La sección áurea y la construcción de polígonos regulares

Luis Hortelano Martínez

Introducción

De entre la infinita variedad de posibilidades que la Geometría ofrece, desde el punto de vista didáctico, consideraremos en este artículo la construcción de polígonos con regla y compás, campo de trabajo donde tienen cabida la investigación personal, el manejo de instrumentos geométricos, el rigor matemático, la intuición, la visión espacial, y un sinfín de aspectos del máximo interés didáctico. De entre ellos quizá destacaríamos la posibilidad de actuar, de manipular y por consiguiente construir figuras, descubrir propiedades y relaciones entre sus elementos componentes. Pero no haremos un enfoque clásico de esta cuestión, ni abordaremos la construcción de todos los polígonos posibles. Presentaremos una proporción famosa, aunque un tanto olvidada, y, como consecuencia más o menos inmediata de algunas de sus propiedades, obtendremos una línea de trabajo para la construcción de determinados polígonos.

La proporción a que aludimos, sección áurea o divina proporción, que ya aparece en el Timeo de Platón y en el libro VI de los "elementos" de Euclides, ha recibido distintas denominaciones a lo largo de la historia y numerosos elogios, por ejemplo Kepler la califica de "joya preciosa" y "tesoro de la Geometría". Y no es para menos pues tanto ella como su razón, número de oro o áureo, aparecen abundantemente en la naturaleza, el propio cuerpo humano, el arte, etc. Pero no es nuestro propósito ocuparnos en este artículo de la presencia del número y sección áureos en nuestro entorno, cuestión por otra parte estudiada aunque fuente inagotable de sorpresas, sino de cómo utilizarlos para una tarea concreta ya apuntada.

Aunque ya se ha mencionado es importante señalar de nuevo que, en todo lo que sucede a esta introducción, nos referiremos siempre al trabajo con regla y compás clásicos.

Por otra parte el contenido del artículo, y su posible aplicación didáctica, requieren de unos conocimientos previos si bien no demasiado profundos. Esto hace que sea adecuado para los últimos tramos de la Enseñanza Media, o niveles superiores. En concreto ha sido compuesto pensando en alumnos de las E.E.U.U. de Magisterio.

La Sección Aurea

Los textos que se refieren a la sección áurea suelen presentarla de dos formas. En la primera de ellas se hace una introducción directa del modo siguiente:

"Dadas tres cantidades a, b y c, de modo que a<b<c y a+b=c, diremos que están en la divina proporción si el total (c) es a la parte mayor (b), como la parte mayor (b) es a la parte menor (a)", es decir, si:

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$$

En la segunda introducción la sección áurea se obtiene como la forma más sencilla y directa posible, más de acuerdo con la ley de economía de conceptos de William D'Ockam, de dividir asimétricamente un segmento. Así considerando el segmento de la fig. 1

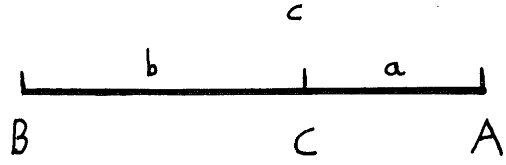


Figura 1

todas las razones que pueden establecerse entre a, b y c son:

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a}{c} \quad \frac{b}{a} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{c}{a} \quad \frac{c}{b}$$

que igualadas dos a dos nos dan 15 proporciones posibles, de las que, eliminando casos iguales así como las que no cumplen la condición de asimetría de la definición, y reduciendo las de razones inversas, se llega a la sección áurea tal y como se presentó directamente.

Pero en busca de un conocimiento algo mayor de la divina proporción veamos cuál es su razón. Partiendo pues de:

$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ llegamos a $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$ y de ahí:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a};$$

haciendo entonces x=b/a y sustituyendo tendremos que $x^2 - x - 1 = 0$, de donde resultan las raíces:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618... \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0'618...$$

Nos quedamos con la solución positiva a la que llamaremos Φ o número de oro, es decir, c/b = b/a = Φ = 1'618... (número irracional euclidiano), pues la raíz negativa no haría, en la segunda introducción de la sección áurea, que el punto de división del segmento cayera dentro del mismo. Aunque algunos autores consideran para Φ el valor 0'618...

La sección áurea y el número de oro en la naturaleza, la ciencia, el arte, etc, cuestiones de las que ya dijimos que no vamos a ocuparnos, proporcionan sin embargo un amplio campo de trabajo didáctico nada desdeñable y que resulta muy motivador (véase por ejemplo el vídeo "Donald en el país de las Matemágicas", ya tratado en el nº 1 de esta propia revista).

Algunas construcciones gráficas de interés

Desde el punto de vista de nuestro artículo, lo más interesante de la sección áurea y el número de oro es que ambos pueden obtenerse con regla y compás. Veamos pues algunas construcciones interesantes, pero prescindiendo de las demostraciones correspondientes dada su sencillez y por no alargar excesivamente el artículo.

a) Obtención gráfica del número áureo:

La expresión $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

nos da la clave, pues construyendo el triángulo rectángulo de catetos 1 y 2 (fig 2), la hipotenusa será √5. Observando entonces la figura 2, CB medirá 1+√5 y por tanto la mitad de CB medirá Φ.

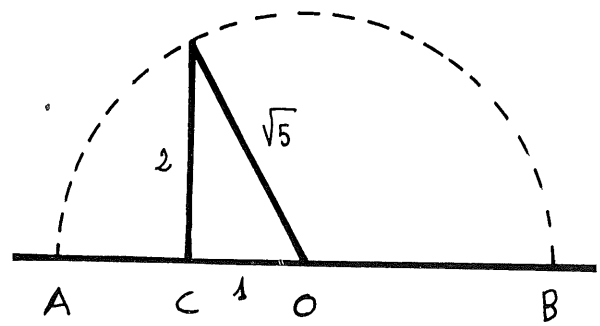


Figura 2

b) Obtención gráfica de la sección áurea de un segmento:

Para dividir el segmento AB según la divina proporción (fig. 3) levantamos por B perpendicularmente un segmento que mida la mitad de AB; unimos A con C, y trazamos el arco de circunferencia centrada en C y de radio CB que dará con AC el punto de corte D. Trazando ahora la circunferencia centrada en A y con radio AD se obtiene con AB el punto de corte E, punto que divide a AB según la sección áurea.

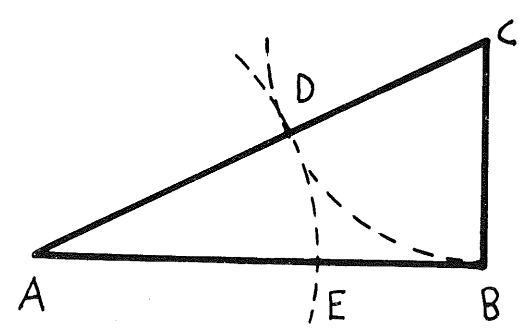


Figura 3

c) Obtención gráfica del segmento total y de la parte menor de su sección áurea, conocida la parte mayor de dicha sección:

Se construye un cuadrado de lado la parte mayor de la sección áurea (AB en la figura 4) de un determinado segmento. Desde la mitad de AB se traza la circunferencia de radio OC, y se obtiene con la prolongación de AB el punto de corte E. De esta forma AE queda dividido por B según la divina proporción, por lo que AE es el segmento total buscado y BE la parte menor de su sección áurea.

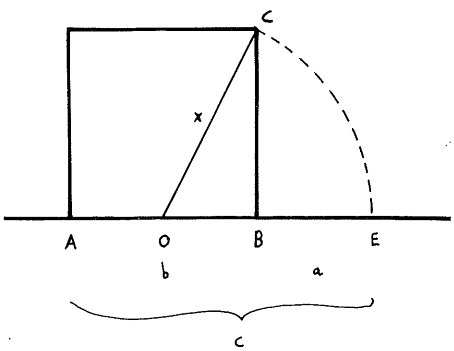


Figura 4

d) Obtención gráfica del segmento total y de la parte mayor de su sección áurea, conocida la parte menor de dicha sección:

Según la figura 5, si AB es la parte menor de una sección áurea, levantamos perpendicularmente por B un segmento BC cuya medida sea la mitad de AB. Trazamos las circunferencias centradas en B y A, con radios BC y AC respectivamente, y obtenemos los puntos de corte D, F y E. De esta forma DE queda dividido por F según la divina proporción; lo que supone que, siendo FE=AB la parte menor de la sección áurea, DF será la mayor y DE el segmento total.

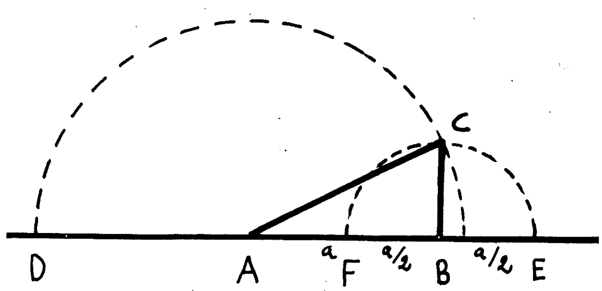


Figura 5

La sección áurea y la construcción del pentágono regular y el pentagrama

El pentagrama, símbolo pitagórico, y el pentágono regular, que podemos encontrar, además de en la Geometría, en los sitios más insospechados como por ejemplo: la forma de la petunia, la estrella de mar, algún tipo de jazmín, en la disposición espacial de los elementos más simples de los seres vivos (nunca en los sistemas físico-químicos inertes), en la for de cera, etc., etc., etc., son además los polígonos regulares que mayor cantidad de propiedades áureas presentan. Veamos una de ellas, de la que derivan casi todas las demás, y que nos permitirá una sencilla construcción de ambos: "En un pentágono regular las diagonales que se cortan lo hacen según la sección áurea, y además la parte mayor de dicha sección es igual al lado del pentágono"[2].

En efecto, si nos fijamos en la figura 6, los triángulos ABE y OCE son semejantes y por tanto CE/BE=OE/AE, de donde OE/AE=1, y de ahí OE=AE=lado del pentágono.

Por otro lado los triángulos ABO y OCE son también semejantes, y por consiguiente CE/BA=OE/AO de donde BE/OE=OE/BO, lo que significa que la diagonal queda dividida, por el punto de corte, según la sección áurea.

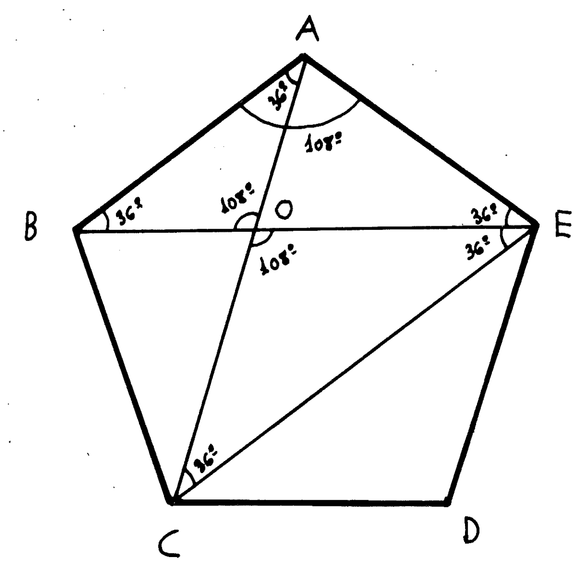


Figura 6

Esta sencilla propiedad nos va a permitir una construcción, igualmente fácil, del pentágono regular. Dado el lado del pentágono (trazo continuo en la figura 7), construimos, tal como se ha anticipado en este mismo artículo, el segmento total cuya parte mayor de su sección áurea sea el lado del pentágono dado. Ese segmento total será la diagonal del pentágono, según la propiedad vista. A continuación trazamos desde B una circunferencia de radio el lado, y desde A otra de radio la diagonal, obteniendo un punto de corte C que será un vértice del pentágono regular. Reiteramos el procedimiento ahora sobre el lado BC y posteriormente sobre CD, y la construcción del pentágono regular quedará conseguida.

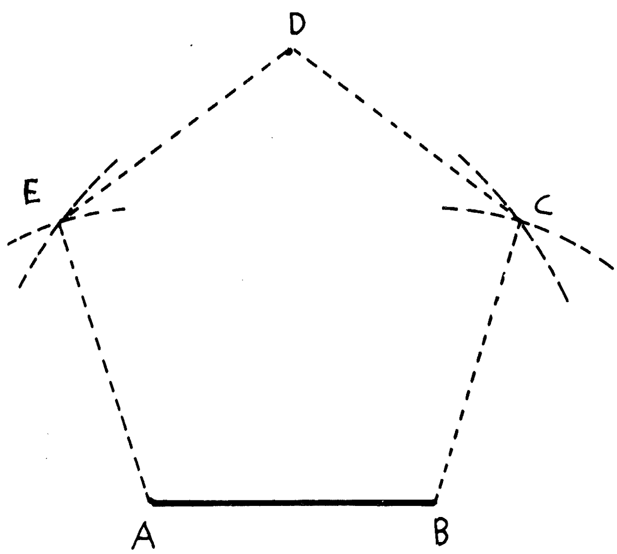


Figura 7

La construcción del pentagrama podría hacerse fácilmente a partir de la del pentágono regular: dado el lado del pentagrama, lo dividiríamos según la sección áurea y la parte mayor sería el lado de un pentágono regular que tendría como diagonal al lado del pentagrama; construiríamos ese pentágono regular y uniendo los vértices dos a dos conseguiríamos el pentagrama buscado (figura 8). Sin embargo también es un buen ejercicio intentar la construcción del pentagrama, a partir de un lado dado, usando la sección áurea pero sin realizar previamente el pentágono regular; para ello basta con reflexionar sobre la figura 8, y seguir procedimientos similares a los descritos en la obtención del pentágono regular.

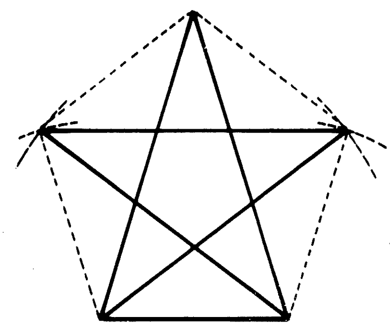


Figura 8

La sección áurea y la inscripción-circunscripción de polígonos regulares en circunferencias dadas

Si tenemos en cuenta los polígonos regulares que pueden inscribirse o circunscribirse, con regla y compás clásicos, en una circunferencia de radio dado (que según el teorema de Gauss son los de lados 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24,...); y consideramos por ejemplo hasta el de 12 lados, hallando la relación de dependencia entre el lado del polígono en cuestión (L), el radio de la circunferencia inscrita (r), y el de la circunscrita (R), encontramos para el pentágono regular, pentagrama, decágono regular y decagrama, las relaciones que figuran en la tabla de relaciones que figura al final del artículo (habida cuenta de que $\sqrt{5}=2\Phi-1$):

Lo que sugiere, dado que en todas ellas aparece Φ, que en las inscripciones o circunscripciones en circunferencias dadas, de los polígonos que aparecen en la tabla, podrá usarse de un modo u otro la sección áurea. En las relaciones de dependencia de los demás polígonos, hasta el de lado 12, no aparece Φ, por lo que no parece que al menos de un modo directo se pueda trabajar con la sección áurea.

Así pues si se trata de inscribir un decágono en una circunferencia dada, la relación $R=L\Phi$ nos da la idea clave de la solución, pues tomando el radio de la circunferencia y seccionándolo según la divina proporción, la parte mayor de dicha sección será el lado del decágono inscrito.

A partir del decágono inscrito será fácil la inscripción del decagrama (uniendo vértices de tres en tres), del pentágono regular (uniendo vértices de dos en dos), y del pentagrama (uniendo vértices de cuatro en cuatro). Las figuras 10 y 11 ilustran las inscripciones comentadas.

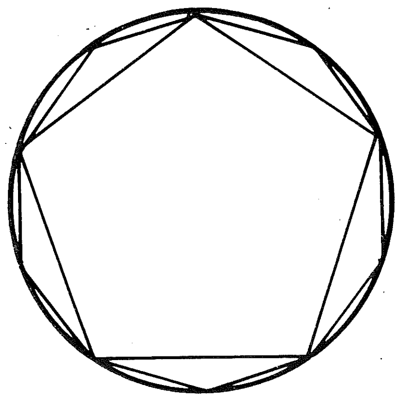


Figura 9

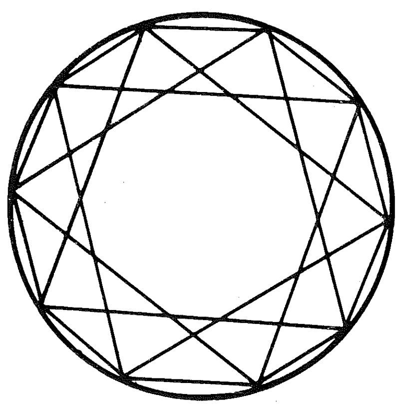
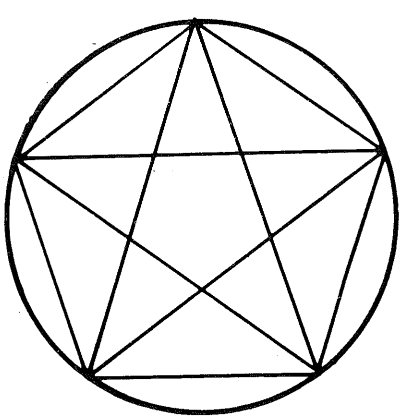


Figura 10



La circunscripción del pentágono y decágono regulares, en una circunferencia dada, podremos conseguirla inmediatamente a partir de los inscritos mediante el trazado e intersección de tangentes. Y desde los circunscritos los estrellados correspondientes uniendo vértices en el orden preciso.

Así, en consecuencia, hemos visto cómo de una sencilla sección áurea hemos derivado la inscripción y circunscripción del pentágono y decágono, regulares y estrellados, en una circunferencia.

La sección áurea y la construcción del decágono regular y el decagrama

Apoyándonos ahora en el epígrafe anterior, si queremos construir un decágono regular, conocido el lado (L), bastará con tener en cuenta la relación $R=L\Phi$, entre el lado del decágono y el radio de la circunferencia circunscrita. Construiremos un segmento tal que la parte mayor de su sección áurea sea L, y ese segmento será el radio de la circunferencia circunscrita al decágono. Inscribiremos éste en ella por el procedimiento ya descrito y el problema estará resuelto.

Si queremos, por otra parte, construir el decagrama, conocido su lado (L), la relación $R=L(\Phi-1)=L\Phi-L$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al decagrama, nos dará también un posibilidad de solución. Construiremos un segmento cuya parte mayor de la sección áurea sea L; quitaremos a este segmento un trozo de longitud L, y el resultante será el radio de la circunferencia circunscrita al decagrama. Inscribiremos el decagrama en ella por los procedimientos indicados en el epígrafe anterior y problema resuelto.

Sección áurea; construcción, inscripción, circunscripción de otros polígonos

Como curiosidad podemos anticipar que el próximo polígono regular en el que aparece Φ, en la relación entre el lado y los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas, es el pentadecágono (15 lados), y en los tres estrellados que se derivan de él. Esto quiere decir que también en ellos podríamos trabajar con la sección áurea. Pero además hay otros polígonos en condiciones similares (relaciones dependientes de Φ).

La línea de trabajo queda pues abierta: como consecuencia del estudio de relaciones y propiedades áureas en los polígonos regulares (cuya abundancia es sorprendente en los tratados hasta ahora), y más concretamente hallando relaciones de dependencia lado-radios, puede investigarse posteriormente sobre la aplicación de la sección áurea en la construcción de polígonos con regla y compás en cada caso. Esa es la idea central de este trabajo, como queda visto, la cual creo que en sí misma es de inmediata aplicacion didáctica; pero quizá, por lo amplia y ambiciosa, permita múltiples interpretaciones y formas de llevarse a cabo. Sugeriremos, finalmente, una forma de comenzar: daremos una plantilla con pentágonos de distintas dimensiones, en los que habrá trazadas, en unos algunas y en otros todas, las diagonales; a partir de ahí todo debe ser medir, experimentar, probar con otros polígonos regulares (inscritos y circunscritos, o no, en circunferencias dadas)...

Referencias bibliográficas

GHYKA, M. *El número de oro. Los ritmos.* Ed. Poseidón. Barcelona, 1984.

GHYKA, M. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Ed. Poseidón. Barcelona, 1983.

PACIOLI, L. *La divina proporción.* Ed. Akal. Madrid, 1987.

PEDOE, D. *La Geometría en el arte.* Ed. Gustavo Gili. Barcelona, 1979.

WARUSFEL, A. *Los números y sus misterios.* Ed. Martínez Roca. Barcelona, 1968.

TABLA DE RELACIONES

	R	r	
PENTAGONO REGULAR	$\frac{L}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})} = \frac{2L}{10}\sqrt{5(2+\phi)}$	$\frac{L}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = \frac{L}{10}\sqrt{5(3+4\phi)}$	
PENTAGRAMA	$\frac{2L}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{L}{\sqrt{2+\phi}}$	$\frac{L}{10}\sqrt{5(5-2\sqrt{5})} = \frac{L}{10}\sqrt{5(7-4\phi)}$	
DECAGONO REGULAR	$\frac{L}{2}(1+\sqrt{5}) = L\phi$	$\frac{L}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{L}{2}\sqrt{3+4\phi}$	
DECAGRAMA	$\frac{L}{2}(\sqrt{5}-1) = L(\phi-1)$	$\frac{L}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{L}{2}\sqrt{7-4\phi}$	