos que tanto empezamos a usar en nuestras clases. El reflejo de los reyes en Las meninas nos hace pensar en un cuadro de una imagen real se trata. Pero el culto a la belleza lo tenemos manifestado en La Venus del espejo con su desnudo total obsevada por el angelillo, sin vendas en los ojos, y observándose. Claro, que en la búsqueda de la profundidad -Rendición de Breda, Cristo en casa de Marta y María, Las hilanderas, etc.- podríamos tener un trabajo interesante desde el punto de vista geométrico. Felicidades a los padres de la idea.

Aunque no todo es "miel sobre ojuelas". Desde hace tiempo, y dentro del mundillo educativo español, hay un sentimiento compartido por profesores, sindicatos y partidos políticos acerca de la imperiosa necesidad de adaptar la tarea inspectora a las exigencias de una sociedad democrática como la nuestra. Era necesaria la definición de la nueva figura inspectora como funcionario garante ante los ciudadanos de los derechos contenidos en el artículo 27 de nuestra Constitución y cerrar la interinidad abierta por la ley Moscoso, en 1983, en la función inspectora. Así, las diferentes Comunidades Autónomas con competencias transferidas en educación y el Ministerio de Educación y Ciencia, promulgaron distintas disposiciones legales para tratar de solucinar el tema. Hasta aquí, totalmente de acuerdo. Pero es que aún quedan otros valores importantes que no me cansaré de defender. Creo que el del de la honestidad debiera estar arraigado en cualquier ciudadano e inculcado desde su uso habitual por los poderes públicos. Pues bien, todos sabemos las circunstancias que condicionaron las diferentes convocatorias de plazas a inspección que hasta la fecha se han realizado. Ante las decisiones que hay que tomar por la nueva ordenación legal, es el momento de agradecer los servicios prestados a unos y de reconocer los principios de mérito y capacidad de otros y dar a las resoluciones que se adopten al respecto la justa limpieza determinada por la ausencia de clientelismos y que otorgue al nuevo ordenamiento la credibilidad democrática que lo haga socialmente válido. Y vengo a decir esto porque ya ha afectado este proceso a la buena marcha iniciada en la Comunidad Valenciana en la formación de profesores de matemáticas. La Consellería de Cultura, Educació y Ciencia, desde su Dirección General de Ordenación e Innovació Educativa, durante el pasado mes de febrero y aprovechando la falta de regulación antes señalada, organiza un tribunal para prorrogar, o no, a personas que interinamente venían desarrollando la función inspectora en esa Comunidad. Surgen unidos de la mano la ley y la trampa, ya que en el tribunal hay personas que se "autoaprueban" y rechazan a otras que, al parecer no obedecieron consignas. Hasta aquí los hechos, ¿cómo afectan a la Educación Matemática? Compañeros de Valencia, encargados de la formación de profesores de matemáticas en su Comunidad, creen que deben defender el valor de la honestidad en esta sociedad y se solidarizan con una de las personas afectadas por las decisiones del citado tribunal y presentan su dimisión a la Consellería. Las dimisiones son aceptadas y un proyecto, en el que toda España tenía sus ojos puestos como una esperanza de futuro, queda paralizado no se sabe hasta cuando. Personalmente, me uno a ellos y denuncio la situación que, muy bien, pudiera estar dándose en otros lugares de este país.

RAFAEL PÉREZ GÓMEZ

Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (2^{a} parte)

Guy Brousseau

Traducción: J. Díaz Godino

Dificultades de la difusión de la didáctica

¿Por qué las técnicas y los conocimientos de didáctica se difunden tan mal hacia el público y los profesores?

La razón principal me parece que es la siguiente: la mayor parte de los difusores de los resultados de investigación en didáctica son conducidos a realizar un uso distorsionado e ilegítimo de ellos. No les acuso de hacerlo a propósito sino solamente de ceder a presiones múltiples y convergentes.

A. *Observemos, por ejemplo, cómo un investigador llega al medio de los enseñantes.*

1. Se trata de esta experiencia célebre, al menos bien conocida, del "equipo elemental del IREM de Grenoble" sobre "la edad del capitán". Proponen a los niños de CE2/CM2 problemas del tipo siguiente:

"En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?, o bien, "En una clase hay 4 filas de 6 alumnos, ¿cuál es la edad de la maestra?"

En CE2, el 78% de los niños dan las respuestas que os podeis imaginar sin expresar ninguna duda.

A continuación se les pregunta a los niños: "¿qué piensas de estos problemas?": en CM2 la mayoría de ellos, o bien no quieren responder, o expresan sus reservas, encontrando estas cuestiones como raras o incluso estúpidas (casi la mitad de los alumnos de CM2): "pues la edad del capitán no tiene nada que ver con los corderos". Pero, sin embargo, ellos responden porque cumplen con su oficio de alumnos: deben responder, y quizás piensen que la estupidez corresponde a quién plantea las preguntas idiotas, como dice el proverbio.

2. Hoy sabemos que esta experiencia muestra uno de los efectos del CONTRATO DIDÁCTICO —es un conjunto de reglas frecuentemente implicitas que pesan sobre los alumnos y sobre el enseñante y que condicionan su trabajo— ¿Era esto evidente para los autores de la experiencia en el contexto de la época? Si es así, ¿podían publicarla? ¿Cuáles eran sus motivaciones?

He visto la necesidad de crear el concepto de contrato didáctico en el proceso de observación de niños con fracaso selectivo (el caso de Gaël) en 1977-78[1]. Mi primera aplicación de este término aparece en el coloquio GEDEOP de Pau (noviembre de 1978) donde lo utilizo para explicar la sub-comprensión (un resultado de Pluvinage), como un fenómeno de contrato. En el cuadro de la teoría de situaciones, es un objeto importante: el juego (didáctico) del enseñante con la situación a-didáctica del alumno, y el contrato no aparece al observador sino en las rupturas del mismo, las cuales son inevitables.

Los primeros resultados tienen lugar en el año siguiente: Y. Chevallard con O. Schneider estudia la ruptura del contrato que aparece en el momento del estudio de las ecuaciones paramétricas, después con J.

[1] Memoria del certificado de capacidad de ortofonía de C. Amirault y M. Cheret (1978) IREM de Bordeaux.

Tonnelle[2] el efecto sobre el contrato de una introducción ostensiva de los polinomios. En 1980, muestra con D. Pascal cómo en el tratamiento de las ecuaciones, los alumnos piensan que tienen que conservar toda la información ostensiva que se les confía y rechazan tener que prescindir de una letra o de un coeficiente hasta el punto de preferir hacer una transformación falsa. El término de contrato didáctico no aparece todavía en ninguno de estos trabajos. Está presente en los debates orales de los didáctas pero se presenta por primera vez como una hipótesis de investigación en 1980[3]. Es preciso esperar hasta 1983 para que aparezca un texto donde Chevallard explica "La edad del capitán" por un efecto del contrato didáctico, y este texto sigue en la literatura gris[4] hasta 1988 ¡donde aparece en una edición confidencial del IREM de Marsella![5]

Por tanto ya es claro:

—que el razonamiento de los alumnos se compone con una constelación de restricciones de origen didáctico que modifican la significación de sus respuestas y el sentido de los conocimientos que se les enseña;

—que estas restricciones no son condiciones arbitrarias impuestas libremente por los profesores, existen porque juegan un cierto papel en la relación didáctica.

Esta función era insospechable en el cuadro clásico (importado de la psicología) de estudios de respuestas a cuestionarios. También su estudio es difícil: faltan textos teóricos, la misma palabra es mal comprendida por algunos que se confunden sobre el carácter teórico del concepto y piensan que se trata solamente de un medio de mejorar la enseñanza (¿qué contrato es preciso proponer?). Es criticado en la misma comunidad de investigadores (¿cómo puede ser implícito un contrato? ¿Por qué los profesores no son libres de cambiarlo?...)

Los investigadores de Grenoble han imaginado una experiencia a propósito de un estudio sobre los problemas, y como trabajan en un IREM, deben producir consejos para los enseñantes. Sus observaciones van a servir pues para alimentar, de manera bastante ideológica, la condena de ciertos tipos de problemas concretos complejos o absurdos. Ahora bien, se encuentran, de manera evidente, con un fenómeno que pone en entredicho la interpretación de los comportamientos de los alumnos y cuentan entre ellos con didáctas reconocidos, al corriente de la problemática del contrato didáctico, que han debido señalar el fenómeno. Pero no podían publicar este resultado teórico ya que se requería un entorno teórico - la revista "Recherches en Didactiques des Mathematiques" acababa de aparecer pero no podía aceptar un tema semejante.

3. ¿Cómo guardar para sí un hecho semejante cuando nos ocupamos de la formación de los maestros? ¿Y cómo este hecho no explicado no sería considerado por los profesores como "inquietante" puesto que suponen que es una consecuencia de su enseñanza? Tienen razón de estar inquietos: los resultados son publicados "de manera anónima" en la prensa profesional "Gran N" y el "Bulletin de l'APM".[6]

La prensa sensacionalista se adueña de ellos, los pone en escena, los interpreta, son la base de una de estas obras de indignación sobre la enseñanza de las cuales el público está deseoso: "¿cómo? !76 de 97 de nuestros niños normales suman los corderos y las cabras para encontrar la edad del capitán ...¡, se indigna Stella Baruk.[7]

Esta experiencia se presenta como reveladora "de la amplitud del siniestro" (p. 24): "Antes incluso de que sea formulado, un enunciado cualquiera de matemáticas, de golpe y porrazo está desprovisto de SENTIDO" y este estado de cosas "no debería ser, no puede ser" (p. 24).

Si niños normales dan respuestas anormales es porque "un orden abusivo fundado sobre la ceguera y el absurdo en la realidad de los fenómenos ha provocado su alienación" (p.26). Es pues falta de los profesores, y la prueba de que los profesores son culpables, cree encon-

---

[2] O. Scheider "Le passage des équations numériques aux équations paramétriques" DEA IREM Bordeux - Marseille 1979. J. Tonnelle "Le monde clos de la factorisation au premier cycle" IREM Bordeaux - Marseille 1979.D. Pascal "Le problème du zéro" DEA IREM Bordeaux-Marseille 1980.

[3] G. Brousseau "Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire" En Revue de laryngologie otologie rhinologic. Vol 101, n. 3-4 1980 pp. 107-131.

[4] Asi como "Elements pérennes du contrat didáctique, ruptures locales et ruptures globales" Alain Mercier (1984).

[5] Y. Chevallard "Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contract et de situation". Publications de l'IREM de Marseille, n. 14. 1988.

[6] Quel est l'age du capitaine, en "N" n. 19. IREM de Grenoble 1980.

[7] Stella Baruk "L'âge du capitaine, de l'erreur en mathématiques". Seuil (1985).

trarla Stella Baruk en una experiencia de Alain Bouvier (esta vez cita al autor aunque no el texto) que muestra que los profesores, igual que los alumnos, responden ellos también a cuestiones estúpidas.

Presentados en este contexto, no es nada asombroso que estos "resultados" provoquen reacciones por parte de los profesores que asisten a las conferencias. A falta de un análisis más pertinente, atacan a la encuesta que el autor pretende tener que defender.

B. *¿Qué enseñanzas podemos extraer de esta aventura?*

1. Yo no voy ahora a echarle la culpa a Stella Baruk, que se la atribuye a los profesores, quienes a su vez inculpan a los alumnos. Ella está al final de una cadena, pero como cualquiera de los demás, se somete a las condiciones de su contrato didáctico. Formadores que simplifican abusivamente, investigadores que canibalizan sus trabajos (o los de sus colegas) para alimentar un artículo "bajo pedido", autores deseosos de "novedades", todos estamos sometidos a presiones que nos apartan de la verdad. Todos cedemos más o menos, para economizar tiempo o espacio, por conformismo, por proselitismo, por ideología,...

2. En primer lugar sobre el fondo de la cuestión, haré tres observaciones:

a) La pérdida del sentido, tanto en la relación didáctica como en el aprendizaje, es un fenómeno normal: tanto los enseñantes como los alumnos, están en su derecho de buscar con el menor esfuerzo la respuesta esperada. La gestión del sentido debe ser estudiada con el mismo cuidado y el mismo respeto que los errores de los alumnos para cuya comprensión Stella Baruk se esfuerza desde hace tanto tiempo, y con razón: es precisamente el objeto de la teoría de las situaciones y de la transposición didáctica.

b) El hecho de que muchos alumnos, al mismo tiempo que aceptan la ficción del problema, lo juzguen desde el exterior debe ponernos en guardia contra una lectura ingenua de las relaciones escolares respecto al saber. Este hecho muestra simplemente que es necesario distinguir:

—los conocimientos de los alumnos, que activan "para uso privado";

—los saberes aprendidos o enseñados, tal y como funcionan en la práctica de la relación didáctica;

—y el saber pretendido, que obedece, en sí mismo, a otras leyes.

No es pues sorprendente que restricciones diferentes conduzcan a sentidos diferentes admitidos conjuntamente y a prácticas contradictorias. Sería absurdo por otra parte poner en el haber de los niños sus reacciones "inteligentes" y las otras sistemáticamente en el debe de los profesores. La segunda experiencia muestra que el contrato didáctico SE IMPONE IMPERATIVAMENTE A LOS ALUMNOS en su calidad de examinandos, independientemente de su competencia matemática y de su experiencia en la escuela.

c) Por último, sabemos mostrar que por razones teóricas el CONTRATO SE IMPONE TANTO AL PROFESOR COMO A LOS ALUMNOS y que no puede modificarlo de la misma manera que un comerciante, o incluso un gobierno, no puede modificar las leyes económicas.

3. Este tipo de declaraciones o de hipótesis no se adaptan ni a lo que reclaman los padres que quieren, bien la paz, bien soluciones, ni a la formación de los maestros que reclaman consejos o sugerencias, pero que están convencidos, en el fondo de su inutilidad. Esto lleva a los formadores a producir novedades o hechos llamativos.

En lugar de informar al público sobre el estado de las reflexiones científicas a propósito de la enseñanza de las matemáticas, lo que no tendría ningún éxito, el formador DEBE instruir un proceso, y de un modo más severo cuando no propone solución. Así la obra de Stella Baruk, aunque sea apasionante, repleta de ejemplos, de ideas, de conocimientos, de citas, de verdades, está completamente orientada hacia un proceso y no hacia una comprensión de lo que describe.

Por su parte, para aumentar la imagen de su importancia social, los profesores tienen ventaja si asumen su plena responsabilidad en todo lo que acontece en el proceso que administran, aunque esto roce con el masoquismo.

Observemos que la A.P.M, Stella Baruk y sus auditores, se comportan como si adoptaran la idea siguiente: debería ser competencia del profesor percibir todos los

[8] ¡Y con qué fuerza! En el debate, Stella Baruk cita a J. Paulhan: "Se dice que los ignorantes son los mejores profesores" (Lo que, en el contexto, quiere dejar entender de modo evidente la recíproca).

fenómenos que hacen "anormal" la comunicación de los conocimientos e impedir su aparición o de corregirlos si tienen lugar.

Mostrar que existen leyes no percibidas en este dominio equivale a afirmar que las imprecaciones son tan inoperantes como las decisiones de los responsables.

4. Para combatir esta tendencia es preciso que los investigadores produzcan más deprisa respuestas más claras.

Ahora bien, para hacer avanzar un poco los conocimientos sobre el contrato han sido precisos diez años: !la investigación es lenta¡ Los hechos no son explotados, los estudios no se escriben, los textos no se publican, o son mal publicados... Por ejemplo, el corpus de las observaciones permanecen en los documentos privados: las actas de la puesta a punto de las situaciones de enseñanza son eliminadas sistemáticamente de las publicaciones, e incluso de las tesis, POR SUS AUTORES aunque la concepción y la puesta a punto de estas situaciones les haya exigido decenas de horas de un trabajo donde los conocimientos didácticos son efectivamente puestos en práctica de la manera más visible. ¿Por qué?

—Nadie reclama este tipo de textos, que leidos por los no especialistas, aparecen como trivialidades inútiles. Los especialistas que leen este tipo de trabajo no son lo bastante numerosos para justificar el esfuerzo de las puestas a punto necesarias para una publicación.

—Pero sobre todo, lo que la sociedad pide naturalmente al didácta mata con frecuencia el objeto de su investigación: bien la formación de los maestros o la producción de ayudas para la enseñanza, bien el alineamiento de sus textos "científicos" con los cánones de los dominios establecidos (o con la idea que el público se hace de ello).

Entonces, el enseñante, el formador, el ideólogo, el autor que hay en él se van a precipitar sobre las producciones del investigador: sus concepciones se propagaron antes de haber sido problematizadas, sus experiencias serán conocidas antes de que las haya analizado, sus resultados serán leidos por encima del hombro por las necesidades de la ACCIÓN, y sus conclusiones serán seleccionadas en función de su forma (¿tiene Vd. resultados estadísticos?) o de su receptibilidad por toda clase de medios. Y cuando quiera presentar su trabajo, el terreno estará ya pisoteado, haciendo la tarea más ardua y aparentemente más vana.

5. ¿Por qué entonces acepta estas restricciones?

Creo que es para probar, lo más pronto y a menudo posible, que su investigación existe y es útil. Si se siente obligado sin parar a probar que su investigación existe, es que el sistema al cual se dirige pone una cierta obstinación en negarla.

Hemos comenzado ya a explicar por qué el público, los enseñantes (e incluso los matemáticos) están interesados en esta negación de la investigación organizada sobre la enseñanza y volveremos más adelante sobre esta cuestión.

Podemos ver sobre otros ejemplos más recientes cómo la investigación en didáctica es actualmente explotada, negada, violada, y vuelta en contra de los profesores, en función de la ley del mercado de las ideologías y de la venta de libros.

La vocación de la didáctica está en oposición de estas intervenciones estruendosas. Frecuentemente, la explicación de un fracaso o de una dificultad permite disculpar al enseñante y al alumno y orientarles hacia actitudes más positivas; en medicina, la atribución de la tuberculosis a un microbio no permitió inmediatamente vencer la enfermedad, pero sí al menos disculpar a los enfermos, que durante mucho tiempo fueron sospechosos de haber ofendido de algún modo a la naturaleza y que eran castigados por ello; además, de modo accesorio, sugirió que una cierta higiene podría prevenir el contagio.

La didáctica y la innovación

Es indispensable que todo enseñante, cada día, comience su clase como si los conocimientos que propone a sus alumnos fueran descubiertos por primera vez al mundo y como si este hallazgo fuera desisivo para ... el porvenir de la humanidad.

Si esta necesidad de vitalización, tanto para el profesor como para los alumnos, ha sido tantas veces subrayada, es que el contrato didáctico tiende - legítimamente - a estereotipar la acción de enseñar, a codificar los métodos, a definir el saber escolar; tiende a convertir en obsoletas, para el profesor, las situaciones que utiliza y obsoletos, para el alumno, los conocimientos tratados.

Los medios de luchar contra estos envejecimientos son las renovaciones en las diferentes ramas del contrato: en las relaciones con el alumno, en las relaciones con el saber y con la comunidad de los matemáticos, en las relaciones con las situaciones de enseñanza.

Una ilusión simpática, pero peligrosa, consiste en sostener que el medio de evitar el envejecimiento sería evitar su marca principal: es decir, todo mecanismo, toda reproducción, y en el límite, todo aprendizaje. Para permanecer fresco, el profesor HARÍA las matemáticas con sus alumnos, matemáticas sin referencia al pasado, completamente justificadas por las circunstancias y la vida de los alumnos. Esta posición empirista, roussoniana y radical conduciría a lo peor: muestra, en su principio, la negación misma del fin de la enseñanza que es comunicar un saber cultural costosamente adquirido y las referencias requeridas por un contrato social. Esta ilusión hace reposar la relación didáctica sobre una serie de ficciones que pesan mucho.

Cada uno de los protagonistas sabe bien que los textos del saber están ya escrito en otro lugar y no parece legítimo que el enseñante se permita cambiar ni un ápice EN EL MOMENTO DE ENSEÑARLO.

En efecto, para estar alerta, el profesor puede HACER matemáticas en el sentido clásico de intentar responder a preguntas abiertas o plantear cuestiones de matemáticas interesantes y nuevas, pero es una excepción que los temas de investigación puedan ser también, de manera inmediata, buenos temas de enseñanza.

En efecto, para estar alerta, el profesor debe "rehacer" las matemáticas conocidas buscando los tipos de problemas que permiten resolver, qué tipo de cuestiones conducen a plantearse, cómo se puede mejorar su eficacia y su presentación. Recontextualizar de otro modo las matemáticas - en particular para sus alumnos - es la actividad esencial del profesor. Esa actividad es al mismo tiempo de naturaleza didáctica y matemática, constituye una etapa de la transposición didáctica. Esta recuperación de los conocimientos matemáticos con el fin de preparar futuras revisiones y futuros descubrimientos forma incluso la contribución específica de la enseñanza al avance de la ciencia. Esta contribución no es aún hoy reconocida porque la comunidad y los conocimientos que pueden permitir controlarla y dar cuenta de ella no existen.

Así pues, es verdad que la enseñanza es y seguirá siendo en parte un teatro y que, de un modo u otro, el profesor deberá asumir sus relaciones con el fin - la comunicación de los conocimientos - y con los medios - la situación didáctica. En el teatro, las responsabilidades recíprocas del actor y del autor están reguladas desde Shakesperare, Molière y Diderot. ¿Se convertirá el profesor en una especie de actor del saber? ¿Se convertirá la didáctica en la recopilación de los textos que el profesor deberá "únicamente" interpretar - y que ni siquiera podrá escoger? Mi respuesta es "sí en ciertos momentos, y no hay ninguna deshonra en clarificar honestamente lo que se hace".

¿Puede el profesor sentirse como un actor sin poner en peligro su misma acción? La escena, que es su lección, se reinterpreta por enésima vez por el mismo actor, y a veces para el mismo público. Se tiene pues necesidad de una especie de renovación para mantener el interés y la vigilancia de unos y otros. Hoy dia, el profesor prefiere sentirse como un comediante del arte y es por lo que tiene necesidad de innovaciones.

A priori, la innovación corresponde a lo que hemos definido más arriba como la actividad didáctica no enseñante del profesor. Es uno de los medios menos arbitrarios ofrecidos al profesor para volver a encontrar su lozanía en peligro de perderse porque se supone que actúa sobre el acto mismo de enseñar. Por tanto, aparece como una necesidad imperiosa al nivel de cada profesor.

Pero la innovación es un mecanismo DIDÁCTICO, por tanto social, y un objeto de inversión libidinal como la investigación; su análisis sistémico, una de las formas de investigación didáctica, muestra que el funcionamiento de la innovación conduce a resultados diferentes de los pretendidos.

Una innovación, por definición, no puede permanecer escondida, debe ser comunicada. Por tanto, debe merecer la mayor difusión y proponer "cosas que funcionen" en una forma comunicable a los demás. Así pues, su difusión se debe justificar por una observación previa del fracaso de los métodos antiguos - las innovaciones precedentes. Asimismo, debe insistir en el hecho de que es nueva y que presenta al menos una diferencia esencial. Para ir más deprisa sería preferible desacreditar y romper resueltamente con el pasado.

Bajo una presentación halagadora, la innovación permite a una parte de los enseñantes sentirse como innovadores: personas que "desarrollan sus competencias", que "actuan para mejorar las condiciones de enseñanza", que "enuncian conclusiones operatorias", y que actuan sobre su medio.[9] Su fin es generoso: propagar la innovación, extenderla y generalizarla por diferentes medios de acción social.

La innovación tiene necesidad de auditores, es pues un fenómeno de tipo autocatalítico, su progresión, muy fuerte al principio (exponencial), disminuye rápidamente. Su fuerza y su velocidad de propagación se anulan mas deprisa de lo previsto: cuando mas del veinte por ciento de los profesores comparten un mismo punto de vista, es bastante impropio sostener una función de innovador. Los primeros innovadores, u otros, dirigen sus miradas hacia un nuevo horizonte —aunque la innovación que abandonan haya sido "buena" o "mala"— y esto, más deprisa a medida que su difusión haya tenido un éxito mayor.

El sistema que describimos aquí es el de la moda. Los enseñantes tienen necesidad de moda, ¡sí de moda! ¿por qué no? No voy a decir nada nuevo respecto de este mecanismo de incitación al consumo.

Concretamente, el proceso continúa con la observación del fracaso más o menos profundo, una batalla confusa donde los primeros innovadores claman contra la traición y piden más medios de formación o de presión sobre sus colegas. A continuación una nueva ola de innovación aparece como indispensable a todos, con el fin de "superar" este período penoso de desordenes que cada uno se apresura a olvidar. Por este motivo la innovación no permite nunca obtener lecciones útiles de las experiencias que no para de provocar y de este modo no puede aportar nada al conocimiento de la didáctica. En el mejor de los casos, toma de prestado sus adquisiciones, pero para otros usos, como hemos mostrado con la edad del capitán.

El acta de fracaso es pues necesario para el automantenimiento de la innovación, pero, ¿el fracaso mismo es inevitable? No, creo que por medio de estas innovaciones, por otra parte bastante cíclicas, el progreso camina de igual modo, pero sus posibilidades de acción son muy limitadas.

En efecto, para difundirse bastante deprisa, una innovación tiene necesidad de un ritmo tal que sólo lo permiten los procesos de moda. Para permitir este ritmo, es necesario que la innovación no afecte a nada esencial de las prácticas profundas de enseñanza: la moda en el vestir puede cambiar el cuello o la longitud de los abrigos pero no puede hacer agüjeros por dentro.

El mecanismo de difusión de la innovación es bastante complejo y depende de los conocimientos afectados. Las razones de su éxito y de su fracaso han sido estudiadas de una manera más precisa en algunos casos particulares: el de los diagramas, citado más arriba, y el de una innovación aparentemente con mas éxito, el de las teorías y métodos de DIENES.

Los fenómenos que hemos puesto de manifiesto son interesantes:

DIENES ha propuesto la organización Bourbakista de las matemáticas, a la vez como epistemología, como modelo de psicología cognitiva y psicogenética, como lógica, y como modelo de procesos de enseñanza. Ha producido materiales didácticos muy apreciados.

El corazón de esta maravillosa simplificación, apoyado por el ambiente estructuralista de la época, es la "operación del cociente conjuntista" de los matemáticos que hace corresponder a una relación de equivalencia y a un conjunto, la lista de clases de objetos equivalentes. Generalizar, es pasar objetos equivalentes a su propiedad común. Para enseñar, es necesario hacer vivir al alumno situaciones "isomorfas", es decir equivalentes desde el punto de vista de su estructura matemática. Después de algunas experiencias de este tipo, el alumno reconoce la misma estructura, la esquematiza y a continuación puede formalizarla.

Esta teoría es aceptada por los maestros porque la utilizan implicitamente: corresponde exactamente a las prácticas de enseñanza corrientes:

—en el origen, hay una exigencia del contrato didáctico: si el alumno fracasa, es necesario darle otra oportunidad de efectuar el mismo la solución,

—pronto la repetición se erige en principio de aprendizaje,

—pero, para disimular la identidad de las preguntas, es preciso variar las condiciones que no son pertinentes; el alumno, debidamente advertido de este hecho, busca las analogias; el profesor, por otra parte, le invita a ello.

Este abuso de la analogía conduce al alumno a

[9] Estas expresiones son las de A. Bouvier en "Didactique des mathématiques, le dire et le faire". Para caracterizar la investigación-acción la opone a la investigación llamada "tradicional" en la cual el investigador pretende esencialmente "la apropiación de las competencias de los demás, la mejora de su status de investigador y de su carrera, y la aparición de nuevas cuestiones, nuevas hipótesis" (p. 521). Encuentro que mi amigo Alain "se pasa". (envoie le bouchon de beaujolais un peu loin!)

apartar las semejanzas correspondientes a las intenciones del profesor y a centrarse sobre las variables no pertinentes en lugar de comprender la necesidad interna de la situación. De este modo, el alumno resuelve sus problemas, más por transferencia de algoritmos que por comprensión del sentido. De hecho, en ausencia de intenciones didácticas, el proceso de aprendizaje empírico descrito de este modo no funciona.

Por el contrario, la enseñanza fundada sobre la hipótesis de este proceso puede funcionar realmente. Es suficiente que los alumnos puedan adivinar el objeto del saber que el profesor les presenta asi, un poco disimulado por una ficción didáctica. Pero si la analogía es un poco lejana o si tiene que hacer un esfuerzo de comprensión específico, la mayor parte de los alumnos no pueden "leer" la intención del profesor y por tanto fracasan en el reconocimiento. Además, el alumno no puede negar la similitud cuando se le revela, el fracaso es pues del alumno y no del profesor.

Para tener éxito, el método DIENES exige pues:

—un contrato didáctico explícito: el alumno debe buscar similitudes,

—señales didácticas claras: las situaciones deben poder ser seguidas en el tiempo, en número y en ritmo convenientes,

—pero sobre todo, la presión del maestro debe ser suficiente para que el contrato didáctico funcione.

Se observa entonces que con los innovadores, los que quieren mostrar que el método funciona, funciona efectivamente: los alumnos aprenden lo que el maestro les propone. Por el contrario, fracasa con los enseñantes que CREEN en la verdad de la teoría didáctica de DIENES: proponen correctamente, una detrás de la otra, las fichas de trabajo convenientes pero el aprendizaje no se produce. La explicación es que esperan que el proceso actúe como una ley fisica y no ejercen pues ninguna presión sobre el contrato didáctico.

He relatado esta historia para extraer de ella algunas observaciones y ejemplos:

En el abuso de la analogia vemos:

—un ejemplo de efecto TOPAZE: el profesor simplifica su tarea haciendo de hecho que el alumno obtenga la respuesta correcta mediante una lectura banal de las preguntas del profesor y no por una auténtica actividad matemática específica sobre la estructura propuesta.

—y un ejemplo de efecto JOURDAIN: el alumno obtiene la respuesta acertada mediante un reconocimiento banal y el profesor reconoce el valor de esta actividad mediante un discurso matemático y epistemológico sabios.

La aceptación, por los profesores, de la teoría de DIENES es un ejemplo de las falsas relaciones que pueden establecerse entre la investigación y la enseñanza: el investigador utiliza, conscientemente o no, conceptos creados por los profesores para resolver los problemas de gestión de la enseñanza. Los racionaliza un poco, los traduce en términos sabios y los devuelve sacralizados con una aureola científica a los profesores que los reconocen como "verdaderos" y los adoptan pronto con entusiasmo, sin cambiar en nada su trabajo, asegurando de paso el éxito social del investigador. Se trata de nuevo de un efecto Jourdain.

Por último, algo más sútil, enunciamos lo que podría ser un TEOREMA DE DIDÁCTICA: si los profesores creen suficientemente en la eficacia propia de un método didáctico hasta el punto de apoyarse casi completamente sobre él, no reemplazan su papel en la negociación del contrato didáctico, y el método fracasa. La paradoja no es sino aparente pero ilumina de forma inquietante el futuro de las tecnologías didácticas gracias a las cuales se creía poder olvidar la vigilancia de los profesores y los conocimientos fundamentales de didáctica.

En resumen, toda innovación en enseñanza, fundada sobre un acta de fracaso, debe hacer olvidar las innovaciones precedentes y las referencias a una progresión de los conocimientos (contrariamente a lo que hace en otros dominios). Termina por tener que fracasar, y por consiguiente, ninguna innovación puede atacar a las condiciones esenciales de la enseñanza.

La innovación actúa, por tanto, sobre la enseñanza pero con una eficacia forzosamente limitada y mediante un coste social y epistemológico que podría parecer pronto excesivo. Se hace necesario que la didáctica defienda y sostenga la innovación que ella pueda suscitar, reconocer y guiar (como se hace en los restantes campos científicos) y de este modo podrá mostrar al menos la importancia simbólica. !Esperemos que sea lo bastante fuerte para esto¡.

Esta puesta a punto sobre la innovación era necesaria ya que la cuestión que me habia sido planteada habría podido ser comprendida por muchos como la siguiente:

¿Qué es lo que la didáctica podrá aportar a un profesor de secundaria, ADEMÁS DE, y DISTINTO de lo que la innovación propuesta por los mismos profesores puede producir?"

Mis palabras no deberían hacer creer que soy un adversario de la innovación.

En primer lugar, porque he tratado y trato todavía en una cierta medida, de ser también "un novador". He producido lecciones "nuevas", técnicas e ideas "nuevas".

A continuación, porque una buena parte de los medios de los que dispongo en la escuela Jules Michelet de Talence por el COREM es debido al éxito de una ola continua de innovaciones y de sugerencias de los formadores de la región, P.E.N y I.D.E.N., innovaciones cuya difusión directa es retardada al máximo para permitir a cada uno utilizarla lo mejor posible en su oficio de formador y, por consiguiente, durante algún tiempo todavía de NOVADOR. La innovación me permite comprar y acreditar la investigación hasta que ésta pueda jugar plenamente su papel. Pero mi mano derecha investigadora debe ignorar lo que hace mi mano izquierda innovadora.

Además, porque la innovación produce fenómenos sin los cuales sería bastante difícil avanzar en las reflexiones teóricas, y que seríamos incapaces (incluso impedidos moralmente) de producir experimentalmente.

Por último, porque en el sentido amplio que le hemos dado al comienzo, la innovación es el principio mismo de la acción de enseñar: de igual modo que ninguna teoría de la dinámica no puede dispensar a un conductor de mirar a la carretera y de tomar decisiones que él solo puede tomar, la didáctica no puede sustituir al enseñante en el acto de enseñar. Quitarle el derecho a la innovación sería quitarle el derecho de dar sentido a lo que hace.

Sólo es necesario no confundir los *papeles*. Nadie ha prohibido a un actor escribir obras, e interpretarlas, simplemente no hace las dos cosas al mismo tiempo. Los profesores pueden ayudarse mucho y ayudar a la didactica interesándose por sus dificultades, participando en sus progresos y en sus desafios intelectuales. Pueden utilizar BAJO SU RESPONSABILIDAD los resultados de ingeniería que la investigación proporciona como subproducto. Pueden participar en sus investigaciones y en sus debates, como profesionales o como aficionados (aceptando las reglas de juego y según su disponibilidad), esta ayuda es siempre preciosa.

La didáctica es su quehacer como la biología y la medicina lo son para sus prácticos. Tiene una función limitada pero precisa e irremplazable: tiene necesidad de su comprensión y de su apoyo, aun cuando no pueda todavía aligerar mucho su carga.

En la elección que hemos hecho de desarrollar bajo el nombre de DIDÁCTICA una teoria fundamental de la comunicación de los conocimientos matemáticos, no hay ninguna incompatibilidad con otras definiciones y otras orientaciones. Por el contrario, es una concepción que favorece la integración de aportaciones de otros dominios y su aplicación a la enseñanza, y que establece con la práctica una relación sana de ciencia a técnica y no de prescripción a reproducción.

No condena, a priori, ninguna acción en favor de la enseñanza. Pero es preciso comprender que es un error querer a toda costa obligar a la didáctica a comprometerse en cada una de estas acciones y a jugar un papel que no es el suyo. En el mejor de los casos, se le propone desafios ridículos e imposibles, desafios que no se osaría exigir a ciencias que están sin embargo mucho más avanzadas. En el peor de los casos, se corre el riesgo de confiar a sus expertos responsabilidades por encima de sus fuerzas y de reproducir errores semejantes a los que se han visto en otras partes (por ejemplo en economía ...)

Una de las funciones de la didáctica podría ser entonces, contrariamente a lo que algunos han insinuado, contribuir a poner un freno, por fin, a un proceso que consiste en transformar el saber en algoritmos utilizables por los robots o por humanos sub-empleados y en disminuir la parte de reflexión noble en todas las actividades humanas para devolversela a algunos.

Para sacrificar al dios de la supuesta eficacia, la enseñanza presta su concurso hoy a la reducción algoritmica y a la desmatematización. Espero profundamente que la didáctica podrá combatir esta desposesión y esta deshumanización.

¿Es posible? ¿Es deseable? especificar las "competencias" esperadas al final de la formación*

Antoine BODIN

Traducción: Florencio Villarroya

Reflexiones a partir de un caso particular: El de los nuevos programas Franceses para el Colegio

A partir del inicio del curso 87-88, un nuevo programa de matemáticas se puso en práctica en los colegios franceses. (87/88 para la clase de 6º, 88/89 para la clase de 5º, etc ...) Hasta el momento presente, los programas venían etiquetados en términos de contenidos que había que enseñar, eventualmente acompañados por consideraciones generales relativas a los fines y objetivos globales. Estos programas describían más el comportamiento esperado del enseñante (defendiéndose de ellos como podía) que el del alumno. Como mucho se encontraban frases como "el programa enumera las nociones que los alumnos deben haber comprendido y saber utilizar". Por primera vez, los nuevos programas van acompañados de listas oficiales, y por tanto obligatorias, de los comportamientos específicos esperados de los alumnos. Estas listas están presentadas bajo el nombre de *competencias exigibles*.

Por ejemplo:**

Clase de Sexto

CONSTRUIR el simétrico, cuando el eje no corta a la figura:
- —de un punto
- —de una recta
- —de un segmento
- —de una línea poligonal
- —de una circunferencia

TRAZAR el o los ejes de simetría de las siguientes figuras:
- —triángulo isósceles
- —triángulo equilátero
- —rombo
- —rectángulo
- —cuadrado

EFECTUAR con números decimales ordinarios:
- —sumas
- —restas
- —multiplicaciones
- —la división con resto de un número *natural* por un número *natural* de una o dos cifras.

---

* Exposición presentada en la 41 Reunión de la C.I.E.A.E.M. Bruselas, 24 de julio de 1989.

** La correspondencia entre los cursos franceses y los españoles es: Sexto: Sexto E.G.B.; Quinto: Séptimo E.G.B.; Cuarto: Octavo E.G.B.; Tercero: Primero B.U.P.; Segundo: Segundo B.U.P. Los Colegios franceses imparten desde sexto hasta tercero, ambos inclusive. Es el tramo correspondiente a la Secundaria Obligatoria de dicho país.

Clase de Quinto

TRAZAR un triángulo conociendo:

—Las medidas de los tres lados.

—Las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre estos dos lados.

—La medida de un lado y los dos ángulos adyacentes al mismo.

CONECTAR LAS PROPIEDADES del paralelogramo con las de la simetría central.

UTILIZAR LAS PROPIEDADES (lados y diagonales, ángulos, elementos de simetría):

del rectángulo
del rombo
del cuadrado
del paralelogramo.

CALCULAR una velocidad media.

De hecho, para cada nivel escolar, la lista de "competencias exigibles" contiene un centenar de objetivos especificados del mismo modo. Se ve que estas "competencias" están localizadas en el eje de los contenidos y en absoluto en el de la instrumentación mental[1]. Las variables de la situación, que organizarán de hecho las tareas a las que los alumnos deberán enfrentarse, no se evocan y parecería que se hace la hipótesis de una correspondencia biunívoca entre tales "competencias" y las tareas susceptibles de dar cuenta de las mismas.

¿Por qué precisar así lo esperado?

¿Qué razones han guiado a los autores de los programas para procurar precisar así, con tanto detalle, lo que los alumnos deben ser capaces de hacer al final de cada curso escolar?

Las razones (que no se enuncian claramente) son sin duda múltiples:

—Tener en cuenta de manera oficial, y tardía, la corriente "tecnología de los objetivos".

Esta corriente está en el origen de numerosas prácticas de enseñanza o de evaluación que se refieren a listas de objetivos más o menos operacionales. Estas listas, siendo múltiples y no oficiales, conducían a interpretaciones variadas de las exigencias de los programas. En ello había un riesgo que afectaba a la homogeneidad de la formación.

—Tener en cuenta (¡prudentemente!) los discursos y teorías referidos a la construcción del saber.

Hace ya varias décadas, las instrucciones oficiales desaconsejaban, leer "condenaban", el recurso a la clase magistral. La organización de "actividades", o de métodos activos, era, por el contrario, preconizada. Numerosos observadores han hecho notar que, en muchos casos, los objetivos reales de las actividades eran bastante "vagos" y que era muy difícil distinguir qué saber podía ser "institucionalizado" a partir de ellas. Al mismo tiempo se advierte que cuanto más aceptan los enseñantes alejarse del modelo magistral, más sienten la necesidad de identificar mejor los comportamientos que a fin de cuentas se trataría de provocar y de instalar en los alumnos.

—Voluntad de restringir y de armonizar las exigencias de los enseñantes.

Esto con el fin de disminuir la proporción de alumnos con dificultades para las matemáticas. La restricción debía de hacerse sin bajar el nivel (¡al contrario!) pues se trataba en primer lugar de tomar más en consideración el nivel de partida de los alumnos, de construir a partir de bases, quizá reducidas, pero sólidas, de no tener más que exigencias "razonables" y de colocar a un mayor número de alumnos, y más a menudo, en situación de salir adelante. Varios estudios (SPRESE ...) han mostrado, en efecto, que los enseñantes sobreestiman globalmente las capacidades de sus alumnos.

En realidad, la propia noción de "competencia exigible" nunca se ha definido de manera oficial.

—En primer lugar se tendría que haber definido el término competencia. Si se le atribuye una connotación chomskiana, se detecta inmediatamente una contradicción en la misma expresión: una competencia que contiene capacidades virtuales que no puede inferirse más que a partir de observables, puede difícilmente ser declarada "exigible". Por otro lado, los enunciados de más arriba evocan bien pocas competencias. Este género de consideraciones ha conducido a los autores de los programas a sustituir, a partir del programa de cuarto, el término competencia por el menos ambicioso de capacidad. De ello resulta que las "competencias exigibles" propuestas, si bien pueden formularse en términos de "ser capaz de ", son sin embargo susceptibles de múltiples operacionalizaciones.

[1] BODIN, A.: L'évaluation du savoir mathématique. Comunicación al 6º ICME. BUDAPEST 1988. Boletín de l'APMEP nº 368. Pág. 195-219. Abril 1989.

¿Qué nuevas restricciones aporta esta noción? ¿Exigibles? ¿Para quién?

Los autores de los programas y los responsables de su puesta en práctica tienen posiciones bastante variadas sobre este punto:

Para los unos las "competencias exigibles" especifican *objetivos que deberían (¿deberán?) ser dominados por el 80 % de los alumnos.*

Para los otros las "competencias exigibles" limitan estrictamente lo que un enseñante tiene derecho a preguntar a un alumno en cualquier actividad que sirva para una evaluación. En este caso, queda prohibido observar las competencias no-exigibles, y las competencias exigibles se convierten en las competencias máximas observables. Una consecuencia será, con toda seguridad, el considerar como "medio" (o sea, aceptable, correcto,...) a un alumno que sólo domine la mitad de las "competencias exigibles". Así las "competencias exigibles" no serán verdaderamente exigibles. Otra consecuencia que amenaza es "el aplastamiento del aprendizaje bajo los objetivos" (según expresión de Guy BROUSSEAU), y en particular bajo los objetivos mínimos. Ahora bien, se puede pensar que una capacidad no está realmente dominada mientras que no pueda ser superada.

También se puede hacer una lectura legalista de estas competencias y considerar como normal rechazar el acceso a la clase siguiente de los alumnos que no dominen el conjunto de competencias exigibles de un nivel dado.

¿Por qué exigibles? ¿Exigibles para qué?

Una cuestión se plantea, en efecto: ¿exigible para qué? y, correlativamente: ¿qué criterios originan la elección de estas competencias?

¿Se trata, puesto que aquí estamos en el nivel de la escolaridad obligatoria, de las "competencias" que, después de un análisis riguroso, habrían sido reconocidas como indispensables para el "honrado ciudadano" del siglo XXI (o del fin del siglo XX)? Si este fuese el caso, habría que insistir lo más pronto posible en la magnitud de los progresos que hay que realizar. En el momento actual, en Francia, hay con toda verosimilitud menos de uno de cada tres adultos que domine el 80% de las competencias exigidas a un alumnos de sexto[2].

¿Se trata de los pre-requisitos relativos a la posibilidad de seguir el estudio de las matemáticas en el siguiente nivel escolar? Entonces, la lógica de los programas gobierna la definición de las exigencias.

¿Se trata de tener en cuenta los conocimientos acerca del funcionamiento cognitivo del niño, sobre sus posibilidades de aprendizaje? En este caso, el carácter de exigibilidad estaría de hecho más dirigido hacia el enseñante (obligación de obtener un resultado) que hacia el alumno.

¿Se trata más simplemente de un compromiso cultural que tiene en cuenta las concepciones y las representaciones de los enseñantes así como las de los demás actores sociales?

Sin duda, hay de todo un poco en lo que ha dirigido las elecciones efectuadas, excepto, sin duda, el análisis riguroso, que por lo demás, sería bien difícil de hacer, pero que merece la pena al menos ser emprendido.

Observaciones relativas a los resultados de los alumnos

L'APMEP[3] ha puesto a punto encuestas destinadas a evaluar los nuevos programas. Estas encuestas tienen la particularidad de pasarse a miles de clases y de llevarse a cabo por los enseñantes mismos para su propia información. El IREM de BESANÇON[4] interviene en el nivel metodológico así como para asegurar el tratamiento de los datos. Para más detalles, ver los documentos ya publicados[5,6,7].

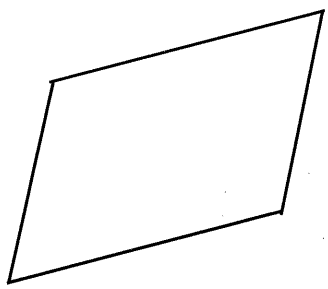
Entre las cuestiones correspondientes a las "competencias exigibles", algunas, muy escasas, son superadas por el 80% de los alumnos, otras por el 20 ó 30% de los mismos, y se encuentran todos los casos intermedios.

Por ejemplo, en clase de sexto:
TRAZAR el o los ejes de simetría de un rombo (Ver cuadro 1).

2 GRAS, Régis y otros: "Image et reliquats des mathématiques - un sondage". Boletín de la APMEP nº 369. Pág. 324-347. Junio 1989.
3 APMEP (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública) - 26 rue Duméril - 75013 PARIS.
4 IREM (Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas).
5 APMEP: Evaluation du programme de sixième 1987 (EVAPM 6/87).
6 APMEP: Evaluation du programme de cinquième 1988 (EVAPM 5/88).
7 APMEP: Evaluation du programme de quatrième 1989 (EVAPM 4/89). (Se publicará en Noviembre 89.)

EVAPM 6/87 - Item A 16

Traza los ejes de simetría de este rombo



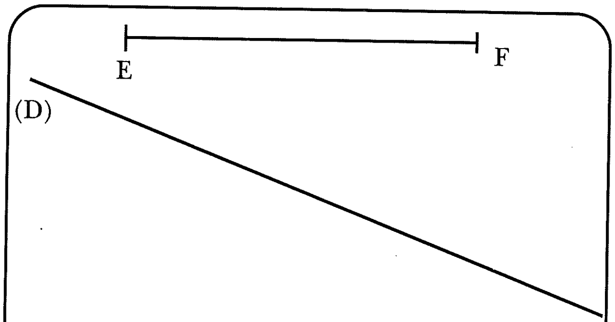
R = 81%

Cuadro 1

(En todos los casos *R* designa el porcentaje de Respuestas correctas, y *N.R.* significa no responde).

CONSTRUIR el simétrico de un segmento cuando el eje no corta a la figura (ver cuadro 2).

EVAPM 6/87 - Item C18



Traza la imagen del segmento EF en la simetría ortogonal de eje D

R = 39%

Cuadro 2

EFECTUAR con números decimales ordinarios

—sumas

—restas

—multiplicaciones

—la división con resto de un número *natural* por otro natural de una o dos cifras (ver cuadros 3 y 4).

EVAPM 6/87 - Item A 23-24-25

Efectúa las operaciones:
PON las operaciones en este cuadro
y escribe los resultados en las casillas
de debajo

4,25 + 0,3451 + 3092,048 =	R = 71%
1241,39 – 327,043 =	R = 60%
54,15 x 3,02 =	R = 57%

Cuadro 3

EVAPM 6/87 : Item B 24-25

En la división de 7256 entre 48
¿Cuál es el conciente entero?
¿Cuál es el resto?

Pon aquí la operación

Resultados

Cociente:	R = 35%
Resto:	R = 28%

Cuadro 4

O en clase de quinto.

TRAZAR un triángulo conociendo

las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre estos dos lados.

(Ver cuadro 5.)

EVAPM 5/88 - Item B 16

Traza un triángulo ABC tal que:

AB = 5 cm
AC = 3 cm
el ángulo BAC = 65°

R = 73% N.R.: 03%

Cuadro 5

CONECTAR LAS PROPIEDADES del paralelogramo con las de la simetría central. (Ver cuadro 6.)

EVAPM 5/88 - Item N 4

Traza un paralelogramo MNPQ de centro O tal que

OM = 5 cm
ON = 3 cm
el ángulo MON = 65°

Intenta no salirte de este marco

R = 33% N.R.: 09%

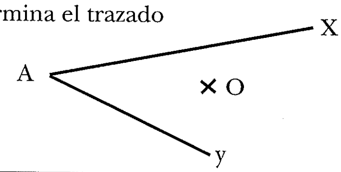
Cuadro 6

Para este último objetivo así como para este otro que está relacionado con él de manera evidente:

UTILIZAR LAS PROPIEDADES del paralelogramo, (lados y diagonales, ángulos, elementos de simetría), se encuentran a continuación (cuadros 7, 8 y 9) varias operacionalizaciones distintas que conducen a diferentes resultados. La referencia a estos items se hará en lo que sigue.

EVAPM 5/88 - Item A 32

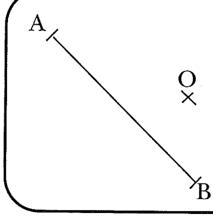
Se ha empezado el trazado de un paralelogramo ABCD
–O es su centro
–El vértice B está en la semirecta Ax
–El vértice D está en la semirecta Ay
Termina el trazado



R = 14% N.R.: 43%

Cuadro 7

EVAPM 5/88 - Item D 4

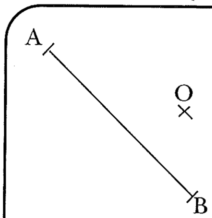


Traza el paralelogramo ABCD suponiendo que el punto O es el centro de simetría

R = 53% N.R.: 12%

Cuadro 8

EVAPM 5/88 - Items C20-C21-C22



Construye el punto G, simétrico de A, en la simetría de centro O.
Construye también, el punto H, simétrico de B, en la simetría de centro O.

R = 70% N.R.: 12%

¿De qué tipo es el cuadrilátero ABGH?

R = 51% N.R.: 18%

Explica tu respuesta:

R = 26% N.R.: 34%

Cuadro 9

Con más precisión, vemos en los cuadros 10 y 11 el reparto de los resultados, registrados sobre las cuestiones que operacionalizan "a los mínimos" las competencias consideradas.

EVAPM 5/88

91 "competencias exigibles" evaluadas

Porcentaje de respuestas correctas	Número de competencias
≥ 80%	6
66%-80%	7
33%-66%	52
≤ 33%	26

Cuadro 10

EVAPM 6/87

91 "competencias exigibles" evaluadas

Porcentaje de respuestas correctas	Número de competencias
≥ 80%	8
66%-80%	25
33%-66%	41
≤ 33%	16

Cuadro 11

Hay que admitir ciertamente que la ambición del 80% está lejos de ser alcanzada.

También se pueden presentar los resultados según los diferentes temas. (Ver cuadro 12).

El tema "gestión de datos" contiene tanto los objetivos relativos a la manipulación de magnitudes (longitud, áreas, volúmenes...) como los objetivos relativos a coordenadas, a la proporcionalidad y a la estadística. También se podría caracterizar este campo por la expresión "vida práctica", oponiéndolo así a los otros dos dominios que serían más "puros". En relación con las exigencias enunciadas y sus expectativas, el campo "geometría" está mejor dominado que los otros dos.

Resultados EVAPM 5/88
POR CAMPOS
Tasas medias de respuestas correctas de una muestra de 1600 alumnos elegidos en 1600 clases diferentes.

CUESTIONARIOS "EXIGIBLES"

Conjunto de items	Gestión de datos	Geometría	Campo numérico
126 items	49 items	46 items	31 items
42,0%	38,8%	48,6%	37,1%

CUESTIONARIOS COMPLEMENTARIOS

Conjunto de items	Gestión de datos	Geometría	Campo numérico
91 items	35 items	31 items	25 items
28,5%	23,3%	37,0%	25,0%

La desviación típica es, en todos los casos, del orden del 20%

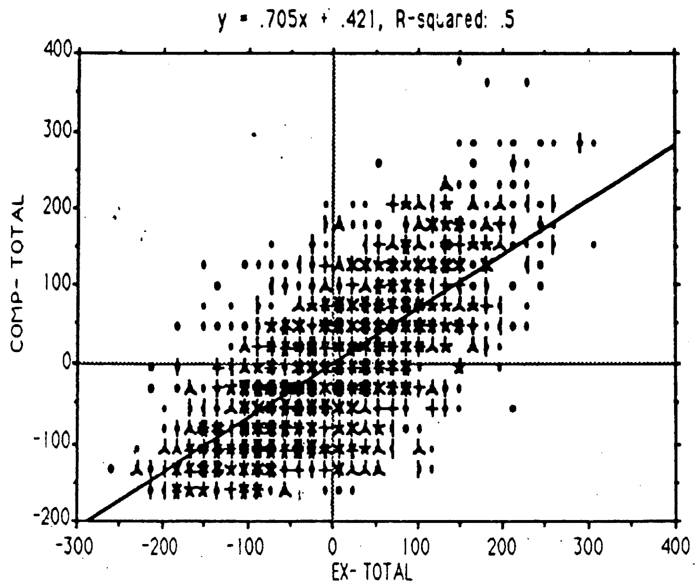
Cuadro 12

Correlaciones exigibles-profundización

Las encuestas de la APMEP tenían como meta hacer balance de las adquisiciones de los alumnos, no sólo en el nivel de "competencias exigibles" sino también en el nivel de los saberes de profundización, aquéllos que, por definición, son no-exigibles, y que convendría, de acuerdo con algunos comentaristas, no pedir en las pruebas de evaluación.

El gráfico del cuadro 13 cruza los resultados globales obtenidos en los items "competencias exigibles" y en los items complementarios, por 1.600 alumnos elegidos en 1.600 clases. Ciertamente la correlación es importante (r=0,7) pero al menos hay un 25% de alumnos para los cuales, el observar sólo las "competencias exigibles" daría una idea especialmente reducida de sus capacidades.

Esta constatación se hace todavía con más fuerza cuando se trata de la observación de una competencia particular. Si se comparan los resultados obtenidos por los mismos alumnos en los items B16 y N4 (ver cuadros



Cuadro 13

5 y 6) para los que el análisis de la tarea muestra una inclusión total de N4 en B16, se reconoce una inclusión bastante buena de los éxitos correspondientes. Resulta sin embargo que un alumno de cada 7 ha resuelto la tarea compleja N4 y ha fallado en la tarea B16 más sencilla. (Ver cuadro 14)

EVAPM 5/88

Item N4

Item B 16	Bien	Mal	No Contesta	
Bien	23%	37%	07%	68%
Mal	03%	16%	11%	30%
No Contesta	01%	00%	01%	02%
	28%	53%	19%	

Cuadro 14

En el momento en que nos alejamos de la inclusión estricta de las tareas, esta proporción tiene tendencia a aumentar considerablemente. Por ejemplo, si se comparan los resultados de C 22 y de N 3/4 (construcción sin tener en cuenta la precisión del trazado), se advierte que la mitad de los alumnos que han resuelto "*CONECTAR LAS PROPIEDADES* del paralelogramo con las de la simetría central", en una situación de construcción, no la resuelven en una situación de justificación y recíprocamente. (Ver cuadro 15)

EVAPM 5/88

Item N3/4

Item C 22	Bien	Mal	No Contesta	
Bien	15%	06%	05%	27%
Mal	14%	23%	06%	43%
No Contesta	08%	14%	09%	30%
	37%	43%	20%	

Cuadro 15

En la mayoría de los casos, y para cada competencia, los resultados de operacionalización "a los mínimos" no permiten predecir el comportamiento en situaciones más ricas, ni por otra parte incluso, con una confianza importante, en los casos de operacionalización supuestos equivalentes. En una clase de 25 alumnos por ejemplo, hay por lo menos 5 alumnos cuyas capacidades reales no serían reconocidas si en lugar de diversificar la evaluación, se limitase la observación a únicamente las "competencias exigibles". Se tratará a menudo de alumnos con dificultades que tienen justamente necesidad, para progresar, de ver valorizar algunos de sus comportamientos no estandar.

¿Baja el nivel?

Las evaluaciones de la APMEP han repetido un cierto número de items propuestos en evaluaciones anteriores más o menos comparables (INRP-SPRESSE-IEA...). En la mayoría de los casos las comparaciones son más bien favorables, en términos de nivel de resultados, a las actuales evaluaciones. Conviene pues no ver en lo que precede ninguna alusión a un eventual descenso del nivel de los alumnos, ni por otra parte a una menor calidad de los programas. Lo que llama la atención es más bien la gran estabilidad en el tiempo: estabilidad del orden de las dificultades y estabilidad del orden de magnitud de los resultados observados. En un único caso, se observa un descenso importante del nivel de éxito, que hace pasar el resultado del 70% al 55%. Se trata de una cuestión propuesta en 1973 (E.R.S.M. 5) para evaluar, en pleno furor de las "matemáticas modernas" las capacidades relativas a las "relaciones". Noción que como se sabe ha desaparecido de los actuales programas. En los otros casos, el aumento de las respuestas correctas puede, en general, relacionarse con los esfuerzos concedidos a la enseñanza. Es el caso, por ejemplo, del dominio "gestión de datos" que, aunque mal dominado con respecto a las expectativas, parece ser netamente mejor que estos últimos años.

La influencia del tiempo

De manera general se comprueba un aumento medio del índice de los resultados de aproximadamente un 15% de un nivel escolar a otro, y esto de un modo casi-independiente de los programas, al menos en relación con aquello donde la revisión está asegurada, sino puede haber un estancamiento o incluso una regresión.

Van aquí dos ejemplos:

El primero concierne a una cuestión relativa a "*CONECTAR LAS PROPIEDADES* del paralelogramo con las de la simetría central". Propuesta al final de quinto, se planteó de nuevo al final de cuarto (EVAPM 4/89). Se trata de capacidades que han sido especialmente practicadas en cuarto (y no simplemente objeto de revisión). (Ver cuadro 16)

El segundo se refiere a los "cálculos relativos al cilindro". Esta cuestión ha sido retomada junto con otras de EVAPM 5, para un grupo reducido de alumnos de segundo (88 alumnos). Aquí se puede considerar que las correspondientes capacidades han sido objeto más de una revisión regular que de una enseñanza sistemática. (Ver cuadro 17)

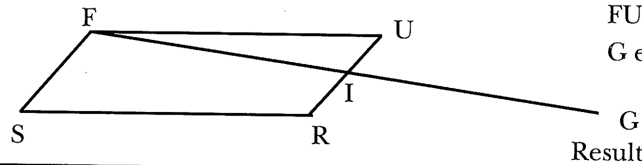
A este respecto hay que señalar que son pocas las "competencias exigibles" del nivel de quinto que parezcan ser dominadas por el 80% de los alumnos al final de segundo.

Observaciones referidas a los enseñantes

De nuestras encuestas sale que, en su conjunto, los enseñantes están atentos a esta noción de exigibilidad y a las listas oficiales; que son numerosos los que las tienen seriamente en cuenta en sus evaluaciones, pero también en la puesta a punto de las situaciones de formación. En numerosos colegios estas listas han sido el origen de reuniones de armonización, luego de concertación regular y finalmente, a menudo se organiza un trabajo de

EVAPM 5/88 - Items Q23 à Q27

EVAPM 4/89 - Items B12 à B16



FURS es un paralelogramo. I es el punto medio de RU, G es el simétrico de F en la simetría de centro I.

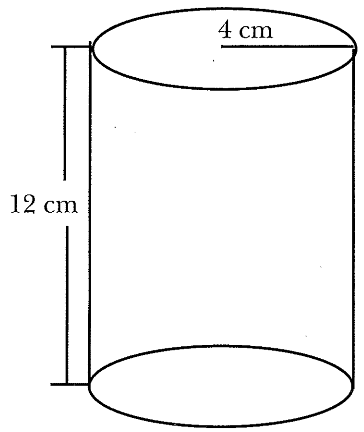
	Resultados de 5º	Resultados de 4º
¿Qué sabes decir de FUGR?	R = 40%	R = 72%
Explica por qué	R = 22%	R = 45%
¿Qué sabes decir de la posición del punto R en relación con el segmento SG	R = 62%	R = 83%
Explica por qué	R = 03%	R = 06%

Hay que advertir, además, que el porcentaje de razonamiento correcto pero incompleto pasa de 7 a 18%

Cuadro 16

EVAPM 5/88 - Items A11-12-13

Esto es un dibujo en perspectiva de un cilindro recto de bases circulares



Calcula las siguientes áreas

(Prepara tus respuestas en sucio. Toma $\pi = 3{,}14$)

	Resultados de 5º	Resultados de 2º
1º Area lateral del cilindro	R = 15%	R = 53%
2º Area de un disco de la base	R = 38%	R = 64%
3º Area total del cilindro (área lateral más áreas de las bases)	R = 08%	R = 37%

Cuadro 17

equipo en torno suyo: planificación en común de la enseñanza, evaluaciones comunes, distribución flexible de los alumnos para tratar de "remediar" las dificultades observadas. Es cierto que esta noción de "competencias exigibles" ha llevado a numerosos enseñantes a observar de manera más analítica las capacidades de sus alumnos, ella les ha ayudado a descentrar su acción y su reflexión, incitándoles a interesarse más en los comportamientos de los alumnos.

Conclusión

Las "competencias exigibles" o mejor las "capacidades exigibles" oficiales, en lugar de designar verdaderamente competencias y en lugar de poder ser realmente exigibles, pueden ser consideradas como indicadores de competencia. Por esta razón permiten balizar el terreno de los aprendizajes y favorecen una mejor comunicación tanto entre los enseñantes como entre los enseñantes y los alumnos y sin duda con el conjunto de interlocutores.

No haría falta que los resultados aparentemente débiles registrados condujesen a una crispación excesiva sobre estas capacidades, e incluso, a una reducción importante de las ambiciones. Se ve por ejemplo dibujarse esta tendencia en la preparación de los nuevos programas de segundo, en los que poco a poco, lo que no es estrictamente exigible está amenazado de prohibición. Claro está que el deseo de los responsables es obtener modificaciones en el comportamiento de los enseñantes y una toma en consideración más realista de las posibilidades de adquisición de los alumnos. Hay quizá medios más eficaces para llegar a este resultado (¡por ejemplo la formación!).

Utilizada con flexibilidad, y con la condición de continuar diversificando los modos de evaluación, sobre todo cuando esta diversificación favorezca la emergencia y el reconocimiento de las capacidades no triviales y no exigibles, la noción de "capacidad exigible" podrá servir para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas.

La curiosa historia de...

Yo soy Newton, y usted ¿quién es?

Daniel Bernoulli nació en Groninga, en el norte de los Países Bajos, el 29 de enero del año 1700, segundo de los tres hijos de Johann Bernoulli y sobrino del viejo Jakob Bernoulli, de manera que, como dice Du Pasquier en su biografía de Euler, fue "fils et neveu de mathématiciens que la voix de leurs contemporains avait placés à coté de Newton et de Leibniz".

Tanto Daniel como su hermano menor Johann mantuvieron desde su infancia y durante toda su vida una amistad verdaderamente fraternal con Euler.

En el verano de 1733 los dos hermanos Bernoulli emprendían viaje desde San Petersburgo a Basilea, dejando en la capital rusa a un Euler triste y desolado por su marcha.

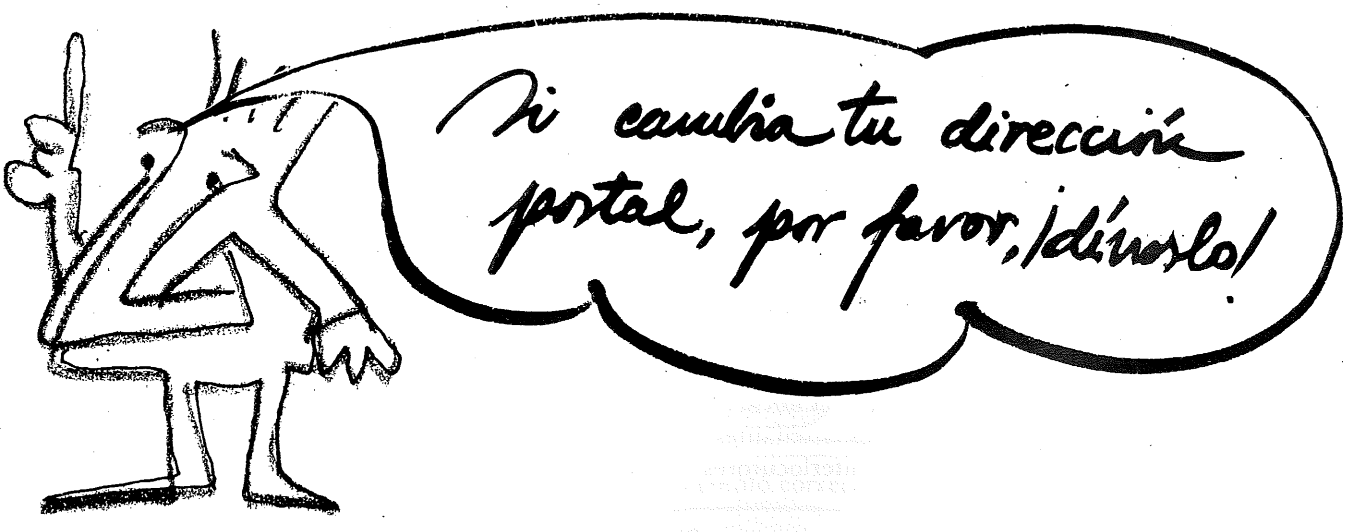
El viaje en cuestión se convirtió en un verdadero "tour" europeo, ya que tardaron casi cuatro meses en llegar a Basilea el 12 de octubre, después de pasar tres semanas en París, entre otras incidencias. A lo largo del viaje Johann iba escribiendo un diario muy detallado, que se conserva. Por él sabemos que visitaron a un buen número de famosos científicos de la época, como Maupertuis, Clairaut, Mairan, Réaumur, Fontenelle, La Condamine, etc.

Por esas fechas, la prolífica familia Bernoulli era ya bien conocida en los círculos intelectuales de toda Europa, y los frecuentes viajes y desplazamientos de sus miembros hacían muy posible encontrarse con un Bernoulli en el lugar menos pensado del continente y en cualquier momento.

A este respecto, Daniel mismo contaba complacido la siguiente anécdota que les sucedió durante el largo viaje de San Petersburgo a Basilea que comentamos.

Cerca de Metz, la conversación de Daniel Bernoulli picó la curiosidad de otro de los viajeros de la diligencia. Este desconocido, deseando saber quién era su compañero de viaje, le preguntó su nombre. "Je m'appelle Daniel Bernoulli" contestó simplemente Daniel. El desconocido, pensando que el joven colega sin duda se estaba burlando de él, le contestó impávidamente: "¡Ah, bien!; moi, je m'appelle Isaac Newton". Como se sabe, Newton estaba ya criando malvas desde hacía seis años, de manera que Daniel, entre sorprendido y divertido por el elogio comparativo de que era indirectamente objeto, procedió a demostrar a su acompañante que decía la verdad, mostrándole cartas dirigidas a él que llevaba encima, e invocando el testimonio de su hermano Johann, testigo de la curiosa escena. Ante estas pruebas irrefutables el viajero no tuvo más remedio que rendirse y convencerse de que un hombre tan joven como su interlocutor era efectivamente el famoso Daniel Bernoulli, y se presentó a su vez. No era Newton, desde luego (¡menos mal!). Se trataba de un botánico llamado Trant, poco conocido pero miembro de la Académie des Sciences de París.

Mariano Martínez Pérez



De los números a las letras

Jesús Enfedaque

1.- Introducción

1.- La persistencia de los niños en contar con los dedos o en utilizar estrategias de contar con los dedos, y de usar sólo números positivos a la hora de resolver elementales problemas artiméticos es, probablemente, uno de los más claros síntomas de las dificultades que experimentan los alumnos cuando han de superar el paso a un sistema de representación más abstracto, en el que la potencia de los símbolos aumenta con respecto a la etapa anterior, y en que el grado de abasracción es también más elevado.

Maestros, profesores y también alumnos, reconocen que el principal escollo de las matemáticas para muchos estudiantes suele ser el momento en que las letras comienzan a sustituir a los números, en que los elementos básicos, la materia prima de las matemáticas dejan de ser los objetos, cosas, números,... concretos, para pasar a ocupar su lugar las letras, ya sea como incógnitas, núm,eros generalizados, parámetros o variables.

Este punto crítico para los estudiantes, en nuestro país, está situado en torno a 7º / 8º de EGB y marca, como es lógico, el inicio del estudio del Álgebra elemental en la enseñanza obligatoria.

2.- El Álgebra elemental, probablemente va a constituir una parte importante del nuevo curriculum del período de secundaria obligatoria, no sólo por la importancia de los contenidos y del lenguaje algebráico en sí, tan potente y fructífero en el terreno de las matemáticas y otras disciplinas, sino también por las específicas particularidades y dificultades que conlleva su enseñanza y aprendizaje.

Los contenidos esenciales del algebra elemental son:

—Las variables.

—Las expresiones algebráicas.

—Los cálculos con expresiones algebráicas.

—La resolución de ecuaciones (e inecuaciones) y sistemas de ecuaciones.

Estos contenidos están asociados a unos métodos y reglas algebráicas específicas, que en parte derivan y en parte difieren notablemente de la reglas y métodos aritméticos aprendidos y utilizados por los niños hasta ese momento. Y, tanto contenidos como métodos, tienen una forma específica de manifestarse: el simbolismo algebráico, por un lado simplificador y facilitador de las tareas matemáticas (basta comparar los complicados, tediosos y engorrosos cálculos para resolver antiguamente una ecuación de 2º grado y la sencillez, claridad y rapidez con que la resolvemos hoy gracias al álgebra elemental); pero por otro lado, el simbolismo algebráico es difícil de comprender, de asimilar y de utilizar correctamente, tal como se señala en el párrafo inicial.

Un repaso a la historia

3.- Sobre estas cuestiones puede ser conveniente dar un vistazo a como los conceptos y símbolos algebráicos han ido desarrollándose a lo largo de la historia de las matemáticas. Nos limitaremos, dentro de lo posible, a un punto concreto de los contenidos algebráicos: la resolución de ecuaciones en relación con el simbolismo algebráico en general.

El problema nº 24 del papiro Rhind utiliza para la incógnita la palabra "el montón" y dice así:

"El montón y un séptimo del montón hacen 19".

Se resuelve suponiendo que la solución es: 7; y dado que 7 más 1 séptimo de 7 es igual a 8, es decir: $1(7) + 1/7(7) = 8$ y desde el 8 hasta el 19 se progresa de esta manera: $1(8) + 1(8) + 1/4(8) + 1/8(8) = 8 + 8 + 2 + 1 = 19$, luego la solución es: $1(7) + 1(7) + 1/4(7) + 1/8(7) = 7 + 7/4 + 7/8 = 16 + 1/2 + 1/8$.

En Mesopotamia no se utilizan las letras simbolizando palabras, cosas, etc, sino palabras, cosas en sí mismas. Así, por ejemplo, en el siguiente problema, la incógnita es el lado:

"Hallar el lado de un cuadrado sbaiendo que área menos el lado es igual a 14,30"[1].

La solución que dan es la siguiente: "Toma la mitad de 1, que es 0;30 y multiplica 0;30 por 0;30 que es 0;15, suma este número a 14,30, lo que da 14,30; 15. Este número es el cuadrado de 29,30. Ahora suma 0,30 a 29,30 cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado."

Invitamos al lector a comprobar como esta solución es la expresión algebráica del cálculo de un raíz de la ecuación general x^2-px=q, de donde $x = p/2 + \sqrt{p^2/4 + q}$

En otro texto toman la ecuación $11x^2 + 7x = 6;15$ y la resuelven pasándola a la forma canónica $x^2 + px = q$ multiplicando por 11 los dos miembros y resolviendo para 11x.

En Babilonia ya se conocían las soluciones de las ecuaciones cuadráticas:

$x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$, con p y q positivos, mientras que la ecuación $x^2 + px + q = 0$ no se resolvió hasta la época moderna por tener las raíces negativas.

También resolvían raíces cúbicas y disponían de tablas de $n^3 + n^2$. Las ecuaciones $px^4 + qx^2 = r$ y $px^8 + qx^4$ eran consideradas simples casos particulares de ecuaciones cuadráticas, lo cual muestra el considerable grado de madurez alcanzado por el álgebra en Babilonia.

En Grecia, también el Álgebra alcanzó un importante nivel. El libro II de los Elementols de Euclídes está dedicado enteramente al Álgebra, sólo que mientras que el contenido es algebráico, la forma es... ¡geométrica![2]

Ciertamente, el surgimiento de un simbolismo literal para sustituir a los números en Grecia era bastante difícil debido a la no existencia de símbolos numéricos (distintos del alfabeto griego) y probablemente ésta haya sido la causa principal del desfase entre la aritmética y álgebra griega respecto a la geometría.

Posteriormente Diofanto fue el primer matemático que utilizó un símbolo para representar una incógnita: una abreviatura de la palabra número (arithmos) z un símbolo parecido a la s griega.

Las potencias de la incógnita se representaban así:

Δ^v = cuadrado

K^v = cubo

$\Delta^v\Delta$ = 4ª potencia

$\Delta^v K$ = 5ª potencia

$K^v K$ = 6ª potencia

Los coeficientes numéricos se escribían a continuación de las potencias y el signo menos: . Así por ejemplo:

$3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9$ se escribía:

$\Delta^v\Delta 3$ $\Delta^v 7$ $\zeta 8$ $K^v 5$ M 9

es decir:

$x^4 3$ + $x^2 7$ + x8 - $x^3 5$ tº indep. 9

donde M servía para distinguir el término independiente de las incógnitas.

La aritmética de Diofanto está dedicada casi por completo a la búsqueda de las soluciones exactas en ecuaciones determinadas e indeterminadas. Con Diofanto se inicia el simbolismo algebráico, se supera la limitación de las tres dimensiones propias de la geometría, aunque los cálculos son siempre realizados con números concretos, de forma no axiomática; no se calculan todas las soluciones y carece de símbolos para las operaciones y las relaciones.

El Álgebra de Al-Kwarizmi presenta unos problemas más sencillos, es retórica, carece de símbolos, y presenta una resolución exhaustiva de los seis tipos de ecuaciones que se pueden dar considerando las siguientes tres especies:

Cuadrados, raíces y números.

Así:

I: Cuadrados = raíces (no considera la raíz nula).

II: Cuadrados = números.

III: Raíces = números.

IV: Cuadrados y raíces = números.

V: Cuadrados y números = raíces.

VI: Cuadrados = raíces y números.

No considera las raíces negativas, y por consiguiente sólo hay dos raíces si son las dos positivas.

El tipo de solución que aporta Al-Kwarizmi suele ser completando el cuadrado mediante construcción geométrica.

N. Chuquet en 1484 introduce los signos p, m (plus, minus) para las operaciones y R^2, R^3,... para raíces, utiliando el subrayado a modo de paréntesis $R^2\ \underline{235\ m\ 25}$ sería la expresión de $\sqrt{235 - 25}$. Utiliza

[1] ¡Ciudado! los números son babilónicos: notación parcialmente decimal, parcialmente sexagesimal.

[2] Se acompaña en anexo 1 el libro II de los Elementos, extraído de la edición a cargo de David García-Bacca, Universidad Autónoma Nacional de México, 1944. No se han incluído ni las demostraciones, ni el texto griego, ni los comentarios

un cierto simbolismo para las potencias: 12^2 quiere decir $12x^2$, 1^3 quiere decir x^3, pero nunca $2^3 = 8$.

Hacia 1494 la escuela algebrista alemana introduce los actuales símbolos de + y -. La escuela italiana utiliza el igual en palabra: equale, est,... mientras que a la incógnita la denominan la "cosa", abreviadamente co, censo por x^2 (ce), cubo por x^3 (cu), cece es censo de censo: x^4, cecu es censo de cubo: x^6...y las potencias cuyo exponenete es un nº primo se designan por pºrº (primo relato) por x^5, 2º rº (secundo relato) por x^7, 3º rº (terzo relato) por x^{11}...

En 1557 Robert Recorde utiliza el signo = por primera vez. Y el salto definitivo hacia el simbolismo actual lo dan Vieta y Descartes. Vieta[3] utiliza las vocales para las incógnitas y las consonantes para aquellas cantidades que suponemos conocidas, pero no utiliza A^3 ni siquiera A·A·A, sino A cubus ó A quadratus; para la multiplicación: in; para la división la línea de fracción, y para la igualdad, una abreviatura de aequalis.

Descartes, hacia 1637 utiliza por primera vez prácticamente toda la notación actual excepto x·x en vez de x^2 y ∞ en vez del =. Este sistema se generalizó tan sólo al cabo de unos 60 ó 70 años más. Es decir, disponemos de la notación actual desde 1.700 aproximadamente, salvo la convención de considerar constantes a las primeras letras del alfabeto, y variables a las últimas.

4.- Como vemos, la adquisición por la humanidad de la notación simbólica ha sido un proceso mucho más largo, tortuoso y costoso que el de la resolución de ecuaciones. La forma del Álgebra ha ido, en general, siempre por detrás del contenido del Álgebra, y las letras, el uso de las letras en las matemáticas ha seguido una evolución que podríamos, simplicando, resumir en el siguiente proceso:

No utilizan las letras. Uso de palabras: lado, cosa, montón...	→	Uso abreviado de palabras: co, ce, cu, sólo para la incognita.	→	Uso de letras simbolizando incognitas y constantes.

A destacar que sólo hay conciencia explícita del concepto de variable al final de este proceso.

Es importante recalcar la naturaleza convencional del simbolismo algebráico, su alto grado de abstracción, yu las muchas dificultades que la humanidad ha debido superar hasta conseguir el actual sistema simbólico.

La arbitrariedad y alto grado de abstracción implican necesariamente grandes esfuerzos por parte de maestros y profesores para que pueda ser asimilado correctamente.

La investigación educativa en álgebra elemental

5.- Sin embargo, cabría pensar si existe realmente una correlación entre dificultades históricas y dificultades en el aprendizaje del álgebra. Y si no sería posible contrastar estas previsibles dificultades con la investigación educativa actual.

Existe actualmente mucha información proporcionada por numerosos estudios de investigación en el terreno de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra, tanto globales como pormenorizados. Citaremos algunos ejemplos:

Behr (1980), ieran (1981) señalan que, usualmente, los niños ven el signo igual, no como una relación de equivalencia según la cual ambos términos de la ecuación son equivalentes, sino cómo una señal, una orden para realizar algo, aquello que está a la izquierda del signo igual. Para los niños/as a la izquierda del signo igual se hallan las órdenes a ejecutar, a la derecha, el resultado. La prevalencia de la artimética sobre el álgebra ha sido también señalada por Collis (1975) en lo que denomina "aceptación de falta de clausura", por lo que soluciones a un problema como 4h + t no son aceptadas por los alumnos/as, que no asumen el que en un resultado haya una operación sin realizar y necesitan, al estilo aritmético, que haya un único resultado. Así en el citado ejemplo contestarían 4ht ó en 2a + 7b : 9ab, o similares respuestas.

Kieran (1979) con respecto al uso del paréntesis señala que los niños/as suelen eludirlo, acostumbrando a ejecutar las operaciones, bien de izquierda a derecha, tal como están escritas en la ecuación, o bien siguiendo el orden de operaciones que señale el enunciado del problema (si de un problema se

[3] A partir de Vieta, el Álgebra comenzó a ser la ciencia de los cálculos simbólicos, de las transformaciones literales, en constraste con la Aritmética que opera sólo con números concretos.

trata). Otros trabajos de investigación se han realizado en torno al papel de las computadoras y como éstas influirán en la futura enseñanza del Álgebra: ver Parte 4 de The ideas of Algebra, K-12 Yearbook 1988 del NCTM.

Usiskin (1988) señala la relación que existe entre las diversas concepciones del Álgebra y los diferentes usos de las variables en la enseñanza. Según Usiskin, si consideramos al álgebra como una generalización de la Aritmética, entonces las variables son vistas como modelos generalizadores (3 + 5 = 5 + 3) —> (a + b = b + a) y las destrezas algebráicas se concentran en traducir y generalizar diversas relaciones entre números. Si considramos el álgebra como el estudio de ciertos procedimientos para resolver cierta clase de problemas, entonces las variables son vistas como incognitas y las destrezas clave necesarias son simplificar y resolver. Si consideramos el álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, entonces las variables son vistas como argumentos o parámetros (ej: encontrar la ecuación que representa a la línea que pasa por el punto (4,5) y cuya pendiente es 2) y los gráficos mediante ejes coordenados se suelen utilizar para representar esta relación funcional. Finalmente, si consideramos el Álgebra como el estudio de las estructuras (grupos, anillos,...) entonces las variables pueden ser cualquier clase de objetos arbitrarios en una estructura definida por determinadas propiedades.

A. Bell, D. O'Brien, W. Galvin y otros, en torno a The South Nottinghamshire Project han llevado a cabo una serie de trabajos que están centraddos fundamentalmente en las reglas yleyes que rigenlas transformaciones algebráicas y en la resolución de ecuaciones.

6.- Y con respecto al tema que nos ocupa. Kücheman (1978-1981) dentro del Proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), ha estudiado las diversas formas en que los estudiantes usan las letras, administrando un test con 51 apartados a 3.000 alumnos/as de 2º, 3º y 4º de secundaria en Inglaterra (13, 14 y 15 años). Con este estudio estableció la siguiente jerarquía de interpretación de las letras:

1/ Letra evaluada
2/ Letra no usada
3/Letra como objeto
4/Letra como incognita específica
5/Letra como número generalizado
6/Letra como variable.

¿Y en nuestra aulas?

El que esto escribe está realizando un trabajo de investigación en Barcelona centrado en la interrelación entre comprensión conceptual y destrezas procedimentales en Álgebra, particularizando en ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Una parte de este trabajo, de carácter piloto, tiene como objetivo corroborar los resultados de Kücheman (1981) y Booth (1984) en nuestro país. Por ello, para ilustrar las diversas interpretaciones de las letras me referiré a mis propios datos, realizados con un grupo de los cursos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP.

1º.- Letra evaluada: a la letra se le asigna un valor numérico desde el primer momento. Es el caso de:
Si e + f = 8 entonces e + f + g = ... en que el 40% de las respuestas incorrectas fue : 12 (el 8% del total de respuestas), en que los alumnos habían evaluado, a partir de e + f = 8, cada letra por 4.

Otro 10% de las respuestas incorrectas corresponde a una evaluación de la letra según el orden alfabético, dándose además la circunstancia de que un 5% dió para la letra g el valor 7 (catalanoparlantes) y el 5% restante el valor 8 (castellanoparlantes, que cuentan con una letra más: ch).

2º.- Letra no usada: la letra es ignorada, o se reconoce su existencia pero no se le da un significado ni se opera con ella:
n multiplicado por 4 puede ser escrito 4n. Multiplica por 4 la expresión n + 5. Las respuestas 20 y 20 + n, constituyen el 51% de las respuestas incorrectas (20% del total), y es un claro ejemplo de como en la primera respuesta la letra es totalmente ignorada y en la 2ª respuesta, se reconoce su eistencia, pero ni se le da un significado, ni se opera con ella.

3º.- Letra usada como objeto: la letra es vista como una abreviatura de un objeto o como un objeto por sí misma:

Una manzana cuesta 6 pesetas y una pera 8 pesetas. Si m es el nº de manzanas y p es el nº de peras compradas, ¿qué representa la expresión 6m+8p?

El 44% de las respuestas incorrectas (27% del total) respondían: 6 manzanas + 8 peras.

4º.- Letra como incógnita específica: la letra es un nº específico, concreto, aunque desconocido, con el cual es posible oerar directamente:

¿Cuánto es correcta la siguiente expresión?: L+M+N = L+P+N. Subraya la respuesta correcta: Siempre; Nunca; A veces, cuando ....

Un 70% de las respuestas incorrectas (61% del total), señalaron: Nunca, indicando que las letras M y P las veían no como un nº generalizado, sino como un nº concreto específico, que no podría coincidir nunca dado que las letras M y P son diferentes. Investigaciones de autores diversos coinciden en señalar este uso de letras como uso diofántico y el caso siguiente, letra como número generalizado, como letra tipo Vieta, en correspondencia con el desarrollo histórico del Álgebra.

5º.- Letra como número generalizado: en que la letra puede tomar varios valores, más que uno sólo, pero sin llegar a considerarla una variable:

En el ejemplo anterior, puede ser contestado correctamente: A veces, cuando M=P, si el alumno ha adquirido el nivel de comprensión tal que le permite ver las letras como números generalizados.

6º.- Letra como variable: la letra es vista como representando un rango de valores inespecíficos, y a la vez se contempla la existencia de una sistemática relación entre dos conjuntos de valores:

$a=b+3$ ¿Qué le sucede a a si le añadimos 2 a b?
$f=3g+1$ ¿Qué le sucede a f si le añadimos 2 a g?

No es posible contestar correctamente a estos dos apartados sin tener asimilado el concepto de letra como variable, y los resultados correctos fueron de un 33% para el 1º y de tan sólo un 7% para el 2º.

El apartado: un lápiz azul cuesta 5 pesetas y un lápiz rojo 6 pesetas. Compro varios lápices rojos y azules, que cuestan un total de 90 pesetas. Si a es el nº de lápices azules y r es el nº de lápices rojos comprados,.qué puedes escribir sobre a y r? muestra un escalonamiento de las respuestas según los citados niveles:

Letra objeto: responde: a+r=90

Incógnita específica: 1 único par de valores

Número generalizado: 2 ó más pares

Letra como variable: relación correcta entre a y r: 5a + 6r = 90

El trabajo de Kücheman tiene un marco de referencia piagetiano y a través del test, los alumnos quedaban calsificados dentro de 4 niveles de comprensión:

1: por debajo del nivel superior de las operaciones concretas.

2: nivel superior de las oeraciones concretas.

3. nivel inferior de las operaciones formales.

4. nivel superior de las operaciones formales.

Los niveles 1 y 2 de esta clsificación piagetiana se corresonden con los niveles de letras como objeto, no usadas y evaluadas, mientras que los nivel 3 y 4 corresponden a los alumnos que utilizan las letras como incógnitas específicas y a veces como números genralizados y como variables. El nivel 4 se corresponde más particularmente con el uso de las letras como variables.

Los resultados de los alumnos de esta muestra piloto en Barcelona en función de los anteriormente citados niveles de comprensión del test de Küchemann de Álgebra, se muestran en la tabla 1:

TABLA 1

	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Total	
	8	30	8	30	9	33	2	7	27	100
8 EGB	100	9	44	9	28	10	7	2	31	31
	0	0	9	29	12	39	10	32	31	100
1 BUP	0	0	50	10	36	14	34	11	35	35
	0	0	1	3	12	40	17	57	30	100
2 BUP	0	0	6	1	36	14	59	19	34	34
	8	9	18	20	33	38	29	33	88	100
TOTAL	100	9	100	20	100	38	100	33	100	100

nº alumnos	% fila
% columna	% total

Los resultados son elocuentes:

1) 60% de los alumnos de 8º EGB, 29% de 1º de BUP y el 3% de 2º de BUP, no llegan al nivel 3, lo cual supone que no han alcanzado un cierto nivel de pensamiento formal, al menos en lo que respecta al álgebra.

2) Si bien la mayoría de los alumnos de 1º y 2º de BUP superan este nivel 71% (39 + 32) y 97% (40 + 57) respectivamente, con respecto al nivel 4 vemos que el 68% de los de 1º de BUP y el 43% de los de 2º de BUP no han alcanzado aún una correcta comprensión del concepto de variable.

Si tenemos presente que los alumnos de 1º y 2º de BUP son una muestra selectiva de los jóvenes de 15 a 16 años, y que en un futuro próximo todos los jóvenes estarán escolarizados obligatoriamente hasta los 16 años, podemos llegar a la conclusión de que serán muchas las dificultades que los profesores de matemáticas del futuro ciclo de secundaria obligatoria habrán de superar para poder vencer todos los escollos que representa la enseñanza del Álgebra ya en la simple iniciación al simbolismo que la caracteriza.

El proyecto CSMS tuvo su continuación en el SESM Project (Strategies and Errors in Secondary Mayhematics) en el que se prfundizó en algunos de los problemas puestos de manifiesto por el CSMS. Particularmente con respecto al Álgebra y a la cuestión de la notación y al simbolismo algebráico Booth (1984) hace constar explícitamente que los niños:

a/ Tienen dificultad de captar las letras como números generalizados.

b/ Piensan que las letras son más bien entidades que cantidades por lo que les cuesta manejarlas.

c/ Confunden o no distinguen entre las letras que representan los valores o números respecto a la medida o a un objeto y las letras que representan la medida o el objeto mismo.

Señala también que parte de estas dificultades pueden ser debidas al mismo proceso de enseñanza que se desarrolla enla escuela.

Y ... los libros de texto?

7º.- No es momento de hacer un análisis exhaustivo de este último problema, pero un somero repaso a cómo son planteados estas cuestiones por los libros de texto puede ser bastante esclarecedor. Generalmente los libros de texto de 7º de EGB[4] comienzan de forma abrupta el estudio del álgebra mediante un capítulo dedicado a las ecuaciones de primer grado y su resolución. Previamente, absolutamente nada... al menos de forma explícita, porque en un libro de 6º de EGB, de la misma editorial, en la pag. 4, en un ejemplo de producto cartesiano, hay un rosal y un ficus: conjunto P (plantas) y tres macetas: azul, blanca y verde: conjunto M, y

PxM = {(r,a),(r,b),(r,v).(f,a),(f,b),(f,v)} ejemplo en que las letras tienen un uso inequívoco como abreviaturas, es decir, significan objetos.

[4] Matemáticas 7. Ed. Santillana (1983).

En la página 22 (tema: multiplicación de nº naturales) se pone un ejemplo de producto cartesiano (para introducir el concepto de multiplicación) con caminos representados por números y letras, es decir, tanto unos como otros representan objetos, cosas concretas. En la página 23, se presentan las propiedades de la multiplicación de esta manera:

9x8=72 8x9=72

a.b = b.a

Es decir, las mismas letras son, enla página siguinte, números generalizados, y ni una sólo explicación sobre el cambio de significado de las mismas letras.

En la página 70 hablando de fracciones amplificadas y simplificadas se presenta lo siguiente:

$1/2 = 1.2/2.2 = \boxed{\mathbf{2/4}}$ ⟵ fracciones amplificadas

$a/b = \boxed{\mathbf{a.n/b.n}}$ ⟵

$6/15 = 6{:}3/15{:}3 = \boxed{\mathbf{2/5}}$ ⟵ fracciones simplificadas

$a/b = \boxed{\mathbf{a{:}n/b{:}n}}$ ⟵

en donde, las letras no sólo se presentan como números generalizados, sino que además, se opera con ellas. Y también, ...sin ninguna explicación previa!

No sólo estos aspectos constituyen, desde el mismo corazón de la enseñanza, desde la escuela, una fuente de problemas en el aprendizaje del álgebra: como ya he señalado anteriormente, el signo igual, en los mismos libros de texto, es siempre visto como una orden para realizar una operación; rara vez hay ejemplos mostrando el signo igual como el símbolo de una muy especial e importantísima relación: de equivalencia. Sobre el uso del paréntesis, algunos libros de texto (no todos) explican cómo hay que proceder para operar cuando en una expresión aritmética ó algebráica aparecen paréntesis, pero ninguno de los libros que he consultado se plantea el problema de cuándo, y por qué hay que colocar paréntesis a la hora de traducir una frase de lenguaje normal (p. ej: el texto de un problema) a lenguaje aritmético ó algebráico.

Las diferencias entre lenguaje aritmético y algebráico tampoco son tratadas de forma explícita ni tampoco las semejanzas y diferencias entre lenguaje vernacular y lenguaje matemático (en cualquiera de sus variantes).

Los libros de texto explican las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de algunas operaciones, pero no hacen hincapia, p. ej., en la no conmutatividad ni asociatividad de la resta ó la división, lo cual contriburía, si se hiciese, a evitar generalizaciones incorrectas por parte de los alumnos, como por ejemplo, sustraer o dividir siempre el número mayor por el menor.

Otro tanto podríamos decir respecto a las expresiones algebráicas, al cálculo con las mismas.

Los conceptos de ecuación, de ecuación equivalente e inecuación prácticqmente no se trabajan, pues generalmente se presenta la ecuación, se señala que existe una cosa llamada incognita y que para saber cuánto vale hay que resolver la ecuación; generalmente se da un método para resolverla, método que generalmente se enseña desligado de contextos y significados concretos, así como de los conceptos en que se basan los posibles procedimientos.

Algunas conclusiones sobre el Álgebra y su lenguaje

1) El lenguaje algebráico es un lenguaje que tiene sus propias y específicas peculiaridades que le distinguen tanto del lenguaje aritmético cómo del vernacular. Todo lenguaje tiene su propio código, su propia simbología, y no por ello es imposible de asimilar. El código de la circulación para un mismo símbolo, p. ej., 60, tiene al menos 5 significados distintos:

a) Como distancia en la misma dirección que llevamos.

b) Como distancia, girando a la dcha. ó izda., a partir de la dirección que llevamos.

c) Como velocidad que no podemos sobrepasar.

d) Como velocidad que podemos sobrepasar de nuevo.

e) Como velocidad recomendada.

Y ello no impide que millones de ciudadanos de todos los niveles educativos asimilen dicho código y conduzcan correctamente.

2) El Álgebra no consta tan solo de contenidos. Existen también los métodos y la notación y simbolismo algebráico, que merecen una considerable atención ligada ineludiblemente a los contenidos.

3) El actual lenguaje algebráico es una convención arbitraria, nada natural, y que por ello, obliga a una precisa y cuidadosa atención por parte del profesor en la escuela. Sobre el proceso histórico de formación del lenguaje algebráico me complace personalmente recomendar la lectura del capítulo 11 del muy interesante y documentado libro: *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica.* En este capítulo se cita el siguiente párrafo de Koyré:

El pensamiento del aritmético y del algebrista del Renacimiento se mantiene al nivel del gramático, es un pensamiento semiconcreto; se sigue la regla general, pero se opera en casos concretos: palabras ó números. Por ello, la notación expresa de la incognita, introducida por Vieta y perfeccionada por Descartes, señala una etapa decisiva en la historia de la notación y en la historia del pensamiento algebráico mismo. En efecto, relfeja el paso del grado de abstracción del gramático al del lógico puro..."

Es evidente que un paso de tal envergadura no puede esperarse que sea resuelto sobre la base de los proios procesos espontáneos del alumno, y por ello es preciso que el profesor preste el máximo de ayuda pedagógica que pueda proporcionar a sus alumnos.

Algunas cuestiones sobre la actitud del profesor

1) Dada la especial dificultad del Álgebra, es muy importante que el rofesor tenga una idea clara de los niveles concretos de comprensión en que se hallan sus alumnos. Para ello no debe limitarse a corregir exámenes, a constatar resultados incorrectos: debe prestar atención a cómo y por qué actúan de determinada manera los alumnos, a estudiar y analizar sus respuestas, con el fin de ir a las causas de los errores, y poder hacer un aprendizaje significativo y no mecanicista ni memoricista. No solo en Ciencias, también en Matemáticas los alumnos llegan a las aulas cargados de preconceptos y concepciones erróneas adquiridas en la misma escuela, a través de otros profesores (de Ciencias, de Matemáticas...) y es preciso sbaer de donde provienen estos errores, ser conscientes de que en muchos casos es precisa una readaptación ó reeducación algebráica. Esto implica en muchos casos, hacer entrar al alumnno en conflicto con sus ideas anteriores, y a partir de la toma de cociencia de este conflicto, de su discusión abierta, el alumno puede comenzar a ver la necesidad de reordenar, reorganizar y cambiar sus conocimientos previos para asimilar correctamente los nuevos que se le presentan.

2) Como en todo paso a un nivel superior de

abstracción, la vuelta al referente, a lo concreto, a los objetos, números, situación, etc..., de los cuales surge inicialmente un enunciado algebráico, debe realizarse siempre que sea necesario, siempre que se observe la más mínima incompresion por parte del alumno. Dicha vuelta ha de acompañarse siempre de una discusión abieta sobre el significado de los símbolos con respecto al referente de que se trate. En este terreno la utilización de la historia de las matemáticas puede ser de gran ayuda: p. ej., la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición suele presentar ciertas dificultades de comprensión y por tanto de aplicación, para algunos alumnos; sin embargo la 1ª demostración conocida de dicha propiedad, el teorema II.1 de los Elementos de Euclides, nos proporciona, geométricamente, un buen ejemplo que puede ayudar a una correcta comprensión de esta propiedad.

Algunas propuestas sobre el uso de las letras

Sin pretender ser exhaustivos con respecto a toda la problemática que la enseñanza del Álgebra elemental tiene planteada, hay ciertos aspectos que pueden ser de gran ayuda para los profesores de matemáticas de 7º, 8º de EGB y de 1º e incluso de 2º de BUP.

1) Adoptar la interpretación de las letras como nº generalizado desde el primer momento de su aparición. Por ejemplo, en expresiones del tipo x+2=6 los alumnos, y a veces también los profesores, suelen asumir que la x representa un sólo valor. Un enfoque alternativo del tipo: la x puede representar cualquier número, y habrá uno ó varios números que hacen cierta la igualdad dada, y otros que la harán falsa, puede ayudar a solventar el problema. Es asimismo importante presentar entornos y contextos concretos que ayuden a este tipo de enfoques. También es conveniente introducir la idea de que una misma letra representa los mismos valores y que diferentes letras representan los mismos ó diferentes valores.

En cualquier caso la discusión de si una letra representa un objeto, una incognita específica, un nº generalizado ó una variable, dentro de cada contexto concreto, siempre será positiva.

2) Evitar m=nº de manzanas, p=nº de peras, pues ello induce al uso de letras solo como objetos. En el caso de expresiones como: 1 m = 100 cm, difíciles de evitar, una discusión sobre el significado de las letras ayudará a evitar confusiones y malentendidos. Respecto a la no combinabilidad de expresiones como 2a + 7b es conveniente no recurrir a: a=azules y b=blancos. Siempre se puede volver al paso concreto anterior: 2a+7b=a+a+b+b+b+b+b+b+b ó a compara 2a+7b con 7a, 7b, 9a, 9b, 9ab, 10ab,... sustituyendo a y b por diversos pares de valores, y haciendo lo mismo comparando 2a+5a con 7a.

3) Resaltar las semejanzar y diferencias entre el lenguaje artimético y el algebráico:

57 es la suma de 50 + 7, en cambio ab es a.b, un producto. Constatar la diferencia de 3b con 3+b y con 30+b (treinta y b). Además de señalar que no se puede limtar la letra b como si solo puediera representar a números de un solo dígito.

4) Potenciar la legitimidad de respuestas abiertas, indeterminadas. El niño asume a través de la resolución de problemas artiméticos que una respuesta a una operación es 7, no 3+4. Sin embargo 3+4, a+b, 5+a, 3x+2,... pueden y deben ser consideradas respuestas perfectamente correctas.

La enseñanza del álgebra necesita desarrollar otras nuevas alternativas didácticas que ayuden a resolver cuestiones como las referentes a las operaciones aritméticas, algebráicas, el signo igual, el uso del paréntesis, el concepto de ecuación, de ecuación equivalente, transformación de ecuaciones, resolución de las mismas, etc...

El Álgebra es en cierto sentido una generalización de la Aritmética, pero también mucho más que eso; el álgebra proporciona importantes instrumentos intelectuales para resolver problemas que de otra forma serían tediosos y engorrosos; el álgebra elemental es esencial para la comprensión de las estructuras matemáticas, para el dominio del conocimiento general de las matemáticas, y el álgebra elemental en el futuro ciclo de secundaria obligatoria ha de ser esmerada y cuidadosamente enseñada para que puda ser correctamente asimilada.

Por último, quiero traer aquí una cita sobre la importancia del álgebra, no de un algebrista, ni de un matemático, ni siquiera de un físico, químico, biólogo,... Un escritor, un brillante escritor francés del siglo pasado, Stendhal, escribió en su Autobiografía:

En casa de mi profesor de matemáticas encontré a Euler con su problema acerca de los huevos que la campesina llevaba al mercado... Esto fue para mi un descubrimiento. Comprendí lo que significaba valerse de un arma como el álgebra. Pero ¡demonios! nadie me lo había explicado antes."

Bibliografía

BEHR,M et al. (1980): *How children view the equal sign.* Mathematics Teaching nº 92 13-15.

BOOTH, L.R. (1984): *Algebra: Children's Strategies and Errors. A report of the strategies and errors in Second. Math. Projet.* Nfer-Nelson. Windsor.

COLLIS, K.F. (1975): *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint.* Australian Council for educational research. Melbourne.

DICSON, L. et al. (1984): *Children Learning Mathematics: A Tearcher's guide to recent research.* Holt, Rinehart and Wiston. Londres.

FILLOY,E/ROJANO, T. (1985): *Obstructions to the acquisition of elemetnal algebraic concepts and teaching strategies.* Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematcis Education. Leen Streeflan (Ed). Utrech.

FREUDENTHAL, H. (1974): *Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school.* Educational Studies in Mathematics, 5. (391-412).

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomelogy of mathematical structures.* Reidel. Dordrecht (Holanda).

HARPER, E. (1980): *The boundary between arithmetic and algebra: conceptual understanding in two language systems.* Int. J. Math. Ed. Sci. Techn. vol 11 nº 2, 237-243.

HART, K. (ed.). (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16.* John Murray. Londres.

HERSCOVICS, N./KIERAN,C. (1980): *Constructing meaning for the concept of equation.* Mathematics Teacher. 73, 572-580.

IRISTONE, F. (1983): *Introducing Algebra.* Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education. Marylin Zweng. (Ed). Birkhauser.

KIERAN,C. (1979): *Children's operational thining within the context of bracketing and the order of operations.* En D. Tall (ed.). Proceedings of third Int. Conference for the PME. Coventry.

KIERAN, C. (1981): *Concepts associated with the equality symbol.* Educational Studies in Mathematics, 12 (317-326).

KIERAN, C. (1985): *The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students.* Proceedings of the Ninth International Conference of the Psychology of Mathematics Education. Leen Streefland (Ed). Utrech.

KÜCHEMANN, D. (1981): *Algebra.* En Hart, K. (Ed) Children's understanding of Mathematics: 11-16. John Murray. Londres.

KÜCHEMANN, D. (1980): *The meanings children give to the letters in generalised Arithmetic.* Cognitive Development Research in Sci. and Math.. The University of Leeds.

PARADIS/MALET. (1984): *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbólica.* ICE de la U. de Barcelona.

USISKIN, Z. (1980): *Conceptions of school algebra and uses of variables.* En Coxford, A.F. (Ed). The ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearboo. NCTM Reston Virginia.

WAGNER, S. (1981): *Conservation of equation and function under transformation of variable.* J. for Research in Mathematical Education. Vol. 12 nº 2.

ANEXO
Libro II de los Elementos de Geometría

Definiciones

D.II.1 De todo paralelogramo rectángulo se dice que está *comprendido* por las dos rectas que comprenden al ángulo recto.

D.II.2 En todo dominio paralelogramo dese el nombre de *gnomo* a uno cualquiera de los dos paralelogramos alrededor del diámetro junto con sus dos complementos

Teorema II.1 (T.D.)

Si dadas dos rectas, se divide a una de ellas en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por tales dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no dividida y por cada una de las rectas parciales.

1.1 Sean A, BG las dos rectas y córtese la BG por dos puntos cualesquiera los D.E. (Hip.)

1.2 Digo que el rectángulo comprendido por las rectas A, BG es igual al comprendido por las A,BD más el comprendido por las A,DE más el por las A,EG. (Tes.)

Teorema II.2 (T.D.)

Si se divide al arbitrio una línea recta el rectángulo comprendido por la recta entera y por cada una de sus partes es igual al cuadrado de la recta entera.

2.1 Divídase, pues, la AB al arbitrio, pongo por caso por el punto G (Hip.)

2.2 Digo que el rectángulo comprendido por las rectas AB, BG junto con el rectángulo comprendido por las BA,AG es igual al cuadrado de la AB.

Teorema II.3 (T.D.)

Si se divide al arbitrio una línea recta, el rectángulo comprendido por la línea entera y por una de sus partes es igual al rectángulo comprendido por las partes de tal línea más el cuadrado de la parte primeramente dicha.

3.1 Divídase, pues, la AB, al arbítrio; pongo por caso por el punto G. (Hip.)

3.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AB,BG es igual al rectángulo comprendido por las AG,GB más el cuadrado de la BG. (Tes.)

Teorema II.4 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes.

4.1 Divídase, pues, la línea recta AB, al arbitrio, por el punto G. (Hip.)

4.2 Digo que el cuadrado de la recta AB es igual a los cuadrados de las AG,GB más el duplo de rectángulo comprendido por las AG,GB. (Tes.)

Teorema II.5 (T.D)

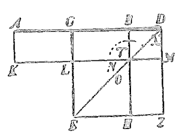
Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta total más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes es igual al cuadrado de la mitad de la recta dada.

5.1 Córtese, pues, una recta cualquiera, la AB, en partes iguales por el punto G; y en desiguales por el D.

5.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AD,DB más el cuadrado de GD es igual al cuadrado de GB. (Tes.)

Teorema II.6 (T.D.)

Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida.



6.1 Córtese, pues en dos por el punto G la recta AB y añádasele en recta, la recta BD

6.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AD y DB junto con el cuadrado de la GB es igual al cuadrado de la GD (Tes.)

Teorema II.7 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte.

7.1 Córtese, pues, al arbitrio la recta AB por el punto G. (Hip.)

7.2 Digo que los cuadrados de las AB,BG son igual al doble del rectángulo comprendido por las AB,BG más el cuadrado de la GA (Tes.)

Teorema II.8 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuádruplo del rectángulo comprendido por la línea entera y por una de sus partes más el cuadrado de la otra parte es igual al cuadrado descrito por la línea entera más la parte dicha tomadas como un solo lado.

8.1 Córtese, pues, al arbitrio la recta AB por el punto G. (Hip.)

8.2 Digo que el cuádruplo del rectángulo comprendido por las rectas AB,BG más el cuadrado de la AG es igual al cuadrado descrito por las AB,BG tomadas como una sola recta.

Teorema II.9 (T.D.)

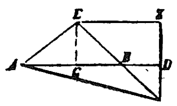
Si se divide una línea recta en parte iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la línea total son el doble del cuadrado de la mitad de la línea entera más el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos clases de cortes.

9.1 Divídase, pues, la recta AB en partes iguales por el punto G y en partes desiguales por el D. (Hip.)

9.2 Digo que los cuadrados de los lados AD,DB son el doble que los cuadrados de los AG,GD.

Teorema II.10 (T.D.)

Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta, el cuadrado de la línea entera mas la añadida, junto con el de la añadida, tomadas de vez, son el doble que el cuadrado descrito por la línea mitad más el cuadrado de la compuesta por la mitad y por la añadida, tomadas como una sola.



10.1 Divídase, pues, la recta AB en dos por el punto G y añádasele en recta la recta BD. (Hip.)

10.2 Digo que los cuadrados de las AD DB son el doble que los cuadrados de las AG.GD. (Tes.)

Teorema II.11 (T.D.)

Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante.

11.1 Sea AB la recta dada (Hip.)

11.2 Hay que dividir la AB de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante. (Tes.)

Teorema II.12 (T.D.)

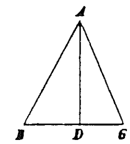
En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso y mayor en el doble del rectángulo comprendido por aquel de los lados del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior que queda entre perpendicular y el ángulo obtuso.

12.1 Sea ABG el triángulo obtusángulo que tiene en BAG el ángulo obtuso y trácese desde el punto B a la recta GA convenientemente prolongada, la perpendicular BD. (Hip.)

12.2 Digo que el cuadrado de BG es igual a los cuadrados de los BA. AG más el duplo del rectángulo comprendido por las rectas GA. AD. (Tes.)

Teorema II.13 (T.D.)

En los triángulos acutángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo, y menor en el duplo del rectángulo comprendido por el lado sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior que queda entre la perpendicular y el ángulo agudo.



13.1 Sea ABG el triángulo acutángulo que tiene el ángulo agudo en B y trácese desde el punto A a la recta BG la perpendicular AD. (Hip.)

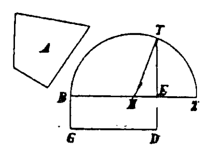
13.2 Digo que el cuadrado de AG es igual a los cuadrados de GB.BA menos el duplo del rectángulo comprendido por los GB.BD.

Teorema II.14 (T.D.)

Construir un cuadrado igual a un dominio rectilíneo dado.

14.1 Sea el dominio rectilíneo dado el A. (Hip.)

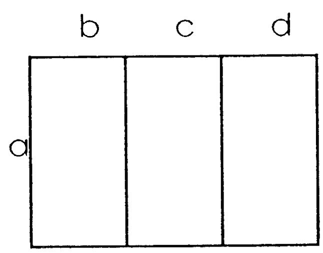
14.2 Hay que construir un cuadrado igual al dominio rectilíneo A. (Tes.)



EUCLIDES

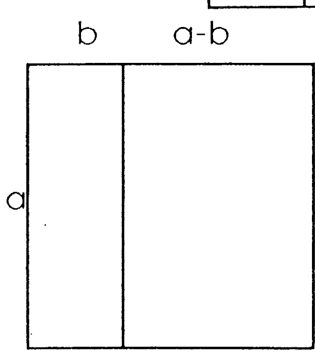
Libro II de Los Elementos de Euclides.

II.1



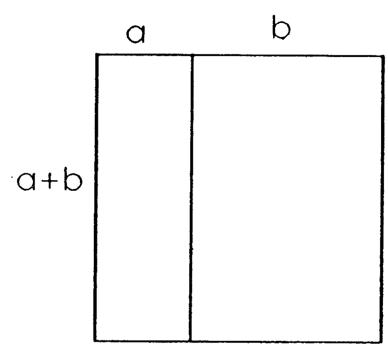
a(b+c+d)=ab+ac+ad.

II.2



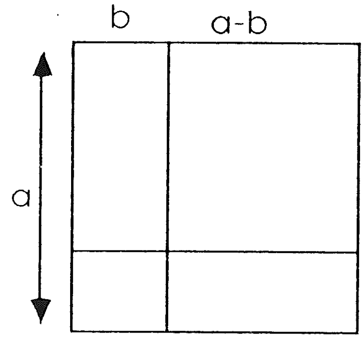
a^2=ab+a(a-b)

ó bien:



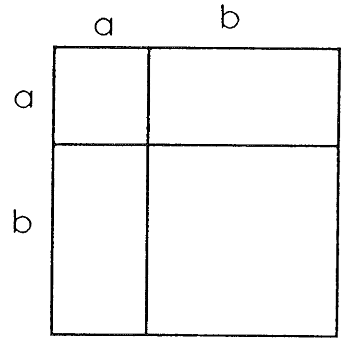
$(a+b)^2$=(a+b)a+(a+b)b

II.3



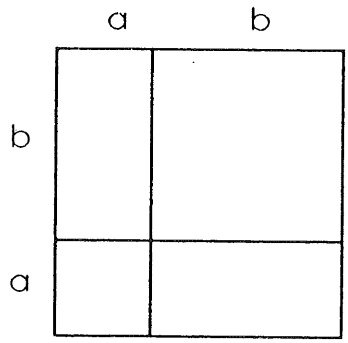
$ab=b(a-b)+b^2$

ó bien:



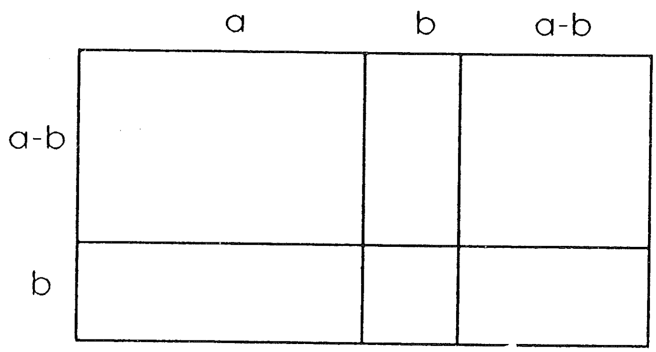
$a(a+b)=a^2+ab.$

II.4



$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

II.5



$(a-b)(a+b)+b^2=a^2$

Y así, de la misma forma:

II.6 $b(2a+b) + a^2 = (a+b)^2.$

II.7 $(a+b)^2+b^2 = 2(a+b)b + a^2.$

II.8 $4(a+b)a + b^2 = (2a+b)^2.$

II.9 $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

II.10 $(2a+b)^2+ b^2=2(a^2+(a+b)^2).$

II.11 Resolver: $a(a-x)=x^2$.

II.12 Lado opuesto a un ángulo obtuso.

II.13 Lado opuesto a un ángulo agudo.

II.14 Teorema de construcción.

El profesor de Matemáticas y las lógicas del descubrimiento

Antón Labraña Barrero

Cuando narramos hechos, describimos objetos, o explicamos resultados, procuramos hacerlo con orden y coherencia, siguiendo una secuencia lógica.

Pero los acontecimientos sólo pueden ser contemplados linealmente desde una óptica retrospectiva. La realidad resulta plural, sinuosa, zigzageante, y aún contradictoria.

La historia de las Matemáticas nos muestra un mundo de intuiciones, conjeturas, inducciones, deducciones, pruebas, refutaciones, extensiones de conceptos, restricciones de propiedades, teorías convergentes, elementos que se escinden,... En fin, una mezcla de diferentes planteamientos, métodos y enfoques, o sea, de distintas formas de pensar que en mayor o menor medida llenan de contenido a esta ciencia.

¿El posible que las frecuentes faltas de comprensión, los errores, y los propios aciertos de los estudiantes, estén reflejando en cierta medida toda esta diversidad?

¿Hasta qué punto la imposición —sea o no explícita— por parte del profesor de una determinada "forma de pensar", puede limitar las posibilidades de éxito escolar de sus alumnos?

¿Además del propiamente científico, qué interés puede tener un docente en conocer las teorías que tratan de explicar cómo se produce el descubrimiento, el avance, en Matemáticas?

Trataré de aportar algunos ejemplos de clase que representan situaciones frecuentes en la relación alumno/profesor.

1º.- "... En cuanto a nuestras observaciones, no podemos tener la certeza de cuales son las condiciones exactas que regulan las cosas que encontramos en la naturaleza. Las cosas que encontramos son casi siempre muestras. Nosotros pretendemos que las condiciones que cumplen esas muestras sean también cumplidas por las demás entidades que juzgamos similares. Este razonamiento, de lo individual a lo colectivo, es la inducción. La teoría de la inducción es la desesperación de los filósofos, y sin embargo todas nuestras actividades se basan en ella." (1)

Problema: si un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito ¿cuánto tardarán dos grifos?

Imagino que a ningún profesor de 8º de E.G.B. o 1º de B.U.P. o F.P.P., le sorprenderá obtener respuestas de este tipo:

1 grifo tarda — 3 horas
2 grifos tardan — x horas

$$x = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6 \text{ horas}$$

La respuesta puede contribuir a la exasperación del profesor si se produce por enésima vez en poco tiempo. Sin embargo tendremos que aceptar que la similitud de esta situación con aquellas otras de "regla de tres" es evidente. A Whithead probablemente no le extrañaría encontrarse la respuesta anterior al problema.

El profesor no se confunde entre otras cosas, porque formula el problema "a posteriori", o sea, conocedor de la solución y con una clara intencionalidad. Pero el alumno asocia este enunciado a tantos otros resueltos con anterioridad, a veces después de un costoso aprendizaje, en los cuales la susodicha "regla de tres" proporcionaba un éxito inapelable.

Estaríamos ante lo que Brousseau denomina "obstáculo epistemológico", cuyo tratamiento didáctico requiere la toma de conciencia previa por parte del profesor.

2º.- Refiriéndose también a la inducción, pero considerada ahora como método de investigación científica, escribe A.B. Wolfe (1924):

"En primer lugar se observarían y registrarían (todos) los hechos sin seleccionarlos ni hacer conjeturas a priori sobre su relevancia. En segundo lugar se analizarían, compararían y clasificarían los hechos registrados,... En tercer lugar se harían generalizaciones inductivas referentes a las relaciones, clasificatorias o causales, entre ellos. En cuarto lugar las investigaciones subsiguientes serían deductivas tanto como inductivas, haciéndose inferencias a partir de generalizaciones previamente establecidas."(2)

(La palabra "todos" aparece en el texto sin distinción especial, pero es que habla en un caso hipotético de ser capaz de abarcarlos.)

Problema: el profesor pretende llevar al aula una génesis de las razones trigonométricas del ángulo agudo. Propone a sus alumnos que dibujen triángulos de cualquier tamaño y en cualquier posición cuyos ángulos sean de 50, 60 y 70 grados. Los lados serán denominados "a, b y c" opuestos a los ángulos en el orden dado.

Según van terminando salen a la pizarra y cubren una línea de la tabla que en ella figura:

cuadro 1

alumno/a	*a*	*b*	*c*	*a/b*	*a/c*	*b/c*
Elena	6	6'8	7'4	0'882	0'810	0'918
Marisa	4'7	5'2	5'6	0'903	0'839	0'928
José	10	11'3	12'2	0'884	0'819	0'926
Dani	3'8	4'3	4'8	0'883	0'808	0'914

Un breve análisis es suficiente para que se produzca la generalización inductiva que el profesor pretendía:

"Para unos ángulos fijos, las razones entre lados correspondientes son constantes en cualquier triángulo."

Yo practicaba este método con gran ilusión hasta que leí de Car G. Hempel (1966): "Los hechos o hallazgos empíricos, sólo se pueden calificar como lógicamente relevantes o irrelevantes por referencia a una hipótesis dada, y no por referencia a un problema dado".(3)

Ciertamente no había "hipótesis dada" para mis alumnos. A pesar de todo sigo haciéndolo igual ya que no se me ha ocurrido nada mejor para que los estudiantes "lleguen" a la proporcionalidad entre triángulos semejantes.

Por cierto, Hempel califica este método como "concepción inductivista estrecha de la investigación científica".

3º.- "DSETA: Primero, no tengo una ayuda a la investigación del gobierno, como para emprender una extensa observación de los poliedros, ni ayudantes de investigaciones suministrados por el ejército que cuenten el número de vértices, aristas y caras, para compilar tablas con estos datos. Pero, aún cuando dispusiese de ello no tendría paciencia (o interés) para ensayar una fórmula tras otra para comprobar si encaja.

BETA: ¿Entonces qué? ¿Va usted a tumbarse en el sofá y cerrar los ojos, olvidándose de los datos?

DSETA: Exactamente. Necesito una idea para comenzar con ella y no dato alguno.

BETA: ¿Y de dónde saca usted su idea?

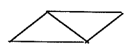
DSETA: Está ya ahí, en nuestra mente, cuando formulamos el problema: de hecho, está en la propia formulación del problema."(4)

Problema: obtener la ley de formulación, o relación entre el número de triángulos que se construyen y el número mínimo de segmentos necesarios.

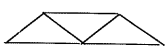
Leía hace unos meses un artículo muy interesante sobre este tema, y sin que con ello pretenda desmerecer el mismo, ya que su alcance llega mucho más lejos, reproduzco una parte que me llamó especialmente la atención:

¿Cuántos palillos se necesitan para hacer un triángulo equilátero?

¿Y para hacer dos? Con 5 basta.



¿Y para hacer tres? Con 7 basta.



¿Y para hacer cuatro, cinco, seis...?

Si se forma una tabla, parece haber una sencilla regularidad:

Núm. de triángulos	1	2	3	4	5	6	...
Núm. de palillos	3	5	7	9	11	13	...

Realmente "formar la tabla" contribuye a observar la regularidad pretendida, otra cosa serán los casos excepcionales, pero lo que me preguntaba era si al sugerir el profesor que el alumno forme la tabla, no estará encauzando excesivamente su pensamiento.

Me decidí a intentarlo con niños de 11 años:

P: ¿Cuál es el polígono más sencillo que conocéis?

R: El triángulo

P: ¿Por qué?

R: Porque tiene sólo tres lados

Les proporcioné **tres** palillos a cada uno y construyeron el triángulo. Continuamos:

P: ¿Cuántos palillos necesitaríais para hacer dos?

R: Cinco, seis,... Discuten un poco y se queda en "cinco"

P: ¿Y para hacer diez?

R: ... (cuchichean)... 20, 21 (Se explican)... si, porque añadiendo dos más conseguimos un nuevo triángulo. Necesitamos dos para cada triángulo y uno más para el primero.

A continuación les proporcioné más palillos.

Efectivamente parecía un caso lo bastante asequible como para que los chicos pudiesen establecer una conjetura deductiva: un experimento mental a partir de una idea que latía "en la propia formulación del problema".

Hacer la tabla y extraer conclusiones de la misma es un proceso totalmente legítimo, aunque suponga el paso de un estadio geométrico a otro aritmético. A veces puede ser un método más potente que los procedimientos directos. En cualquier caso, si los alumnos no progresasen, siempre estaríamos a tiempo de proporcionarles más palillos e ir formando la tabla.

4º.- "... Los hechos no constituyen estímulos externos para la investigación; sólo son tenidos en cuenta si entran en conflicto con alguna expectativa previa, y su importancia se mide por la importancia de la teoría que refutan."[6]

Problema: simplificar la siguiente expresión:

$\sqrt{a^4 + a^2} \bullet \sqrt{a^2 + 1}$

El profesor estará probablemente familiarizado con respuestas del tipo siguiente:

$= (\sqrt{a^4} + \sqrt{a^2}) \bullet (\sqrt{a^2} + 1) =$

$= (\sqrt[2]{a^{4^2}} + \sqrt[2]{a^2}) \bullet (\sqrt[2]{a^2 + 1}) = (a^2 + a) \bullet (a + 1) = \ldots$

En un intento de rectificar, antes de comentar con el alumno o alumnos la solución que habían aportado, "contra-atacaba" de este modo:

Prof.: calcular $\sqrt{9 + 16}$

Alum.: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Prof.: dado que $9 + 16 = 25$, tendríamos $\sqrt{25} =$

Alum.: $= 5$

El "argumento" parecía concluyente: la raiz de un suma no es igual a la suma de la raíces.

Reflexionando sobre el texto que se cita, me ha parecido que esta sencilla forma de proceder dejaba de lado algún aspecto sustancial del aprendizaje. El método del *contra-ejemplo* sin más, dejaba intactas aquellas creencias que habían impulsado al alumno a *tomar la iniciativa* de distribuir la raiz en dos sumandos.

Obviamente la *refutación* resultaba útil, pero ¿por qué no intentar *corroborrar* el supuesto de que $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?, en lugar de contentarse con *falsarlo.*

Al abordar esta última cuestión me he dado cuenta que para mis alumnos la propiedad distributiva es una regla que *obliga* a obtener una segunda parte más facililla, y no una propiedad que *permite* elegir la forma de operar. También pude apreciar que para ellos la obtención de raíces y el cálculo con radicales eran operaciones que poco o nada tenían que ver: "volver a las raíces" nos permitió comprender el porqué se pueden distribuir en factores de los productos, y sin embargo las de las sumas no.

A modo de conclusión

Estas son las primeras notas de un estudio que he emprendido acerca de la *lógica del descubrimiento,* tratando de obtener orientaciones de tipo didáctico.

Con este escrito pretendo llamar la atención de los profesores de Matemáticas de cualquier nivel educativo, ante un hecho que podremos aceptar sin reparos: a lo largo de la historia, los grandes matemáticos no han actuado desde una única "perspectiva verdadera", sino desde ópticas muy diferentes entre si. Incluso algunos de ellos han modificado su posicionamiento a lo largo de sus obras.

De aquí puede pensarse que más que existir un "pensamiento natural", lo natural es que coexistan distintos modos de pensamiento y máxime en un aula con cerca de 40 alumnos de trayectorias escolares diversas.

Comprender esto, y conocer las teorías que tratan de explicar cómo se produce el avance en Matemáticas, será sin duda de gran utilidad para el profesor.

Referencias bibliográficas

1 WITHEHAUD: *Las matemáticas en la historia del pensamiento.* Colección SIGMA. Ed. Grijalbo. Barcelona (1980).

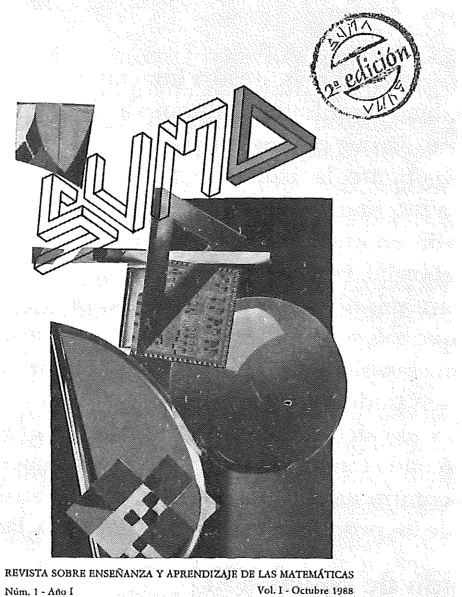
2 A.B. WOLFE: *Funtional Economics.* Ed. R.G.Tugwel, Nueva York (1924).

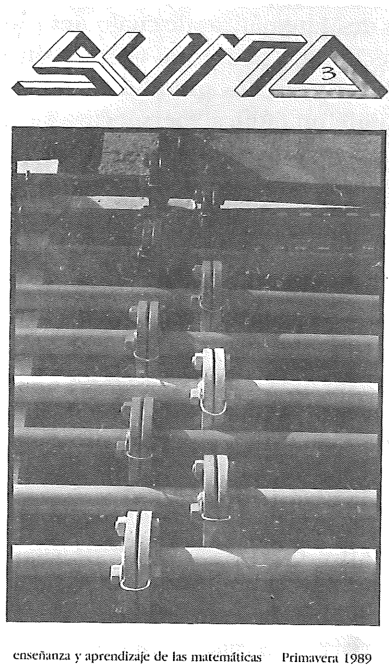
3 CARL G. HEMPEL: *Filosofía de la ciencia natural.* Ed. Alianza (1981).

4 IMRE LAKATOS: *Pruebas y refutaciones.* Ed. Alianza (1986)

5 E. BORRAS, M. CONTRERAS, F. HERNAN: *Palillos.* Revista Suma nº2 (1989), pags. 51-54.

6 POPPER : *La lógica de la investigación científica,* (1962).





Números atrasados 1.000 ptas. cada ejemplar (más gastos de envío)
Pedidos: Revista SUMA. Apartado 1.017. 18080 Granada.

Un problema interesante: "Maridos engañados en un pueblo integrista"

José Colera

Este articulo lo presento como humilde homenaje a Rafael Montoya (profesor, matemático, ajedrecista, amigo). Nos conocimos,jóvenes estudiantes, en Ceuta y compartimos durante muchos años largas horas jugando al ajedrez; resolviendo problemas de matemáticas, de ajedrez o de ingenio; preparando oposiciones; o, simplemente, charlando, conviviendo. Su trágica muerte, hace ahora un año, siendo director del Instituto de Tánger, nos desgarró a los muchos amigos que tenía y que lo recordamos como hombre inteligente, profundo, muy amistoso, extraordinariamente afable, ... entrañable.

El problema, primer enunciado

En un pueblo árabe hay mujeres que engañan a sus maridos. El Cadí, alarmado, emite un edicto en el que se ordena que el marido que tenga la seguridad de que su mujer le engaña la mate. Al cabo de 40 días amanecen ejecutadas las 40 mujeres que engañaban a sus maridos. ¿Qué razonamiento llevó a éstos a la seguridad de que la suya era una de ellas?.

Este problema con un enunciado muy parecido al que aquí doy, nos lo propuso Rafael Montoya en Ceuta, una noche del verano de 1965, en los jardines del Hotel la Muralla, a un grupo de amigos. Los demás, no matemáticos, mostraron poco interés y acabamos los dos en "un aparte", discutiendo sobre él. Llegamos a la conclusión de que para que la solución que le habíamos dado fuera inequívoca se requerían varios axiomas (pedanterías de jóvenes matemáticos) y sacamos algunas consecuencias curiosas. De modo que dimos al enunciado la forma axiomática que aparece a continuación.

Enunciado definitivo

En un pueblo árabe hay mujeres que engañan a sus maridos. El Cadí, alarmado, publica el siguiente edicto: puesto que en este pueblo hay mujeres que engañan a sus maridos, ordeno que todo marido que llegue a la conclusión de que su mujer le engaña la mate a las 12 de la noche del día en cuestión.

Dato para que se resuelva el problema 40 días después de publicado el edicto aparecen muertas las 40 mujeres adúlteras.

Pregunta. ¿Qué razonamiento llevó a cada uno de sus maridos a deducir inequívocamente que su mujer era una de ellas?.

Axiomas
1. Si una mujer engaña a su marido lo sabe todo el pueblo salvo él mismo.
2. Todos los hombres de ese pueblo son inteligentes.
3. Todos saben que los demás son inteligentes.

Consecuencias curiosas
- Si el Cadí, no tan integrista, se arrepintiera de la hecatombe que se avecinaba y enviara un emisario poco antes de las 12 de la noche para que convenciera a cada uno de los 40 maridos que no matara a su mujer, a la noche siguiente serían ejecutadas ¡todas las demás esposas del pueblo!.
- En lugar de 40 maridos, mujeres, noches, se podría poner, obviamente, n, cualquiera.

La solución. (Lector, si no conocías el problema no leas este párrafo. Intenta resolverlo por tu cuenta).

Resolvámoslo, paso a paso, empezando por simplificarlo al máximo:

¿Que pasaría si sólo hubiera una mujer adúltera?. Su marido, al leer el edicto, razonaría así: hay mujeres que engañan a sus maridos y yo no conozco a ninguna. Por tanto (Axioma 1) es la mía. ¿Y si hubiera dos?. Cada uno de sus maridos pensaría que era la del otro y daría por sentado que la mataría esa noche. Pero al ver que no lo había hecho razonaría (Axiomas 2 y 3) que el otro conocía otra. ¿Otra que yo no conozco? ¡La mía!.

Y así sucesivamente, por inducción, se puede llegar a cualquier número.

Anécdotas

Los problemas hermosos (y éste lo es a pesar del desaforado contexto con que se enuncia), se difunden sorprendentemente. Ignoro quién se lo contó o dónde lo leyó Rafael en aquella lejana época de estudiante. Cada uno de nosotros, a partir de entonces, lo hemos propuesto, con la versión axiomática, en múltiples ocasiones. Una de ellas fue en agosto del 78, en una cafetería de Santiago del Compostela, el día que terminó el XXX Congreso de la CIEAEM. Uno de los presentes era Luis Puig quien, posteriormente, lo contó a Fernando Cerdá. Ambos también lo han difundido extraordinariamente. Por cierto que este último tuvo hace dos años algunos problemas como consecuencia de la irritación que produjo a un grupo de feministas que se escandalizaron con el enunciado. Aunque parezca increíble, las protestas llegaron hasta la Secretaria de Estado para la Mujer, Carlota Bustelo, quien se hizo eco de su indignación No parece que el asunto fuera a más.

Hace unos días, en Pamplona, durante una sobremesa, nos lo propuso Luis Segarra a un grupo de matemáticos, curiosamente con los mismos axiomas que pusimos hace 25 años Rafael y yo.

Por lo demás hay que aclarar que este problema es muy antiguo y aparece, con enunciados ligeramente distintos pero siempre con el contexto de maridos engañados y pueblos árabes, en diversos libros de problemas de ingenio.

Explicaciones necesarias (¿necesarias?)

¿Hace falta decir que quieres consideramos hermoso este problema y, por tanto, lo difundimos, tenemos la convicción de que no puede ser ofensivo para nadie?. Más bien parece fruto de una actitud tremendista el ofenderse por un enunciado que es, de puro descabellado, ingenuo.

Con objeto de llevar al aula esta situación de aprendizaje tan interesante, haciéndola operativa, he diseñado la siguiente experiencia, en todo isomorfa a nuestro problema.

Una adaptación para el aula

Acudo al aula con 10 gorros (cucuruchos de tela o papel) negros y 9 blancos, que muestro a los alumnos.

10 alumnos y alumnas se sientan, en corro, a la vista del resto de la clase. Estos 10 son los que actuarán, pero pensarán y participarán todos.

A cada uno de los 10 les pongo en la cabeza un gorro. Cada uno ve el de los demás pero no el propio.

"El que llegue a la conclusión de que su gorro es negro, que se ponga de pie después de que dé un golpe en la pizarra". Pretendo, así, que si por ejemplo 6 de ellos tienen gorro negro, se levanten ellos y solo ellos después de 6 señales.

Lógicamente, para poder llegar a esto razonadamente hay que preparar el ambiente con una secuenciación adecuada.

Empezaré poniendo un sólo gorro negro (y el resto blancos) e iré ampliando, poco a poco, en sucesivas experiencias, el número de gorros negros.

Probablemente haya que repetir las primeras (1 negro, 2 negros) para que los alumnos se vayan familiarizando con la lógica del juego. Después de cada experiencia se procederá a un breve coloquio para que los alumnos expongan sus conclusiones. Así hasta que lleguen a una regla general del siguiente tipo: "Si hay 6 gorros negros,todos los que los llevan se levantarán al 6º golpe. Esto ocurre porque cada uno de los 6 ha razonado así: "Veo 5 gorros negros; cada uno de ellos ha de levantarse después del 5º golpe; si no lo hacen es que ellos también ven 5 gorros negros: los otros 4 y el mío; habré de levantarme al golpe siguiente, el 6º".

Cuando la regla general está perfectamente entendida, haré una última experiencia con truco: diré por escrito a los que tienen gorro negro que no se levanten; para que no se note la diferencia habré de darles también algún mensaje, irrelevante, a los que tienen gorro blanco. Si todo sale bien se acabarán levantando los que tienen gorro blanco.

Puesta en práctica

La experiencia la he llevado a cabo el 2/4/90 en el curso 1ºB del I.B. de Colmenar Viejo (Madrid) durante 40 minutos.

La profesora de matemáticas de estos alumnos, Mª Angeles Isidro, les tiene acostumbrados desde principio de curso a la resolución de problemas "de pensar". Estos alumnos poseen un notable hábito de discurrir en situaciones nuevas y una extraordinaria actitud hacia este tipo de problemas. Me encontré, pues, con un magnífico ambiente.

Situamos las mesas pegadas a las paredes. Se colocaron 10 alumnos sentados en corro en el centro del aula.

Presento el problema ("es un juego para pensar, no solo los 10 que actuarán, sino la totalidad de la clase"). Les muestro los gorros (risas). Obtienen una primera conclusión: "Puesto que solo hay 9 gorros blancos, seguro que a alguno le vas a poner gorro negro".

Pongo 9 blancos y 1 negro (muchas risas). Doy la señal (un golpe en la pizarra). La chica que tiene gorro negro no se levanta. Todos la miran. Toma la palabra: "me parecía que tenía gorro negro, pero no estaba muy segura de lo que debía hacer. Creo que no he entendido bien el problema". Varios intentan explicárselo a la vez. Al final lo hace una de ellos con toda claridad.

Se repite la experiencia con un solo gorro negro. Sale correcto.

2 gorros negros y 8 blancos. Primer golpe. Segundo golpe y no se levanta nadie. Algunos de los observadores se mueven inquietos y cuchichean. Doy un tercer golpe y se levantan dos chicos: uno con gorro negro y otro con gorro blanco. (Risas y murmullos). Este se mira el gorro y queda extrañado. Toma la palabra una chica del público. ("El lo ha hecho bien", dice señalándolo). Varios de ellos, sucesivamente, explican lo ocurrido y sacan consecuencias. Nos aproximamos a una regla general.

Se repite la experiencia con diversos números de gorros negros. Sale siempre correctamente. Puesto que ya parece comprendida la lógica del juego, lo concluimos así: Pongo 4 gorros negros y 6 blancos. a todos ellos les doy un papelito ("léelo sin que lo vean los demás" les digo). El que doy a los que tienen gorro negro dice: "Esta orden anula la que te he dado de palabra: aunque llegues a la conclusión de que tu gorro es negro *no te levantes*". El papel que les doy a los que tienen gorro blanco dice: "Si has de levantarte, cuando lo hagas *sujétate el gorro con las dos manos*". Al cuarto golpe nadie se levanta. Al quinto lo hacen, sujetándose el gorro con las dos manos, cinco de los seis que lo tienen blanco. (Perplejidad). La chica que no se ha levantado dice que lo iba a hacer pero que no se ha decidido a hacerlo porque ha visto que los que se levantaban eran los de gorro blanco. "¿ Y tú de que color lo tienes?". "Negro"."Míratelo" ...(Muchas risas. Alboroto).

"¿Qué creéis que ponían los papeles que les dí?". Tras dos o tres versiones fallidas, un chico con gorro blanco atina con el tipo de mensaje que tenían los de gorro negro y, a continuación, uno de éstos da una versión correcta del otro mensaje.

Se les pide a los alumnos que hagan una redacción (breve, pues están de lleno en exámenes trimestrales) del problema que acaban de vivir. Incluyo alguna de las versiones, o fragmento de ellas.

Un bonito e imprevisto epílogo

Comentando con la profesora del curso (Mª Angeles Isidro) el desarrollo de la sesión, se le ocurrió una estupenda idea: mañana les propondré el problema original (el del pueblo árabe) a ver si lo relacionan con éste y cómo lo resuelven.

Así lo hizo. Me cuenta el desarrollo de la sesión. He aquí algunos detalles: A los tres o cuatro minutos de enunciado, un alumno, e inmediatamente otro, le llaman para comentarle en voz baja: "éste es igual que el de los gorros". Al cabo de media hora, aproximadamente, lo ha resuelto más de la mitad de la clase. Se comenta en gran grupo.

Algunos de ellos se encontraron con dificultades no previstas por nosotros: por tratarse de un pueblo árabe consideraron que cada marido podía tener más de una mujer. Así, ¡menudo problema!

EL JUEGO DE LOS GORROS BLANCOS Y NEGROS

Este juego, es un juego de pensar, de razonar (de lógica). Consiste en lo siguiente:

(Por ejemplo). Yo tengo nueve gorros blancos y diez gorros negros. Juegan diez personas que se sientan formando un círculo. Pongo un gorro ~~a~~ blanco a cada uno de ellos excepto a uno que se le pondré negro, pero ellos no saben el color de su gorro, sólo ven el de sus compañeros. El del gorro negro verá nueve gorros blancos y el suyo no le verá, entonces cuando yo de un golpe en la mesa el del gorro ~~bla~~ negro se levantará y explicará cómo ha adivinado que era su gorro el de color negro.

Este juego cada vez se puede complicar un poco más. (ejmp.) Si yo pongo 8 gorros blancos y dos gorros negros, los que tienen el gorro negro sólo ven uno negro, pues el suyo no le ven y pensaran que en el primer golpe se levantará el del gorro negro, pero, al ~~haber dos~~ no levantarse, miraran haber de qué color tienen el gorro los otros compañeros y al no ver otro negro en el segundo golpe se levantarían los dos y tendrán que explicar cada uno, porqué han adivinado el color de su gorro, y la respuesta sería: Porque yo veía un gorro negro y al ver que él no se había levantado pensé que el mío también sería negro.

- Ningún jugador sabe el nº concreto de gorros ~~negros~~, siempre pensaran que hay los que ven más uno (el suyo)

Si pusiera cuatro gorros negros hasta el cuarto golpe no se levantará nadie y en el cuarto se levantarían las cuatro personas que tenían gorros negros.

Igual pasaría si pusiese 5, 6, 7, 8 ó 9 gorros negros (que hasta el quinto, sexto, séptimo, octavo o noveno golpe no se levantaría nadie).

Si pusiese los diez gorros negros hasta el décimo golpe todos estarían sentados, pero en el décimo todos se levantarían.

Este juego se puede complicar aún mucho más, si, además de repartir los gorros blancos y negros mezclados, damos mensajes a los jugadores. (ejmp.) Repartimos 5 blancos y 5 negros.

Si a todos los de los gorros blancos les damos un mensaje que diga:

- Si estas seguro de tener gorro negro levántate con las dos manos en la cabeza

Y a los de gorro negro:

- Si estas seguro de tener gorro ~~blanco~~ no te levantes.

Y al final se levantarían los de gorro blanco con las dos manos en la cabeza y los de los gorros negros se quedarían sentados.

No hay suficientes gorros blancos para todos pero...

¿Si dieramos un gorro blanco a cada uno ¿qué pasaría?

Pues que al primer golpe todos se levantarían.

Fátima Virginia López García. 1ºB Nº 26.

¡Aun más difícil!

Si a cada persona de gorro oscuro se le da un papel diciendo:

"¡No te levantes! ocurra lo que ocurra!".

y a cada persona de gorro blanco:

"levántate cuando creas que tienes gorro negro".

¿Qué ocurrirá?

Simplemente que los blancos se levantarán creyendo que son negros y los negros se quedarían sentados ya que el mensaje les ordenaba que no se levantaran.

— Las 37 degolladas —

Nada más plantearnos el problema no lo relacionamos con el de los gorros; intentamos resolverlo de forma individual

Es un problema similar al de los gorros, las diferencias están en que

- En este último planteamiento no se nos indicaba el nº de personas del pueblo.
- Dentro de las mujeres se podían incluir las del califa (esta idea la desechamos, más tarde pues las mujeres del califa están lo suficientemente aisladas)
- Cabe la posibilidad de que cada hombre tenga 2 ó más mujeres (sería fácil saber si alguna es infiel. pero ¡Cual!)

Desechando estas 2 últimas posibilidades, es decir – no incluyendo a las mujeres del califa y suponiendo que cada hombre tuviera una mujer – y con la sugerencia de que simplificásemos el problema, lo relacionamos con el de los gorros encontrando la solución.

Esta tarde intentamos terminar el problema suponiendo que cada hombre tuviera 2 (ó mas mujeres) verdaderamente la cosa se complica, y lo único que podemos añadir es que seguimos pensando en él utilizando la metodología del problema de los gorros.

Agradeceríamos sugerencias para la continuación;

Susana Sanz Gil
Amaya Gartelu
Esther Llorente
Ana Carretero

OPINIÓN PERSONAL → En mi opinión, este juego-experiencia, es una gran ayuda para nosotros, ya que nos fomenta a utilizar la lógica en algunos problemas matemáticos, y un desarrollo en nuestro cerebro al mayor comprendimiento del discurrir lógico o de sentido común (como también se le llama). También este juego lo podemos considerar como un apoyo o refuerzo a pensar más en los problemas y en otro tipo de situaciones cotidianas. En fin, me ha parecido una experiencia positiva y de un grandísimo apoyo al desarrollo de nuestras facultades mentales. Pienso que experiencias como esta deberían repetirse, tanto en esta como en otra asignatura.

David [illegible]

La curiosa historia de…

La dignidad de los diplomáticos, puesta en entredicho

Una vez terminados los estudios universitarios en su ciudad natal, Leipzig, y de conseguir su doctorado en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, en 1667, a los 21 años, rechazó Leibniz la oferta de una cátedra de derecho en esa misma Universidad, y ya no se dedicaría nunca en su vida a la enseñanza (al contrario que Newton, por ejemplo).

Entró, en cambio, al servicio del Príncipe Elector de Mainz como embajador profesional y consultor jurídico, cargo que ocuparía hasta 1676 (los años más fecundos de su vida, desde el punto de vista de su obra matemática), para entrar a continuación al servicio de la casa de Hannover, también como diplomático, consejero jurídico historiador-cronista y bibliotecario, cargo en el que permanecería ya hasta su muerte en 1716.

Este tipo de actividad exigía hacer frecuentes viajes por toda Europa y ocuparse de asuntos muy diversos, que impidieron a Leibniz hacer un estudio reposado y a fondo de la matemática de la época. Todo ello vino a dificultar considerablemente el que las ideas matemáticas de Leibniz sobre el nuevo "cálculo infinitesimal" pudieran desarrollarse y madurar en la calma y el reposo necesarios.

Erich Temple Bell, en su famoso libro *Men of Mathematics,* dedicó a Leibniz un capítulo titulado elogiosamente "*Master of all Trades*" (es decir, "*Maestro en todos los oficios*"), capítulo que termina con las siguientes palabras, refiriéndose a la profesión de diplomático que ejerció Leibniz durante largos años:

"There is but one profession in the world older than his, and until that is made respectable, it would be premature to try any man for choosing diplomacy as his means to a livelihood".

Es decir: "No hay más que una profesión en el mundo que sea más antigua que la suya, y mientras ésta no consiga hacerse respetable, sería prematuro juzgar a un hombre cualquiera por el hecho de elegir la diplomacia como medio de ganarse la vida".

Mariano Martínez Pérez

Una aproximació a l'índex de Preus al consum

Grup Zero

Introducció

Sota el títol d'una aproximació a l'índex de Preus al Consum presentem un tema que es pot treballar interdisciplinàriament a les àrees de Matemàtiques i Ciències Socials en els darrers cursos del futur ensenyament secundari obligatori.

Aquest tema podria omplir part del buit de coneixements bàsics d'Economia que tenen els nostres alumnes; també permetria la utilització a fons d'unes eines matemàtiques com són: els càlculs de variacions percentuals, les mitjanes ponderades, els nombres índex, ...; no gaire utilitzades actualment ni a l'E.G.B. ni al B.U.P.

En el Grup Zero de Barcelona hem elaborat i experimentat un material didàctic que permet treballar l'I.P.C. En aquest material, s'introdueixen els conceptes a partir de la resolució de problemes simples que, sempre que és possible, es plantegen amb dades reals.

L'estructura bàsica és la següent:

—Es fa una introducció (apartat a) en la qual partint dels conceptes més elementals (tant per cent, tant per u, tant per mil) es pretén que els alumnes adquireixin l'habilitat necessària en el càlcul de variacions percentuals, per tal que el treball posterior no se'ls faci llarg i pesat.

—Segueix després el material bàsic per elaborar els conceptes (apartats de B a G) que inclou a més problemes d'aplicació. Paral.lelament el professor pot proposar als alumnes la realització de treballs fora de l'aula com: actualització de preus, l'estudi dels preus d'altres productes, ...

—Per últim, un cop acabat el tema, hom pot proposar de fer treballs de consolidació del que han après (elaboració d'un I.P.C. personal, ...) o treballs complementaris (estudi d'altres índexs, ...).

Pel que fa a la recerca de dades per elaborar el material, cal dir que els organismes oficials, com l'Institut Nacional d'Estadística, no faciliten dades de preus, sinó que només donen índexs. Això és degut al fet que per elaborar l'I.P.C., s'utilitzen per una banda, components el preu dels quals és complicat de calcular (telèfon, electricitat...) i, per una altra, per als articles estacionals com la fruita o el vestit, s'utilitzen productes diferents al llarg de l'any (taronja a l'hivern, préssec a l'estiu, raïm a la tardor...). Això comporta que pugui ser discutible quin producte s'utilitza i com se n'obté el preu en cada cas particular; i, donada la importància que té actualment l'índex de Preus al Consum, l'I.N.E. prefereix discutir-ho portes endins. És per això que, quan es donen preus, en el material que es dóna als alumnes, es diu com s'han obtingut.

Per treballar a classe és indispensable que els alumnes disposin de calculadora, i és convenient la utilització de l'ordinador per a la realització d'alguns gràfics. El treball amb aquest tema es pot aprofitar també per iniciar als alumnes en les bases de dades, el full de càlcul i gràfics, i per veure com es relacionen aquests elements en un paquet integrat.

Breu descripció de les idees bàsiques de cada apartat

A.- Variacions en percentatge:

Aquest apartat és una introducció al tema. La major part dels càlculs que es fan en l'estudi de l'IPC són de variacions percentuals. Per aquest motiu, és molt convenient treballar prèviament el càlcul de variacions en percentatges utilitzant el tant per u.

Per exemple:

a) Si s'ha de trobar la variació entre 200 i 250:

Una aproximación al índice de precios al consumo*

Grupo Zero

Introducción

Bajo el título de **una aproximación al índice de precios al consumo** presentamos un tema que se puede trabajar interdisciplinariamente en las áreas de Matemáticas y Ciencias Sociales en los últimos cursos de la futura enseñanza secundaria obligatoria.

Este tema podría llenar parte del vacío de conocimientos básicos de economía que tienen nuestros alumnos; también permitiría la utilización a fondo de conceptos matemáticos como son: los cálculos de variaciones porcentuales, las medias ponderadas y los números índice, no muy utilizados actualmente en EGB ni en BUP.

En el Grup Zero hemos elaborado y experimentado un material didáctico que permite trabajar el I.P.C. En este material se introducen los conceptos a partir de la resolución de problemas simples que, siempre que sea posible, se plantean con datos reales.

La estructura básica es la siguiente:

—Se hace una introducción (apartado A) en la cual, partiendo de los conceptos más elementales (tanto por ciento, tanto por uno, tanto por mil), se pretende que los alumnos adquieran la habilidad necesaria en el cálculo de variaciones porcentuales, para que el trabajo posterior no les resulte largo y pesado.

Sigue después el material básico para elaborar los conceptos (apartados de B a G), que incluyen además problemas de aplicación. Paralelamente el profesor puede proponer a los alumnos la realización de trabajos fuera del aula como la actualización de precios, el estudio de los precios de otros productos,...

—Por último, una vez acabado el tema, se puede proponer hacer trabajos de consolidación de lo que han aprendido (elaboración de un I.P.C. personal,...) o trabajos complementarios (estudios de otros índices,...).

Respecto a la búsqueda de datos para elaborar el material, es necesario decir que los organismos oficiales como el Instituto Nacional de Estadística no facilitan datos sobre precios, sino que sólo dan índices. Esto es debido al hecho de que para elaborar el I.P.C. se utilizan, por un lado, componentes cuyo precio es complicado de calcular (teléfono, electricidad...) y, por otro, para los artículos estacionales como la fruta o el vestido, se utilizan productos diferentes a lo largo del año (la naranja en invierno, melocotón en verano, uva en otoño...). Esto comporta que pueda ser discutible qué producto se utiliza y cómo se obtiene su precio en cada caso particular; y, dada la importancia que actualmente tiene el índice de precios al consumo, el I.N.E. prefiere discutirlo de puertas a dentro. Por este motivo, cuando se facilitan precios en el material que se da a los alumnos, se especifica cómo se han obtenido.

Para trabajar en clase es indispensable que los alumnos dispongan de calculadora y es conveniente la utilización del ordenador para la realización de algunos gráficos. El trabajo de este tema se puede aprovechar también para iniciar a los alumnos en las bases de datos, la hoja de cálculo y gráficos, y para ver como se relacionan ambos elementos en un paquete integrado.

* Este trabajo es un resumen del "crédito" elaborado para el concurso de unidades didácticas, realizado el año 1989, por el Grupo Zero y convocado por la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativas de Cataluña

250/200 - 1 = 1,25 - 1 = 0,25 d'augment

b) Si s'ha de disminuir 500 en un 6%, multiplicarem 500 per (1-0,06), és a dir:

500 x 0,94 = 470

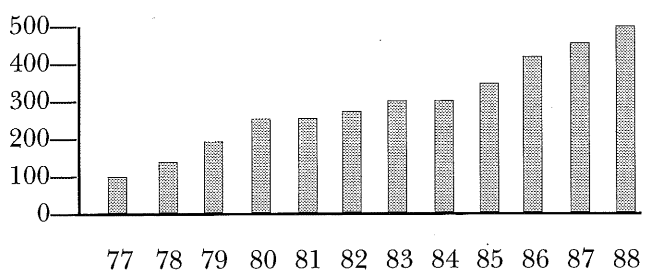
L'objectiu d'aquest primer apartat és que els alumnes agafin agilitat en aquest tipus de càlcul. Això costa molt perquè hi ha una gran resistència per part de l'alumne a abandonar el seu mètode de càlcul: "la regla de tres" i passar a la utilització del tant per u.

B.- Variació del preu de diferents productes al llarg del temps

A més de veure que els preus dels productes varien, el que es pretén aquí és d'estudiar i comparar aquestes variacions. Per poder-ho fer, cal veure la importància de la variació relativa enfront de l'absoluta.

Els dos primers exercicis són prou aclaridors: en el primer (B1) hi ha dos anys en què l'augment va ser el mateix (50 ptes) però, en canvi, l'augment percentual era molt diferent. En el segon exercici (B2) el període de màxim augment relatiu no correspon al de màxim augment absolut.

B1.- L'evolució del preu d'una entrada en un cinema d'estrena a Barcelona des de l'any 1977 fins enguany, ve representat pel diagrama de barres següent:



(Dades proporcionades per l'empresa Cinemes Balañà S.A.)

a) Quin augment de preu hi va haver de 1977 a 1978? I de 1985 a 1986?

b) ¿Quin tant per cent va augmentar l'entrada en un cinema de 1977 a 1978? I de 1985 a 1986?

c) ¿Quin dels dos valors, el calculat a l'apartat a) o el del b), us sembla que reflecteix millor la variació del preu de les entrades?

B2.- En un estudi fet pel Comitè d'Energia de la CEOE, es calcula la mitjana del preu del kWh (unitat de mesura del consum eléctric), per a una família que gasta 3500 kWh a l'any. Els valors obtinguts són:

Any	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
Ptes/kWh	4,09	4,09	4,68	6,45	8,64	9,79	11,32	12,37	13,68

a) Feu un gràfic de l'evolució del preu del kWh.

b) Quin augment de preu hi va haver de 1978 a 1979? I de 1980 a 1981?

c) ¿En quin tant per cent va augmentar el preu del kWh de 1978 a 1979? I de 1980 a 1981?

d) Completeu la taula següent:

	78-79	79-80	80-81	81-82	82-83	83-84	84-85	85-86
Augment (ptes.)								
% d'augment								

e) Entre quins anys s'ha produït la màxima variació de preu en ptes *(variació absoluta)*? Entre quins anys s'ha donât la màxima variació en percentatge *(variació relativa* o *taxa de variació)*? Dels dos períodes de temps que acabeu d'assenyalar, en quin diríeu que l'augment de la tarifa ha estat més alt?

f) Quin és el percentatge d'augment global de 1978 a 1986?

Els altres exercicis fan referència a l'evolució dels preus de dos productes energètics (benzina i butà) i de dues marques de tabac. Això permet de veure l'existència de variacions negatives (en el cas de la benzina i del butà), i la necessitat d'utilitzar variacions relatives respecte d'un any base per poder comparar l'evolució dels preus de productes diferents.

En tot aquest apartat s'han utilitatzat productes amb el preu de venda al públic controlat, i no amb variacions de preus degudes a: canvis estacionals, relació oferta-demanda, ... Per estudiar aquestes variacions en terminis de temps molt curts es podrien utilitzar els preus de majorista dels mercats centrals: Mercabarna o Llotja. Alguns Bancs i Diaris publiquen setmanalment les variacions de preus d'aquests mercats.

En els gràfics no es considera l'evolució de preus respecte al temps com una funció real de variable contínua, sinó com una funció de variable discreta: per això, s'utilitzen diagrames de barres o corbes d'evolució. En alguns casos es podria fer el gràfic amb la variable contínua. De totes maneres constatem que en cap mitjà d'informació no es publiquen gràfics d'aquest tipus. (Ens referim als gràfics escalonats com el que s'obté en estudiar la variació del preu d'una trucada telefònica en funció del temps).

C.- Procés d'inflació

L'objectiu d'aquest apartat és adonar-se que estem en un període inflacionari: comparant l'evolució dels preus

Breve descripción de las ideas básicas de cada apartado

A.- Variaciones Porcentuales

Este apartado es una introducción al tema. La mayoría de los cálculos que se realizan en el estudio del I.P.C. son de variaciones porcentuales. Por este motivo es muy conveniente el cálculo de variaciones en porcentajes utilizando el tanto por uno.

Por ejemplo:

a) Si hay que hallar la variación entre 200 y 250:

250/200 - 1 = 1,25 - 1 = 00,25 de aumento

b) Si hay que disminuir 500 en un 6%, multiplicaremos 500 por (1-0,06), es decir:

500 x 0,94 = 470

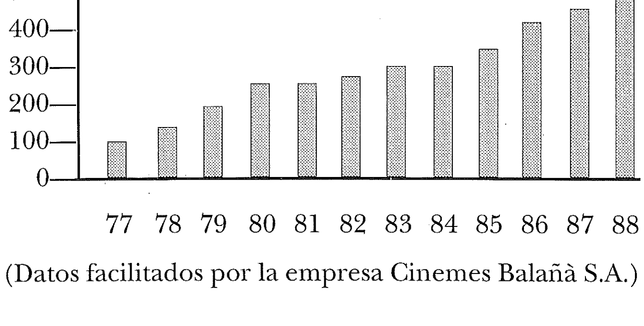
El objetivo de este primer apartado es que los alumnos adquieran agilidad en este tipo de cálculo. Esto cuesta mucho porque existe una gran resistencia por parte del alumno a abandonar su método de cálculo habitual (la regla de tres) y pasar a la utilización del tanto por uno.

B.- Variación del precio de diferentes productos a lo largo del tiempo

Además de comprobar que los precios de los productos varían, lo que se pretende con este apartado es estudiar y comparar dichas variaciones. Para poderlo hacer, hay que ver la importancia de la variación relativa frente a la absoluta.

Los dos primeros ejercicios son suficientemente ilustrativos: en el primero (B1) hay dos años en que el aumento fue el mismo (50 ptas.) pero, en cambio, el aumento porcentual era muy diferente. En el segundo ejercicio (B2) el período de máximo aumento relativo no corresponde al de máximo aumento absoluto.

B1.-La evolución del precio de una entrada en un cine de estreno en Barcelona desde el año 1977 hasta hoy en día, viene representado por el diagrama de barras siguiente:



(Datos facilitados por la empresa Cinemes Balañà S.A.)

a) ¿Qué aumento de precio hubo de 1977 a 1978? ¿Y de 1985 a 1986?

b) ¿Qué tanto por ciento aumentó la entrada en un cine de 1977 a 1978? ¿Y de 1985 a 1986?

c) ¿Cuál de los dos valores, el calculado en el apartado a) o el del b) os parece que refleja mejor la variación del precio de las entradas?

B2.- En un estudio hecho por el Comité de Energía de la CEOE, se calcula la media del precio del KWh (unidad de medida del consumo eléctrico), para una familia que gasta 3.500 KWh al año. Los valores obtenidos son:

Año	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
Ptas/kWh	4,09	4,09	4,68	6,45	8,64	9,79	11,32	12,37	13,68

a) Haz un gráfico de la evolución del precio del KWh.

b) ¿Qué aumento del precio hubo de 1978 a 1979? ¿Y de 1980 a 1981?

c) ¿Qué tanto por ciento aumentó el precio del KWh de 1978 a 1979? ¿Y de 1980 a 1981?

d) Completar la tabla siguiente:

	78-79	79-80	80-81	81-82	82-83	83-84	84-85	85-86
Augment (ptes.)								
% d'augment								

e) ¿Entre qué años se ha producido la máxima variación de precio en pesetas (*variación absoluta*)? ¿Entre qué años se ha producido la máxima variación en porcentajes (*variación relativa o tasa de variación*)? ¿De los dos períodos de tiempo señalados, en cuál diríais que el aumento de la tarifa ha sido más alto?

f) ¿Cuál es el porcentaje de aumento global de 1978 a 1986?

Los siguientes ejercicios hacen referencia a la evolución de los precios de dos productos energéticos (gasolina y butano) y de dos marcas de tabaco. Esto permite ver la existencia de variaciones negativas (en el caso de la gasolina y del butano), y la necesidad de utilizar variaciones relativas respecto a un año base para poder comparar la evolución de los precios de productos diferentes.

En todo este apartado se han utilizado productos cuyo precio de venta al público estaba controlado, y sin variaciones de precios debidas a cambios estacionales, relación oferta-demanda,... Para estudiar dichas variaciones en períodos de tiempo muy cortos se podrían utilizar los precios de mayorista de los mercados centrales: Mercabarna o la Llotja, cuyas variaciones de precios son publicadas semanalmente por algunos Bancos y Periódicos.

En los gráficos no se considera la evolución de precios respecto al tiempo como una función real de variable en el període 78-88 amb la del període 23-33. Es pot començar a introduir la idea que els productes que augmenten menys que els altres és com si "baixessin" de preu.

Producte	Preu 78	Preu 88
Llet (1 litre)	36	90
Ous (1 dotzena)	70	160
Arròs (1 quilo)	42	150
Pollastre (1 quilo)	140	215
Diari (La Vanguardia)	18	65
Benzina Super (1 litre)	37	78
Butà (1 bombona)	234	720
Renault 5TL (F.F.)	235200	730600
Disc (L.P.)	450	900
Tabac (Ducados)	18	49

Producte	Preu 23	Preu 33
Llet (1 litre)	0.79	0.70
Ous (1dotzena)	3.37	3.30
Arròs (1 quilo)	0.83	0.87
Pa (1 quilo)	0.68	0.70
Carn de vedella (1 quilo)	5.74	5.31
Petroli (1 litre)	0.72	0.70
Electricitat (KW-H)	0.75	0.75
Gas (Metre cúbic)	0.55	0.75

(Dades facilitades pel Banc d'Espanya)

D.- El valor del diner. El poder adquisitiu

Davant del fet de la inflació hi ha dues possibilitats: afegir més diners per poder comprar el mateix (augment de preus) o comprar meys coses amb els mateixos diners (pèrdua de poder adquisitiu). Cal fer notar que els percentatges d'augment de preu i de pèrdua de poder adquisitiu no coincideixen: els primers exercicis són prou aclaridors, especialment el D3, on es veu que a un augment de 100% li correspon una pèrdua de poder adquisitiu del 50%. Per tant, si un producte dobla el preu, o bé paguem el doble, bé en comprem la meitat.

D3.- Suposeu que disposeu de 100 ptes per comprar caramels que costen una pesseta, i que a la botiga us trobeu que s'han apujat de preu i que ara costen dues pessetes cadascun.

a) Quin és el percentatge d'augment del preu dels caramels?

b) En quin percentatge ha disminuit la quantitat de caramels que podeu comprar amb les mateixes 100 ptes?

c) Contesteu les tres preguntes anteriors, si en lloc de 100 ptes per comprar caramels disposeu de 2000 pessetes per comprar xiclets que costaven 5 pessetes, i ara resulta que costen 10 pessetes cadascun.

e) Repetiu l'exercici suposant que disposeu d'una quantitat Q de diners per comprar un producte que costava P pessetes per unitat i que ara val $2p$ pessetes.

En aquest apartat, és convenient fer la distinció entre pèrdua del poder adquisitiu de la moneda (a causa de l'augment dels preus) i pèrdua del poder adquisitiu del sou (a causa del fet que augmenti meys que els preus).

També cal esmentar que la devaluació de la moneda només s'estudia respecte a l'augment de preus i no com a valor de canvi respecte a d'altres monedes.

E.- Mitjanes ponderades

Donat que l'I.P.C. es calcula fent una mitjana ponderada, es tracta d'arribar a obtenir-ne la fórmula, expressada en tants per u, ja que és d'utilització més senzilla que no pas l'obtinguda utilitzant percentatges.

En els primers exercicis, el càlcul de l'augment del preu es fa sobre el preu total, encara que progressivament s'introdueix la ponderació relativa (E3).

Per últim s'arriba a l'expressió general del càlcul d'una mitjana ponderada. Als alumnes els costa força arribar-hi i caldrà un ajut especial per part del professor.

E3.- Una entitat esportiva cobreix amb les quotes dels socis el 50% del seu pressupost. Per cobrir la resta rep subvencions: el 20% del pressupost l'aporta l'Ajuntament, el 15% la Generalitat, i un 15% més la Diputació.

Per a l'any vinent, pensen augmentar la quota dels socis en un 5%, l'Ajuntament augmentarà la subvenció un 15%, la Generalitat un 10% i la Diputació un 3%.

a) Quin percentatge d'augment tindrà el pressupost d'aquesta entitat l'any vinent?

b) Reproduïu els càlculs anteriors utilitzant tants per u en lloc de tants per cent. (Si no us en sortiu suposant que el pressupost abans de l'augment és una quantitat p qualsevol, feu-ho primer considerant que és de 100 milions de pessetes.)

F.- La variació de l'índex de preus al consum

A partir de la idea de ponderació de cada grup de despeses, es dóna a conèixer la ponderació oficial (1983) continua, sino como una función de variable discreta: razón por la cual se utilizan diagramas de barras o curvas de evolución.En algunos casos se podría hacer el gráfico con la variable continua de todas formas constatamos que en ningún medio de información se publican gráficos de este tipo. (Nos referimos a los gráficos escalonados como el que se obtiene al estudiar la variación del precio de una llamada telefónica en función del tiempo.)

C.- Proceso de inflación

El objetivo de este apartado es darse cuenta de que estamos en un período inflaccionario: esta comprobación se realiza comparando la evolución de los precios en el período 78-88 con la del período 23-33. Se puede empezar a introducir la idea de que los productos que aumentan menos que los otros es como si "bajasen" de precio.

Producto	Precio 78	Precio 88
Leche (1 litro)	36	90
Huevos (1 docena)	70	160
Arroz (1 kilo)	42	150
Pollo (1 kilo)	140	215
Periódico (La Vanguardia)	18	65
Gasolina Super (1 litro)	37	78
Butano (1 bombona)	234	720
Renault 5 TL (F.F.)	235200	730600
Disco (L.P.)	450	900
Tabaco (Ducados)	18	49

Producto	Precio 23	Precio 33
Leche (1 litro)	0.79	0.70
Huevos (1 docena)	3.37	3.30
Arroz (1 kilo)	0.83	0.87
Pan (1 kilo)	0.68	0.70
Carne de Ternera (1 kilo)	5.74	5.31
Petróleo (1 litro)	0.72	0.70
Electricidad (KWh)	0.75	0.75
Gas (Metro cúbico)	0.55	0.75

(Datos facilitados por el Banco de España)

D.- El valor del dinero. El poder adquisitivo

Como resultado de la inflacción hay 2 posibilidades: añadir más dinero para poder comprar lo mismo que antes (aumento de precios), o comprar menos cosas con el mismo dinero (pérdida de poder adquisitivo). Hay que señalar que los porcentajes de aumento de precio y de pérdida de poder adquisitivo no coinciden: los primeros ejercicios son esclarecedores, especialmente el D3, donde se puede ver que a un aumento del 100% le corresponde una pérdida de poder adquisitivo del 50%. Por lo tanto, si un producto dobla su precio, o bien pagamos el doble por él, o bien compramos sólo la mitad.

D3.- Suponed que disponéis de 100 ptas. para comprar caramelos que valen 1 pta. y que en la tienda os encontráis que han subido de precio y que ahora valen 2 ptas. cada uno.

a) ¿Cuál es el porcentaje de aumento del precio de los caramelos?

b) ¿En qué porcentaje ha disminuido la cantidad de caramelos que podíais comprar con las mismas 100 ptas?

c) ¿En qué porcentaje se ha devaluado el dinero, respecto a la compra de caramelos?

d) Contestar las tres preguntas anteriores, si en lugar de 100 ptas. para comprar caramelos disponéis de 2.000 ptas. para comprar chicles que valían 5 ptas., y ahora resulta que valen 10 ptas. cada uno.

e) Repetir el ejercicio suponiendo que disponéis de una cantidad Q de dinero para comprar un producto que valía P pesetas por unidad y que ahora vale 2P pesetas.

En este apartado, es conveniente hacer la distinción entre pérdida del poder adquisitivo de la moneda (a causa del aumento de los precios) y pérdida del poder adquisitivo del sueldo (por aumentar menos que los precios).

También hay que señalar que la devaluación de la moneda sólo se estudia en relación al aumento de precios, y no en cuanto valor de cambio respecto a otras monedas.

E.- Medias ponderadas

Dado que el I.P.C. se calcula haciendo una media ponderada, se trata de llegar a obtener su fórmula expresada en tantos por uno, ya que resulta más sencilla que la que se obtiene utilizando porcentajes.

En los primeros ejercicios, el cálculo del aumento del precio se hace sobre el precio total, aunque progresivamente se introduce la ponderación relativa (E3).

Por último se llega a la expresión general del cálculo de una media ponderada. A los alumnos les cuesta bastante llegar a ello y necesitarán una ayuda especial del profesor.

del "Cistell de la Compra". Un cop introduïda la ponderació, calcular la variació de l'IPC és només fer la mitjana ponderada dels augments de preu dels diferents grups de despeses.

És pot aprofitar aquest apartat per comentar lectures sobre com es calcula la ponderació oficial del "Cistell de la Compra". Aquest és un tema d'actualitat ja que el Govern té prevista la realització d'una gran enquesta estatal per establir una nova ponderació (naturalment, el 92).

Grups de despeses	Ponderació 76	Ponderació 83
Alimentació	405	330
Vestit	82	87
Habitatge	140	186
Paraments	78	74
Medicina	34	24
Transport	97	144
Cultura	69	70
Altres	95	85

G.- L'índex de preus al consum

En aquest apartat s'introdueix la idea de nombre índex: en realitat el que es fa no és res més que convertir la variació relativa en absoluta.

Tot seguit es treballa amb la taula oficial de valors mensuals de l'IPC. Cal fer notar que les variacions calculades no sempre es corresponen amb les oficiales a causa d'un problema de decimals: el valor oficial de l'IPC únicament es dóna amb una xifra decimal.

Finalment s'introdueixen els conceptes de taxa interanual i de variació mitjana de l'IPC (que és el que oficialment s'anomena inflació). I a partir d'això es proposen diversos exercicis on es constata la incidència de l'I.P.C. en temes com: la renovació dels contractes de lloguer (G3), la negociació salarial ...

G3.- L'1 d'agost del 1986 una noia va llogar un pis a Barcelona per 55.000 ptes mensuals. El contracte establia que cada dos anys s'havia d'actualitzar el preu del lloguer segons l'augment de l'IPC. Calculeu el lloguer que aquesta noia haurà de pagar a partir de l'1 d'agost de 1988. (Fixeu-vos que la variació de l'IPC durant aquests dos anys és la que va del juliol del 1986 al juliol de 1988.)

Tal com s'ha dit a la introducció es pot completar aquest tema amb l'estudi d'altres índexs (Borsa, natalitat ...), amb l'elaboració d'un I.P.C. personal o local que es pugui comparar amb l'oficial (no per tothom les coses pugen igual) ... etc.

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Gener	37.7	46.9	54.7	63.8	73.0	83.6	94.9	106.4	116.3	127.1	134.8	140.8	149.6
Febrer	38.2	47.3	55.1	64.4	73.4	84.2	95.4	106.8	117.2	127.7	135.4	141.2	149.9
Març	39.2	47.9	55.7	64.7	74.9	85.1	96.0	107.6	117.9	128.1	136.1	142.2	150.8
Abril	39.9	48.9	56.5	65.4	75.6	86.2	97.3	108.2	119.1	128.4	136.4	141.7	151.3
Maig	40.2	49.4	57.2	65.8	76.0	87.4	97.7	108.7	119.5	128.8	136.3	141.6	151.5
Juny	41.3	49.9	57.7	66.8	76.0	88.3	98.3	109.5	119.3	129.9	136.3	142.2	
Juliol	42.7	51.0	58.9	67.8	77.5	89.4	98.6	111.2	120.0	131.3	137.7	144.1	
Agost	44.1	51.9	59.5	68.6	78.5	90.0	100.0	112.0	120.2	131.6	137.6	145.4	
Setembre	447	52.3	60.3	69.3	79.1	90.1	100.8	112.2	121.5	133.0	138.9	146.8	
Octubre	45.4	52.8	61.1	69.9	80.0	91.0	102.1	112.9	122.1	133.5	139.7	147.0	
Novembre	45.8	53.0	61.2	70.6	80.7	91.3	103.2	113.4	123.0	133.2	139.4	146.9	
Desembre	46.1	53.7	62.1	71.6	81.9	93.4	104.8	114.2	123.6	133.8	139.9	148.1	

(Dades de l'I.N.E.)

E3.- Una entidad deportiva cubre con las cuotas de los socios el 50% de su presupuesto. Para cubrir el resto recibe subvenciones: el 20% del presupuesto lo aporta el Ayuntamiento, el 15% la Generalitat y un 15% más la Diputación.

Para el año que viene, piensan aumentar la cuota de los socios en un 5%, el Ayuntamiento aumentará la subvención un 15%, la Generalitat un 10% y la Diputación un 3%.

a) ¿Qué porcentaje de aumento tendrá el presupuesto de esta entidad el próximo año?

b) Reproducir los cálculos anteriores utilizando tantos por uno en lugar de tantos por cien. (Si no obtenéis un buen resultado suponiendo que el presupuesto antes del aumento es una cantidad p cualquiera, hacedlo primero considerando que es de 100 millones de pesetas).

F.- La variación del índice de precios al consumo

A partir de la idea de ponderación de cada grupo de gastos, se da a conocer la ponderación oficial (1983) de la "cesta de la compra". Una vez introducida la ponderación, calcular la variación del I.P.C. es sólo cuestión de hacer la media ponderada de los aumentos de precio de los diferentes grupos de gastos.

Grupos de gastos	Ponderación 76	Ponderación 83
Alimentación	405	330
Vestido	82	87
Vivienda	140	186
Menaje	78	74
Medicina	34	24
Transporte	97	144
Cultura	69	70
Otros	95	85

Se puede aprovechar este apartado para comentar lecturas sobre cómo se calcula la ponderación oficial de la "cesta de la compra". Este es un tema de actualidad ya que el Gobierno tiene prevista la realización de una gran encuesta estatal para establecer una nueva ponderación (naturalmente, el 92).

G.- El índice de precios al consumo

En este apartado se introduce la idea de número índice: en realidad lo que se hace no es más que convertir la variación relativa en absoluta.

A continuación se trabaja con la tabla oficial de valores mensuales del I.P.C. Es necesario observar que las variaciones calculadas no siempre se corresponden con las oficiales a causa de un problema de decimales: el valor oficial del I.P.C. únicamente se da con una cifra decimal. (Ver tabla de IPC en página 50)

Finalmente se introducen los conceptos de tasa interanual y de variación media del I.P.C. (que es lo que oficialmente se llama inflación). Y a partir de aquí se proponen diversos ejercicios donde se constata la incidencia del I.P.C. en temas como: la renovación de los contratos de alquiler (G3), la negociación salarial...

G3.- El 1 de agosto de 1986 una chica alquiló un piso en Barcelona por 55.000 ptas. mensuales. El contrato establecía que cada dos años se había de actualizar el precio del alquiler según el aumento del I.P.C. Calcular el alquiler que esta chica habrá de pagar a partir del 1 de agosto de 1988. (Fijaos que la variación del I.P.C. durante estos dos años es la que va de julio de 1986 a julio de 1988).

Como se ha dicho en la introducción se puede completar este tema con el estudio de otros índices (Bolsa, natalidad,...), con la elaboración de un I.P.C. personal o local que se pueda comparar con el oficial (no para todo el mundo las cosas aumentan igual)... etc.

Jordi Dou

Muchos barceloneses le recuerdan como profesor, miles de matemáticos en el mundo conocen la firma "Jordi Dou (Barcelona)" asociada a soluciones de problemas en las publicaciones más prestigiosas: Monthly, Crux, etc.

He reencontrado al amigo Jordi Dou en su lugar, una bella casa cercana a Olot, su ciudad natal en 1911. Su paradisíaco entorno rural nos lleva a una conversación donde prados, rectas, leña, parábolas,... van tejiendo una original mezcla de teorema de Menelao a la cima del Puig Sacalm.

—Claudi Alsina: ¿Cómo recuerdas tus estudios?

—Jordi Dou: Yo fui a Barcelona a estudiar Arquitectura y entonces me fui aficionando a las Matemáticas. Así que estudié las dos carreras, ejerciéndolas ambas durante más de cuarenta años.

Creo que he aprendido más de los libros que de los profesores que tuve.

—C. A.: ¿Cuáles fueron tus primeros pasos en la enseñanza?

—J. D.: En el 1933 hice los denominados "cursillos del 33", un programa republicano "para la sustitución de la enseñanza religiosa". Se convocaron treinta plazas en Barcelona y sesenta en Madrid, estando Pi Calleja en el tribunal. Yo saqué el número uno en Barcelona y Santaló fue el primero en Madrid. A raíz del nombramiento fui destinado al Instituto Escuela, donde logré que ese gran pedagogo que fue su director, el profesor Estalella, me permitiera usar el libro de texto de Puig Adam y Rey Pastor aunque el Instituto seguía la tradición de apuntes. Más tarde en el 35 gané la cátedra de instituto en Madrid. Había ocho plazas y éramos doscientos. Muchos catedráticos se inscribían para estar en Madrid de vacaciones, ya que las oposiciones duraron siete meses (de octubre a abril).

—C. A.: ¿Cómo se recuerdan los años de instituto?

—J.D.: Yo nunca dejé el ejercicio de la Arquitectura pero ni un sólo día falté a clase. No tuve nunca ningún cargo en el Instituto y procuré dar clase en los cursos más avanzados aunque siempre tuvo que adaptarme al nivel con que llegaban. Lo ideal sería que hasta los catorce años el profesor se adaptara y luego fueran los alumnos los que se tuvieran que adaptar... pero no era así. Aunque en aquel bachillerato poníamos problemas de los que hoy se considerarían de gran categoría. Resolver problemas en temas que realmente puedan interesar es la mejor manera de enfocar las clases. Los problemas bonitos son los que se pueden explicar con lenguaje sencillo.

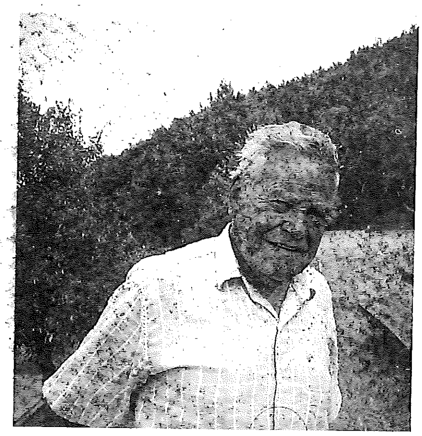
—C.A.: Su afición a los problemas ha sido siempre notoria. El tiempo le ha dado la razón. Hoy la resolución de problemas se considera un elemento esencial en la enseñanza...

—J.D.: Antes, siempre se unían a las explicaciones en clase los problemas para casa. Y los alumnos dedicaban mucho tiempo a resolverlos. Hoy parece que pasa al revés: acabada la clase el gran trabajo queda para el profesor en visitas, evaluaciones, cursos,... etc. y los alumnos poco dedican.

—C.A.: La experiencia universitaria fue dilatada y sorprendente...

—J.D.: Yo fui encargado de cátedra en Barcelona, sorprendentemente, en muy diversas asignaturas. (Análisis 2º, Geometría Métrica, Ecuaciones Diferenciales, Geometría Proyectiva, Matemáticas para Químicos, Mecánica, Estadística,...). Claro está que ello no significaba que tuviera conocimientos sólidos sobre estas disciplinas sino la ocasional inexistencia de profesorado. Cabe decir que las asignaciones económicas para estos cometidos eran irrisorias en el caso de percibirse. Seguramente fui yo el que más aprendió en muchos de estos encargos.

—C.A.: ¿Cuál es tu visión del debatido tema del rigor?



—J.D.: Creo tener el espíritu del rigor pero procuro anteponer siempre la intuición. Podríamos decir que soy partidario del rigor pero no un practicante ciego. Hay que anteponer el sentido común y no vale la pena rigorizar lo evidente. Una cosa es ver un resultado, otra ver el proceso por el cual el resultado puede ser cierto y otra es la "demostración oficial"... cuando pienso sobre un problema, puedo "descubrir" la solución paseando o cortando leña, luego intento escribirlo en una cuartilla, en su forma más breve posible y si el asunto lo permite me encanta dibujar una buena figura.

—C.A.: Siempre volvemos a los problemas...

—J.D.: Yo aquí no tengo libros. Todo lo que aprendí lo hice hace muchos años. Me interesa más lo poco que puedo hacer yo que lo mucho que hacen los otros. Me gustan los resultados sorprendentes, las soluciones breves y elegantes. Quizás todo lo que uso para los problemas se podría extractar en diez cuartillas pero con intuición y sentido común, habiendo meditado sobre unas pocas cosas básicas se puede sacar mucho partido...

—C.A.: Por tanto las Matemáticas para todos tienen sentido en el proceso educativo...

—J.D.: El estudio de las Matemáticas, tal y como se ha enfocado ha hecho perder mucho tiempo a la Humanidad. Hombre, quizás es mejor que hayan perdido el tiempo en esto que no en otras cosas. Porque a veces en lugar de enseñar a jugar bien a las damas se ha querido enseñar un difícil ajedrez, con lo cual el que intenta aprender pierde más tiempo y se divierte menos. En cambio hay unos pocos principios que bien asumidos hacen de la Matemática un instrumento extraordinario para todas las cosas de la vida.

—C.A.: Lo que acabas de decir es una opinión que avala la reforma educativa de planes.

—J.D.: En la reforma de planes yo no creo en absoluto. ¡Ya he vivido veinte! El plan no importa, son los profesores los que deben evolucionar y cambiar. Aquí está la cuestión...

Tengo entonces el privilegio de entrar en su archivo: carpetas con problemas resueltos o propuestos y correspondencia internacional ocupan dos mesitas. Los ojos de Jordi Dou encarnan entusiasmo, curiosidad, búsqueda, creatividad... En todos estos aspectos Jordi Dou no tiene ningún problema.

Les Preses/Olot,
10 de Agosto de 1989
Claudi Alsina

La sección áurea y la construcción de polígonos regulares

Luis Hortelano Martínez

Introducción

De entre la infinita variedad de posibilidades que la Geometría ofrece, desde el punto de vista didáctico, consideraremos en este artículo la construcción de polígonos con regla y compás, campo de trabajo donde tienen cabida la investigación personal, el manejo de instrumentos geométricos, el rigor matemático, la intuición, la visión espacial, y un sinfín de aspectos del máximo interés didáctico. De entre ellos quizá destacaríamos la posibilidad de actuar, de manipular y por consiguiente construir figuras, descubrir propiedades y relaciones entre sus elementos componentes. Pero no haremos un enfoque clásico de esta cuestión, ni abordaremos la construcción de todos los polígonos posibles. Presentaremos una proporción famosa, aunque un tanto olvidada, y, como consecuencia más o menos inmediata de algunas de sus propiedades, obtendremos una línea de trabajo para la construcción de determinados polígonos.

La proporción a que aludimos, sección áurea o divina proporción, que ya aparece en el Timeo de Platón y en el libro VI de los "elementos" de Euclides, ha recibido distintas denominaciones a lo largo de la historia y numerosos elogios, por ejemplo Kepler la califica de "joya preciosa" y "tesoro de la Geometría". Y no es para menos pues tanto ella como su razón, número de oro o áureo, aparecen abundantemente en la naturaleza, el propio cuerpo humano, el arte, etc. Pero no es nuestro propósito ocuparnos en este artículo de la presencia del número y sección áureos en nuestro entorno, cuestión por otra parte estudiada aunque fuente inagotable de sorpresas, sino de cómo utilizarlos para una tarea concreta ya apuntada.

Aunque ya se ha mencionado es importante señalar de nuevo que, en todo lo que sucede a esta introducción, nos referiremos siempre al trabajo con regla y compás clásicos.

Por otra parte el contenido del artículo, y su posible aplicación didáctica, requieren de unos conocimientos previos si bien no demasiado profundos. Esto hace que sea adecuado para los últimos tramos de la Enseñanza Media, o niveles superiores. En concreto ha sido compuesto pensando en alumnos de las E.E.U.U. de Magisterio.

La Sección Aurea

Los textos que se refieren a la sección áurea suelen presentarla de dos formas. En la primera de ellas se hace una introducción directa del modo siguiente:

"Dadas tres cantidades a, b y c, de modo que $a<b<c$ y $a+b=c$, diremos que están en la divina proporción si el total (c) es a la parte mayor (b), como la parte mayor (b) es a la parte menor (a)", es decir, si:

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$$

En la segunda introducción la sección áurea se obtiene como la forma más sencilla y directa posible, más de acuerdo con la ley de economía de conceptos de William D'Ockam, de dividir asimétricamente un segmento. Así considerando el segmento de la fig. 1

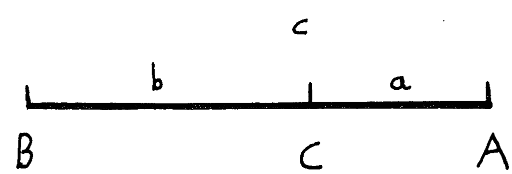


Figura 1

todas las razones que pueden establecerse entre a, b y c son:

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a}{c} \quad \frac{b}{a} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{c}{a} \quad \frac{c}{b}$$

que igualadas dos a dos nos dan 15 proporciones posibles, de las que, eliminando casos iguales así como las que no cumplen la condición de asimetría de la definición, y reduciendo las de razones inversas, se llega a la sección áurea tal y como se presentó directamente.

Pero en busca de un conocimiento algo mayor de la divina proporción veamos cuál es su razón. Partiendo pues de:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \text{ llegamos a } \frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \text{ y de ahí:}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a};$$

haciendo entonces x=b/a y sustituyendo tendremos que $x^2 - x - 1 = 0$, de donde resultan las raíces:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618\ldots \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0'618\ldots$$

Nos quedamos con la solución positiva a la que llamaremos Φ o número de oro, es decir, $c/b = b/a = \Phi = 1'618\ldots$ (número irracional euclidiano), pues la raíz negativa no haría, en la segunda introducción de la sección áurea, que el punto de división del segmento cayera dentro del mismo. Aunque algunos autores consideran para Φ el valor 0'618...

La sección áurea y el número de oro en la naturaleza, la ciencia, el arte, etc, cuestiones de las que ya dijimos que no vamos a ocuparnos, proporcionan sin embargo un amplio campo de trabajo didáctico nada desdeñable y que resulta muy motivador (véase por ejemplo el vídeo "Donald en el país de las Matemágicas", ya tratado en el nº 1 de esta propia revista).

Algunas construcciones gráficas de interés

Desde el punto de vista de nuestro artículo, lo más interesante de la sección áurea y el número de oro es que ambos pueden obtenerse con regla y compás. Veamos pues algunas construcciones interesantes, pero prescindiendo de las demostraciones correspondientes dada su sencillez y por no alargar excesivamente el artículo.

a) Obtención gráfica del número áureo:

La expresión $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

nos da la clave, pues construyendo el triángulo rectángulo de catetos 1 y 2 (fig 2), la hipotenusa será $\sqrt{5}$. Observando entonces la figura 2, CB medirá $1+\sqrt{5}$ y por tanto la mitad de CB medirá Φ.

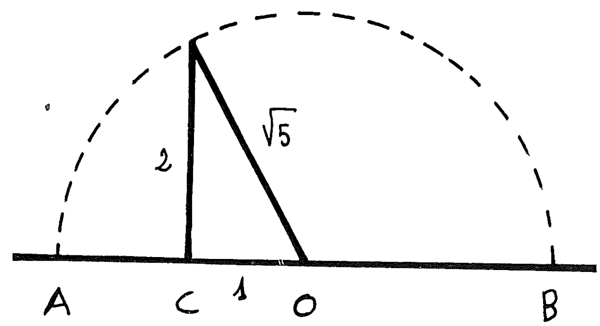


Figura 2

b) Obtención gráfica de la sección áurea de un segmento:

Para dividir el segmento AB según la divina proporción (fig. 3) levantamos por B perpendicularmente un segmento que mida la mitad de AB; unimos A con C, y trazamos el arco de circunferencia centrada en C y de radio CB que dará con AC el punto de corte D. Trazando ahora la circunferencia centrada en A y con radio AD se obtiene con AB el punto de corte E, punto que divide a AB según la sección áurea.

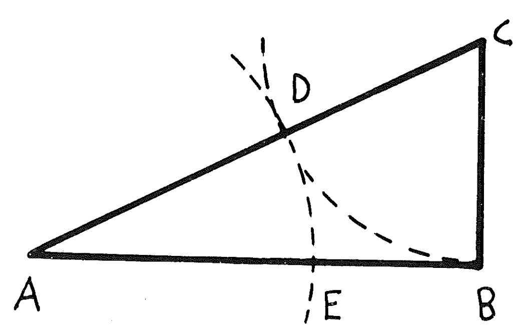


Figura 3

c) Obtención gráfica del segmento total y de la parte menor de su sección áurea, conocida la parte mayor de dicha sección:

Se construye un cuadrado de lado la parte mayor de la sección áurea (AB en la figura 4) de un determinado segmento. Desde la mitad de AB se traza la circunferencia de radio OC, y se obtiene con la prolongación de AB el punto de corte E. De esta forma AE queda dividido por B según la divina proporción, por lo que AE es el segmento total buscado y BE la parte menor de su sección áurea.

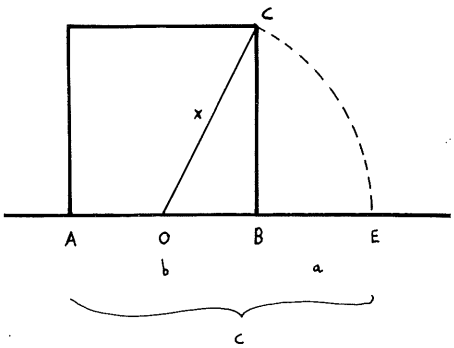


Figura 4

d) Obtención gráfica del segmento total y de la parte mayor de su sección áurea, conocida la parte menor de dicha sección:

Según la figura 5, si AB es la parte menor de una sección áurea, levantamos perpendicularmente por B un segmento BC cuya medida sea la mitad de AB. Trazamos las circunferencias centradas en B y A, con radios BC y AC respectivamente, y obtenemos los puntos de corte D, F y E. De esta forma DE queda dividido por F según la divina proporción; lo que supone que, siendo FE=AB la parte menor de la sección áurea, DF será la mayor y DE el segmento total.

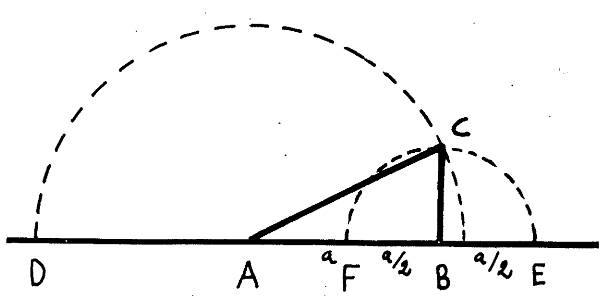


Figura 5

La sección áurea y la construcción del pentágono regular y el pentagrama

El pentagrama, símbolo pitagórico, y el pentágono regular, que podemos encontrar, además de en la Geometría, en los sitios más insospechados como por ejemplo: la forma de la petunia, la estrella de mar, algún tipo de jazmín, en la disposición espacial de los elementos más simples de los seres vivos (nunca en los sistemas físico-químicos inertes), en la for de cera, etc., etc., etc., son además los polígonos regulares que mayor cantidad de propiedades áureas presentan. Veamos una de ellas, de la que derivan casi todas las demás, y que nos permitirá una sencilla construcción de ambos: "En un pentágono regular las diagonales que se cortan lo hacen según la sección áurea, y además la parte mayor de dicha sección es igual al lado del pentágono"[2].

En efecto, si nos fijamos en la figura 6, los triángulos ABE y OCE son semejantes y por tanto CE/BE=OE/AE, de donde OE/AE=1, y de ahí OE=AE=lado del pentágono.

Por otro lado los triángulos ABO y OCE son también semejantes, y por consiguiente CE/BA=OE/AO de donde BE/OE=OE/BO, lo que significa que la diagonal queda dividida, por el punto de corte, según la sección áurea.

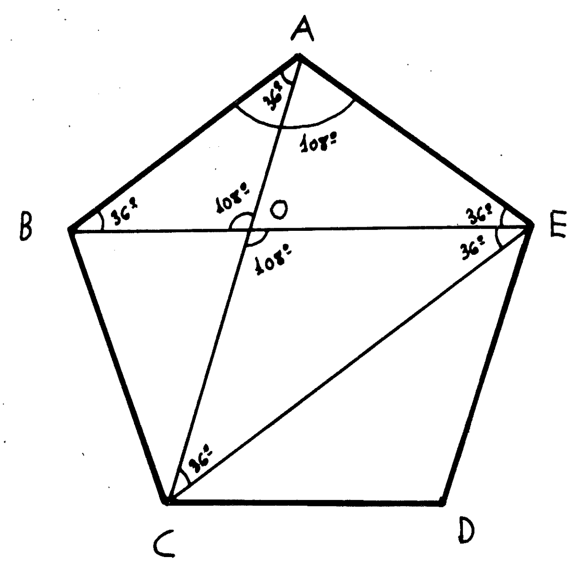


Figura 6

Esta sencilla propiedad nos va a permitir una construcción, igualmente fácil, del pentágono regular. Dado el lado del pentágono (trazo continuo en la figura 7), construimos, tal como se ha anticipado en este mismo artículo, el segmento total cuya parte mayor de su sección áurea sea el lado del pentágono dado. Ese segmento total será la diagonal del pentágono, según la propiedad vista. A continuación trazamos desde B una circunferencia de radio el lado, y desde A otra de radio la diagonal, obteniendo un punto de corte C que será un vértice del pentágono regular. Reiteramos el procedimiento ahora sobre el lado BC y posteriormente sobre CD, y la construcción del pentágono regular quedará conseguida.

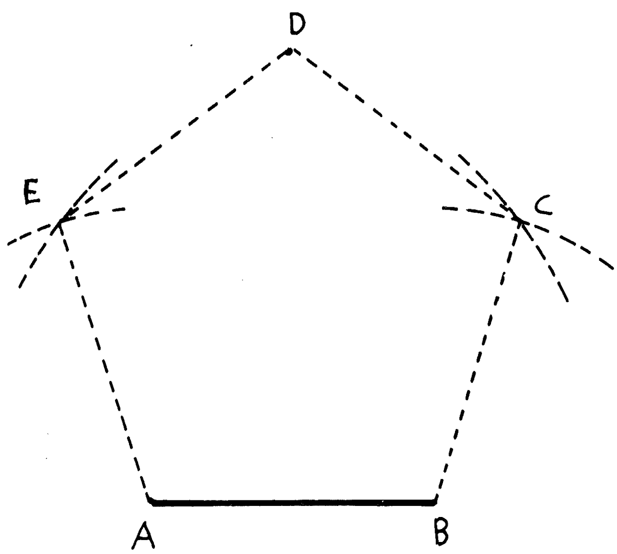


Figura 7

La construcción del pentagrama podría hacerse fácilmente a partir de la del pentágono regular: dado el lado del pentagrama, lo dividiríamos según la sección áurea y la parte mayor sería el lado de un pentágono regular que tendría como diagonal al lado del pentagrama; construiríamos ese pentágono regular y uniendo los vértices dos a dos conseguiríamos el pentagrama buscado (figura 8). Sin embargo también es un buen ejercicio intentar la construcción del pentagrama, a partir de un lado dado, usando la sección áurea pero sin realizar previamente el pentágono regular; para ello basta con reflexionar sobre la figura 8, y seguir procedimientos similares a los descritos en la obtención del pentágono regular.

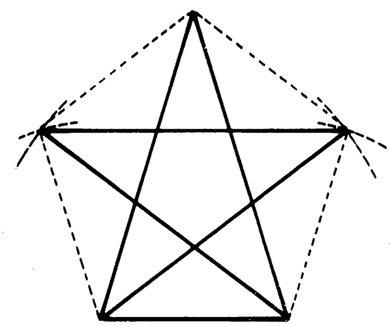


Figura 8

La sección áurea y la inscripción-circunscripción de polígonos regulares en circunferencias dadas

Si tenemos en cuenta los polígonos regulares que pueden inscribirse o circunscribirse, con regla y compás clásicos, en una circunferencia de radio dado (que según el teorema de Gauss son los de lados 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24,...); y consideramos por ejemplo hasta el de 12 lados, hallando la relación de dependencia entre el lado del polígono en cuestión (L), el radio de la circunferencia inscrita (r), y el de la circunscrita (R), encontramos para el pentágono regular, pentagrama, decágono regular y decagrama, las relaciones que figuran en la tabla de relaciones que figura al final del artículo (habida cuenta de que $\sqrt{5}=2\Phi-1$):

Lo que sugiere, dado que en todas ellas aparece Φ, que en las inscripciones o circunscripciones en circunferencias dadas, de los polígonos que aparecen en la tabla, podrá usarse de un modo u otro la sección áurea. En las relaciones de dependencia de los demás polígonos, hasta el de lado 12, no aparece Φ, por lo que no parece que al menos de un modo directo se pueda trabajar con la sección áurea.

Así pues si se trata de inscribir un decágono en una circunferencia dada, la relación $R=L\Phi$ nos da la idea clave de la solución, pues tomando el radio de la circunferencia y seccionándolo según la divina proporción, la parte mayor de dicha sección será el lado del decágono inscrito.

A partir del decágono inscrito será fácil la inscripción del decagrama (uniendo vértices de tres en tres), del pentágono regular (uniendo vértices de dos en dos), y del pentagrama (uniendo vértices de cuatro en cuatro). Las figuras 10 y 11 ilustran las inscripciones comentadas.

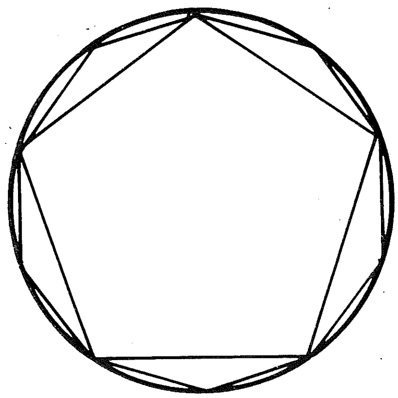


Figura 9

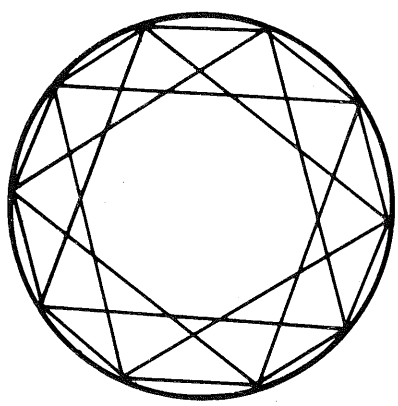
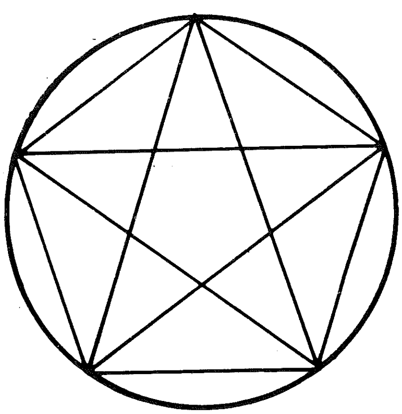


Figura 10



La circunscripción del pentágono y decágono regulares, en una circunferencia dada, podremos conseguirla inmediatamente a partir de los inscritos mediante el trazado e intersección de tangentes. Y desde los circunscritos los estrellados correspondientes uniendo vértices en el orden preciso.

Así, en consecuencia, hemos visto cómo de una sencilla sección áurea hemos derivado la inscripción y circunscripción del pentágono y decágono, regulares y estrellados, en una circunferencia.

La sección áurea y la construcción del decágono regular y el decagrama

Apoyándonos ahora en el epígrafe anterior, si queremos construir un decágono regular, conocido el lado (L), bastará con tener en cuenta la relación R=LΦ, entre el lado del decágono y el radio de la circunferencia circunscrita. Construiremos un segmento tal que la parte mayor de su sección áurea sea L, y ese segmento será el radio de la circunferencia circunscrita al decágono. Inscribiremos éste en ella por el procedimiento ya descrito y el problema estará resuelto.

Si queremos, por otra parte, construir el decagrama, conocido su lado (L), la relación R=L(Φ-1)=LΦ-L, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al decagrama, nos dará también un posibilidad de solución. Construiremos un segmento cuya parte mayor de la sección áurea sea L; quitaremos a este segmento un trozo de longitud L, y el resultante será el radio de la circunferencia circunscrita al decagrama. Inscribiremos el decagrama en ella por los procedimientos indicados en el epígrafe anterior y problema resuelto.

Sección áurea; construcción, inscripción, circunscripción de otros polígonos

Como curiosidad podemos anticipar que el próximo polígono regular en el que aparece Φ, en la relación entre el lado y los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas, es el pentadecágono (15 lados), y en los tres estrellados que se derivan de él. Esto quiere decir que también en ellos podríamos trabajar con la sección áurea. Pero además hay otros polígonos en condiciones similares (relaciones dependientes de Φ).

La línea de trabajo queda pues abierta: como consecuencia del estudio de relaciones y propiedades áureas en los polígonos regulares (cuya abundancia es sorprendente en los tratados hasta ahora), y más concretamente hallando relaciones de dependencia lado-radios, puede investigarse posteriormente sobre la aplicación de la sección áurea en la construcción de polígonos con regla y compás en cada caso. Esa es la idea central de este trabajo, como queda visto, la cual creo que en sí misma es de inmediata aplicacion didáctica; pero quizá, por lo amplia y ambiciosa, permita múltiples interpretaciones y formas de llevarse a cabo. Sugeriremos, finalmente, una forma de comenzar: daremos una plantilla con pentágonos de distintas dimensiones, en los que habrá trazadas, en unos algunas y en otros todas, las diagonales; a partir de ahí todo debe ser medir, experimentar, probar con otros polígonos regulares (inscritos y circunscritos, o no, en circunferencias dadas)...

Referencias bibliográficas

GHYKA, M. *El número de oro. Los ritmos.* Ed. Poseidón. Barcelona, 1984.

GHYKA, M. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Ed. Poseidón. Barcelona, 1983.

PACIOLI, L. *La divina proporción.* Ed. Akal. Madrid, 1987.

PEDOE, D. *La Geometría en el arte.* Ed. Gustavo Gili. Barcelona, 1979.

WARUSFEL, A. *Los números y sus misterios.* Ed. Martínez Roca. Barcelona, 1968.

TABLA DE RELACIONES

	R	r	
PENTAGONO REGULAR	$\frac{L}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})} = \frac{2L}{10}\sqrt{5(2+\phi)}$	$\frac{L}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = \frac{L}{10}\sqrt{5(3+4\phi)}$	
PENTAGRAMA	$\frac{2L}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{L}{\sqrt{2+\phi}}$	$\frac{L}{10}\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} = \frac{L}{10}\sqrt{5(7-4\phi)}$	
DECAGONO REGULAR	$\frac{L}{2}(1+\sqrt{5}) = L\phi$	$\frac{L}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{L}{2}\sqrt{3+4\phi}$	
DECAGRAMA	$\frac{L}{2}(\sqrt{5}-1) = L(\phi-1)$	$\frac{L}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{L}{2}\sqrt{7-4\phi}$	

Los cambios de escala y el Cálculo Gráfico

Victor Arenzana Hernández
Pedro Buera Pérez
Luisa Rodríguez Sol

1. Introducción

Hoy en día las matemáticas que se imparten en la enseñanza secundaria tienen, en gran medida, un carácter fundamentalmente analítico. Esta es una de las causas por las que nuestros alumnos son capaces de resolver determinados problemas y salvar dificultades mediante procesos mecánicos cuya justificación matemática no conocen plenamente y no tienen, por consiguiente, una representación precisa del problema que tratan. Hay que tener en cuenta que muchos de los alumnos buscan "recetas" que salven los escollos que se les plantean sin profundizar realmente en el problema propuesto y así vemos, por ejemplo, cómo ante un problema de optimación, la práctica totalidad de los alumnos obtiene la función objetivo, la deriva, la iguala a cero, extrae sus raíces y consigue la solución a la pregunta formulada. Casi ninguno se plantea que estamos buscando el punto de ordenada mayor o menor de la gráfica que representa la función objetivo, y que, por tanto, la "receta" puede no ser válida en muchos casos. Ejemplos semejantes a éste los encontramos muy a menudo en el desarrollo cotidiano de nuestra actividad docente y no merece la pena insistir sobre ellos.

Cuando analizamos este tipo de dificultades, la primera observación que podemos hacer al tipo de enseñanza que, por lo general, se imparte, es el poco peso, en relación a su importancia, que tiene el cálculo gráfico en nuestras explicaciones. Nosotros pensamos que una mayor utilización y desarrollo del cálculo gráfico y sus aplicaciones ayudaría a nuestros alumnos a comprender realmente lo que están haciendo y les permitiría a la vez obtener una mayor cantidad de recursos a la hora de enfrentarse a cualquier dificultad matemática. Además opinamos que una mayor dedicación al estudio de resoluciones gráficas de diferentes problemas no supone un esfuerzo de comprensión excesivo sino todo lo contrario: un alumno de enseñanzas medias está más preparado mentalmente para comprender, resolver y, sobre todo, discutir y analizar las diferentes posibilidades de un problema desde un punto de vista gráfico que analítico.

El cálculo gráfico fue usado con gran generalidad a finales del siglo XIX y comienzos de este siglo, como lo prueba la gran cantidad de obras que sobre este tema se publicaron en esa época. Las Instituciones docentes más prestigiosas se preocuparon de estos temas y así vemos como, por ejemplo, en 1918 sale a la luz la obra **Cours de Geometrie pure et apliqué de l'Ecole Polytechnique,** de Maurice D'Ocagne (1862-1938), que sirvió de texto en la Escuela Politécnica francesa. Esta materia cayó en desuso, desde el punto de vista de la investigación, a mediados del siglo actual, como lo hizo la propia geometría, pero su estudio sigue siendo fuente de inspiración y estímulo motivador para numerosas cuestiones matemáticas. Hoy en día, muchas profesiones de carácter técnico siguen utilizando métodos de cálculo gráfico lo que prueba el aprecio y arraigo que siguen teniendo estos procedimientos, siempre más rápidos que los complicados cálculos numéricos, dentro del desarrollo normal de la actividad laboral.

2. Una primera reflexión sobre el cambio de variable

Un recurso que resuelve muchas dificultades matemáticas (cálculo de las raíces de una ecuación bicuadrada, obtención de la primitiva de una función, etc...), y que nosotros, como profesores, aconsejamos numerosas veces a nuestros alumnos, es el llamado "cambio de variable". La aplicación de este "truco" se realiza desde un punto de vista exclusivamente algebraico, pero la expresión de esta simple operación de forma gráfica abre una nueva perspectiva y asoma la inteligencia del alumno a una serie de recursos potentes que simplifican cálculos más complicados.

Un par de ejemplos ayudarán a comprenderlo que queremos decir:

Ejemplo 1: Si en la función $y = \frac{1}{4} x^2$ se realiza el cambio de variable

$$x' = x^2 \qquad y' = y$$

la función resultante es: $y' = \frac{1}{4} x'$

Si representamos estas dos funciones observamos que la parábola de ecuación $y = (1/4)x^2$ se ha transformado en la recta de ecuación $y' = (1/4)x'$. Esto se debe a que el cambio de variable ha ocasionado un cambio de escala en el eje de abscisas (según la relación $x' = x^2$) lo que ha traido como consecuencia la conversión de la parábola en la recta. La gráfica de $y=(1/4)x^2$, que es una parábola si el eje de abscisas esta dividido según la escala natural, es una recta si en dicho eje hemos cambiado la escala según la relación $x' = x^2$

Por tanto un cambio de variable permitirá transformar curvas de una cierta complejidad en otras más sencillas.

Uno de los ejemplos de cambio de variable más significativos, que el alumno maneja con toda naturalidad, es el utilizado al tratar de resolver las ecuaciones bicuadradas.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ equivale a calcular la intersección de la función $y = x^4 - 4x^2 + 3$ con el eje de abscisas, esto es, resolver el sistema:

$$(1) \qquad \begin{cases} y = x^4 - 4x^2 + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

La resolución se hace mediante el cambio de variable:

$$x' = x^2 \qquad y' = y$$

con lo que se obtiene el sistema:

$$(2) \qquad \begin{cases} y' = x'2\text{-}4x'+3 \\ y' = 0 \end{cases}$$

dando lugar a la ecuación de segundo grado

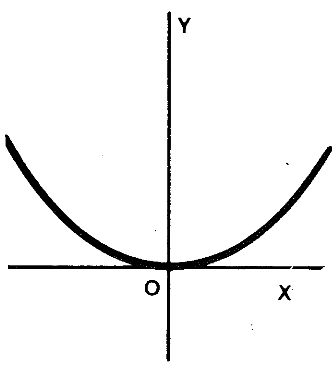
$$x'^2 - 4x' + 3 = 0$$

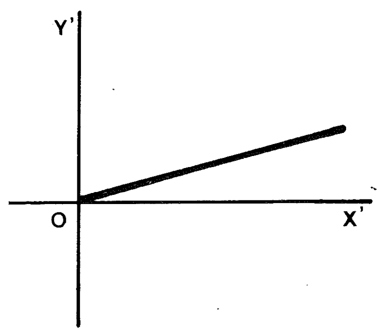
cuyas raíces son 1 y 3

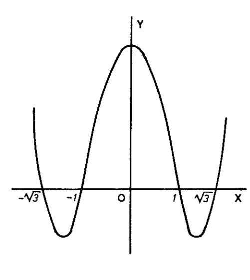
Deshaciendo el cambio de variable se tiene:

$$x = \pm 1 \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

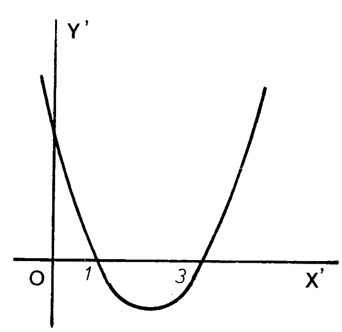
Evidentemente, los sistemas (1) y (2) son distintos y las soluciones de uno no coinciden con las del otro. Gráficamente las soluciones de los sistemas (1) y (2) se obtienen al buscar las abscisas de los puntos de corte de las curvas de ecuaciones $y = x4\text{-}4x2+3$, $y = x'2\text{-}4x'+3$ con el eje de abscisas.







sistema (1)



sistema (2)

La gráfica del sistema (2) es la transformada de la gráfica del sistema (1) cuando se ha efectuado un cambio de escala en el eje de abscisas (de acuerdo con la relación $x' = x^2$). evidentemente la segunda gráfica es mucho más sencilla que la primera y el cálculo de los puntos de corte de esta segunda gráfica con el eje de abscisas no reviste ya ningún problema. Lógicamente, una vez hallados los valores de las abscisas de los puntos de corte en el segundo sistema, será necesario saber que valores son los que les corresponden en el primero, pues la solución buscada son los puntos de corte del primer sistema y no los del segundo.

Los dos últimos ejemplos ponen de manifiesto la importancia del cambio de escala en un sistema de referencia. A lo largo de la historia se han utilizado diferentes transformaciones que permiten simplificar de forma notable problemas de cálculo que, de otra forma resultarían excesivamente complicados. En la actualidad, época en la que los ordenadores se encargan de realizar los cálculos más complicados, estos procedimientos siguen utilizándose en determinadas profesiones para obtener rápidamente resultados aproximados. De todas las transformaciones la más usada es la llamada **escala logarítmica**.

3.- Escala logarítmica. Operaciones con ella.

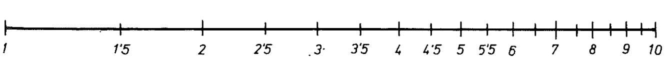
Es la que se obtiene mediante las fórmulas de transformación siguientes:

$$x' = \log x \qquad\qquad y' = \log y$$

o sus equivalentes:

$$x = 10x' \qquad\qquad y = 10y'$$

Para obtener una escala logarítmica basta con representar en una recta log1, log2, log3, ..., marcando dichas divisiones con los números 1, 2, 3, ... respectivamente. De este modo obtendríamos:

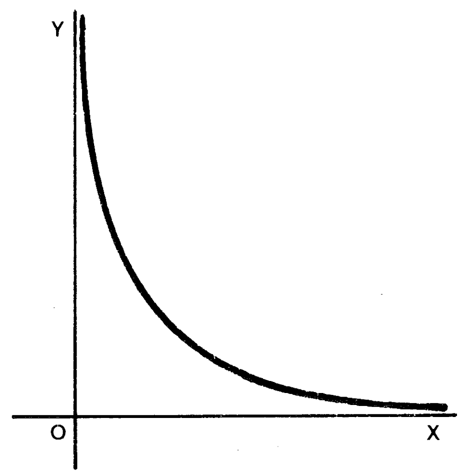


A partir de la primera escala del 1 al 10, se construiría su continuación, del 10 al 100, manteniendo las distancias existentes entre 1, 2, 3, ... para 10, 20, 30,.... respectivamente. Por este procedimiento puede prolongarse la escala del 100 al 1000, del 1000 al 10000, etc.... Siguiendo el mismo criterio tambien pueden obtenerse las divisiones correspondientes a las décimas, centésimas, etc....

Con la escala logarítmica se facilitan las operaciones de multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraer una raiz ya que por las propiedades de los logaritmos, las multiplicaciones se reducen a sumas, las divisiones a restas, las potencias a multiplicaciones y las raices a divisiones. Veamos como pueden realizarse estas operaciones:

3.1 Multiplicación

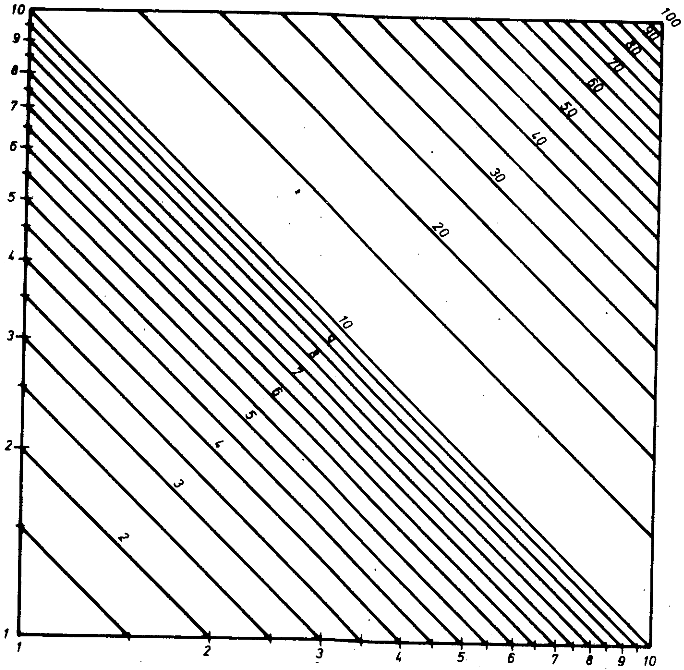
En la escala natural la gráfica de la hipérbola $x \bullet y = k$ con $x>0$ e $y>0$,representa los puntos del plano tales que el producto de sus coordenadas es constante.



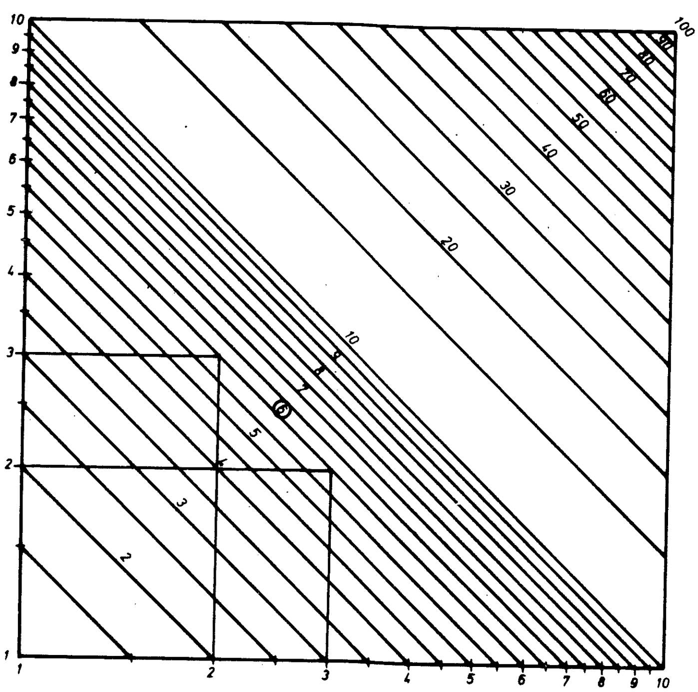
Si en lugar de utilizar la escala natural se trabajase con la escala logarítmica, la gráfica de $xy = k$ sería una recta ya que:

$$x' + y' = \log k \quad ===> \quad y' = -x' + \log k$$

que es la ecuación de una recta que corta, tanto al eje de ordenadas como al de abscisas, en puntos que distan log k unidades del origen. Para diferentes valores de k tendremos las siguientes rectas:



Esta gráfica permite calcular el producto de dos números cualesquiera a y b. Para ello, basta tomar a en el eje de abscisas y b en el de ordenadas (o viceversa); se determinará así el punto (a,b) y la recta que pasa por él será la que dará el producto buscado. En la figura siguiente se muestra como se realizaría 2 • 3.



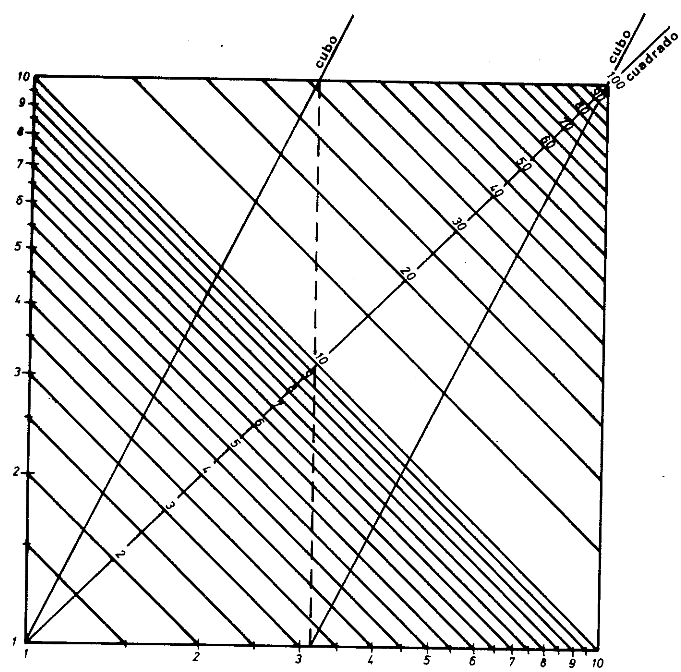
3.2 División

Podemos obtener el resultado de una división utilizando el mismo gráfico ya que, por ser la división la operación inversa de la multiplicación, si queremos realizar la división de **a** entre **b** basta con levantar a partir de b una perpendicular al eje de abscisas hasta encontrar la recta oblicua correspondiente a a. la ordenada del punto de intersección será el cociente.

3.3 Potencia

De acuerdo con lo ya visto, no es muy difícil comprender que para elevar al cuadrado bastaría con trazar la bisectriz del cuadrante. De este modo, para calcular el cuadrado de 3 se traza la perpendicular al eje de abscisas en x=3 y se observa el punto de corte con la bisectriz; este punto pertenece a una de las rectas oblicuas cuyo número ,9, es el resultado buscado.

Para trazar las rectas correspondientes a cualquier potencia an procederemos del siguiente modo: se elige un valor sencillo cualquiera n y se calcula manualmente su potencia an; se traza una perpendicular al eje de abscisas en a hasta cortar a la recta oblicua marcada con a^n. Este punto y el origen determinan la recta correspondiente a a^n. En la figura siguiente se han trazado las rectas correspondientes a los cuadrados y a los cubos.



Si a>2 la recta que define an cortará a la parte superior del cuadrante (caso de la recta de cubos) y en un principio no podremos calcular el valor de an siempre y cuando n esté a la derecha de la vertical que define el punto de corte de la recta con la parte superior del cuadrante. En este caso hay dos posibles soluciones: prolongar los ejes del cuadrante o trazar una vertical por el punto de corte hasta el eje horizontal inferior del cuadrante y, a partir de este último punto de corte, trazar una recta paralela a la anterior recta de an. Siempre que sea necesario utilizar esta última recta, se multiplicará el resultado obtenido por 10

4.- Abacos

Los cuadrantes que hemos dibujado anteriormente reciben el nombre de ábacos, pero es evidente que la utilización de dichos ábacos para multiplicar, dividir o bien obtener potencias no resultan muy prácticos porque existen otros métodos más cómodos. Sin embargo todavía se utilizan cuando es necesario combinar un conjunto de operaciones para obtener un determinado valor. En esta situación es posible construir un ábaco que permita obtener directamente el resultado final a partir de unos valores iniciales. A continuación presentamos dos ábacos de este tipo:

4.1 Abaco para calcular el volumen de una esfera

En este ábaco se han utilizado escalas logarítmicas en los dos ejes y se puede calcular el volumen de la esfera mediante el siguiente procedimiento:

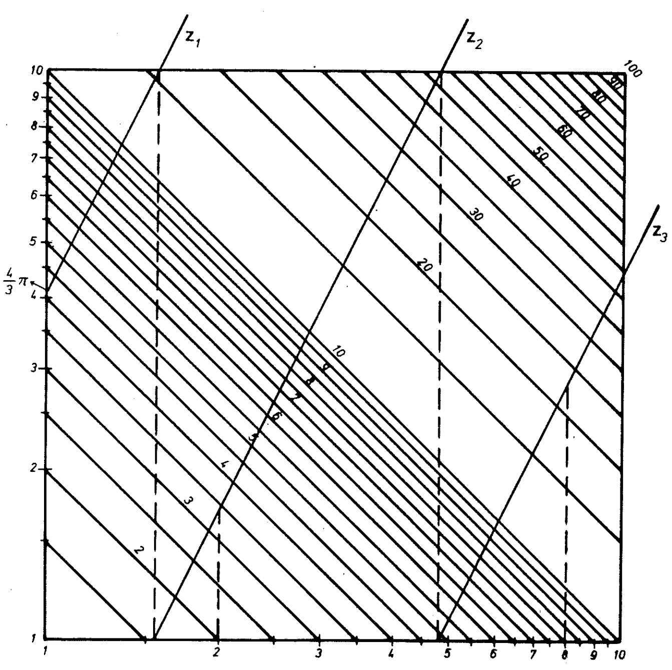
Dado el radio de la esfera r se levanta la perpendicular al eje de abscisas por x=r (fig. A) y se busca el punto donde corta a alguna de las rectas z_1, z_2 o z_3. El número de la recta oblicua multiplicado por 1, 10 o 100 según que el corte sea con la recta z_1, z_2 o z_3 respectivamente, dará el volumen de la esfera.

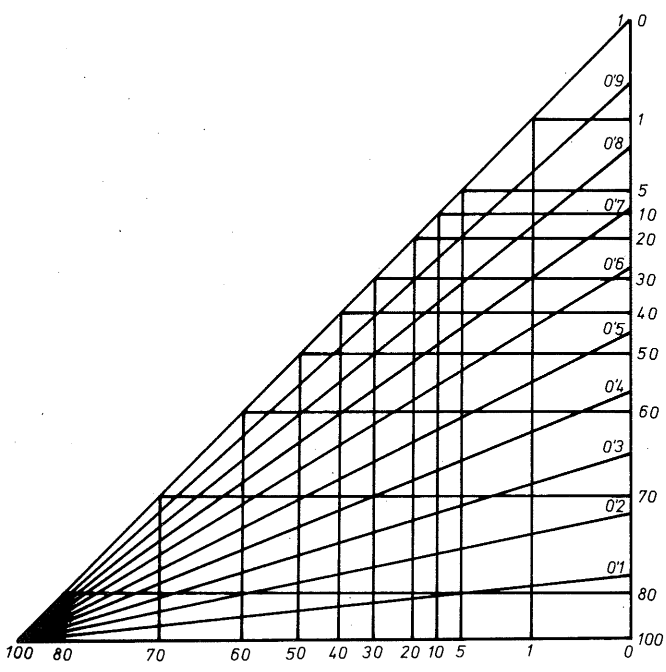
Así para r=2 resulta un volumen aproximado de 33'5 y para r=8 se obtiene 2150.

Las rectas z_1, z_2 y z_3 son paralelas a la rectade cubos, tomándose la primera de ellas a partir del valor $(4/3)\pi$ en el eje vertical

4.2 Abaco para calcular la probabilidad de vida

El siguiente ábaco calcula la probabilidad de que una persona de edad a alcance una edad a'. En el eje horizontal se indica la edad actual y en el vertical la edad que se pretende alcanzar. El número de la recta que pasa por (a, a') indica la probabilidad buscada





Este ábaco fue construido por Lalanne a mediados del siglo pasado. Lógicamente para cada población y cada época es necesario variar la distribución de las edades a lo largo de los ejes horizontal y vertical.

Estos ejemplos dan una idea de las posibilidades del cálculo gráfico como instrumento de resolución de diferentes problemas. Otras cuestiones de carácter práctico que se resuelven mediante técnicas gráficas son:

Resolución de ecuaciones algebraicas (Método de Lill)

Cálculo de áreas mediante integración gráfica cuyos fundamentos son la base del funcionamiento del planímetro, aparato utilizado en topografía para medir áreas sobre planos.

Cálculo de longitudes de arco. El mecanismo de algunos curvímetros está inspirado en este tipo de cálculos.

Determinación de fuerzas y momentos que soporta una viga cargada, problema que se plantea numerosas veces en arquitectura.

Integración de ecuaciones diferenciales (Métodos de Massau y Runge)

....

La importancia de estos problemas tendría que conducir a una reconsideración del olvido que han sufrido estos métodos gráficos en la actual enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Los matemáticos a la violeta

Manuel Díaz Castillo

La razón por la que los neoclásicos odiaran la pedantería, como cosa contraria al buen sentido y la naturalidad, puede que estuviera en relación con su confesado amor por la ponderación y el justo punto medio, y que también lo esté con determinados ambientes en los que aquella proliferase muy visiblemente, como la corte, o la propia universidad: cuando se quisiera denunciar el incumplimiento de su primordial función de búsqueda de la verdad, se oiría insistentemente en la Europa ilustrada la acusación de "pédanterie".

Mientras José de Cadalso y Vázquez (1741-1782), perteneciente al ala más avanzada de la intelectualidad de su tiempo escribía *Los eruditos a la violeta,* sostenía en sus tertulias en la Fonda de S. Sebastián que el aristotelismo escolástico sólo se mantenía por pereza intelectual, y defendía, sin duda con vibrante apasionamiento, que la ingente cantidad de obras que contenían saberes prácticos debían ser estudiadas, incluso a escondidas, para elevar nuestro grado de preparación, y para que no nos llamaran "bárbaros" los extranjeros. Muchos sinsabores le produjo su valiente posición, y alguna vez hubo de escuchar de sus superiores, militares y civiles, intimidaciones que le conminaban a ser militar "exclusive", con escarnio para la lengua a quien en cuerpo y alma servía.

Había, sin embargo, modos de allanar las abruptas dificultades que la "prudencia" o la "moderación" aconsejadas oponían a la libre expresión. La obra que comentamos es un intento de fuga de las cárceles que el propio movimiento ilustrado tenía preparadas para los que se excedían en la pretensión o en el tono. El libro tiene un subtítulo aleccionador:

"Curso completo de todas las ciencias. Dividido en siete lecciones para los siete días de la semana. Compuesto por D. Joseph Vázquez, quien lo publica en obsequio de los que pretenden saber mucho estudiando poco".

El catedrático a la violeta que escribe el curso para sus escolariegos lectores dedica la lección del sábado a la matemática. Para empezar censura el dómine a la disciplina sus defectos.

En primer lugar, la dificultad de sus conceptos y términos, "infinidad de avechuchos con nombres todos durísimos de pelar". A pesar de ello, el violeto no tendrá que angustiarse con tal de pronunciarlos bien. Algo después protestarán con grave dignidad de que esta ciencia consista en líneas, letras y números que podrían distraer, por sí solos, al joven pedante de la sagrada preocupación por su nuevo peinado. La prolijidad de cualquier tratado matemático es algo tan inaguantable que es mejor pasarla por alto para fijar la atención en lo que verdaderamente atrae: las aplicaciones prácticas de la disciplina.

Entre estas, pueden citarse:

"Geometría especulativa y práctica, Artillería, Fortificación, Náutica, Arquitectura civil, Astronomía".

Hay, naturalmente, otros apartados rincones de la matemática, como esa

"cosa que llaman álgebra y es una algarabía de Luzbel, con crucecitas y rayitas dobles y sencillas, y aspas, y letras, y números y puntos..." cuyo estudio debe ser sinceramente despreciado porque pide al menos "aplicación, constancia y método", que son tan enemigas de las almas violetas como el mundo, el demonio y la carne.

Las chinitas en los cristales de los balcones eclesiásticos y sus "saberes sólidos" no tardan en resonar con discreto estrépito:

"Diréis, pues, con gravedad, que si el Autor de la Naturaleza puso todas las cosas *in numero, pondere et mensura* (como me parece haber oído en algún sermón, que oí por casualidad), la matemática es una ciencia divina, pues su objeto es calcular, pesar y medir todas las cosas".

Pasa Cadalso revista posteriormente al conjunto de los tratados ya mencionados, enfatizando en las posibilidades prácticas de cada saber específico, tanto por obtener un amplio campo para su ironía como por estimular la curiosidad entre incrédulos e ingenua de los lectores. El violeto explotará los más lejanos poderes de medición de lo inaccesible y pasmará con la eficaz mención de artilugios desconocidos ante su público boquiabierto —plancheta, cuadrante, transportador, pantómetra—, o las más fantásticas posibilidades de la artillería y de la pirotecnia, de la fortificación, o de la astronomía. Para ello, un delgado barniz de terminología o un siquiera caótico repertorio de operaciones bastarán.

En particular la rara ciencia de la astronomía brindará oportunidades insospechadas de asombro a los circunstantes. Para ello, el escenario apropiado será un paseo nocturno, la atenta compañía de cuatro majaderos, y el jugoso discurrir poniendo nombres y magnitudes a las estrellas, salpicado todo ello de sus descubridores, y aderezado en propicia ocasión con el cálculo aproximado de la distancia del astro hasta Getafe, todo ello, "fiados en lo que decía Quevedo: *el mentir de las estrellas es muy seguro mentir porque ninguno ha de ir a preguntárselo a ellas.*

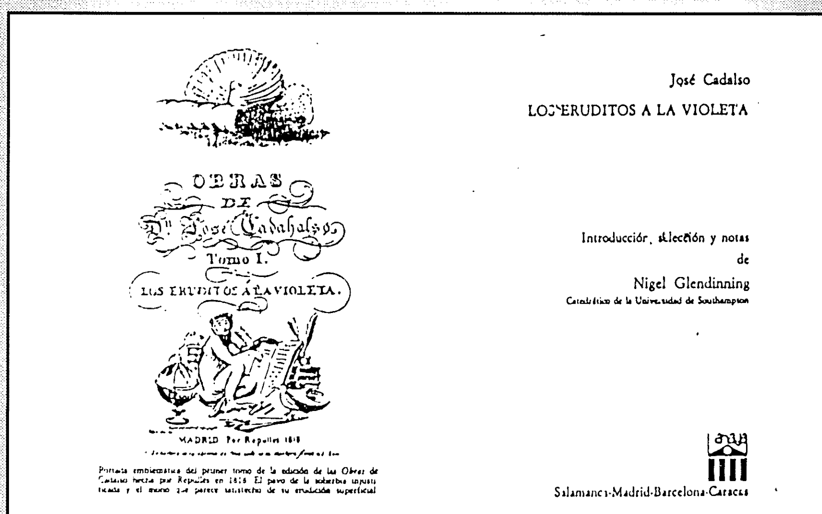
Algo después, un matemático a la violeta escribe una carta a su catedrático. Se trata de un reciente cadete que, aprovechando los consejos "más que humanos" de su preceptor y poniendo en práctica el doctrinal de violetería, de un jueves a un viernes conoce que sabe los más remotos arcanos de la materia y pasa a lucirlos con singular osadía escogiendo como tema para hacer sus primeras armas disertativas la *fortificación*, y como teatro para su argumentación el sitio de Gibraltar, que se mantiene en ajenas manos a causa de la "impericia de los sitiadores". La plaza será tomada si se disponen baluartes, centenares de cañones, morteros "en 89 grados de elevación" y otros ingenios bélicos. La mala ventura del cadete violeto le depara un bochorno proporcional al de su febril y disparatada ignorancia, cuando un "oficial de bastante edad y graduación" le ponga en ridículo con algunas observaciones. Por un momento el cadete parece sufrir un arrepentimiento y muestra deseos de dedicarse al verdadero estudio de la matemática. Un compañero le disuade, porque para ello se requiere: "a lo menos cuatro años, continua aplicación, talento despejado y buenos maestros (...) apenas de cien hombres hay uno que tenga el genio matemático".

La tentación es demasiado fuerte. Entre las malas noches de vigilia y soledad, abstractos raciocinios, demostracines y jaquecas por un lado, y el buen lucir en bailes y salones, el galanteo y el goce de la juventud por el otro, no hay para el violeto duda.

D. José Cadalso, que vivió en un tiempo en que la matemática había cedido su primacía a las ciencias físico-naturales (recuérdese el "objeto" de la matemática arriba citado), había subrayado con humor, pero con énfasis, las múltiples aplicaciones prácticas de la ciencia matemática, había nombrado algunos de nuestros principales sabios en la materia, y mediante la ridiculización de ciertos comportamientos sociales intentaba estimular la curiosidad y el esfuerzo intelectual.

La ironía del destino quiso jugar también con quien la había utilizado como burladero de su propio infortunio y como azote de la común necedad.

Una granada segó la vida del ilustre coronel gaditano D. José Cadalso y Vázquez en el sitio de Gibraltar, donde aquel fatuo había escenificado sus bravatas, quizás para dar todavía más razón al viejo oficial que le rebatió, y con quien el propio Cadalso se había identificado. Amigos y enemigos —los ingleses que le habían conocido en el canje de prisioneros le tenían en alto aprecio— sintieron su muerte. Más allá de todas las ironías, las de sus libros, la de su vida y la de su muerte, la matemática poseía para él partes "sublimes y casi divinas".


OBRAS
DE
Dn José Cadahalso.
Tomo I.
LOS ERUDITOS A LA VIOLETA.
MADRID Por Repullés 1818

José Cadalso
LOS ERUDITOS A LA VIOLETA

Introducción, selección y notas
de
Nigel Glendinning
Catedrático de la Universidad de Southampton

Salamanca-Madrid-Barcelona-Caracas

Portada emblemática del primer tomo de la edición de las *Obras* de Cadalso hecha por Repullés en 1818. El pavo de la soberbia injustificada y el mono que parece satisfecho de su erudición superficial

¿Qué es la matemática para la familia?

Virginia Thompson

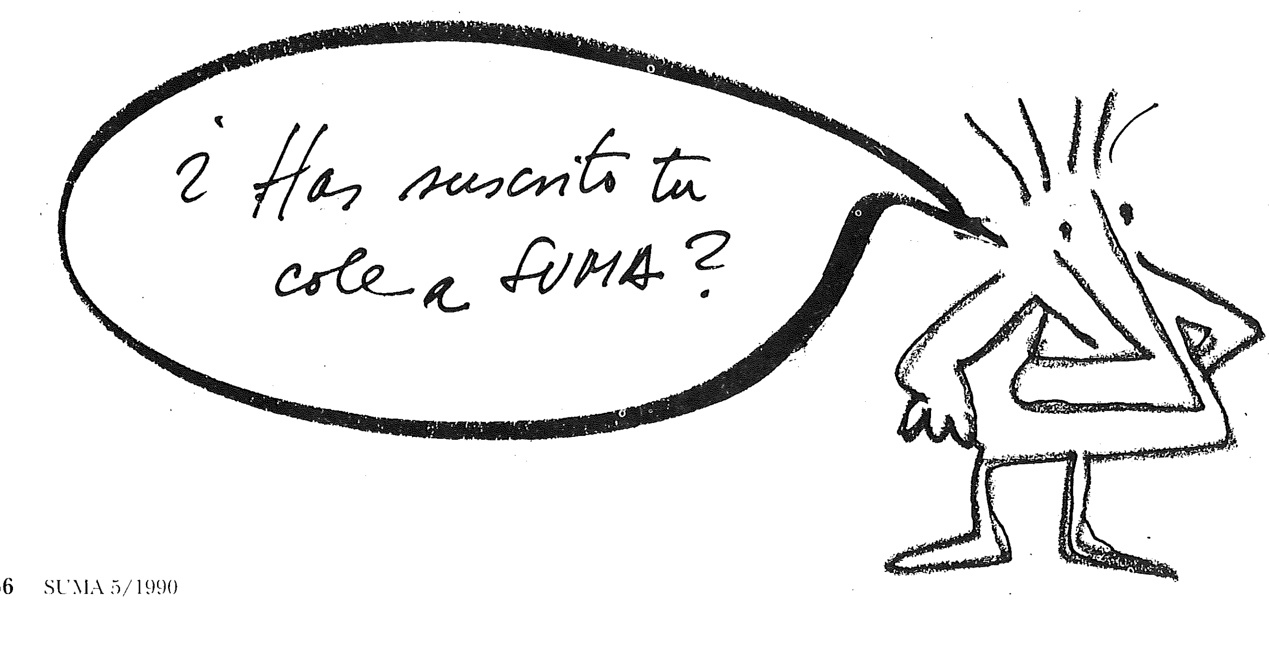
La Matemática para la Familia es un curso que brinda a padres e hijos (de Kindergarten a 8º grado) una buena oportunidad para desarrollar las destrezas necesarias para resolver problemas y entender la matemática a través de actividades que requieren la participación activa de padres y niños. Los maestros, padres, jubilados o trabajadores de la comunidad pueden enseñar el curso en las escuelas, los centros comunitarios, o aún en el mismo hogar.

Por destrezas para la resolución de problemas entendemos todas las formas en que pensamos al intentar resolver un problema cualquiera, utilizando estrategias especiales como lo son las de buscar patrones o relaciones, dibujar esquemas, trabajar en colaboración con otra persona o eliminar posibilidades. Teniendo una amplia fuente de estrategias especiales podemos eliminar en parte la frustración que usualmente se siente cuando no se sabe cómo ni dónde comenzar a resolver un problema. Mientras mas estrategias tenemos, mas aumenta nuestra confianza propia, nuestra habilidad y nuestro deseo de resolver nuevos problemas. La participación activa se consigue al utilizar "objetos concretos" en las actividades del curso, como por ejemplo, bloques, frijoles, palillos de dientes, etc., los cuales ayudan a visualizar y conceptualizar los problemas.

Los cursos de Matemática para la Familia se suelen enseñar por niveles escolares (K-2; 3-4; 5-6; 7-9), aunque en ocasiones es posible observar excepciones a esta regla. Las sesiones duran alrededor de dos horas y se extienden por un período de seis a ocho semanas. El curso, que abarca temas del currículo de K-8, incluye actividades que cubren las siguientes áreas: Aritmética, Geometría, Probabilidad y Estadística, Medición, Estimación y Lógica. A medida que los niños progresan en sus estudios matemáticos se hace necesario que éstos desarrollen sus habilidades para visualizar relaciones espaciales (Geometría), aproximar cantidades (Estimación), interpretar datos (Probabilidad y Estadística) y razonar correctamente (Lógica). El contacto con tales áreas (de por sí interesantes) puede estimular al estudiante de poco interés o poco éxito a perseverar en el estudio de las matemáticas. Los padres participantes ganan una visión global de los temas que se tocan en el currículo matemático del nivel escolar de sus hijos y reciben explicaciones detalladas sobre la relación de tales temas con las actividades del curso.

El curso de Matemática para la Familia tiene disponible para la venta o el alquiler una película de 17 minutos de duración la cual contiene escenas de varias clases del mismo. Además, el libro Matemática para la Familia contiene actividades con instrucciones detalladas para que padres e hijos las puedan realizar en sus hogares o en el curso. El libro también provee información valiosa referente a la forma de organizar un curso de Matemática para la Familia.

Virginia Thompson, Family Math, Lawrence Hall of Science, University of California, Berkeley, CA, 94720.



Crónica de dos encuentros de profesores

Enrique Vidal Costa

Vamos a contar dos hechos que están ocurriendo en nuestro país. Probablemente la Formación de Profesores de Educación Infantil, Primaria o Secundaria, tanto inicial como permanente, es el gran tema del que no se sabe, o no se quiere, adoptar una visión global y unificada que sirva de marco general. ¿Es imposible que el Consejo de Universidades y los responsables de las Enseñanzas Primaria y Secundaria se sienten a dialogar? Parece que en los días anteriores a la salida del Libro Blanco, el texto relativo a la Formación de Profesores se cambió ocho veces. ¿Sería un preludio de los diferentes ajustes y parches que nos esperan en los noventa? Vamos a ser simples cronistas de dos hechos que sobre este tema se están produciendo.

1. Encuentro de profesores de didáctica de la Matemática de las Escuelas de Magisterio

Los días 18 y 19 de Septiembre se celebraron en Santiago de Compostela unas jornadas de trabajo, en las que se reunieron profesores de las Escuelas de Magisterio de todo el Estado, y en las que se discutieron los problemas relacionados con el Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática y la Formación inicial de Profesores de Secundaria. Al final de las mismas se redactaron unos acuerdos que vamos a comentar.

a) Respuesta al documento A1 del Consejo General de Universidades

En relación al documento A1, que trata de determinar la Formación inicial de los Profesores de Educación Infantil y Primaria, se acuerda solicitar el establecimiento de 9 créditos de la Didáctica de la Matemática en todas las opciones.

Se propone un mismo programa cuya base es la siguiente:

1. Conocimiento informal y Conocimiento formal. Conceptos y concepciones. Evolución histórica de las ideas matemáticas.
2. Teoría y modelos de la educación matemática elemental. Principios usos y defectos.
3. Análisis y diseño curricular.
4. La práctica docente: recursos y secuencialización didáctica.
5. Evaluación.

b) Alternativas al documento A1

Los profesores del área de Didáctica de la Matemática acuerdan solicitar la modificación del Título de Diplomado en Educación Infantil y Primaria por el de Licenciado en Educación Infantil y Primaria, con una carga lectiva mínima de 240 créditos y máxima de 320.

Razones de dignificación del Profesorado de Infantil y Primaria, la necesidad de conseguir un único nivel de titulación para ejercer la docencia, que contribuya a configurar el Cuerpo único de enseñantes, y la homologación con el nivel de titulación mayoritario en los países de la CEE, hacen que este cambio sea imprescindible.

c) Formación inicial de profesores de enseñanza secundaria

La formación inicial de los profesores de Enseñanza Secundaria, debe realizarse en la Universidad, a través de los Departamentos.

Esta formación inicial debe formar parte de los estudios de licenciatura. En particular, para la formación inicial de Profesores de Matemática de la Enseñanza Secundaria, deberán utilizarse créditos de la especialidad de Educación Matemática.

En todo caso, entendemos que debe ser requisito necesario para acceder a la docencia de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria haber adquirido estos créditos, que también podrán articularse en Cursos de Postgrado que ofrece la Universidad, desde los Departamentos específicos.

d) Investigación en Didáctica de la Matemática

En estos momentos, la investigación es un tema de interés prioritario para los profesores del Área de Didáctica de la Matemática. Como punto de arranque de esta sesión, se presentó un resumen de las cuestiones básicas que componen la actividad investigadora en el campo de Didáctica de la Matemática, y se comentaron algunas de las Tesis Doctorales en esta materia, leídas recientemente en España.

2. Formación inicial del profesorado de secundaria (FIPS) en el ICE de la Universidad Autónoma de Madrid.

El Ministerio de Educación y Ciencia y el ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, ha llegado a un acuerdo para la elaboración de un Plan de Formación del Profesorado de Secundaria, que ya está en rodaje en sus primeros pasos.

Vamos a resumir un borrador del mismo que se distribuyó el pasado mes de Septiembre.

a) Objetivos:

I. Diseñar, realizar y evaluar un plan de Formación Inicial del Profesorado de Enseñanza Secundaria que, de acuerdo con las directrices ministeriales, prepare a los futuros profesores en temas de psicopedagogía necesarios para el desarrollo de la docencia en el nivel correspondiente.

II. Para conseguir el primer objetivo, se establecerá un plan de formación de expertos en Didácticas específicas.

b) Fases

El programa FIPS se desarrollará en dos años experimentales.

El primer año (1989-90) estará íntegramente dedicado a la preparación de programas y materiales para impartir este tipo de formación. Además se desarrollará un Curso de Formación de Profesores Especialistas en Didácticas Específicas (E.D.E.).

El segundo año (1990-91) la Universidad Autónoma de Madrid ofrecerá la posibilidad de elegir el programa experimental de formación inicial del profesorado a 135 licenciados, 15 por cada una de las nueve áreas de conocimiento siguientes: Ciencias de la Naturaleza; Educación Física; Expresión Visual y Plástica; Geografía, Historia y Ciencias Sociales; Lengua y Literatura; Lenguas Extranjeras; Matemáticas; Tecnología y Música.

c) Estructura del programa

I. Seminario EDE

Objetivo: proporcionar a un grupo de profesores la formación teórica necesaria que les permite diseñar las didácticas específicas que formarán parte del currículum del FIPS y que se desarrollarán en el siguiente año académico.

II. Curso FIPS

El programa está estructurado en un modo teórico con asignaturas de diferente duración y un módulo de prácticas en los centros de Secundaria.

El módulo teórico se desarrollará simultáneamente a las prácticas en jornadas de tarde en el ICE. Constará de las siguientes asignaturas:

1.- Didáctica Específica: 100 h.
2.- Didáctica General: 30 h.
3.- Organización Escolar y marco Curricular: 30 h.
4.- Problemas de aprendizaje y adaptaciones curriculares: 50 h.
5.- Psicología del desarrollo: 30 h.
6.- Relaciones psicosociales en el aula: 20
7.- Sociología del sistema educativo: 20 h.
8.- Tecnología educativa: 50 h.
9.- Teoría de la educación: 20 h.
10.- Complementos científicos: 40 h.

Existen también otros apartados en los que se tratan temas como el marco administrativo y el calendario.

1.^{er} Congreso iberoamericano de educación matemática

Sevilla, 24 al 29 de Septiembre de 1990

INFORMACIÓN

Coordinadora: Mª Mercedes García Blanco.

Comité local de organización:
Trinidad Bando Casado
Isabel Escudero Pérez
Mª Mercedes García Blanco
José A. Mayor Gallego
José Muñoz Santonja
José A. Prado Tendero

Lugar de celebración: Conferencias inaugural y de clausura: Teatro LOPE DE VEGA. Restantes sesiones de trabajo: Facultad de Matemáticas.

ORGANIGRAMA

	24	25	27	28	29
9 a 11	Recepción	Conferen.	Conferen.		10 Confer.
11,30 a 13,30	Apertura y Conferen.	Paneles	Paneles	Paneles	11,30 Clausura
16,30 a 18,30	Paneles	Comunicaciones	Comunica.	Comunica.	
19 a 20	Comunica.	Comunica.	Comunica	Comunica.	

CONFERENCIAS PLENARIAS

Prof. **C. Alsina**: *"Los 90 son nuestros. Ideas educativas para una Matemática feliz."*

Prof. **U. D'Ambrosio**: *"Las matemáticas y su entorno socio-cultural."* (Conf. de clausura)

Prof. **E. Luna**: *"El papel de la investigación en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en un contexto latinoamericano."*

Prof. **J. Ponte**: *"Investigaçao em educaçao matematica em Portugal: 1894-1989."*

Prof. **L. A. Santaló**: *"La Matemática para no matemáticos."* (Conferencia inaugural)

PANELES

1- RENOVACIÓN Y REFORMA

- *Coordinador*: Salvador Guerrero Hidalgo
- *Panelistas:* Raul Calvahlo (Portugal); José Colera (España); Regina Corio (Brasil).
- *Representante organización*: Cristóbal Rodríguez Cesar
- *Esquema del panel:*

Se organizará en dos sesiones expositivas de 2 horas de duración cada una.

—1ª Sesión: Exposición por parte de los panelistas de la ponencia básica siguiente:

1- Necesidad de reformas en la Enseñanza de las Matemáticas.

2- Desarrollo de las reformas en Matemáticas.

3- Reformas actuales en curso.

Se recogerán por escrito preguntas y sugerencias a tratar en la segunda sesión.

—2ª Sesión: Se completarán los temas no tratados de la ponencia básica y se contestarán las propuestas recogidas el día anterior.

Debate por parte de todos los participantes y conclusiones.

2- INFORMÁTICA Y ENSEÑANZA.

- *Coordinador*: Antonio Pérez Jiménez.
- *Panelistas*: Francisco Martín (España); Fidel Oteiza (Chile); Eduardo Veloso (Portugal)
- *Representante organización:* Pedro Reyes Colomé
- *Aspectos a tratar en el panel:*
  - a) Estado actual en incidencias de las nuevas tecnologías en relación con la Enseñanza de las Matemáticas:
    1 Carácter general.
    2 Innovación, experiencias
    3 Incidencia en el curriculum
    4 "Cambios" en el profesorado
  - b) Descripción de experiencia de tipo general y ejemplificadoras.

3- FORMACIÓN DEL PROFESORADO.

- *Coordinador*: Javier Pérez Fernández.
- *Panelistas*: Domingos Fernandes (Portugal); Eduardo Luna (R. Dominicana); Representante del Grupo Cero de Valencia
- *Representante organización*: Juan Núñez Valdés
- *Estructura del panel*:
  - A- Presentación del panel Introducción a los modelos de formación del profesorado.
  - B- Experiencias de formación en ejercicio en las distintas regiones:
    1 Formación y curricula
    2 Formación e innovación
    3 Acciones institucionales y acciones expontáneas.
  - C- Formación inicial del profesorado.
    1 La didáctica de las Matemáticas y la Universidad
    2 Incorporación de los nuevos profesores al Sistema Educativo.
  - D- Evaluación de los diversos Planes y Experiencias.
    1 Evaluación institucional, en su caso.
    2 Incidencia real.
    3 Opiniones del profesorado.
    4 Papel jugado por la Administración.
  - E- Posibles extrapolaciones de las Experiencias.

4- EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN GRUPOS CULTURALMENTE DIFERENCIADOS.

- *Coordinador*: Ubiratan D'Ambrosio.
- *Panelista*: Eduardo Sebastiani Ferreira (Brasil). Palaus Gerdes (Mozambique); Eladio Domínguez (España).
- *Representante organización*: Cristóbal Rodríguez.
- *Aspectos a tratar en el panel*:
  Tratará de aspectos socio-culturales de la educación matemática, incluyendo aspectos de etnomatemática.Serán abordados temas de investigación, metodología y aspectos curriculares en general. Los panelistas procuran referirse a grupos indígenas, a grupos marginales en ciudades y a grupos profesionales distintos.

5- INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁT.

- *Coordinador*: Juan Díaz Godino
- *Panelistas*: Eugenio Filloy (México); Angel Gutiérrez (España); Joao F. Matos (Portugal).
- *Representantes organización*: Pilar Domínguez
- *Ponencias que se presentarán*:
  J. **Díaz**: "Concepciones y paradigmas en Educación Matemáticas: su influencia en la definición de agendas de investigación y en la formación de investigadores".
  E.**Filloy**: "Aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica."
  J. **Martos**: "Las nuevas Tecnologías de la Información en el aula de Matemáticas" / "Concepciones y actitudes de los profesores sobre la matemática y su influencia en la práctica docente y en los resultados de enseñanza."
  A. **Gutiérrez**: "Tendencias actuales de la investigación en Geometría.

6- ESTADÍSTICA Y ENSEÑANZA.

- *Coordinador*: Antonio Pozo Chia
- *Panelistas*: Mª Eliza Fini (Brasil); Andrés Nortes (España).
- *Representante organización*: Pilar Domínguez Abad.
- *Esquima del panel*:

—1er día: Intervención durante 20 minutos de los panelistas sobre los siguientes temas:
E. Fini: "La enseñanza de la Estadística en Brasil (niveles básico y medio)."
A. Nortes: "La enseñanza de la Estadística en España en EGB y BUP y sobre la importancia de la Estadística en la Sociedad Actual."

A. POZO: "La Estadística en la mejora del Proceso Educativo."

A continuación se establecerá un debate sobre los temas tratados.

—2º día: Presentación de diversas experiencias de tipo estadístico-informativo, tanto por los panelistas como por otras personas asistentes al Congreso.

7- GEOMETRÍA.

- *Coordinador*: Rafael Pérez Gómez.
- *Panelistas*: José Mª Fortuy (España); Francisco Hernán (España); Emilio Lluis (México).
- *Representante organización*: Ismael Roldán Castro

Esquema del panel:

—1ª Sesión: Presentación e intervención de los panelistas.

Se recoge por escrito, preguntas de los asistentes sobre el tema del panel, que serán repartidas entre los panelistas para ser contestadas en la segunda sesión.

—2ª Sesión: Respuesta por los panelistas de las preguntas entregadas en la sesión anterior.

Tendrán cabida, en este segundo día, algunas comunicaciones relacionadas con las cuestiones presentadas. Elaboración de conclusiones.

El panel tiene previsto organizar, durante el Congreso, distintas exposiciones relacionadas con el tema que serán presentadas por el profesos Ceferino Ruíz.

8- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

- *Coordinador*: Luis Rico Romero
- *Panelistas*: Paulo Abrantes (Portugal); Luis Puig (España); Pedro Gómez Guzmán (Colombia).
- *Representante organización*: Juan Núñez
- *Esquema del panel*:

Estará centrado en los temas siguientes:

P. GÓMEZ: "Aprendizaje de las Matemáticas mediante Resolución de Problemas."

P. ABRANTES: "Resolución de Problemas como elemento del Currículo de Matemática."

L. PUIG: "Investigación sobre Resolución de Problemas en Educación Matemática."

—1ª sesión: Presentación e intervención de los panelistas sobre el campo de trabajo: Resolución de Problemas. Debate general.

Durante los días intermedios se entregará por escrito cuestiones que los panelistas clasificarán y se distribuirán para su contestación.

—2ª sesión: Respuesta a cuestiones planteadas. Cuestiones prioritarias en el campo de Resolución de Problemas. Debate final y conclusiones.

TALLER DE JUEGOS

- *Presentado por*: Fernando Corbalán; José Mª Gairín
- *Objetivos*: Presentar y jugar con distintos juegos matemáticos, así como discutir sobre los métodos de utilización en la programación normal de matemáticas en los distintos cursos de EGB y EE.MM. Se tratará asimismo las dificultades para la práctica de juegos, así como de los métodos más idóneos para superarlas.
- Metodología:
  - —Presentación de las relaciones juego-matemáticas
  - —Se presentan diversos juegos, y los asistentes, en pequeños grupos, juegan durante el tiempo que dedican.
  - —Discusión sobre la adecuación a los objetivos, niveles idóneos de uso, formas de introducción en el curso. etc... de cada juego.
  - —Visionado de videos sobre utilización de dichos juegos en las clases.
  - —Discusión general sobre los juegos y las matemáticas: introducción en clase, tiempo de utilización, frecuencia de uso, efectos en los alumnos, incidencia en el tipo de clase, dificultades más frecuentes, etc...

NOTA: Debido a las limitaciones de espacio reservado para el Congreso, será totalmente imprescindible la presentación del distintivo de participante, para poder asistir a las sesiones de trabajo. La ausencia de dicho distintivo, cualesquiera que sean los motivos, traerá como consecuencia la no admisión a las sesiones.

Las personas que figuren como acompañantes, no podrán participar en las actividades de trabajo del Congreso (conferencias, paneles, talleres, comunicaciones, etc.), pero sí en todas las actividades de tipo recreativo que se organicen (exposiciones, excursiones, etc.)

AVISO:Según Orden de 7 de Marzo de 1990 (Boja de 19 de marzo), se ha convocado bolsas de ayudas individuales para la asistencia y participación en actividades de formación del profesorado, como por ejemplo, el CIBEM. Todos aquellos interesados en asistir pueden solicitarlas si les parece oportuno.

Asimismo en el B.O.E. de 14 de Marzo de 1990 (Orden de 16 del 2 de 1990) se convocan ayudas individuales para actividades de formación del profesorado.

Centro de documentación "Thales"

En la década que comienza se ha de producir uno de los cambios más importantes de nuestro Sistema educativo, en lo que va de siglo. El proceso de reforma que se ha de generalizar paulatinamente en los años venideros no ha de ser una adecuación más a las necesidades sociales, económicas y productivas (al menos eso sería lo deseable); estando estas bien presentes, la transformación ha de ser en profundidad: no sólo se trata de extender la educación sino también, y muy primordialmente, plantearse como ha de entenderse ésta.

En el campo de las Matemáticas, desde los años 70 ha venido produciéndose un movimiento, cada vez más importante de profesores en búsqueda de soluciones a importantísimos problemas pedagógicos de su área (en buena medida todos derivan en qué se enseñan y cómo se enseñan, qué ha de aprenderse y cómo ha de aprenderse).

Desde entonces hasta aquí se han construido Grupos y Sociedades de profesores, y sobre todo se ha conectado con una considerable incidencia numérica con las grandes corrientes y con los foros más importantes de la Educación Matemática internacionales.

Muchos han sido los años que hemos ido tanteando, partiendo de nuestra propia experiencia y necesidades, pero con una reducida información y un considerable desconocimiento de la investigación y experiencias internacionales, a veces acertando y otras dando palos de ciegos, e un arduo esfuerzo, pero mal orientado en la mayoría de los casos, por una renovación didáctica.

Un buen número de Grupos y de núcleos de profesores han ido saliendo de esta situación, pero son muchos más los que no disponen aún de la adecuada orientación e información.

Un paso adelante es sin duda la red de Asesores o Coordinadores de Area que se está tejiendo por el mapa español. Otro especialmente importante ha sido la constitución de Departamentos de Didáctica de las Matemáticas en diversas Universidades. Y otro más, que debería servir de apoyo a aquellos, a todo el profesorado y , en general a todos los interesados en el estudio e investigación de esta área, sería contar con un buen centro de documentación, conectado con las principales bases de datos y centros similares internacionales.

En la *S.A.E.M. "THALES"* hemos estado firmemente convencidos de esta necesidad. En 1986 iniciamos un difícil camino en este sentido. El 11 de Junio de ese año se firmó un Convenio con el *ICE* de la *UNIVERSIDAD DE CADIZ* , por el que se ofrecía a todos los profesores del Distrito granadino y a los socios de Thales un servicio de información y otro de préstamo de los fondos documentales de nuestra Sociedad; se editó un Boletín de Información Bibliográfica y se ofrecía la posibilidad de efectuar búsquedas retrospectivas a través de las bases de datos: *ERIC, MATHEMATICS, PSYCINSO, REMARC* y *REVISTAS 37*.

Lo realizado, no obstante, ha sido fruto del voluntarismo de unos pocos compañeros de la Sociedad y de la atención prestada por el Jefe del Servicio de Documentación del *ICE*. Desde aquella fecha hasta hoy se ha venido imponiendo la necesidad de contar de forma permanente con el personal cualificado dedicado exclusivamente a esta tarea (y no en su tiempo libre), así como ampliar considerablemente los fondos, aumentar el número de diferentes revistas internacionales que se reciben, conectar con nuevas distribuidoras y Bases de Datos, y por supuesto ampliar el campo de usuarios a atender.

El año que acaba de finalizar ha supuesto otro paso hacia adelante, se firmó un nuevo Convenio, entre la *Consejería de Educación de la Junta de Andalucía,* la *Universidad de Cádiz* y la *S.A.E.M. "THALES"*, por el que se potencia y se amplia el actual Centro de Documentación. Con este convenio quedan atendidas muchas de las deficiencias anteriores: se cuenta ya con una persona dedicada exclusivamente a él, se dispone de apoyo administrativo y de infraestructura, así como de una dotación económica específica.

Las funciones que desarrollará el *Centro de Documentación en Didáctica de las Matemáticas "Thales"*, serán las siguientes:

1.- Proporcionar a todo el profesorado de Matemáticas, de todos los niveles educativos, el apoyo bibliográfico necesario para el desarrollo de la actividad docente, de los procesos de investigación en proyecto o en realización y de todo el soporte documental necesario para el proceso de renovación pedagógica y de reforma.

2.- Para el acceso y difusión de la información científica se procederá al tratamiento documental (catalogación, clasificación, indización) de las principales novedades bibliográficas del área, la mayoría de las revistas científicas sobre Didáctica de las Matemáticas publicadas en el mundo, así como otro tipo de literatura relacionada con el tema, como revistas de experiencias docentes, Actas de Congresos, reuniones, simposiums, etc., y aquella documentación que produzcan los organismos oficiales y entidades privadas. Toda esta información se encontrará en la base de datos del *Centro*. La catalogación realizada permite hasta cinco campos de búsqueda distintos.

3.- La difusión de la información científica se efectuará por varios canales:

 3.1.- Impresión de un boletín de periodicidad trimestral, que será distribuido entre los profesores de la S.A.E.M. "Thales", los CEP's, los Departamentos de Didáctica, los Asesores de Matemáticas, los centros de Reforma, todo ello en el marco de Andalucía, así como a cualquier otro centro o persona que lo solicite.

 3.2.- Difusión de la información en diskettes a todos los CEP's de Andalucía.

 3.3.- Realización de búsquedas retrospectivas bibliográficas sobre Didáctica de las Matemáticas, en función de las necesidades de los usuarios.

 3.4.- Realización de búsquedas retrospectivas bibliográficas en bases de datos internaciones.

4.- A medio plazo se contempla la posibilidad de que cualquier usuario que se conecte directamente con nuestra base de datos, bien a través de la red R. I.C. A. (Red Informática Científica de Andalucía), bien a través de la red Iberac.

Con todo, es ahora cuando se inicia esta nueva etapa, por lo que la ratea no será fácil.

En cualquier caso, las propias demandas y la necesaria exigencia de los usuarios serán un imprescindible incentivo para el afianzamiento y potenciación de un servicio importantísimo para la renovación educativa.

No podría terminar estas líneas sin facilitaros las señas a las que podréis dirigiros:

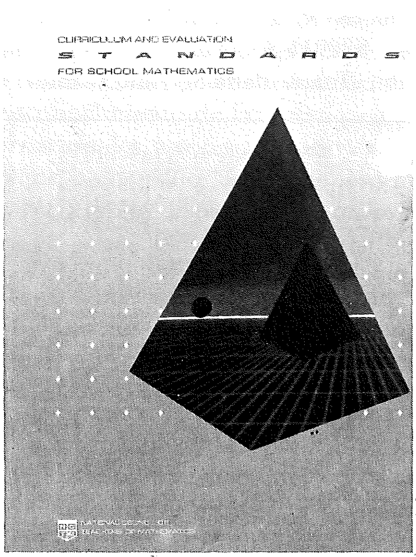
CENTRO DE DOCUMENTACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS "THALES".
Facultad de Ciencias
Polígono del Río San Pedro, s/n
Apdo.: 82.
11510-Puerto Real (Cádiz)
tfnos.: 832911-833000
Profesora responsable: **Inmaculada Serrano Gómez**

Reseñas

CURRICULUM AND EVALUATION STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS N.C.T.M. (1989)

La prestigiosa sociedad norteamericana de profesores de matemáticas National Council of Teachers of Mathematics ha publicado recientemente un documento curricular que consideramos v a tener un fuerte impacto en la próxima década en el diseño de los currícula de matemáticas, desde preescolar hasta la enseñanza secundaria. Se trata del libro titulado **Curriculum and evaluation standards for school mathematics** elaborado por una Comisión del N.C.T.M. creada en 1986, formada por profesores, formadores de profesores, inspectores, investigadores y matemáticos profesionales, y cuyos trabajos concluyeron en 1988, después de una amplia consulta a la comunidad de educadores matemáticos de Estados Unidos.

Dada la circunstancia de que en nuestro país nos encontramos en un período de **reformas** de los currícula de matemáticas, puede servir de punto de referencia complementario de los **diseños curriculares base** elaborados por el M.E.C. y por las Comunidades Autónomas. Pensamos que sería un buen acierto la traducción al castellano de este libro por parte del M.E.C. como viene haciendo con otros documentos curriculares.



¿Qué son los Standards?

Los **Standards** son enunciados que permiten juzgar la calidad de un currículum de matemáticas y de los métodos de evaluación del mismo. Constituyen un documento diseñado para establecer un marco de referencia amplio para guiar la reforma de las matemáticas escolares en Estados Unidos en la póxima década. Se incorpora una visión de lo que los currícula de matemáticas deberían incluir en términos de contenido, énfasis prioritario en los mismos, los criterios metodológicos a seguir y sobre las cuestiones claves relativas a la organización e implementación de la evaluación de los alumnos y de los programas.

Los **Standards** constituyen un instrumento para:

1.- Asegurar unos ciertos niveles de calidad; son condiciones necesarias, aunque no suficientes para asegurar dicha calidad de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

2.- Formular fines.

3.- Promover un cambio en un sistema hacia nuevos fines, formulados teniendo en cuenta el estado actual del conocimiento sobre la enseñanza/aprendizaje de la matemática.

Los objetivos que han guiado la redacción de los distintos enunciados son:

1.- Preparar trabajadores con una formación matemática suficiente en una sociedad basada en la información.

2.- Que sean capaces de ampliar su aprendizaje a lo largo de su vida.

3.- Ofrecer oportunidades de aprender a todos los ciudadanos.

4.- Formar ciudadanos informados capaces de comprender los problemas en una sociedad tecnológica.

Respecto a los estudiantes los Standards articulan cinco metas generales:

1.- Que aprendan a valorar las matemáticas.

2.- Que adquieran confianza en su capacidad de hacer matemática.

3.- Que sean capaces de resolver problemas.

4.- Que aprendan a comunicarse matemáticamente.

5.- Que aprendan a razonar matemáticamente.

Un programa de matemáticas de calidad debe proporcionar a todos los alumnos oportunidad de experimentar estos componentes del aprendizaje matemático.

Resumen del contenido de los Standards

El libro presenta un total de 54 Standards divididos en cuatro categorías: -WW4; 5-8; 9-12 y Evaluación.

Cada Standards comienza con un enunciado de las matemáticas que el currículum debería incluir. Además incluye una descripción de las actividades del estudiante asociadas con dichas matemáticas y una discusión que incluye ejemplos de situaciones-problemas mediante las cuales se muestra la visión ofrecida de la matemática y la instrucción.

En los contenidos matemáticos se trata de incorporar las siguientes ideas básicas:

1.- Conocer matemáticas es **hacer** matemáticas.

2.- Las aplicaciones de las matemáticas deben salir del círculo tradicional de la ingeniería y de las ciencias físicas, ampliándose a las ciencias sociales y humanas.

3.- Matemáticas para todos.

4.- El uso de las Nuevas Tecnologías de la Información cambia a la propia matemática y su uso. En consecuencia, se considera que:

—Las calculadoras deben estar disponibles para todos los alumnos todo el tiempo.

—En cada clase debe haber un ordenador con fines de demostración.

—Cada alumno debería tener acceso a un ordenador para su trabajo individual o por grupos.

—Los alumnos deberían aprender a usar el ordenador como herramienta para procesar información y realizar cálculos para investigar y resolver problemas.

Actividad del alumno

Cada Standards especifica las **actividades esperadas** del alumno asociadas con el hacer matemáticas. Las descripciones se basan en dos principios:

1) Las actividades surgen de las situaciones-problemas.

2) El aprendizaje tiene lugar por medio de una implicación, tanto activa como pasiva, con las matemáticas.

Se adopta un punto de vista constructivista del conocimiento matemático. En consecuencia la instrucción debe incluir oportunidades para realizar:

—Proyectos de trabajo apropiados.

—Tareas individuales y grupales.

—Discusiones entre el profesor, los estudiantes y entre estos mismos.

—Práctica sobre los métodos matemáticos.

—Exposiciones por el profesor.

Las ideas sobre las situaciones-problemas y el aprendizaje se reflejan en los verbos usados para describir las acciones de los alumnos (investigar, formular, encontrar, verificar). Estas situaciones deben ser suficientemente simples como para que sean manejables, pero lo suficientemente complejas de modo que proporcionen diversidad en la aproximación. Deben ser adaptables a la instrucción individual, trabajo en pequeños o gran grupo, deben implicar una variedad de dominios matemáticos y ser abiertas y flexibles como los métodos que se deben usar.

Estructura de los Standards de curriculum

Para el grado WW-4 se proponen 13 Standards:
1. Las matemáticas como resolución de problemas
2. Las matemáticas como comunicación
3. Las matemáticas como razonamiento
4. Conexiones matemáticas
5. Estimación
6. Sentido numérico y numeración
7. Concepto de número natural y operaciones
8. Cálculo con números naturales
9. Geometría y sentido espacial
10. Medición
11. Estadística y probabilidad
12. Fracciones y decimales
13. Patrones y relaciones

Para el grado 5-8 se proponen también 13 Standards. El título de los cuatro primeros coinciden con los de la sección anterior. Los restantes son:
5. Número y relaciones numéricas
6. Sistemas numéricos y teoría de números
7. Cálculo y estimación
8. Patrones y funciones
9. Álgebra
10. Estadística
11. Probabilidad
12. Geometría
13. Medición

Para los grados 9-12 se proponen 14 Standards. El título de los cuatro primeros coinciden con los de las Secciones anteriores. Los restantes son:
5. Álgebra
6. Funciones
7. Geometría desde una perspectiva sintética
8. Geometría desde una perspectiva analítica
9. Trigonometría
10. Estadística
11. Probabilidad
12. Matemática discreta
13. Base conceptual del cálculo
14. Estructura matemática

Los Standards de Evaluación

Los Standards de Evaluación proponen cambios en los procesos y métodos por los cuales se recoge la información, de tal modo que:

—La evaluación del alumno quede integrada en la instrucción.

—Se utilicen métodos múltiples de evaluación.

—Se evalúen todos los aspectos del conocimiento matemático.

—El currículum y la instrucción sean igualmente considerados al juzgar la calidad de un programa.

Se presentan 14 Standards de evaluación, agrupados en tres categorías:

a) Evaluación general. En estos se presentan los principios para juzgar los instrumentos de evaluación tanto del alumno como del programa. Estos deben utilizar diversas técnicas, ser concordantes con el currículo y tener en cuenta el fin de la evaluación.
1.- Concordancia
2.- Fuentes múltiples de información
3.- Métodos y usos apropiados de evaluación

b) Evaluación del estudiante. Describen lo que debe observarse y medirse para conocer tanto la comprensión de las matemáticas por los estudiantes como su disposición hacia ellas:
4. Poder matemático
5. Resolución de problemas
6. Comunicación
7. Razonamiento
8. Conceptos matemáticos
9. Procedimientos matemáticos
10. Disposición matemática

c) Evaluación del programa. Constituyen una guía para crear un programa que concuerde con los objetivos trazados en los Standards, asegurando que ajusten entre sí los distintos componentes:
11. Indicadores para la evaluación del programa
12. Currículum y recursos de instrucción
13. Instrucción
14. Equipo de evaluación

En resumen, podemos decir que a

través de los Standards el National Council of Teachers of Mathematics proporciona una visión de:

—Capacidad matemática para todos los alumnos en una sociedad tecnológica.

—La matemática como algo que uno hace —resuelve problemas, comunica, razona.

—Un currículum para todos que incluye un rango amplio de contenido, una variedad de contextos, y conexiones deliberadas.

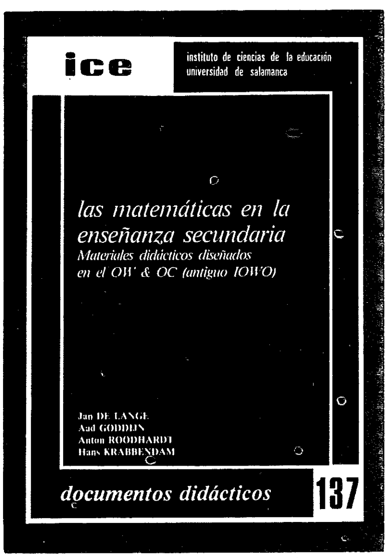
—La instrucción basada sobre problemas reales.

—La evaluación como un medio de mejorar la instrucción, el aprendizaje y los programas de formación.

Juan Díaz Godino
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA.

Jan de Lange y otros. Documentos Didácticos nº 137. I.U.C.E. Ediciones Universidad de Salamanca, 1989.



Con este título se presentan una serie de materiales didácticos que, según nuestra opinión, pueden ser de gran utilidad para todos los profesores que trabajamos en el campo de la Enseñanza Secundaria (12-18 años)

Nadie cuestiona ya la gran labor desarrollada en el campo de la Didáctica de las Matemáticas por el IOWO, fundado y dirigido por H. Freudenthal y que en la actualidad su continuidad en el OW&OC. Pues bien, todos los materiales presentados en el libro han sido preparados por sus profesores (Jan de Lange, Aad Goddijn, Anton Roodherdt o Hans Krabbendam) y experimentados por el instituto con diversos grupos de alumnos a los largo de varios cursos. Precisamente, en conversaciones mantenidas con el propio Jan de Lange, la única limitación impuesta a su publicación consistía en que ésta se limitara a los materiales ya experimentados directamente en las aulas y que hubieran alcanzado su redacción definitiva.

En mi opinión, el aspecto más interesante que aporta este documento es el estar constituido por materiales para los alumnos. Efectivamente, en estos momentos en que la Reforma del Sistema Educativo nos enfrenta a los profesores con el diseño de nuevos materiales que desarrollen los planteamientos teóricos y bloque de contenidos del Diseño Curricular Base (DCB), es imprescindible el conocimiento de nuevos materiales.

Posiblemente ninguna de las unidades que aparecen en libro puedan ser utilizadas directamente en nuestras aulas, pero lo que sí estoy seguro es que constituyen un buen "modelo" de reflexión para aquellos profesores interesados en los nuevos diseños curriculares.

Si entramos a estudiar los principios metodológico-didácticos que guían el "Enfoque Realista de la Educación Matemática" del OW&OC observamos que son asombrosamente coincidentes con las líneas maestras propuestas por el DCB para el Area de Matemáticas en la Secundaria Obligatoria. Haciendo mucho hincapié en los aspectos inductivos, diferenciales, histórico-genéricos,... Jan de Lange resume en *Mathematic, insight and meaning (Utrecht, 1987) estos* principios así:

1. Otorgar mucha atención a la "reinvención" que consiste en recrear conceptos y estructuras matemáticas sobre las nociones intuitivas (actividad).
2. Progresar en diferentes niveles de abstracción (diferenciación).
3. Guiarse más por el desarrollo histórico-genérico que por el método sistemático del contenido del material (planificación vertical).
4. Instruir significativamente, pegados a la realidad.

No obstante, nos sintamos o no nos sintamos identificados con la línea metodológica sugerida en los DCB, es seguro que con la lectura de estas unidades didácticas podremos encontrar sugerencias, ejemplos concretos y visiones diferentes de la enseñanza que nos ayudarán, en la situación actual, a dinamizar nuestras aulas, incentivando y motivando el trabajo de nuestros alumnos.

Estamos convencidos de que estos materiales van a contribuir a mejorar la calidad de nuestra enseñanza y a hacer más "populares" las matemáticas entre nuestros jóvenes.

En el Prólogo se indica para qué nivel ha sido diseñada cada una de las unidades.

La revisión y adaptación han sido realizadas por el Grupo GAUSS y el libro es distribuido por: Andrés García, C/ Perú, nº 1, 37003-SALAMANCA, Tnº 923-23 0206.

Mariano Domínguez Muro
Salamanca

ASPECTOS DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS 3.

Varios autores.
I.C.E. Universidad de Zaragoza, 1990

El Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, viene organizando, desde hace algunos años, unos encuentros anuales, que por áreas, se convierten en bianuales, sobre Aspectos Didácticos de las mismas. La publicación de la que aquí hacemos referencia corresponde a las ponencias de matemáticas del Encuentro celebrado en septiembre de 1989.

Se presentaron cinco ponencias, tituladas:

—"Información y control en educación matemática", a cargo de J. M. Fortuny de la U.A. Barcelona.
—"Los medios audiovisuales en la didáctica de las matemáticas", por el Grupo AG de Tecnología Educativa (Galdón, Domínguez, Ramírez y Gómez).
—"Posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas", de Julio Sancho, I.B. de Alagón.
—"Visión didáctica de la estadística y el azar", por José Colera, I.B. de Colmenar Viejo, y
—"Estimación: nuevas propuestas para el currículo de Matemáticas en Secundaria", por Luis Rico de la U. de Granada.

J.M. Fortuny, nos habla de las funciones de los profesores de matemáticas en cuanto a la clarificación de los aspectos culturales de las matemáticas como información y el proceso de enseñanza/aprendizaje como control, en el sentido de tomar decisiones globales. Pasa después al estudio de las variables a tener en cuenta al desarrollar en las aulas un currículo: el análisis del contexto y los niveles de aprendizaje de los alumnos (en el sentido de Van Hiele) y a preferir el constructivismo como modelo epistemológico y psicológico de aprendizaje, pero este modelo exige, como todos, o incluso más que otros, la planificación de las fases en que cada actividad y estrategia se realiza: creación de un ambiente de aprendizaje, organización de las situaciones didácticas, ¿cómo tomar decisiones?, ...

Para que todo lo anterior no quede en "pura teoría" nos propone como modelos algunos talleres: Medida de la energía transferida, Medida de la energía oculta, Modelo geométrico de la energía, la energía interiónica, y la energía de la corriente. Termina su trabajo con cuatro tipos de tareas para la evaluación: guía de observación de las tareas, cuestionario autorreflexivo, pruebas de rendimiento conceptual, diagnosis y recursión, cuya misión es garantizar el control del proceso en cuanto a logros y eficiencia.

En la del grupo AG se apuesta por la utilización de dos aparatos "conocidos": Retroproyector y Proyector de diapositivas, se explican sus prestaciones para la didáctica de las matemáticas, así como las "dificultades" de utilización, si no se dispone de un Aula-Taller de Matemáticas, adecuada, de la cual se describe como prepararla. A continuación se describen los materiales necesarios para confeccionar transparencias y las técnicas de creación de las mismas. Para terminar la exposición con un ejemplo de utilización para el tema de funciones (2º B.U.P.). Además, puesto que los autores apuestan por el uso sistemático de este material, aparece la lista de temas que ellos mismos tienen preparados con él.

El trabajo de Julio Sancho, se centra en dos aspectos:

—el interés de la historia de las matemáticas en el análisis didáctico de las dificultades de su aprendizaje, y
—el papel de la historia a la hora de diseñar actividades para la enseñanza de las matemáticas.

Y sobre ellos aborda "casos históricos":

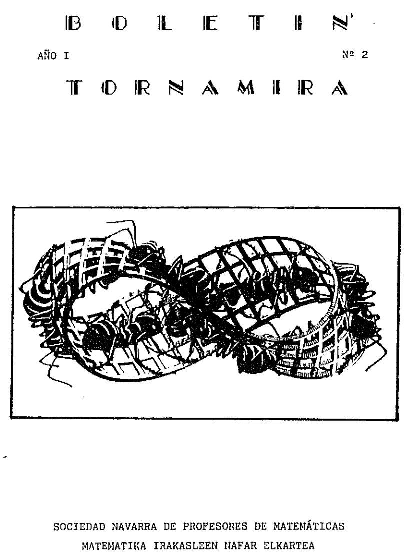
—el de la teoría de probabilidades, lo que le sucedió a D'Alambert
—Los obstáculos, que oculta habitualmente la presentación axiomática: ontogenéticos, didácticos, culturales y epistemológicos
—la comprensión de los números negativos, tema estudiado por G. Glaeser, las dificultades para justificar la "regla de los signos"
—La noción de límite, fundamentado con los estudios, parciales, de A. Sierpinska sobre los obstáculos de los tipos antes citados (no olvidemos que Anna es discípula, de Brousseau).

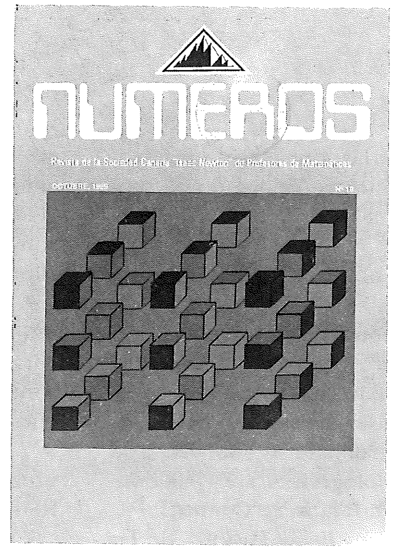
Para concluir se apuesta por conocer un tipo de historia de las matemáticas, hasta ahora poco desarrollada aún: la de los pequeños pasos dados en contextos concretos.

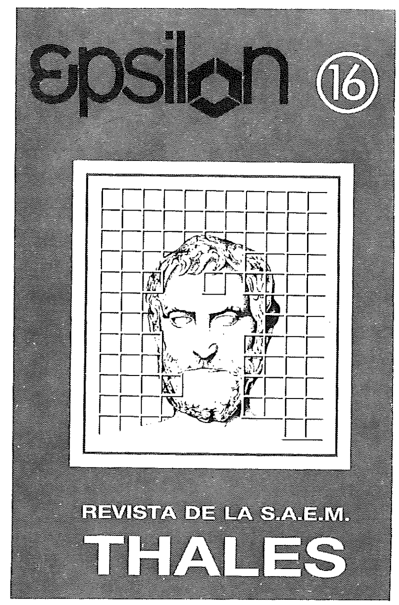
José Colera declara que, como se pretende que lo que el alumno aprende sea útil, formativo y placentero, el estudio de la estadística y del azar sale claramente favorecido. Pasa a proponer una manera de abordar el estudio de la estadística descriptiva, a través de tablas y gráficas, en la que el estudio de los parámetros estadísticos parta de meditar sobre qué se quiere medir para que se vaya adquiriendo el sentido poco a poco. Añadiendo a ello un estudio intuitivo de las distribuciones bidimensionales. Sobre Probabilidad plantea el estudio a través de situaciones, y juegos en los que se llegue a obtener las leyes del azar, en particular la ley de los grandes números. Pasando posteriormente al cálculo y a la experimentación de situaciones de probabilidad condicionada y compuesta.

Luis Rico intenta analizar y solicita la reflexión de todos sobre el papel que las disciplinas tradicionales pueden y deben desempeñar en un sistema de educación obligatoria hasta los 16 años. En la segunda parte de su trabajo analiza con profundidad uno de los tópicos matemáticos más olvidados: Estimación. Sobre ella dice: "la Estimación exige y necesita un amplio desarrollo de habilidades a lo largo de un intervalo considerable de tiempo, por ello no debe singularizarse en uno o dos lecciones, sino tratarlo con todos aquellos tópicos que lo permitan".

Florencio Villarroya
S.A.P.M. "P.S. Ciruelo"







La redacción de "suma" quiere iniciar una subsección dentro de la información de libros y revistas destinada a dar a conocer todas las publicaciones de educación matemática que desde los centros de profesores, sociedades o similares vienen editándose.

Quiénes deseen colaborar en esta tarea deben enviar la infornación y dos ejemplares de la publicación a:

Santiago Fernández
COP – PAT Txorierri
Plza. Aketxe, s/n – Leioa
VIZCAYA

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Suscripción

Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envie, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).** Particulares: 2.500 ptas. Centros: 3.000 ptas. Europa: $25 Resto del mundo: $35. **Los números atrasados, al precio de 1000 ptas. más gastos de envío.** La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Nombre y Apellidos: ______________________________

C./Plza./Avda.: ______________________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

DNI/CIF: ______________ Nivel educativo ❐ E.G.B. ❐ B.U.P. ❐ F.P. ❐ Centro Prof. ❐ E.U.F.P.

Firmado: ______________________ Fecha: __________

❐ Renovación Firma:

❐ Primera suscripción

❐ He sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número ________ inclusive

Cuyo importe haré efectivo mediahte:

❐ Cheque bancario adjunto

❐ Domiciliación bancaria

❐ Giro Postal Nº_______ Fecha __________

❐ Contra reembolso

❐ Transferencia a: c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada.
ó: c.c. 007.01.289530, Caja General de Ahorros. Urb. Camino de Ronda, Granada

Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

C/Plz./Avd.: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Apdo. 1017

18080 GRANADA

ESPAÑA

Agradeceríamos la reseña de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada, para enviarle información sobre la presente publicación. Gracias.

Enviamos información de SUMA a:

Nombre y Apellidos: ______________________________

C./Plz./Avda.: ______________________ C.P. __________

Población: ______________________ Provincia: __________

Este envío es por sugerencia de:

Nombre y apellidos: ______________________________

C./Plz./Avda. ______________________________

Población: ______________________ C.P. __________

Provincia: ______________________ Un saludo

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa,* etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).

Título: (el que corresponda).

Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

Número: (el que corresponda, subrayado).

Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA

Con la colaboración de la

CAJA GENERAL DE AHORROS
DE GRANADA