El profesor de Matemáticas y las lógicas del descubrimiento

Antón Labraña Barrero

Cuando narramos hechos, describimos objetos, o explicamos resultados, procuramos hacerlo con orden y coherencia, siguiendo una secuencia lógica.

Pero los acontecimientos sólo pueden ser contemplados linealmente desde una óptica retrospectiva. La realidad resulta plural, sinuosa, zigzageante, y aún contradictoria.

La historia de las Matemáticas nos muestra un mundo de intuiciones, conjeturas, inducciones, deducciones, pruebas, refutaciones, extensiones de conceptos, restricciones de propiedades, teorías convergentes, elementos que se escinden,... En fin, una mezcla de diferentes planteamientos, métodos y enfoques, o sea, de distintas formas de pensar que en mayor o menor medida llenan de contenido a esta ciencia.

¿El posible que las frecuentes faltas de comprensión, los errores, y los propios aciertos de los estudiantes, estén reflejando en cierta medida toda esta diversidad?

¿Hasta qué punto la imposición —sea o no explícita— por parte del profesor de una determinada "forma de pensar", puede limitar las posibilidades de éxito escolar de sus alumnos?

¿Además del propiamente científico, qué interés puede tener un docente en conocer las teorías que tratan de explicar cómo se produce el descubrimiento, el avance, en Matemáticas?

Trataré de aportar algunos ejemplos de clase que representan situaciones frecuentes en la relación alumno/profesor.

1º.- "... En cuanto a nuestras observaciones, no podemos tener la certeza de cuales son las condiciones exactas que regulan las cosas que encontramos en la naturaleza. Las cosas que encontramos son casi siempre muestras. Nosotros pretendemos que las condiciones que cumplen esas muestras sean también cumplidas por las demás entidades que juzgamos similares. Este razonamiento, de lo individual a lo colectivo, es la inducción. La teoría de la inducción es la desesperación de los filósofos, y sin embargo todas nuestras actividades se basan en ella." (1)

Problema: si un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito ¿cuánto tardarán dos grifos?

Imagino que a ningún profesor de 8º de E.G.B. o 1º de B.U.P. o F.P.P., le sorprenderá obtener respuestas de este tipo:

1 grifo tarda — 3 horas
2 grifos tardan — x horas

$$x = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6 \text{ horas}$$

La respuesta puede contribuir a la exasperación del profesor si se produce por enésima vez en poco tiempo. Sin embargo tendremos que aceptar que la similitud de esta situación con aquellas otras de "regla de tres" es evidente. A Whithead probablemente no le extrañaría encontrarse la respuesta anterior al problema.

El profesor no se confunde entre otras cosas, porque formula el problema "a posteriori", o sea, conocedor de la solución y con una clara intencionalidad. Pero el alumno asocia este enunciado a tantos otros resueltos con anterioridad, a veces después de un costoso aprendizaje, en los cuales la susodicha "regla de tres" proporcionaba un éxito inapelable.

Estaríamos ante lo que Brousseau denomina "obstáculo epistemológico", cuyo tratamiento didáctico requiere la toma de conciencia previa por parte del profesor.

2º.- Refiriéndose también a la inducción, pero considerada ahora como método de investigación científica, escribe A.B. Wolfe (1924):

"En primer lugar se observarían y registrarían (todos) los hechos sin seleccionarlos ni hacer conjeturas a priori sobre su relevancia. En segundo lugar se analizarían, compararían y clasificarían los hechos registrados,... En tercer lugar se harían generalizaciones inductivas referentes a las relaciones, clasificatorias o causales, entre ellos. En cuarto lugar las investigaciones subsiguientes serían deductivas tanto como inductivas, haciéndose inferencias a partir de generalizaciones previamente establecidas."(2)

(La palabra "todos" aparece en el texto sin distinción especial, pero es que habla en un caso hipotético de ser capaz de abarcarlos.)

Problema: el profesor pretende llevar al aula una génesis de las razones trigonométricas del ángulo agudo. Propone a sus alumnos que dibujen triángulos de cualquier tamaño y en cualquier posición cuyos ángulos sean de 50, 60 y 70 grados. Los lados serán denominados "a, b y c" opuestos a los ángulos en el orden dado.

Según van terminando salen a la pizarra y cubren una línea de la tabla que en ella figura:

cuadro 1

alumno/a	*a*	*b*	*c*	*a/b*	*a/c*	*b/c*
Elena	6	6'8	7'4	0'882	0'810	0'918
Marisa	4'7	5'2	5'6	0'903	0'839	0'928
José	10	11'3	12'2	0'884	0'819	0'926
Dani	3'8	4'3	4'8	0'883	0'808	0'914

Un breve análisis es suficiente para que se produzca la generalización inductiva que el profesor pretendía:

"Para unos ángulos fijos, las razones entre lados correspondientes son constantes en cualquier triángulo."

Yo practicaba este método con gran ilusión hasta que leí de Car G. Hempel (1966): "Los hechos o hallazgos empíricos, sólo se pueden calificar como lógicamente relevantes o irrelevantes por referencia a una hipótesis dada, y no por referencia a un problema dado".(3)

Ciertamente no había "hipótesis dada" para mis alumnos. A pesar de todo sigo haciéndolo igual ya que no se me ha ocurrido nada mejor para que los estudiantes "lleguen" a la proporcionalidad entre triángulos semejantes.

Por cierto, Hempel califica este método como "concepción inductivista estrecha de la investigación científica".

3º.- "DSETA: Primero, no tengo una ayuda a la investigación del gobierno, como para emprender una extensa observación de los poliedros, ni ayudantes de investigaciones suministrados por el ejército que cuenten el número de vértices, aristas y caras, para compilar tablas con estos datos. Pero, aún cuando dispusiese de ello no tendría paciencia (o interés) para ensayar una fórmula tras otra para comprobar si encaja.

BETA: ¿Entonces qué? ¿Va usted a tumbarse en el sofá y cerrar los ojos, olvidándose de los datos?

DSETA: Exactamente. Necesito una idea para comenzar con ella y no dato alguno.

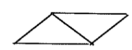
BETA: ¿Y de dónde saca usted su idea?

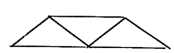
DSETA: Está ya ahí, en nuestra mente, cuando formulamos el problema: de hecho, está en la propia formulación del problema."(4)

Problema: obtener la ley de formulación, o relación entre el número de triángulos que se construyen y el número mínimo de segmentos necesarios.

Leía hace unos meses un artículo muy interesante sobre este tema, y sin que con ello pretenda desmerecer el mismo, ya que su alcance llega mucho más lejos, reproduzco una parte que me llamó especialmente la atención:

¿Cuántos palillos se necesitan para hacer un triángulo equilátero?

¿Y para hacer dos? Con 5 basta. 

¿Y para hacer tres? Con 7 basta. 

¿Y para hacer cuatro, cinco, seis...?

Si se forma una tabla, parece haber una sencilla regularidad:

Núm. de triángulos	1	2	3	4	5	6	...
Núm. de palillos	3	5	7	9	11	13	...

Realmente "formar la tabla" contribuye a observar la regularidad pretendida, otra cosa serán los casos excepcionales, pero lo que me preguntaba era si al sugerir el profesor que el alumno forme la tabla, no estará encauzando excesivamente su pensamiento.

Me decidí a intentarlo con niños de 11 años:

P: ¿Cuál es el polígono más sencillo que conocéis?

R: El triángulo

P: ¿Por qué?

R: Porque tiene sólo tres lados

Les proporcioné **tres** palillos a cada uno y construyeron el triángulo. Continuamos:

P: ¿Cuántos palillos necesitaríais para hacer dos?

R: Cinco, seis,... Discuten un poco y se queda en "cinco"

P: ¿Y para hacer diez?

R: ... (cuchichean)... 20, 21 (Se explican)... si, porque añadiendo dos más conseguimos un nuevo triángulo. Necesitamos dos para cada triángulo y uno más para el primero.

A continuación les proporcioné más palillos.

Efectivamente parecía un caso lo bastante asequible como para que los chicos pudiesen establecer una conjetura deductiva: un experimento mental a partir de una idea que latía "en la propia formulación del problema".

Hacer la tabla y extraer conclusiones de la misma es un proceso totalmente legítimo, aunque suponga el paso de un estadio geométrico a otro aritmético. A veces puede ser un método más potente que los procedimientos directos. En cualquier caso, si los alumnos no progresasen, siempre estaríamos a tiempo de proporcionarles más palillos e ir formando la tabla.

4º.- "... Los hechos no constituyen estímulos externos para la investigación; sólo son tenidos en cuenta si entran en conflicto con alguna expectativa previa, y su importancia se mide por la importancia de la teoría que refutan."[6]

Problema: simplificar la siguiente expresión:

$\sqrt{a^4 + a^2} \bullet \sqrt{a^2 + 1}$

El profesor estará probablemente familiarizado con respuestas del tipo siguiente:

$= (\sqrt{a^4} + \sqrt{a^2}) \bullet (\sqrt{a^2} + 1) =$

$= ({}^2\sqrt{a^{4^2}} + {}^2\sqrt{a^2}) \bullet ({}^2\sqrt{a^2 + 1}) = (a^2 + a) \bullet (a + 1) = \ldots$

En un intento de rectificar, antes de comentar con el alumno o alumnos la solución que habían aportado, "contra-atacaba" de este modo:

Prof.: calcular $\sqrt{9 + 16}$

Alum.: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Prof.: dado que $9 + 16 = 25$, tendríamos $\sqrt{25} =$

Alum.: $= 5$

El "argumento" parecía concluyente: la raiz de un suma no es igual a la suma de la raíces.

Reflexionando sobre el texto que se cita, me ha parecido que esta sencilla forma de proceder dejaba de lado algún aspecto sustancial del aprendizaje. El método del *contra-ejemplo* sin más, dejaba intactas aquellas creencias que habían impulsado al alumno a *tomar la iniciativa* de distribuir la raiz en dos sumandos.

Obviamente la *refutación* resultaba útil, pero ¿por qué no intentar *corroborrar* el supuesto de que $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?, en lugar de contentarse con *falsarlo.*

Al abordar esta última cuestión me he dado cuenta que para mis alumnos la propiedad distributiva es una regla que *obliga* a obtener una segunda parte más facililla, y no una propiedad que *permite* elegir la forma de operar. También pude apreciar que para ellos la obtención de raíces y el cálculo con radicales eran operaciones que poco o nada tenían que ver: "volver a las raíces" nos permitió comprender el porqué se pueden distribuir en factores de los productos, y sin embargo las de las sumas no.

A modo de conclusión

Estas son las primeras notas de un estudio que he emprendido acerca de la *lógica del descubrimiento,* tratando de obtener orientaciones de tipo didáctico.

Con este escrito pretendo llamar la atención de los profesores de Matemáticas de cualquier nivel educativo, ante un hecho que podremos aceptar sin reparos: a lo largo de la historia, los grandes matemáticos no han actuado desde una única "perspectiva verdadera", sino desde ópticas muy diferentes entre si. Incluso algunos de ellos han modificado su posicionamiento a lo largo de sus obras.

De aquí puede pensarse que más que existir un "pensamiento natural", lo natural es que coexistan distintos modos de pensamiento y máxime en un aula con cerca de 40 alumnos de trayectorias escolares diversas.

Comprender esto, y conocer las teorías que tratan de explicar cómo se produce el avance en Matemáticas, será sin duda de gran utilidad para el profesor.

Referencias bibliográficas

1 WITHEHAUD: *Las matemáticas en la historia del pensamiento.* Colección SIGMA. Ed. Grijalbo. Barcelona (1980).

2 A.B. WOLFE: *Funtional Economics.* Ed. R.G.Tugwel, Nueva York (1924).

3 CARL G. HEMPEL: *Filosofía de la ciencia natural.* Ed. Alianza (1981).

4 IMRE LAKATOS: *Pruebas y refutaciones.* Ed. Alianza (1986)

5 E. BORRAS, M. CONTRERAS, F. HERNAN: *Palillos.* Revista Suma nº2 (1989), pags. 51-54.

6 POPPER : *La lógica de la investigación científica,* (1962).