De los números a las letras

Jesús Enfedaque

1.- Introducción

1.- La persistencia de los niños en contar con los dedos o en utilizar estrategias de contar con los dedos, y de usar sólo números positivos a la hora de resolver elementales problemas artiméticos es, probablemente, uno de los más claros síntomas de las dificultades que experimentan los alumnos cuando han de superar el paso a un sistema de representación más abstracto, en el que la potencia de los símbolos aumenta con respecto a la etapa anterior, y en que el grado de abasracción es también más elevado.

Maestros, profesores y también alumnos, reconocen que el principal escollo de las matemáticas para muchos estudiantes suele ser el momento en que las letras comienzan a sustituir a los números, en que los elementos básicos, la materia prima de las matemáticas dejan de ser los objetos, cosas, números,... concretos, para pasar a ocupar su lugar las letras, ya sea como incógnitas, núm,eros generalizados, parámetros o variables.

Este punto crítico para los estudiantes, en nuestro país, está situado en torno a 7º / 8º de EGB y marca, como es lógico, el inicio del estudio del Álgebra elemental en la enseñanza obligatoria.

2.- El Álgebra elemental, probablemente va a constituir una parte importante del nuevo curriculum del período de secundaria obligatoria, no sólo por la importancia de los contenidos y del lenguaje algebráico en sí, tan potente y fructífero en el terreno de las matemáticas y otras disciplinas, sino también por las específicas particularidades y dificultades que conlleva su enseñanza y aprendizaje.

Los contenidos esenciales del algebra elemental son:

—Las variables.

—Las expresiones algebráicas.

—Los cálculos con expresiones algebráicas.

—La resolución de ecuaciones (e inecuaciones) y sistemas de ecuaciones.

Estos contenidos están asociados a unos métodos y reglas algebráicas específicas, que en parte derivan y en parte difieren notablemente de la reglas y métodos aritméticos aprendidos y utilizados por los niños hasta ese momento. Y, tanto contenidos como métodos, tienen una forma específica de manifestarse: el simbolismo algebráico, por un lado simplificador y facilitador de las tareas matemáticas (basta comparar los complicados, tediosos y engorrosos cálculos para resolver antiguamente una ecuación de 2º grado y la sencillez, claridad y rapidez con que la resolvemos hoy gracias al álgebra elemental); pero por otro lado, el simbolismo algebráico es difícil de comprender, de asimilar y de utilizar correctamente, tal como se señala en el párrafo inicial.

Un repaso a la historia

3.- Sobre estas cuestiones puede ser conveniente dar un vistazo a como los conceptos y símbolos algebráicos han ido desarrollándose a lo largo de la historia de las matemáticas. Nos limitaremos, dentro de lo posible, a un punto concreto de los contenidos algebráicos: la resolución de ecuaciones en relación con el simbolismo algebráico en general.

El problema nº 24 del papiro Rhind utiliza para la incógnita la palabra "el montón" y dice así:

"El montón y un séptimo del montón hacen 19".

Se resuelve suponiendo que la solución es: 7; y dado que 7 más 1 séptimo de 7 es igual a 8, es decir: $1(7) + 1/7(7) = 8$ y desde el 8 hasta el 19 se progresa de esta manera: $1(8) + 1(8) + 1/4(8) + 1/8(8) = 8 + 8 + 2 + 1 = 19$, luego la solución es: $1(7) + 1(7) + 1/4(7) + 1/8(7) = 7 + 7/4 + 7/8 = 16 + 1/2 + 1/8$.

En Mesopotamia no se utilizan las letras simbolizando palabras, cosas, etc, sino palabras, cosas en sí mismas. Así, por ejemplo, en el siguiente problema, la incógnita es el lado:

"Hallar el lado de un cuadrado sbaiendo que área menos el lado es igual a 14,30"[1].

La solución que dan es la siguiente: "Toma la mitad de 1, que es 0;30 y multiplica 0;30 por 0;30 que es 0;15, suma este número a 14,30, lo que da 14,30; 15. Este número es el cuadrado de 29,30. Ahora suma 0,30 a 29,30 cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado."

Invitamos al lector a comprobar como esta solución es la expresión algebráica del cálculo de un raíz de la ecuación general $x^2-px=q$, de donde $x = p/2 + \sqrt{p^2/4 + q}$

En otro texto toman la ecuación $11x^2 + 7x = 6;15$ y la resuelven pasándola a la forma canónica $x^2 + px = q$ multiplicando por 11 los dos miembros y resolviendo para $11x$.

En Babilonia ya se conocían las soluciones de las ecuaciones cuadráticas:

$x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$, con p y q positivos, mientras que la ecuación $x^2 + px + q = 0$ no se resolvió hasta la época moderna por tener las raíces negativas.

También resolvían raíces cúbicas y disponían de tablas de $n^3 + n^2$. Las ecuaciones $px^4 + qx^2 = r$ y $px^8 + qx^4$ eran consideradas simples casos particulares de ecuaciones cuadráticas, lo cual muestra el considerable grado de madurez alcanzado por el álgebra en Babilonia.

En Grecia, también el Álgebra alcanzó un importante nivel. El libro II de los Elementols de Euclídes está dedicado enteramente al Álgebra, sólo que mientras que el contenido es algebráico, la forma es... ¡geométrica![2]

Ciertamente, el surgimiento de un simbolismo literal para sustituir a los números en Grecia era bastante difícil debido a la no existencia de símbolos numéricos (distintos del alfabeto griego) y probablemente ésta haya sido la causa principal del desfase entre la aritmética y álgebra griega respecto a la geometría.

Posteriormente Diofanto fue el primer matemático que utilizó un símbolo para representar una incógnita: una abreviatura de la palabra número (arithmos) z un símbolo parecido a la s griega.

Las potencias de la incógnita se representaban así:

Δ^v = cuadrado

K^v = cubo

$\Delta^v\Delta$ = 4ª potencia

$\Delta^v K$ = 5ª potencia

$K^v K$ = 6ª potencia

Los coeficientes numéricos se escribían a continuación de las potencias y el signo menos: . Así por ejemplo:

$3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9$ se escribía:

$\Delta^v\Delta 3 \quad \Delta^v 7 \quad \zeta 8 \quad K^v 5 \quad M \quad 9$

es decir:

$x^4 3 \quad + \quad x^2 7 + \quad x8 \quad - \quad x^3 5$ tº indep. 9

donde M servía para distinguir el término independiente de las incógnitas.

La aritmética de Diofanto está dedicada casi por completo a la búsqueda de las soluciones exactas en ecuaciones determinadas e indeterminadas. Con Diofanto se inicia el simbolismo algebráico, se supera la limitación de las tres dimensiones propias de la geometría, aunque los cálculos son siempre realizados con números concretos, de forma no axiomática; no se calculan todas las soluciones y carece de símbolos para las operaciones y las relaciones.

El Álgebra de Al-Kwarizmi presenta unos problemas más sencillos, es retórica, carece de símbolos, y presenta una resolución exhaustiva de los seis tipos de ecuaciones que se pueden dar considerando las siguientes tres especies:

Cuadrados, raíces y números.

Así:

I: Cuadrados = raíces (no considera la raíz nula).

II: Cuadrados = números.

III: Raíces = números.

IV: Cuadrados y raíces = números.

V: Cuadrados y números = raíces.

VI: Cuadrados = raíces y números.

No considera las raíces negativas, y por consiguiente sólo hay dos raíces si son las dos positivas.

El tipo de solución que aporta Al-Kwarizmi suele ser completando el cuadrado mediante construcción geométrica.

N. Chuquet en 1484 introduce los signos p, m (plus, minus) para las operaciones y R^2, R^3,... para raíces, utiliando el subrayado a modo de paréntesis $R^2\ \underline{235\ m\ 25}$ sería la expresión de $\sqrt{235 - 25}$. Utiliza

[1] ¡Ciudado! los números son babilónicos: notación parcialmente decimal, parcialmente sexagesimal.

[2] Se acompaña en anexo 1 el libro II de los Elementos, extraído de la edición a cargo de David García-Bacca, Universidad Autónoma Nacional de México, 1944. No se han incluído ni las demostraciones, ni el texto griego, ni los comentarios

un cierto simbolismo para las potencias: 12^2 quiere decir $12x^2$, 1^3 quiere decir x^3, pero nunca $2^3 = 8$.

Hacia 1494 la escuela algebrista alemana introduce los actuales símbolos de + y -. La escuela italiana utiliza el igual en palabra: equale, est,... mientras que a la incógnita la denominan la "cosa", abreviadamente co, censo por x^2 (ce), cubo por x^3 (cu), cece es censo de censo: x^4, cecu es censo de cubo: x^6...y las potencias cuyo exponenete es un nº primo se designan por pºrº (primo relato) por x^5, 2º rº (secundo relato) por x^7, 3º rº (terzo relato) por x^{11}...

En 1557 Robert Recorde utiliza el signo = por primera vez. Y el salto definitivo hacia el simbolismo actual lo dan Vieta y Descartes. Vieta[3] utiliza las vocales para las incógnitas y las consonantes para aquellas cantidades que suponemos conocidas, pero no utiliza A^3 ni siquiera A·A·A, sino A cubus ó A quadratus; para la multiplicación: in; para la división la línea de fracción, y para la igualdad, una abreviatura de aequalis.

Descartes, hacia 1637 utiliza por primera vez prácticamente toda la notación actual excepto x·x en vez de x^2 y ∞ en vez del =. Este sistema se generalizó tan sólo al cabo de unos 60 ó 70 años más. Es decir, disponemos de la notación actual desde 1.700 aproximadamente, salvo la convención de considerar constantes a las primeras letras del alfabeto, y variables a las últimas.

4.- Como vemos, la adquisición por la humanidad de la notación simbólica ha sido un proceso mucho más largo, tortuoso y costoso que el de la resolución de ecuaciones. La forma del Álgebra ha ido, en general, siempre por detrás del contenido del Álgebra, y las letras, el uso de las letras en las matemáticas ha seguido una evolución que podríamos, simplicando, resumir en el siguiente proceso:

No utilizan las letras. Uso de palabras: lado, cosa, montón...	→	Uso abreviado de palabras: co, ce, cu, sólo para la incognita.	→	Uso de letras simbolizando incognitas y constantes.

A destacar que sólo hay conciencia explícita del concepto de variable al final de este proceso.

Es importante recalcar la naturaleza convencional del simbolismo algebráico, su alto grado de abstracción, yu las muchas dificultades que la humanidad ha debido superar hasta conseguir el actual sistema simbólico.

La arbitrariedad y alto grado de abstracción implican necesariamente grandes esfuerzos por parte de maestros y profesores para que pueda ser asimilado correctamente.

La investigación educativa en álgebra elemental

5.- Sin embargo, cabría pensar si existe realmente una correlación entre dificultades históricas y dificultades en el aprendizaje del álgebra. Y si no sería posible contrastar estas previsibles dificultades con la investigación educativa actual.

Existe actualmente mucha información proporcionada por numerosos estudios de investigación en el terreno de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra, tanto globales como pormenorizados. Citaremos algunos ejemplos:

Behr (1980), ieran (1981) señalan que, usualmente, los niños ven el signo igual, no como una relación de equivalencia según la cual ambos términos de la ecuación son equivalentes, sino cómo una señal, una orden para realizar algo, aquello que está a la izquierda del signo igual. Para los niños/as a la izquierda del signo igual se hallan las órdenes a ejecutar, a la derecha, el resultado. La prevalencia de la artimética sobre el álgebra ha sido también señalada por Collis (1975) en lo que denomina "aceptación de falta de clausura", por lo que soluciones a un problema como 4h + t no son aceptadas por los alumnos/as, que no asumen el que en un resultado haya una operación sin realizar y necesitan, al estilo aritmético, que haya un único resultado. Así en el citado ejemplo contestarían 4ht ó en 2a + 7b : 9ab, o similares respuestas.

Kieran (1979) con respecto al uso del paréntesis señala que los niños/as suelen eludirlo, acostumbrando a ejecutar las operaciones, bien de izquierda a derecha, tal como están escritas en la ecuación, o bien siguiendo el orden de operaciones que señale el enunciado del problema (si de un problema se

[3] A partir de Vieta, el Álgebra comenzó a ser la ciencia de los cálculos simbólicos, de las transformaciones literales, en constraste con la Aritmética que opera sólo con números concretos.

trata). Otros trabajos de investigación se han realizado en torno al papel de las computadoras y como éstas influirán en la futura enseñanza del Álgebra: ver Parte 4 de The ideas of Algebra, K-12 Yearbook 1988 del NCTM.

Usiskin (1988) señala la relación que existe entre las diversas concepciones del Álgebra y los diferentes usos de las variables en la enseñanza. Según Usiskin, si consideramos al álgebra como una generalización de la Aritmética, entonces las variables son vistas como modelos generalizadores (3 + 5 = 5 + 3) —> (a + b = b + a) y las destrezas algebráicas se concentran en traducir y generalizar diversas relaciones entre números. Si considramos el álgebra como el estudio de ciertos procedimientos para resolver cierta clase de problemas, entonces las variables son vistas como incognitas y las destrezas clave necesarias son simplificar y resolver. Si consideramos el álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, entonces las variables son vistas como argumentos o parámetros (ej: encontrar la ecuación que representa a la línea que pasa por el punto (4,5) y cuya pendiente es 2) y los gráficos mediante ejes coordenados se suelen utilizar para representar esta relación funcional. Finalmente, si consideramos el Álgebra como el estudio de las estructuras (grupos, anillos,...) entonces las variables pueden ser cualquier clase de objetos arbitrarios en una estructura definida por determinadas propiedades.

A. Bell, D. O'Brien, W. Galvin y otros, en torno a The South Nottinghamshire Project han llevado a cabo una serie de trabajos que están centraddos fundamentalmente en las reglas yleyes que rigenlas transformaciones algebráicas y en la resolución de ecuaciones.

6.- Y con respecto al tema que nos ocupa. Kücheman (1978-1981) dentro del Proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), ha estudiado las diversas formas en que los estudiantes usan las letras, administrando un test con 51 apartados a 3.000 alumnos/as de 2º, 3º y 4º de secundaria en Inglaterra (13, 14 y 15 años). Con este estudio estableció la siguiente jerarquía de interpretación de las letras:

1/ Letra evaluada
2/ Letra no usada
3/Letra como objeto
4/Letra como incognita específica
5/Letra como número generalizado
6/Letra como variable.

¿Y en nuestra aulas?

El que esto escribe está realizando un trabajo de investigación en Barcelona centrado en la interrelación entre comprensión conceptual y destrezas procedimentales en Álgebra, particularizando en ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Una parte de este trabajo, de carácter piloto, tiene como objetivo corroborar los resultados de Kücheman (1981) y Booth (1984) en nuestro país. Por ello, para ilustrar las diversas interpretaciones de las letras me referiré a mis propios datos, realizados con un grupo de los cursos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP.

1º.- Letra evaluada: a la letra se le asigna un valor numérico desde el primer momento. Es el caso de:
Si e + f = 8 entonces e + f + g = ... en que el 40% de las respuestas incorrectas fue : 12 (el 8% del total de respuestas), en que los alumnos habían evaluado, a partir de e + f = 8, cada letra por 4.

Otro 10% de las respuestas incorrectas corresponde a una evaluación de la letra según el orden alfabético, dándose además la circunstancia de que un 5% dió para la letra g el valor 7 (catalanoparlantes) y el 5% restante el valor 8 (castellanoparlantes, que cuentan con una letra más: ch).

2º.- Letra no usada: la letra es ignorada, o se reconoce su existencia pero no se le da un significado ni se opera con ella:
n multiplicado por 4 puede ser escrito 4n. Multiplica por 4 la expresión n + 5. Las respuestas 20 y 20 + n, constituyen el 51% de las respuestas incorrectas (20% del total), y es un claro ejemplo de como en la primera respuesta la letra es totalmente ignorada y en la 2ª respuesta, se reconoce su eistencia, pero ni se le da un significado, ni se opera con ella.

3º.- Letra usada como objeto: la letra es vista como una abreviatura de un objeto o como un objeto por sí misma:

Una manzana cuesta 6 pesetas y una pera 8 pesetas. Si m es el nº de manzanas y p es el nº de peras compradas, ¿qué representa la expresión 6m+8p?

El 44% de las respuestas incorrectas (27% del total) respondían: 6 manzanas + 8 peras.

4º.- Letra como incógnita específica: la letra es un nº específico, concreto, aunque desconocido, con el cual es posible oerar directamente:

¿Cuánto es correcta la siguiente expresión?: L+M+N = L+P+N. Subraya la respuesta correcta: Siempre; Nunca; A veces, cuando ....

Un 70% de las respuestas incorrectas (61% del total), señalaron: Nunca, indicando que las letras M y P las veían no como un nº generalizado, sino como un nº concreto específico, que no podría coincidir nunca dado que las letras M y P son diferentes. Investigaciones de autores diversos coinciden en señalar este uso de letras como uso diofántico y el caso siguiente, letra como número generalizado, como letra tipo Vieta, en correspondencia con el desarrollo histórico del Álgebra.

5º.- Letra como número generalizado: en que la letra puede tomar varios valores, más que uno sólo, pero sin llegar a considerarla una variable:

En el ejemplo anterior, puede ser contestado correctamente: A veces, cuando M=P, si el alumno ha adquirido el nivel de comprensión tal que le permite ver las letras como números generalizados.

6º.- Letra como variable: la letra es vista como representando un rango de valores inespecíficos, y a la vez se contempla la existencia de una sistemática relación entre dos conjuntos de valores:

$a=b+3$ ¿Qué le sucede a a si le añadimos 2 a b?
$f=3g+1$ ¿Qué le sucede a f si le añadimos 2 a g?

No es posible contestar correctamente a estos dos apartados sin tener asimilado el concepto de letra como variable, y los resultados correctos fueron de un 33% para el 1º y de tan sólo un 7% para el 2º.

El apartado: un lápiz azul cuesta 5 pesetas y un lápiz rojo 6 pesetas. Compro varios lápices rojos y azules, que cuestan un total de 90 pesetas. Si a es el nº de lápices azules y r es el nº de lápices rojos comprados,.qué puedes escribir sobre a y r? muestra un escalonamiento de las respuestas según los citados niveles:

Letra objeto: responde: a+r=90

Incógnita específica: 1 único par de valores

Número generalizado: 2 ó más pares

Letra como variable: relación correcta entre a y r: 5a + 6r = 90

El trabajo de Küchemann tiene un marco de referencia piagetiano y a través del test, los alumnos quedaban calsificados dentro de 4 niveles de comprensión:

1: por debajo del nivel superior de las operaciones concretas.

2: nivel superior de las oeraciones concretas.

3. nivel inferior de las operaciones formales.

4. nivel superior de las operaciones formales.

Los niveles 1 y 2 de esta clsificación piagetiana se corresonden con los niveles de letras como objeto, no usadas y evaluadas, mientras que los nivel 3 y 4 corresponden a los alumnos que utilizan las letras como incógnitas específicas y a veces como números genralizados y como variables. El nivel 4 se corresponde más particularmente con el uso de las letras como variables.

Los resultados de los alumnos de esta muestra piloto en Barcelona en función de los anteriormente citados niveles de comprensión del test de Küchemann de Álgebra, se muestran en la tabla 1:

TABLA 1

	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Total	
	8	30	8	30	9	33	2	7	27	100
8 EGB	100	9	44	9	28	10	7	2	31	31
	0	0	9	29	12	39	10	32	31	100
1 BUP	0	0	50	10	36	14	34	11	35	35
	0	0	1	3	12	40	17	57	30	100
2 BUP	0	0	6	1	36	14	59	19	34	34
	8	9	18	20	33	38	29	33	88	100
TOTAL	100	9	100	20	100	38	100	33	100	100

nº alumnos	% fila
% columna	% total

Los resultados son elocuentes:

1) 60% de los alumnos de 8º EGB, 29% de 1º de BUP y el 3% de 2º de BUP, no llegan al nivel 3, lo cual supone que no han alcanzado un cierto nivel de pensamiento formal, al menos en lo que respecta al álgebra.

2) Si bien la mayoría de los alumnos de 1º y 2º de BUP superan este nivel 71% (39 + 32) y 97% (40 + 57) respectivamente, con respecto al nivel 4 vemos que el 68% de los de 1º de BUP y el 43% de los de 2º de BUP no han alcanzado aún una correcta comprensión del concepto de variable.

Si tenemos presente que los alumnos de 1º y 2º de BUP son una muestra selectiva de los jóvenes de 15 a 16 años, y que en un futuro próximo todos los jóvenes estarán escolarizados obligatoriamente hasta los 16 años, podemos llegar a la conclusión de que serán muchas las dificultades que los profesores de matemáticas del futuro ciclo de secundaria obligatoria habrán de superar para poder vencer todos los escollos que representa la enseñanza del Álgebra ya en la simple iniciación al simbolismo que la caracteriza.

El proyecto CSMS tuvo su continuación en el SESM Project (Strategies and Errors in Secondary Mayhematics) en el que se prfundizó en algunos de los problemas puestos de manifiesto por el CSMS. Particularmente con respecto al Álgebra y a la cuestión de la notación y al simbolismo algebráico Booth (1984) hace constar explícitamente que los niños:

a/ Tienen dificultad de captar las letras como números generalizados.

b/ Piensan que las letras son más bien entidades que cantidades por lo que les cuesta manejarlas.

c/ Confunden o no distinguen entre las letras que representan los valores o números respecto a la medida o a un objeto y las letras que representan la medida o el objeto mismo.

Señala también que parte de estas dificultades pueden ser debidas al mismo proceso de enseñanza que se desarrolla enla escuela.

Y ... los libros de texto?

7º.- No es momento de hacer un análisis exhaustivo de este último problema, pero un somero repaso a cómo son planteados estas cuestiones por los libros de texto puede ser bastante esclarecedor. Generalmente los libros de texto de 7º de EGB[4] comienzan de forma abrupta el estudio del álgebra mediante un capítulo dedicado a las ecuaciones de primer grado y su resolución. Previamente, absolutamente nada... al menos de forma explícita, porque en un libro de 6º de EGB, de la misma editorial, en la pag. 4, en un ejemplo de producto cartesiano, hay un rosal y un ficus: conjunto P (plantas) y tres macetas: azul, blanca y verde: conjunto M, y

PxM = {(r,a),(r,b),(r,v).(f,a),(f,b),(f,v)} ejemplo en que las letras tienen un uso inequívoco como abreviaturas, es decir, significan objetos.

[4] Matemáticas 7. Ed. Santillana (1983).

En la página 22 (tema: multiplicación de nº naturales) se pone un ejemplo de producto cartesiano (para introducir el concepto de multiplicación) con caminos representados por números y letras, es decir, tanto unos como otros representan objetos, cosas concretas. En la página 23, se presentan las propiedades de la multiplicación de esta manera:

9x8=72 8x9=72

a.b = b.a

Es decir, las mismas letras son, enla página siguinte, números generalizados, y ni una sólo explicación sobre el cambio de significado de las mismas letras.

En la página 70 hablando de fracciones amplificadas y simplificadas se presenta lo siguiente:

$1/2 = 1.2/2.2 = \boxed{\mathbf{2/4}} \leftarrow$ fracciones

$a/b = \boxed{\mathbf{a.n/b.n}} \leftarrow$ amplificadas

$6/15 = 6{:}3/15{:}3 = \boxed{\mathbf{2/5}} \leftarrow$ fracciones

$a/b = \boxed{\mathbf{a{:}n/b{:}n}} \leftarrow$ simplificadas

en donde, las letras no sólo se presentan como números generalizados, sino que además, se opera con ellas. Y también, ...sin ninguna explicación previa!

No sólo estos aspectos constituyen, desde el mismo corazón de la enseñanza, desde la escuela, una fuente de problemas en el aprendizaje del álgebra: como ya he señalado anteriormente, el signo igual, en los mismos libros de texto, es siempre visto como una orden para realizar una operación; rara vez hay ejemplos mostrando el signo igual como el símbolo de una muy especial e importantísima relación: de equivalencia. Sobre el uso del paréntesis, algunos libros de texto (no todos) explican cómo hay que proceder para operar cuando en una expresión aritmética ó algebráica aparecen paréntesis, pero ninguno de los libros que he consultado se plantea el problema de cuándo, y por qué hay que colocar paréntesis a la hora de traducir una frase de lenguaje normal (p. ej: el texto de un problema) a lenguaje aritmético ó algebráico.

Las diferencias entre lenguaje aritmético y algebráico tampoco son tratadas de forma explícita ni tampoco las semejanzas y diferencias entre lenguaje vernacular y lenguaje matemático (en cualquiera de sus variantes).

Los libros de texto explican las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de algunas operaciones, pero no hacen hincapia, p. ej., en la no conmutatividad ni asociatividad de la resta ó la división, lo cual contriburía, si se hiciese, a evitar generalizaciones incorrectas por parte de los alumnos, como por ejemplo, sustraer o dividir siempre el número mayor por el menor.

Otro tanto podríamos decir respecto a las expresiones algebráicas, al cálculo con las mismas.

Los conceptos de ecuación, de ecuación equivalente e inecuación prácticqmente no se trabajan, pues generalmente se presenta la ecuación, se señala que existe una cosa llamada incognita y que para saber cuánto vale hay que resolver la ecuación; generalmente se da un método para resolverla, método que generalmente se enseña desligado de contextos y significados concretos, así como de los conceptos en que se basan los posibles procedimientos.

Algunas conclusiones sobre el Álgebra y su lenguaje

1) El lenguaje algebráico es un lenguaje que tiene sus propias y específicas peculiaridades que le distinguen tanto del lenguaje aritmético cómo del vernacular. Todo lenguaje tiene su propio código, su propia simbología, y no por ello es imposible de asimilar. El código de la circulación para un mismo símbolo, p. ej., 60, tiene al menos 5 significados distintos:

a) Como distancia en la misma dirección que llevamos.

b) Como distancia, girando a la dcha. ó izda., a partir de la dirección que llevamos.

c) Como velocidad que no podemos sobrepasar.

d) Como velocidad que podemos sobrepasar de nuevo.

e) Como velocidad recomendada.

Y ello no impide que millones de ciudadanos de todos los niveles educativos asimilen dicho código y conduzcan correctamente.

2) El Álgebra no consta tan solo de contenidos. Existen también los métodos y la notación y simbolismo algebráico, que merecen una considerable atención ligada ineludiblemente a los contenidos.

3) El actual lenguaje algebráico es una convención arbitraria, nada natural, y que por ello, obliga a una precisa y cuidadosa atención por parte del profesor en la escuela. Sobre el proceso histórico de formación del lenguaje algebráico me complace personalmente recomendar la lectura del capítulo 11 del muy interesante y documentado libro: *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica.* En este capítulo se cita el siguiente párrafo de Koyré:

El pensamiento del aritmético y del algebrista del Renacimiento se mantiene al nivel del gramático, es un pensamiento semiconcreto; se sigue la regla general, pero se opera en casos concretos: palabras ó números. Por ello, la notación expresa de la incognita, introducida por Vieta y perfeccionada por Descartes, señala una etapa decisiva en la historia de la notación y en la historia del pensamiento algebráico mismo. En efecto, relfeja el paso del grado de abstracción del gramático al del lógico puro..."

Es evidente que un paso de tal envergadura no puede esperarse que sea resuelto sobre la base de los proios procesos espontáneos del alumno, y por ello es preciso que el profesor preste el máximo de ayuda pedagógica que pueda proporcionar a sus alumnos.

Algunas cuestiones sobre la actitud del profesor

1) Dada la especial dificultad del Álgebra, es muy importante que el rofesor tenga una idea clara de los niveles concretos de comprensión en que se hallan sus alumnos. Para ello no debe limitarse a corregir exámenes, a constatar resultados incorrectos: debe prestar atención a cómo y por qué actúan de determinada manera los alumnos, a estudiar y analizar sus respuestas, con el fin de ir a las causas de los errores, y poder hacer un aprendizaje significativo y no mecanicista ni memoricista. No solo en Ciencias, también en Matemáticas los alumnos llegan a las aulas cargados de preconceptos y concepciones erróneas adquiridas en la misma escuela, a través de otros profesores (de Ciencias, de Matemáticas...) y es preciso sbaer de donde provienen estos errores, ser conscientes de que en muchos casos es precisa una readaptación ó reeducación algebráica. Esto implica en muchos casos, hacer entrar al alumnno en conflicto con sus ideas anteriores, y a partir de la toma de cociencia de este conflicto, de su discusión abierta, el alumno puede comenzar a ver la necesidad de reordenar, reorganizar y cambiar sus conocimientos previos para asimilar correctamente los nuevos que se le presentan.

2) Como en todo paso a un nivel superior de

abstracción, la vuelta al referente, a lo concreto, a los objetos, números, situación, etc..., de los cuales surge inicialmente un enunciado algebráico, debe realizarse siempre que sea necesario, siempre que se observe la más mínima incompresion por parte del alumno. Dicha vuelta ha de acompañarse siempre de una discusión abieta sobre el significado de los símbolos con respecto al referente de que se trate. En este terreno la utilización de la historia de las matemáticas puede ser de gran ayuda: p. ej., la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición suele presentar ciertas dificultades de comprensión y por tanto de aplicación, para algunos alumnos; sin embargo la 1ª demostración conocida de dicha propiedad, el teorema II.1 de los Elementos de Euclides, nos proporciona, geométricamente, un buen ejemplo que puede ayudar a una correcta comprensión de esta propiedad.

Algunas propuestas sobre el uso de las letras

Sin pretender ser exhaustivos con respecto a toda la problemática que la enseñanza del Álgebra elemental tiene planteada, hay ciertos aspectos que pueden ser de gran ayuda para los profesores de matemáticas de 7º, 8º de EGB y de 1º e incluso de 2º de BUP.

1) Adoptar la interpretación de las letras como nº generalizado desde el primer momento de su aparición. Por ejemplo, en expresiones del tipo x+2=6 los alumnos, y a veces también los profesores, suelen asumir que la x representa un sólo valor. Un enfoque alternativo del tipo: la x puede representar cualquier número, y habrá uno ó varios números que hacen cierta la igualdad dada, y otros que la harán falsa, puede ayudar a solventar el problema. Es asimismo importante presentar entornos y contextos concretos que ayuden a este tipo de enfoques. También es conveniente introducir la idea de que una misma letra representa los mismos valores y que diferentes letras representan los mismos ó diferentes valores.

En cualquier caso la discusión de si una letra representa un objeto, una incognita específica, un nº generalizado ó una variable, dentro de cada contexto concreto, siempre será positiva.

2) Evitar m=nº de manzanas, p=nº de peras, pues ello induce al uso de letras solo como objetos. En el caso de expresiones como: 1 m = 100 cm, difíciles de evitar, una discusión sobre el significado de las letras ayudará a evitar confusiones y malentendidos. Respecto a la no combinabilidad de expresiones como 2a + 7b es conveniente no recurrir a: a=azules y b=blancos. Siempre se puede volver al paso concreto anterior: 2a+7b=a+a+b+b+b+b+b+b+b ó a compara 2a+7b con 7a, 7b, 9a, 9b, 9ab, 10ab,... sustituyendo a y b por diversos pares de valores, y haciendo lo mismo comparando 2a+5a con 7a.

3) Resaltar las semejanzar y diferencias entre el lenguaje artimético y el algebráico:

57 es la suma de 50 + 7, en cambio ab es a.b, un producto. Constatar la diferencia de 3b con 3+b y con 30+b (treinta y b). Además de señalar que no se puede limtar la letra b como si solo puediera representar a números de un solo dígito.

4) Potenciar la legitimidad de respuestas abiertas, indeterminadas. El niño asume a través de la resolución de problemas artiméticos que una respuesta a una operación es 7, no 3+4. Sin embargo 3+4, a+b, 5+a, 3x+2,... pueden y deben ser consideradas respuestas perfectamente correctas.

La enseñanza del álgebra necesita desarrollar otras nuevas alternativas didácticas que ayuden a resolver cuestiones como las referentes a las operaciones aritméticas, algebráicas, el signo igual, el uso del paréntesis, el concepto de ecuación, de ecuación equivalente, transformación de ecuaciones, resolución de las mismas, etc...

El Álgebra es en cierto sentido una generalización de la Aritmética, pero también mucho más que eso; el álgebra proporciona importantes instrumentos intelectuales para resolver problemas que de otra forma serían tediosos y engorrosos; el álgebra elemental es esencial para la comprensión de las estructuras matemáticas, para el dominio del conocimiento general de las matemáticas, y el álgebra elemental en el futuro ciclo de secundaria obligatoria ha de ser esmerada y cuidadosamente enseñada para que pueda ser correctamente asimilada.

Por último, quiero traer aquí una cita sobre la importancia del álgebra, no de un algebrista, ni de un matemático, ni siquiera de un físico, químico, biólogo,... Un escritor, un brillante escritor francés del siglo pasado, Stendhal, escribió en su Autobiografía:

En casa de mi profesor de matemáticas encontré a Euler con su problema acerca de los huevos que la campesina llevaba al mercado... Esto fue para mi un descubrimiento. Comprendí lo que significaba valerse de un arma como el álgebra. Pero ¡demonios! nadie me lo había explicado antes."

Bibliografía

BEHR,M et al. (1980): *How children view the equal sign.* Mathematics Teaching nº 92 13-15.

BOOTH, L.R. (1984): *Algebra: Children's Strategies and Errors. A report of the strategies and errors in Second. Math. Projet.* Nfer-Nelson. Windsor.

COLLIS, K.F. (1975): *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint.* Australian Council for educational research. Melbourne.

DICSON, L. et al. (1984): *Children Learning Mathematics: A Tearcher's guide to recent research.* Holt, Rinehart and Wiston. Londres.

FILLOY,E/ROJANO, T. (1985): *Obstructions to the acquisition of elemetnal algebraic concepts and teaching strategies.* Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematcis Education. Leen Streeflan (Ed). Utrech.

FREUDENTHAL, H. (1974): *Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school.* Educational Studies in Mathematics, 5. (391-412).

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical Phenomelogy of mathematical structures.* Reidel. Dordrecht (Holanda).

HARPER, E. (1980): *The boundary between arithmetic and algebra: conceptual understanding in two language systems.* Int. J. Math. Ed. Sci. Techn. vol 11 nº 2, 237-243.

HART, K. (ed.). (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16.* John Murray. Londres.

HERSCOVICS, N./KIERAN,C. (1980): *Constructing meaning for the concept of equation.* Mathematics Teacher. 73, 572-580.

IRISTONE, F. (1983): *Introducing Algebra.* Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education. Marylin Zweng. (Ed). Birkhauser.

KIERAN,C. (1979): *Children's operational thining within the context of bracketing and the order of operations.* En D. Tall (ed.). Proceedings of third Int. Conference for the PME. Coventry.

KIERAN, C. (1981): *Concepts associated with the equality symbol.* Educational Studies in Mathematics, 12 (317-326).

KIERAN, C. (1985): *The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students.* Proceedings of the Ninth International Conference of the Psychology of Mathematics Education. Leen Streefland (Ed). Utrech.

KÜCHEMANN, D. (1981): *Algebra.* En Hart, K. (Ed) Children's understanding of Mathematics: 11-16. John Murray. Londres.

KÜCHEMANN, D. (1980): *The meanings children give to the letters in generalised Arithmetic.* Cognitive Development Research in Sci. and Math.. The University of Leeds.

PARADIS/MALET. (1984): *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbólica.* ICE de la U. de Barcelona.

USISKIN, Z. (1980): *Conceptions of school algebra and uses of variables.* En Coxford, A.F. (Ed). The ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearboo. NCTM Reston Virginia.

WAGNER, S. (1981): *Conservation of equation and function under transformation of variable.* J. for Research in Mathematical Education. Vol. 12 nº 2.

ANEXO
Libro II de los Elementos de Geometría

Definiciones

D.II.1 De todo paralelogramo rectángulo se dice que está *comprendido* por las dos rectas que comprenden al ángulo recto.

D.II.2 En todo dominio paralelogramo dese el nombre de *gnomo* a uno cualquiera de los dos paralelogramos alrededor del diámetro junto con sus dos complementos

Teorema II.1 (T.D.)

Si dadas dos rectas, se divide a una de ellas en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por tales dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no dividida y por cada una de las rectas parciales.

1.1 Sean A, BG las dos rectas y córtese la BG por dos puntos cualesquiera los D.E. (Hip.)

1.2 Digo que el rectángulo comprendido por las rectas A, BG es igual al comprendido por las A,BD más el comprendido por las A,DE más el por las A,EG. (Tes.)

Teorema II.2 (T.D.)

Si se divide al arbitrio una línea recta el rectángulo comprendido por la recta entera y por cada una de sus partes es igual al cuadrado de la recta entera.

2.1 Divídase, pues, la AB al arbitrio, pongo por caso por el punto G (Hip.)

2.2 Digo que el rectángulo comprendido por las rectas AB, BG junto con el rectángulo comprendido por las BA,AG es igual al cuadrado de la AB.

Teorema II.3 (T.D.)

Si se divide al arbitrio una línea recta, el rectángulo comprendido por la línea entera y por una de sus partes es igual al rectángulo comprendido por las partes de tal línea más el cuadrado de la parte primeramente dicha.

3.1 Divídase, pues, la AB, al arbítrio; pongo por caso por el punto G. (Hip.)

3.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AB,BG es igual al rectángulo comprendido por las AG,GB más el cuadrado de la BG. (Tes.)

Teorema II.4 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes.

4.1 Divídase, pues, la línea recta AB, al arbitrio, por el punto G. (Hip.)

4.2 Digo que el cuadrado de la recta AB es igual a los cuadrados de las AG,GB más el duplo de rectángulo comprendido por las AG,GB. (Tes.)

Teorema II.5 (T.D)

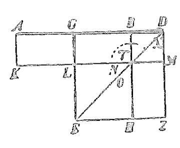
Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta total más el cuadrado de la diferencia entre las dos partes es igual al cuadrado de la mitad de la recta dada.

5.1 Córtese, pues, una recta cualquiera, la AB, en partes iguales por el punto G; y en desiguales por el D.

5.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AD,DB más el cuadrado de GD es igual al cuadrado de GB. (Tes.)

Teorema II.6 (T.D.)

Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida.



6.1 Córtese, pues en dos por el punto G la recta AB y añádasele en recta, la recta BD

6.2 Digo que el rectángulo comprendido por las AD y DB junto con el cuadrado de la GB es igual al cuadrado de la GD (Tes.)

Teorema II.7 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte.

7.1 Córtese, pues, al arbitrio la recta AB por el punto G. (Hip.)

7.2 Digo que los cuadrados de las AB,BG son igual al doble del rectángulo comprendido por las AB,BG más el cuadrado de la GA (Tes.)

Teorema II.8 (T.D.)

Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuádruplo del rectángulo comprendido por la línea entera y por una de sus partes más el cuadrado de la otra parte es igual al cuadrado descrito por la línea entera más la parte dicha tomadas como un solo lado.

8.1 Córtese, pues, al arbitrio la recta AB por el punto G. (Hip.)

8.2 Digo que el cuádruplo del rectángulo comprendido por las rectas AB,BG más el cuadrado de la AG es igual al cuadrado descrito por las AB,BG tomadas como una sola recta.

Teorema II.9 (T.D.)

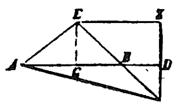
Si se divide una línea recta en parte iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la línea total son el doble del cuadrado de la mitad de la línea entera más el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos clases de cortes.

9.1 Divídase, pues, la recta AB en partes iguales por el punto G y en partes desiguales por el D. (Hip.)

9.2 Digo que los cuadrados de los lados AD,DB son el doble que los cuadrados de los AG,GD.

Teorema II.10 (T.D.)

Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta, el cuadrado de la línea entera mas la añadida, junto con el de la añadida, tomadas de vez, son el doble que el cuadrado descrito por la línea mitad más el cuadrado de la compuesta por la mitad y por la añadida, tomadas como una sola.



10.1 Divídase, pues, la recta AB en dos por el punto G y añádasele en recta la recta BD. (Hip.)

10.2 Digo que los cuadrados de las AD DB son el doble que los cuadrados de las AG.GD. (Tes.)

Teorema II.11 (T.D.)

Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante.

11.1 Sea AB la recta dada (Hip.)

11.2 Hay que dividir la AB de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante. (Tes.)

Teorema II.12 (T.D.)

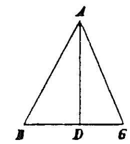
En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso y mayor en el doble del rectángulo comprendido por aquel de los lados del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior que queda entre perpendicular y el ángulo obtuso.

12.1 Sea ABG el triángulo obtusángulo que tiene en BAG el ángulo obtuso y trácese desde el punto B a la recta GA convenientemente prolongada, la perpendicular BD. (Hip.)

12.2 Digo que el cuadrado de BG es igual a los cuadrados de los BA. AG más el duplo del rectángulo comprendido por las rectas GA. AD. (Tes.)

Teorema II.13 (T.D.)

En los triángulos acutángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo, y menor en el duplo del rectángulo comprendido por el lado sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior que queda entre la perpendicular y el ángulo agudo.



13.1 Sea ABG el triángulo acutángulo que tiene el ángulo agudo en B y trácese desde el punto A a la recta BG la perpendicular AD. (Hip.)

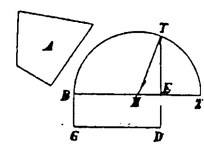
13.2 Digo que el cuadrado de AG es igual a los cuadrados de GB.BA menos el duplo del rectángulo comprendido por los GB.BD.

Teorema II.14 (T.D.)

Construir un cuadrado igual a un dominio rectilíneo dado.

14.1 Sea el dominio rectilíneo dado el A. (Hip.)

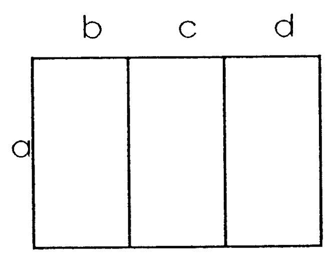
14.2 Hay que construir un cuadrado igual al dominio rectilíneo A. (Tes.)



EUCLIDES

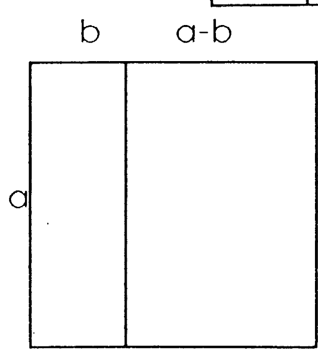
Libro II de Los Elementos de Euclides.

II.1



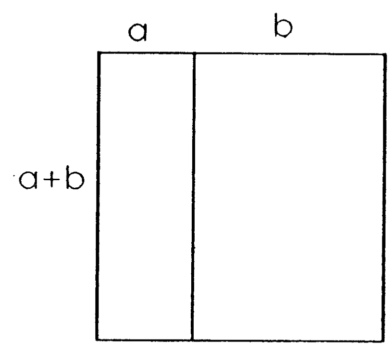
$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$

II.2



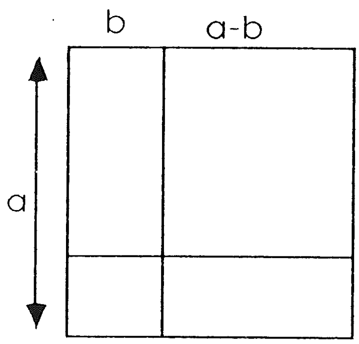
$a^2=ab+a(a-b)$

ó bien:



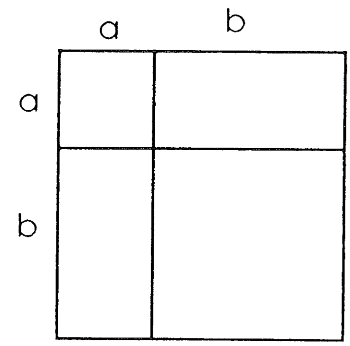
$(a+b)^2=(a+b)a+(a+b)b$

II.3



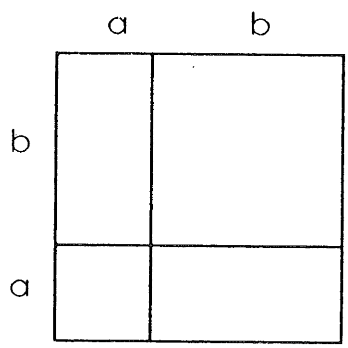
$ab=b(a-b)+b^2$

ó bien:



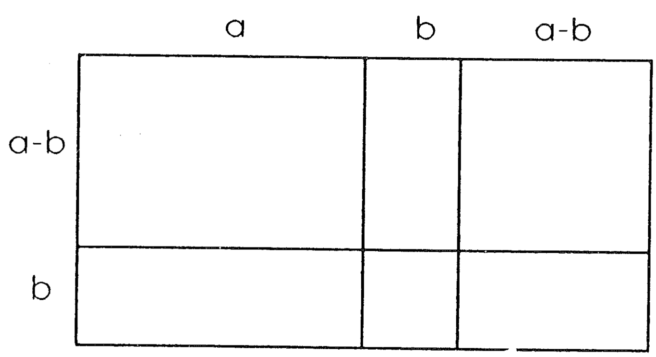
$a(a+b)=a^2+ab.$

II.4



$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

II.5



$(a-b)(a+b)+b^2=a^2$

Y así, de la misma forma:

II.6 $b(2a+b)+a^2=(a+b)^2.$

II.7 $(a+b)^2+b^2=2(a+b)b+a^2.$

II.8 $4(a+b)a+b^2=(2a+b)^2.$

II.9 $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

II.10 $(2a+b)^2+b^2=2(a^2+(a+b)^2).$

II.11 Resolver: $a(a-x)=x^2$.

II.12 Lado opuesto a un ángulo obtuso.

II.13 Lado opuesto a un ángulo agudo.

II.14 Teorema de construcción.