Los cambios de escala y el Cálculo Gráfico

Victor Arenzana Hernández
Pedro Buera Pérez
Luisa Rodríguez Sol

1. Introducción

Hoy en día las matemáticas que se imparten en la enseñanza secundaria tienen, en gran medida, un carácter fundamentalmente analítico. Esta es una de las causas por las que nuestros alumnos son capaces de resolver determinados problemas y salvar dificultades mediante procesos mecánicos cuya justificación matemática no conocen plenamente y no tienen, por consiguiente, una representación precisa del problema que tratan. Hay que tener en cuenta que muchos de los alumnos buscan "recetas" que salven los escollos que se les plantean sin profundizar realmente en el problema propuesto y así vemos, por ejemplo, cómo ante un problema de optimación, la práctica totalidad de los alumnos obtiene la función objetivo, la deriva, la iguala a cero, extrae sus raíces y consigue la solución a la pregunta formulada. Casi ninguno se plantea que estamos buscando el punto de ordenada mayor o menor de la gráfica que representa la función objetivo, y que, por tanto, la "receta" puede no ser válida en muchos casos. Ejemplos semejantes a éste los encontramos muy a menudo en el desarrollo cotidiano de nuestra actividad docente y no merece la pena insistir sobre ellos.

Cuando analizamos este tipo de dificultades, la primera observación que podemos hacer al tipo de enseñanza que, por lo general, se imparte, es el poco peso, en relación a su importancia, que tiene el cálculo gráfico en nuestras explicaciones. Nosotros pensamos que una mayor utilización y desarrollo del cálculo gráfico y sus aplicaciones ayudaría a nuestros alumnos a comprender realmente lo que están haciendo y les permitiría a la vez obtener una mayor cantidad de recursos a la hora de enfrentarse a cualquier dificultad matemática. Además opinamos que una mayor dedicación al estudio de resoluciones gráficas de diferentes problemas no supone un esfuerzo de comprensión excesivo sino todo lo contrario: un alumno de enseñanzas medias está más preparado mentalmente para comprender, resolver y, sobre todo, discutir y analizar las diferentes posibilidades de un problema desde un punto de vista gráfico que analítico.

El cálculo gráfico fue usado con gran generalidad a finales del siglo XIX y comienzos de este siglo, como lo prueba la gran cantidad de obras que sobre este tema se publicaron en esa época. Las Instituciones docentes más prestigiosas se preocuparon de estos temas y así vemos como, por ejemplo, en 1918 sale a la luz la obra **Cours de Geometrie pure et apliqué de l'Ecole Polytechnique,** de Maurice D'Ocagne (1862-1938), que sirvió de texto en la Escuela Politécnica francesa. Esta materia cayó en desuso, desde el punto de vista de la investigación, a mediados del siglo actual, como lo hizo la propia geometría, pero su estudio sigue siendo fuente de inspiración y estímulo motivador para numerosas cuestiones matemáticas. Hoy en día, muchas profesiones de carácter técnico siguen utilizando métodos de cálculo gráfico lo que prueba el aprecio y arraigo que siguen teniendo estos procedimientos, siempre más rápidos que los complicados cálculos numéricos, dentro del desarrollo normal de la actividad laboral.

2. Una primera reflexión sobre el cambio de variable

Un recurso que resuelve muchas dificultades matemáticas (cálculo de las raíces de una ecuación bicuadrada, obtención de la primitiva de una función, etc...), y que nosotros, como profesores, aconsejamos numerosas veces a nuestros alumnos, es el llamado "cambio de variable". La aplicación de este "truco" se realiza desde un punto de vista exclusivamente algebraico, pero la expresión de esta simple operación de forma gráfica abre una nueva perspectiva y asoma la inteligencia del alumno a una serie de recursos potentes que simplifican cálculos más complicados.

Un par de ejemplos ayudarán a comprenderlo que queremos decir:

Ejemplo 1: Si en la función $y = \frac{1}{4} x^2$ se realiza el cambio de variable

$$x' = x^2 \qquad y' = y$$

la función resultante es: $y' = \frac{1}{4} x'$

Si representamos estas dos funciones observamos que la parábola de ecuación $y = (1/4)x^2$ se ha transformado en la recta de ecuación $y' = (1/4)x'$. Esto se debe a que el cambio de variable ha ocasionado un cambio de escala en el eje de abscisas (según la relación $x' = x^2$) lo que ha traido como consecuencia la conversión de la parábola en la recta. La gráfica de $y=(1/4)x^2$, que es una parábola si el eje de abscisas esta dividido según la escala natural, es una recta si en dicho eje hemos cambiado la escala según la relación $x' = x^2$

Por tanto un cambio de variable permitirá transformar curvas de una cierta complejidad en otras más sencillas.

Uno de los ejemplos de cambio de variable más significativos, que el alumno maneja con toda naturalidad, es el utilizado al tratar de resolver las ecuaciones bicuadradas.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ equivale a calcular la intersección de la función $y = x^4 - 4x^2 + 3$ con el eje de abscisas, esto es, resolver el sistema:

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &= x^4 - 4x^2 + 3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

La resolución se hace mediante el cambio de variable:

$$x' = x^2 \qquad y' = y$$

con lo que se obtiene el sistema:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y' &= x'^2 - 4x' + 3 \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

dando lugar a la ecuación de segundo grado

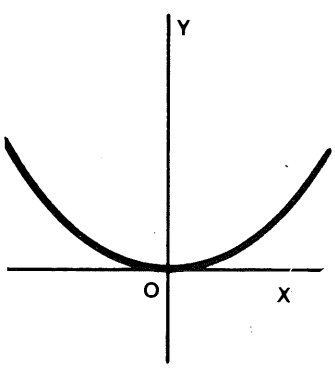
$$x'^2 - 4x' + 3 = 0$$

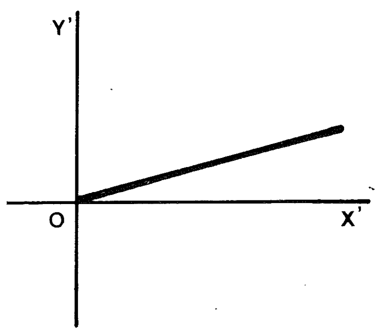
cuyas raíces son 1 y 3

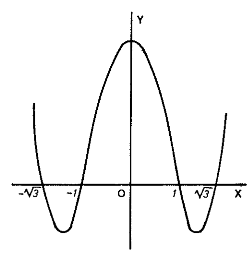
Deshaciendo el cambio de variable se tiene:

$$x = \pm 1 \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

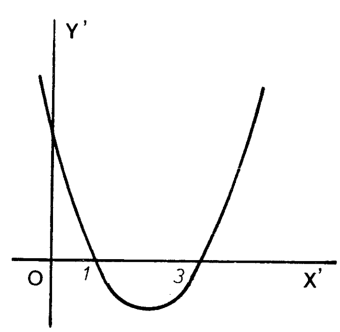
Evidentemente, los sistemas (1) y (2) son distintos y las soluciones de uno no coinciden con las del otro. Gráficamente las soluciones de los sistemas (1) y (2) se obtienen al buscar las abscisas de los puntos de corte de las curvas de ecuaciones $y = x^4 - 4x^2+3$, $y = x'^2-4x'+3$ con el eje de abscisas.







sistema (1)



sistema (2)

La gráfica del sistema (2) es la transformada de la gráfica del sistema (1) cuando se ha efectuado un cambio de escala en el eje de abscisas (de acuerdo con la relación $x' = x^2$). evidentemente la segunda gráfica es mucho más sencilla que la primera y el cálculo de los puntos de corte de esta segunda gráfica con el eje de abscisas no reviste ya ningún problema. Lógicamente, una vez hallados los valores de las abscisas de los puntos de corte en el segundo sistema, será necesario saber que valores son los que les corresponden en el primero, pues la solución buscada son los puntos de corte del primer sistema y no los del segundo.

Los dos últimos ejemplos ponen de manifiesto la importancia del cambio de escala en un sistema de referencia. A lo largo de la historia se han utilizado diferentes transformaciones que permiten simplificar de forma notable problemas de cálculo que, de otra forma resultarían excesivamente complicados. En la actualidad, época en la que los ordenadores se encargan de realizar los cálculos más complicados, estos procedimientos siguen utilizándose en determinadas profesiones para obtener rápidamente resultados aproximados. De todas las transformaciones la más usada es la llamada **escala logarítmica**.

3.- Escala logarítmica. Operaciones con ella.

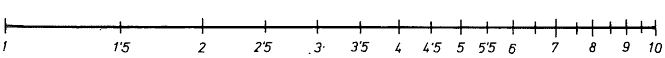
Es la que se obtiene mediante las fórmulas de transformación siguientes:

$$x' = \log x \qquad\qquad y' = \log y$$

o sus equivalentes:

$$x = 10x' \qquad\qquad y = 10y'$$

Para obtener una escala logarítmica basta con representar en una recta log1, log2, log3, ..., marcando dichas divisiones con los números 1, 2, 3, ... respectivamente. De este modo obtendríamos:

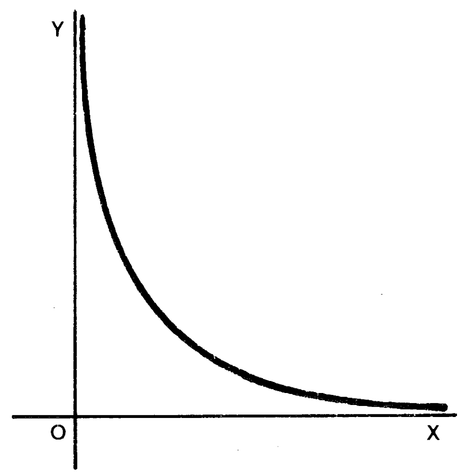


A partir de la primera escala del 1 al 10, se construiría su continuación, del 10 al 100, manteniendo las distancias existentes entre 1, 2, 3, ... para 10, 20, 30,.... respectivamente. Por este procedimiento puede prolongarse la escala del 100 al 1000, del 1000 al 10000, etc.... Siguiendo el mismo criterio tambien pueden obtenerse las divisiones correspondientes a las décimas, centésimas, etc....

Con la escala logarítmica se facilitan las operaciones de multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraer una raiz ya que por las propiedades de los logaritmos, las multiplicaciones se reducen a sumas, las divisiones a restas, las potencias a multiplicaciones y las raices a divisiones. Veamos como pueden realizarse estas operaciones:

3.1 Multiplicación

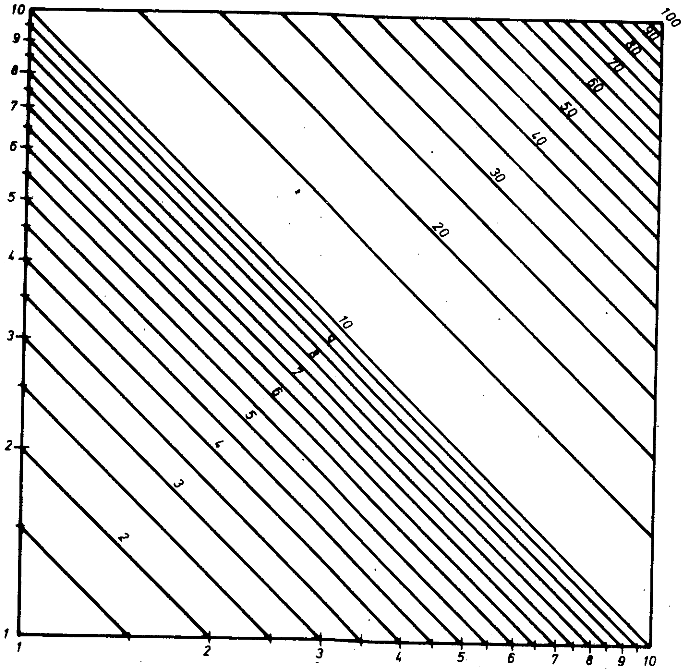
En la escala natural la gráfica de la hipérbola $x \bullet y = k$ con $x>0$ e $y>0$, representa los puntos del plano tales que el producto de sus coordenadas es constante.



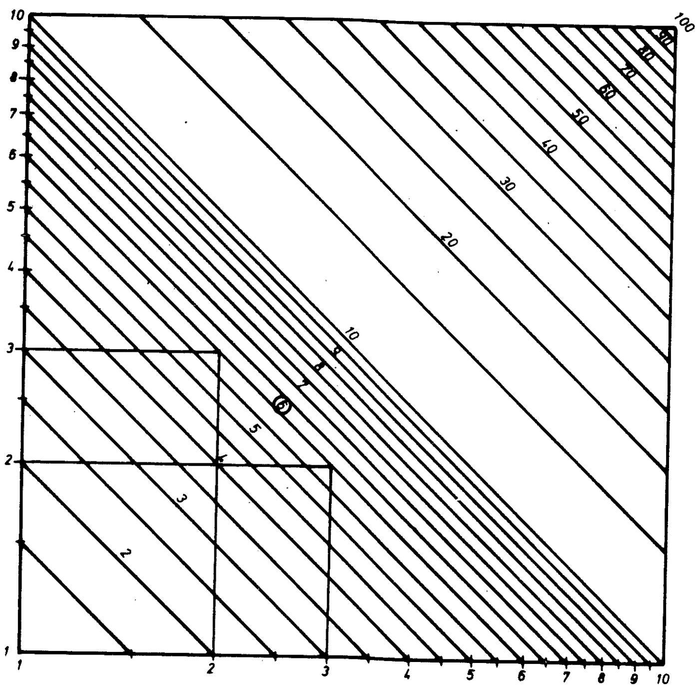
Si en lugar de utilizar la escala natural se trabajase con la escala logarítmica, la gráfica de $xy = k$ sería una recta ya que:

$$x'+y' = \log k \implies y' = -x' + \log k$$

que es la ecuación de una recta que corta, tanto al eje de ordenadas como al de abscisas, en puntos que distan log k unidades del origen. Para diferentes valores de k tendremos las siguientes rectas:



Esta gráfica permite calcular el producto de dos números cualesquiera a y b. Para ello, basta tomar a en el eje de abscisas y b en el de ordenadas (o viceversa); se determinará así el punto (a,b) y la recta que pasa por él será la que dará el producto buscado. En la figura siguiente se muestra como se realizaría 2 • 3.



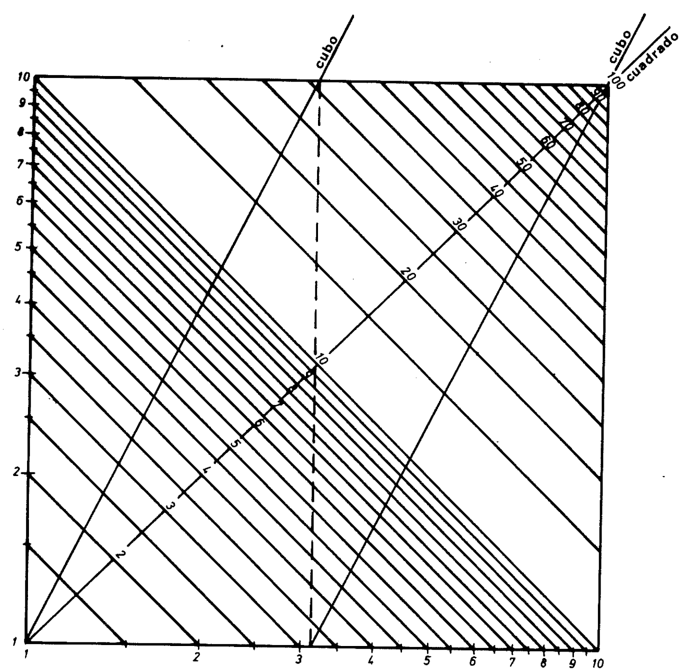
3.2 División

Podemos obtener el resultado de una división utilizando el mismo gráfico ya que, por ser la división la operación inversa de la multiplicación, si queremos realizar la división de **a** entre **b** basta con levantar a partir de b una perpendicular al eje de abscisas hasta encontrar la recta oblicua correspondiente a a. la ordenada del punto de intersección será el cociente.

3.3 Potencia

De acuerdo con lo ya visto, no es muy difícil comprender que para elevar al cuadrado bastaría con trazar la bisectriz del cuadrante. De este modo, para calcular el cuadrado de 3 se traza la perpendicular al eje de abscisas en x=3 y se observa el punto de corte con la bisectriz; este punto pertenece a una de las rectas oblicuas cuyo número ,9, es el resultado buscado.

Para trazar las rectas correspondientes a cualquier potencia an procederemos del siguiente modo: se elige un valor sencillo cualquiera n y se calcula manualmente su potencia an; se traza una perpendicular al eje de abscisas en a hasta cortar a la recta oblicua marcada con a^n. Este punto y el origen determinan la recta correspondiente a a^n. En la figura siguiente se han trazado las rectas correspondientes a los cuadrados y a los cubos.



Si a>2 la recta que define an cortará a la parte superior del cuadrante (caso de la recta de cubos) y en un principio no podremos calcular el valor de an siempre y cuando n esté a la derecha de la vertical que define el punto de corte de la recta con la parte superior del cuadrante. En este caso hay dos posibles soluciones: prolongar los ejes del cuadrante o trazar una vertical por el punto de corte hasta el eje horizontal inferior del cuadrante y, a partir de este último punto de corte, trazar una recta paralela a la anterior recta de an. Siempre que sea necesario utilizar esta última recta, se multiplicará el resultado obtenido por 10

4.- Abacos

Los cuadrantes que hemos dibujado anteriormente reciben el nombre de ábacos, pero es evidente que la utilización de dichos ábacos para multiplicar, dividir o bien obtener potencias no resultan muy prácticos porque existen otros métodos más cómodos. Sin embargo todavía se utilizan cuando es necesario combinar un conjunto de operaciones para obtener un determinado valor. En esta situación es posible construir un ábaco que permita obtener directamente el resultado final a partir de unos valores iniciales. A continuación presentamos dos ábacos de este tipo:

4.1 Abaco para calcular el volumen de una esfera

En este ábaco se han utilizado escalas logarítmicas en los dos ejes y se puede calcular el volumen de la esfera mediante el siguiente procedimiento:

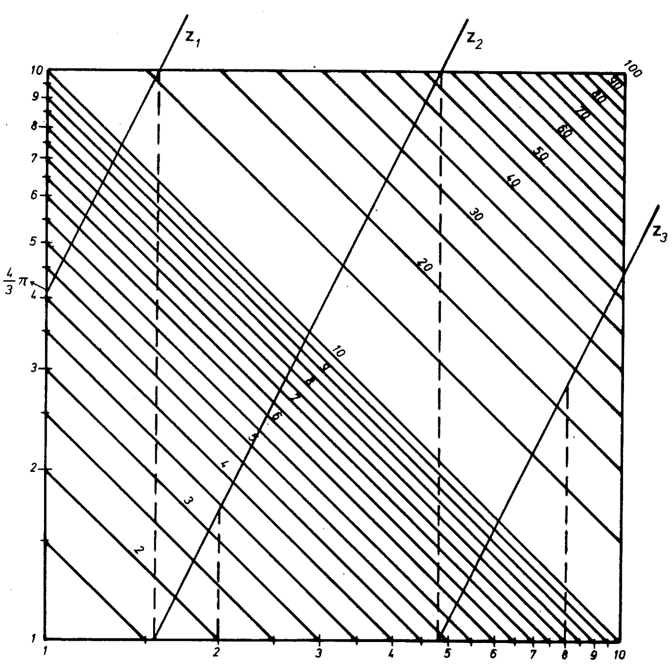
Dado el radio de la esfera r se levanta la perpendicular al eje de abscisas por x=r (fig. A) y se busca el punto donde corta a alguna de las rectas z_1, z_2 o z_3. El número de la recta oblicua multiplicado por 1, 10 o 100 según que el corte sea con la recta z_1, z_2 o z_3 respectivamente, dará el volumen de la esfera.

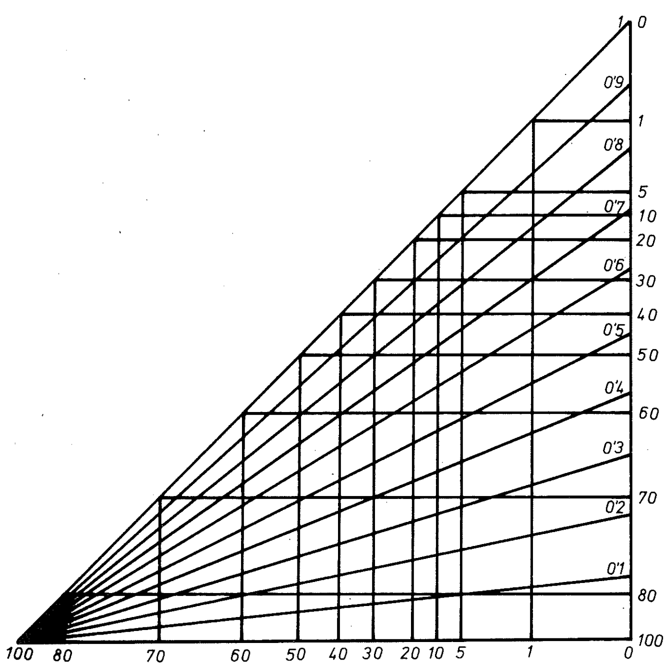
Así para r=2 resulta un volumen aproximado de 33'5 y para r=8 se obtiene 2150.

Las rectas z_1, z_2 y z_3 son paralelas a la rectade cubos, tomándose la primera de ellas a partir del valor $(4/3)\pi$ en el eje vertical

4.2 Abaco para calcular la probabilidad de vida

El siguiente ábaco calcula la probabilidad de que una persona de edad a alcance una edad a'. En el eje horizontal se indica la edad actual y en el vertical la edad que se pretende alcanzar. El número de la recta que pasa por (a, a') indica la probabilidad buscada





Este ábaco fue construido por Lalanne a mediados del siglo pasado. Lógicamente para cada población y cada época es necesario variar la distribución de las edades a lo largo de los ejes horizontal y vertical.

Estos ejemplos dan una idea de las posibilidades del cálculo gráfico como instrumento de resolución de diferentes problemas. Otras cuestiones de carácter práctico que se resuelven mediante técnicas gráficas son:

Resolución de ecuaciones algebraicas (Método de Lill)

Cálculo de áreas mediante integración gráfica cuyos fundamentos son la base del funcionamiento del planímetro, aparato utilizado en topografía para medir áreas sobre planos.

Cálculo de longitudes de arco. El mecanismo de algunos curvímetros está inspirado en este tipo de cálculos.

Determinación de fuerzas y momentos que soporta una viga cargada, problema que se plantea numerosas veces en arquitectura.

Integración de ecuaciones diferenciales (Métodos de Massau y Runge)

....

La importancia de estos problemas tendría que conducir a una reconsideración del olvido que han sufrido estos métodos gráficos en la actual enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Los matemáticos a la violeta

Manuel Díaz Castillo

La razón por la que los neoclásicos odiaran la pedantería, como cosa contraria al buen sentido y la naturalidad, puede que estuviera en relación con su confesado amor por la ponderación y el justo punto medio, y que también lo esté con determinados ambientes en los que aquella proliferase muy visiblemente, como la corte, o la propia universidad: cuando se quisiera denunciar el incumplimiento de su primordial función de búsqueda de la verdad, se oiría insistentemente en la Europa ilustrada la acusación de "pédanterie".

Mientras José de Cadalso y Vázquez (1741-1782), perteneciente al ala más avanzada de la intelectualidad de su tiempo escribía *Los eruditos a la violeta*, sostenía en sus tertulias en la Fonda de S. Sebastián que el aristotelismo escolástico sólo se mantenía por pereza intelectual, y defendía, sin duda con vibrante apasionamiento, que la ingente cantidad de obras que contenían saberes prácticos debían ser estudiadas, incluso a escondidas, para elevar nuestro grado de preparación, y para que no nos llamaran "bárbaros" los extranjeros. Muchos sinsabores le produjo su valiente posición, y alguna vez hubo de escuchar de sus superiores, militares y civiles, intimidaciones que le conminaban a ser militar "exclusive", con escarnio para la lengua a quien en cuerpo y alma servía.

Había, sin embargo, modos de allanar las abruptas dificultades que la "prudencia" o la "moderación" aconsejadas oponían a la libre expresión. La obra que comentamos es un intento de fuga de las cárceles que el propio movimiento ilustrado tenía preparadas para los que se excedían en la pretensión o en el tono. El libro tiene un subtítulo aleccionador:

"Curso completo de todas las ciencias. Dividido en siete lecciones para los siete días de la semana. Compuesto por D. Joseph Vázquez, quien lo publica en obsequio de los que pretenden saber mucho estudiando poco".

El catedrático a la violeta que escribe el curso para sus escolariegos lectores dedica la lección del sábado a la matemática. Para empezar censura el dómine a la disciplina sus defectos.

En primer lugar, la dificultad de sus conceptos y términos, "infinidad de avechuchos con nombres todos durísimos de pelar". A pesar de ello, el violeto no tendrá que angustiarse con tal de pronunciarlos bien. Algo después protestarán con grave dignidad de que esta ciencia consista en líneas, letras y números que podrían distraer, por sí solos, al joven pedante de la sagrada preocupación por su nuevo peinado. La prolijidad de cualquier tratado matemático es algo tan inaguantable que es mejor pasarla por alto para fijar la atención en lo que verdaderamente atrae: las aplicaciones prácticas de la disciplina.

Entre estas, pueden citarse:

"Geometría especulativa y práctica, Artillería, Fortificación, Náutica, Arquitectura civil, Astronomía".

Hay, naturalmente, otros apartados rincones de la matemática, como esa

"cosa que llaman álgebra y es una algarabía de Luzbel, con crucecitas y rayitas dobles y sencillas, y aspas, y letras, y números y puntos..." cuyo estudio debe ser sinceramente despreciado porque pide al menos "aplicación, constancia y método", que son tan enemigas