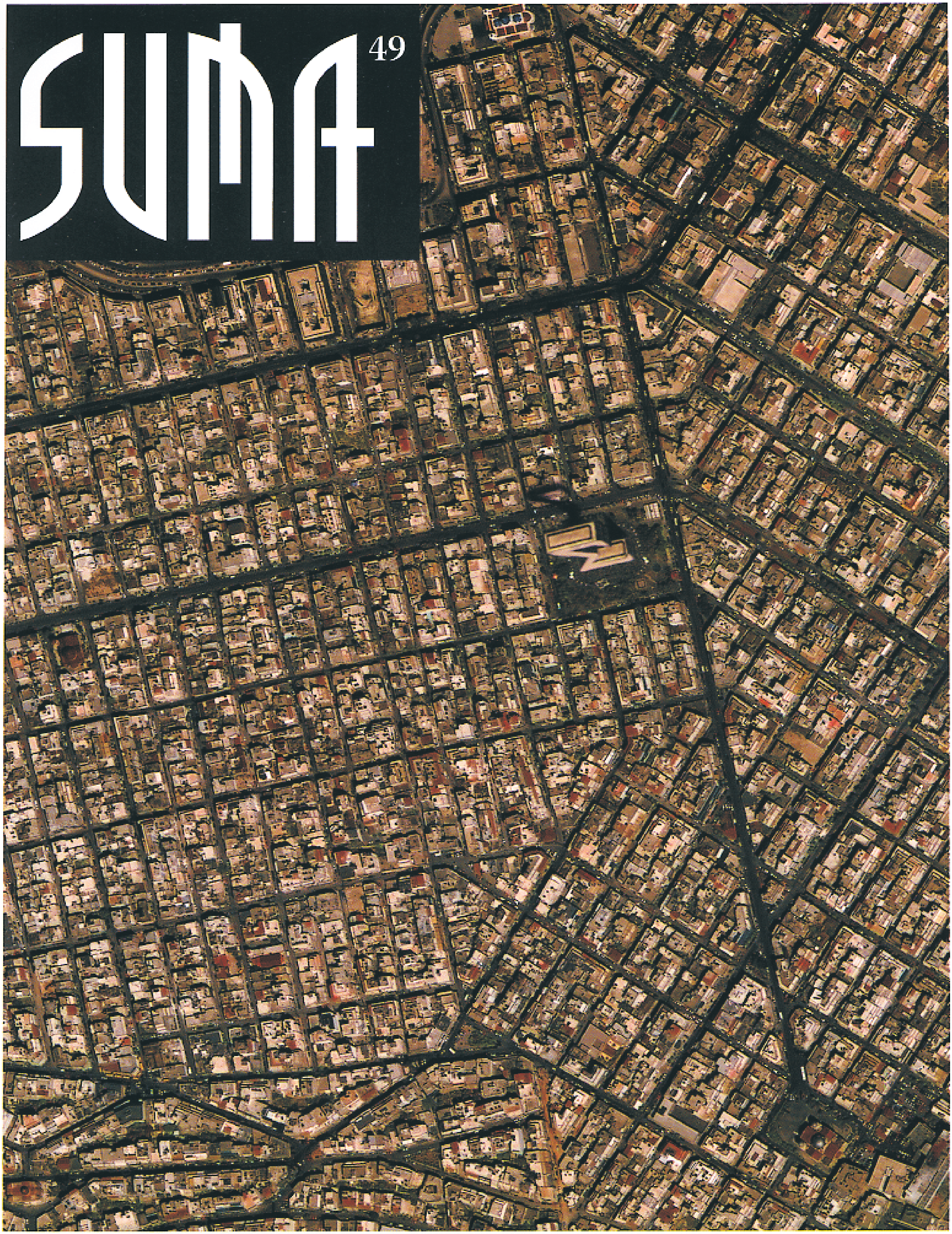
SUMA 49



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · JUNIO 2005 · Nº. 49 · ISSN 1130-488X

SUMA 49
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Junio 2005

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada*: 6400 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN*: 1130-488X*

Convocatorias:

SUMA 49
Junio 2005

Editorial

El actual equipo de dirección cumple con este número 49 los dos primeros años a cargo de SUMA, ecuador de nuestro periodo de nombramiento. La línea esencial del proyecto de dirección que nos planteamos hace dos años, —una cierta renovación, manteniendo la esencia de lo que SUMA es y representa, de manera que quien observase los cambios sintiera sólo una suave evolución, sin saltos en el vacío—creemos que en esencia se está cumpliendo.

Estamos satisfechos de la acogida que las dos primeras monografías de SUMA —las Ideas de Emma Castelnuovo *en 2004 y los* Textos de Miguel de Guzmán *en 2005— han tenido entre los lectores y anunciamos la proxima aparción, en colaboración con el INECSE, de la monografía de SUMA número 03, con las pruebas 'liberadas' del proyecto PISA 2003, de la OCDE, junto con los resultados españoles en cada una de ellas y los criterios de corrección que se usaron.*

SUMA tiene un triple objetivo en el ámbito de la Educación Matemática: ser un referente de las ideas, las investigaciones y los trabajos de innovación en Educación Matemática en España; tener una personalidad propia como animadora del trabajo que desarrollamos entre todos en la educación, a través de las secciones fijas; y, por último, ser el órgano de expresión de la Federación Española de Sociedades de Matemáticas. Cremos que, sin estar libre de errores, estos tres objetivos se han venido cumpliendo.

Queda pendiente la prometida nueva página web de la revista, que necesitará quizás la ampliación de nuestro equipo, ya que las personas que *actuamente tenemos la responsabilidad de la publicación de SUMA estamos cerca del límite de lo asumible, teniendo en cuenta que dedicamos a ello nuestro tiempo libre, después de realizar, como todos nuestros lectores, nuestro trabajo como profesores cada día.*

En noviembre de 2005 se publicará el número 50 de SUMA. Nos parece que es un hecho digno de ser celebrado y así intentaremos hacerlo. Editaremos unos nuevos índices (los últimos se distribuyeron con el número 30), probablemente en formato digital. También realizaremos alguna otra innovación, que preferimos no adentalar para que sea una sorpresa.

Por último, señalamos algunas novedades que se producen en este número 49. Si en el 48 despedíamos la sección de Fernando Corbalán sobre la Presencia medática *de las Matemáticas, anunciamos en éste que a partir del número 50 se hará cargo de la sección de* Biblioteca*, a la que dará un nuevo aire. En el capítulo de las despedidas, se cierra en este número la sección* CineMateca*, que escribía José María Sorando, que de una forma u otra esperamos siga vinculado a nuestro equipo.*

Se inicia también una nueva sección con la que Antonio Pérez Sanz tratará de llevarnos De cabeza*, planteándonos problemas que a veces podremos también resolver* De cabeza*; las respuestas, en su caso, se le podrán remitir a su correo electrónico.* ■

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 49
Junio 2005, pp. 7-14

Polígonos y estrellas

En este artículo se definen, clasifican y relacionan los conceptos de estrella, polígono estrellado y forma estrellada. El estudio de estas figuras geométricas se hace en función de su generación a partir de un polígono convexo, dando lugar a diversos métodos de creación y construcción de estrellas y formas estrelladas.

In this article, several ways of constructing star figures are presented. These have been defined and classified in stars, stars polygons, and star forms. These forms are commonly present in the real life and usually are known as stars. *Some methods related to the creation and construction of star forms generated from convex polygon are presented.*

La idea inicial del trabajo fue analizar geométricamente las formas rematadas en *puntas* cuya presencia es habitual en el entorno cotidiano y que comúnmente se conocen con el nombre de *estrellas*. La presencia de estas formas en la realidad cotidiana es un elemento motivador para el estudio de contenidos relacionados, por ejemplo, con la geometría de los polígonos y la trigonometría, además de constatar la utilidad y aplicación de la Geometría y en general de las Matemáticas a la comprensión del entorno.

Obtención de estrellas con un polígono convexo

Las múltiples acepciones de la palabra *estrella* hacen necesario definir con claridad este concepto en el ámbito matemático. El diccionario de la Real Academia define "objeto de figura de estrella ya con rayos que parten de un centro común, ya con un círculo rodeado de puntas". En lenguaje matemático, denominaremos *estrella* a la figura obtenida por cualquiera de los métodos que se describen a continuación.

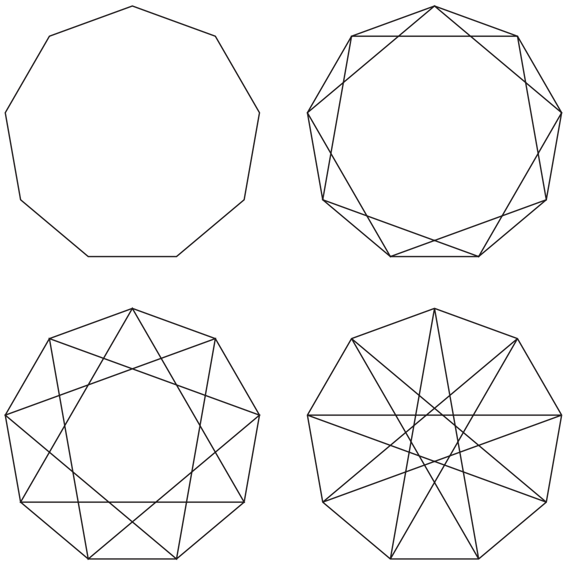


Figura 1. Estrellas derivadas del eneágono

Conectar vértices

Sea P_n un polígono regular de n lados. Se elige uno de sus vértices y, a partir de él, se trazan segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Este trazado se realiza de manera ordenada y sistemática, en el sentido de dejar sin unir en cada paso el mismo número de vértices.

Inmaculada Fernández Benito
IES María Moliner. Laguna de Duero. Valladolid.
Encarnación Reyes Iglesias
ETS de Arquitectura. Universidad de Valladolid. Valladolid.

Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Una estrella así construida se denota por n/q, (notación de *Schläfli*) donde n es el número de vértices del polígono regular del que procede y q–1 es el número de vértices que se dejan sin unir en cada paso. Es decir, se unen los vértices P_i y P_{i+q}, q = 1,..., n–1, con la identificación $P_n \equiv P_{i+n}$.

Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Con la definición, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si q = 1, se obtiene el n-polígono inicial.

2. Si no se considera orientación en los segmentos que unen los vértices, la estrella denotada por n/q coincide con la $n/(n-q)$. Por tanto, para un polígono regular de n lados las estrellas distintas que se pueden construir son: $n/1$, $n/2$, $n/3$,..., n/q con $q < n/2$.

3. Si n es par, la construcción de la estrella n/q con $q = n/2$ sólo traza segmentos que dividen al polígono en dos partes de igual área. Ver un ejemplo para n = 8 en la figura 2.

4. Si n y q son primos entre sí, al construir una estrella se obtiene un único polígono llamado polígono estrellado. En cualquier otro caso, la estrella no es un polígono, sino que está formada por varios polígonos.

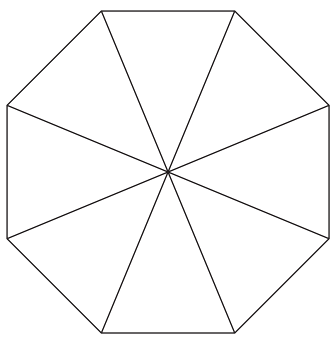


Figura 2. Estrella 8/4 derivada del octógono

En la figura 3 aparecen representadas las estrellas 5/2 y 6/2, conocidas con los nombres de pentagrama (símbolo de los Pitagóricos) y hexagrama (Estrella de David o sello de Salomón) respectivamente. La primera se identifica a su vez con la estrella denotada por 5/3 y es un polígono de cinco lados. La segunda que no es un polígono, está formada por dos triángulos equiláteros girados 60º uno respecto de otro.

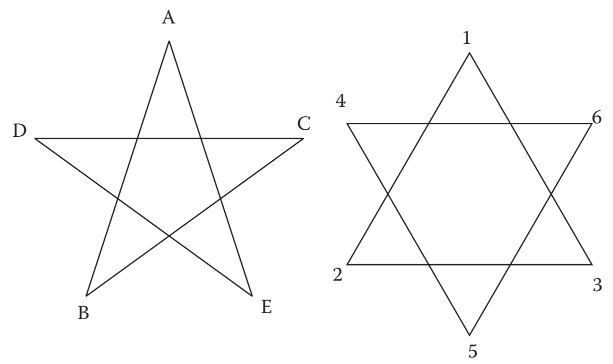


Figura 3. Pentagrama (un polígono) y Hexagrama (dos triángulos)

Prolongar lados

Sea P_n un polígono regular convexo de n lados. Se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez.

En este proceso se llama *estrella* a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones de los lados del polígono.

Es claro que no siempre se obtiene un único polígono, sino que la estrella puede estar formada por varios. En caso de que la estrella sea un solo polígono, a éste se le llama *polígono estrellado*.

Las estrellas obtenidas por este método contienen en su interior al polígono inicial y son semejantes a las construidas según el método *conectar vértices*, donde el polígono de partida queda circunscrito a las estrellas trazadas.

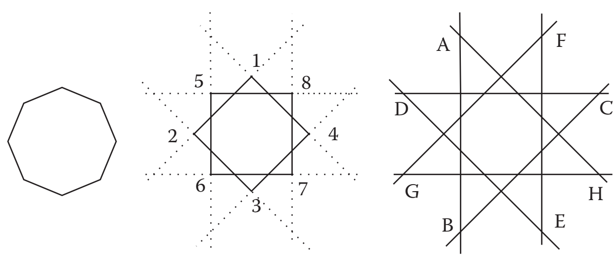


Figura 4. Estrellas derivadas del octógono

En la figura 4, la estrella denotada con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 no es un polígono, sino dos cuadrados girados 45º uno respecto del otro. Sin embargo, la denotada por *A, B, C, D, E, F, G, H,* sí que es un polígono de lados los segmentos *AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH y HA,* y vértices los puntos *A, B, C, D, E, F, G y H*.

Según el diccionario de la Real Academia, una estrella es un objeto de figura de estrella ya con rayos que parten de un centro común, ya con un círculo rodeado de puntas.

Resaltar contornos

Conectando los 2*n* segmentos externos de una estrella, construida según cualquiera de los procedimientos anteriores, resulta un polígono cóncavo que también se denomina *estrella*.

La estrella obtenida según este método se denota por |*n/q*|.

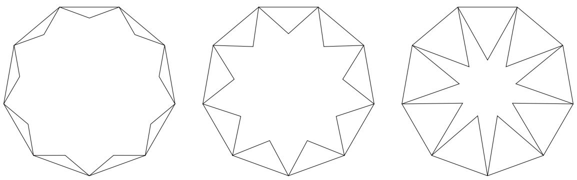


Figura 5. Estrellas | 9/q |, q = 2, 3, 4 derivadas del eneágono

Es evidente que esta *estrella* es un polígono de 2*n* lados iguales que posee las mismas simetrías que el n-polígono regular de partida. Tiene *n* vértices o *puntas* de la estrella y otros *n* vértices o *mellas* de la estrella.

En la figura 6 se muestra la diferencia entre las estrellas 8/2 y |8/2|. La primera no es un polígono (está formada por dos cuadrados) y la segunda es un polígono cóncavo de dieciséis lados y dieciséis vértices.

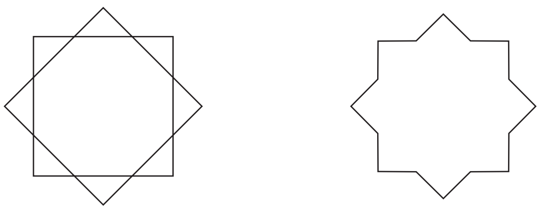


Figura 6. Estrellas 8/2 (izquierda) y |8/2| (derecha)

Hacemos notar que con esta construcción siempre se obtiene un único polígono cóncavo que se llamará simplemente *estrella*; sin embargo no lo incluiremos en la categoría de *los polígonos estrellados*, en los que se consideran, además de los segmentos del contorno, los segmentos interiores que determinaron la estrella.

Figura 7a. Diseños con estrellas |5/2|

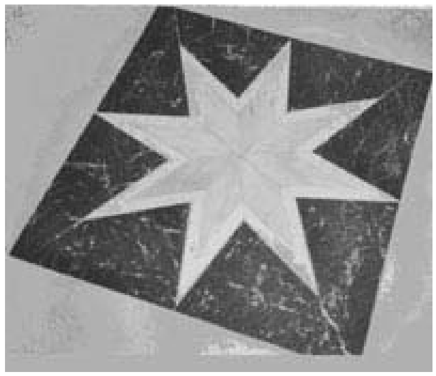


Figura 7b. Diseños con estrellas |8/3|

Formas estrelladas

Anteriormente se ha definido el concepto de estrella desde un punto de vista matemático. En nuestro entorno se pueden observar otras figuras rematadas en puntas que poseen cierta regularidad y que no se adaptan a las definiciones dadas. Estas formas que en lenguaje cotidiano son también llamadas estrellas, en el contexto de este artículo las denominaremos *formas estrelladas*.

A continuación se muestran métodos de construcción de algunas de ellas.

Por simetrías

En primer lugar se trazan los segmentos que unen el centro de un n-polígono regular con cada vértice del mismo, determinando n triángulos isósceles. Seguidamente se construyen los triángulos simétricos de éstos respecto al lado del polígono, obteniéndose así una *forma estrellada* compuesta por 2*n* triángulos.

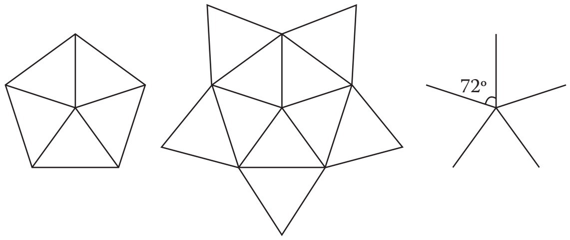


Figura 8. Forma estrellada de diez triángulos

En la parte central de la figura 8 se muestra esta forma estrellada para *n* = 5. La forma radiada de la derecha de la misma figura, es una *estrella jeroglífica* del antiguo Egipto considerada símbolo del tiempo por la relación de su ángulo (72º) con el número de horas (720) de un mes de treinta días.

Si en un polígono regular convexo se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez, se llama estrella a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones.

Composición de cuadriláteros

Uniendo cada uno de los n vértices *mella* del polígono cóncavo |n/q| con su centro, se obtiene una *forma estrellada* compuesta por cuadriláteros, figura 9.

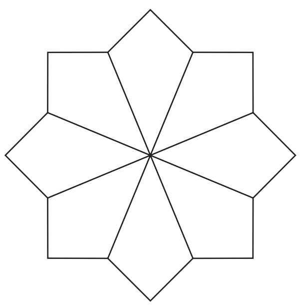


Figura 9a. Forma estrellada de ocho cuadriláteros

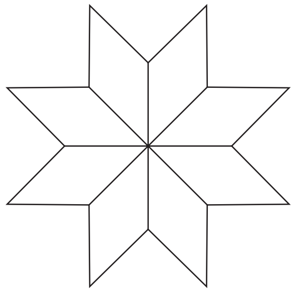


Figura 9b. Forma estrellada de ocho cuadriláteros

En el caso *n* = 6, la forma estrellada generada en este proceso está diseccionada en seis rombos de ángulos 60º y 120º, figura 10a. Estos rombos son llamados diamantes. A veces también se incluye en la denominación de diamante a los rombos de ángulos 45º y 135º, como los de la figura 9b.

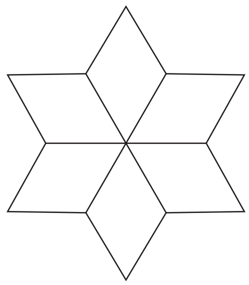


Figura 10a. Forma estrellada de seis rombos

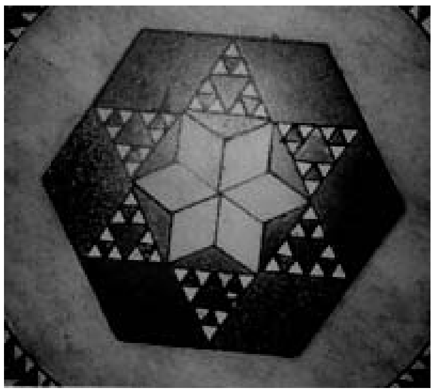


Figura 10b. Un ejemplo en pavimento

Yuxtaposición de triángulos

Pueden construirse *formas estrelladas* tomando como base cualquier polígono regular y yuxtaponiendo triángulos iguales en cada uno de sus lados. El procedimiento de la sección *Por simetrías* es un caso particular de este método.

Consideremos el caso en el que los triángulos yuxtapuestos son isósceles y rectángulos con longitud de los catetos igual a la del lado del polígono inicial, figura 11.

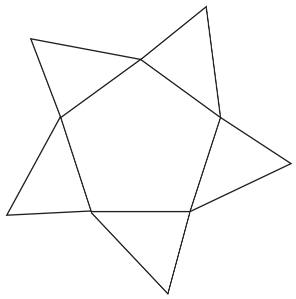


Figura 11a. Forma estrellada por yuxtaposición de triángulos

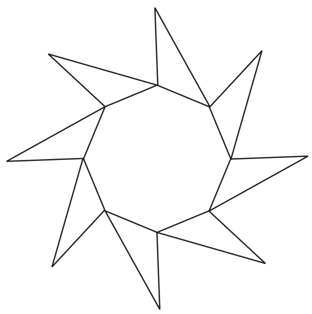


Figura 11b. Forma estrellada por yuxtaposición de triángulos

Los trazados geométricos de algunas bóvedas de crucería son formas estrelladas obtenidas por yuxtaposición de triángulos isósceles cuyo lado desigual es el lado de un octógono regular. Así por ejemplo, presentan estas formas el Cimborrio del Conventual de San Francisco en Medina de Rioseco (Valladolid) y varias bóvedas en la Catedral de Burgos, como las de las capillas del Condestable, la de la Consolación y el Cimborrio.

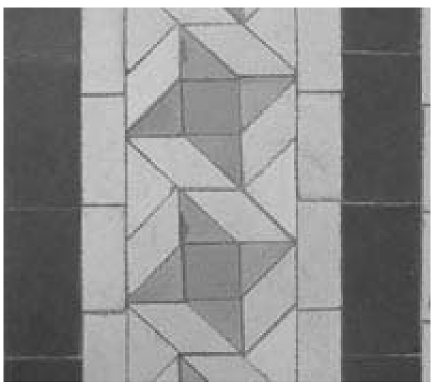


Figura 12. Forma estrellada en una franja de Gaudí

Actividades de investigación para el aula

Los contenidos desarrollados en el artículo proporcionan elementos para diseñar actividades de investigación individual o en grupo que pueden adaptarse a los niveles de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Los contenidos del currículo de Matemáticas I de primero de Bachillerato están intrínsecamente relacionados con las propuestas que se incluyen.

Con estas actividades se puede:

- Profundizar en los contenidos geométricos a partir de elementos tangibles.
- Buscar aplicaciones de los procedimientos matemáticos aprendidos en el aula para utilizarlas en situaciones extraescolares.
- Promover un proceso de enseñanza-aprendizaje satisfactorio para alumnos y profesores.
- Incorporar herramientas de distintos campos de las matemáticas a la resolución de problemas relacionados con el tema en estudio.
- Encontrar elementos del entorno cotidiano susceptibles de ser analizados desde la teoría de polígonos y estrellas.
- Investigar nuevos procedimientos para construir *formas estrelladas*.

Las actividades que se proponen, a modo de pequeñas investigaciones, abarcan aspectos diversos que constituyen la base del aprendizaje significativo: repaso y refuerzo, adquisición de conocimientos nuevos, relación, elaboración, análisis y síntesis, etc.

> *Las actividades que se proponen abarcan aspectos diversos que constituyen la base del aprendizaje significativo.*

Los enunciados se pueden adaptar a la diversidad de las capacidades y conocimientos de los alumnos, utilizando una metodología abierta y flexible donde el alumno pueda investigar según sus posibilidades y nivel.

La propuesta metodológica se concretará en las siguientes fases:

1. Fase de sensibilización y diagnóstico de preconcepciones.

2. Fase de familiarización de los contenidos.

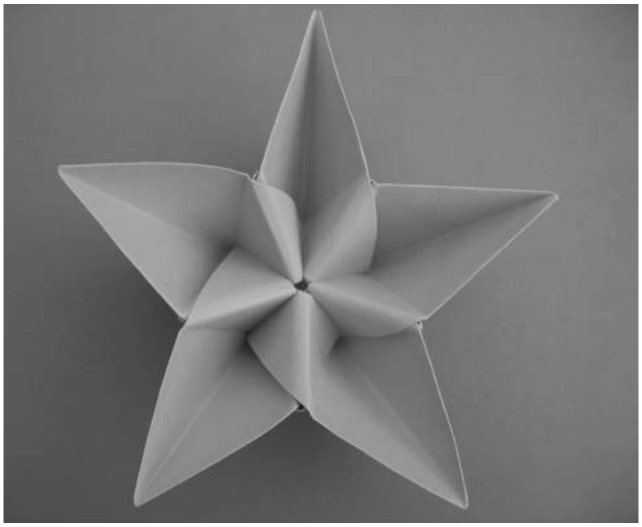
3. Fase de resolución.

4. Fase de comunicación y validación de los resultados obtenidos.

Pueden construirse formas estrelladas tomando como base cualquier polígono regular y yuxtaponiendo triángulos iguales en cada uno de sus lados.

Propuesta de actividades
Para desarrollar las propuestas de actividades que se detallan a continuación, los alumnos deberán conocer los siguientes contenidos:

- Polígonos: Propiedades de un rombo. Ángulos interior y central de un polígono regular.
- Trigonometría: Teorema de Pitágoras. Fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo mitad. Teoremas del seno y del coseno.
- Movimientos en el plano: Giro de centro en un punto y ángulo dado. Simetría respecto a un eje.



Enunciados de actividades
Actividad 1

Figura 13. Motivo decorativo

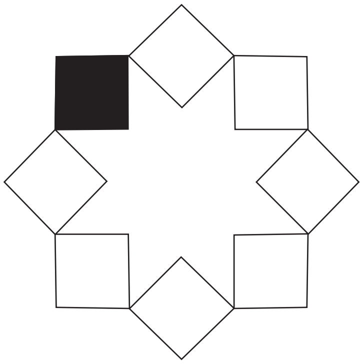


Figura 14. Esquema

Investigar la geometría de la figura 13:

1. Describir los polígonos convexos, estrellas, polígonos estrellados y formas estrelladas que aparecen.

2. Observando el octógono central interior del motivo de la figura 13, verificar que las prolongaciones de sus lados originan las estrellas 8/2 y 8/3.

3. Suponiendo que la medida del lado del octógono interior es una unidad, calcular las áreas de los diferentes tipos de triángulos que aparecen.

4. Comprobar, por ejemplo utilizando el programa Cabri Géomètre, que un cuadrado girado 135º alrededor de uno de sus vértices, genera las dos estrellas |8/2| y |8/3| derivadas del octógono regular como en la figura 14.

5. Calcular la longitud del lado del cuadrado generador y la del lado del octógono exterior, suponiendo, también, que el lado del octógono interior mide una unidad.

6. Hallar las áreas de los octógonos interior y exterior de la figura 13 y la razón entre ellas.

Actividad 2

Figura 15. Logotipo Tele Madrid

1. Describir los polígonos convexos y estrellas que aparecen en la figura 15.

2. Calcular los ángulos del rombo sombreado en la figura 16a.

3. ¿Qué ángulo debe girar el rombo y con qué centro, para generar el pentágono regular exterior y la estrella interior |5/2| de la figura 16a?

4. Con un proceso análogo se ha obtenido la figura 16b. Responder a las mismas preguntas que en el caso anterior.

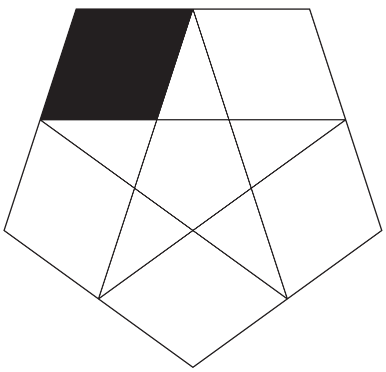


Figura 16a

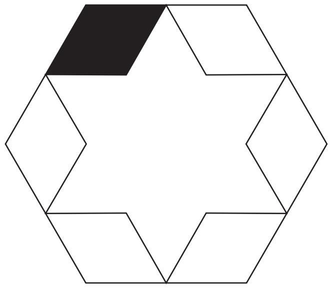


Figura 16b

5. Generalizar los casos anteriores, analizando y contestando a la siguiente pregunta:

6. ¿Girando n veces un rombo de ángulos ρ y $\mu = \pi - \rho$, se obtiene la estrella $|n/2|$, siendo ρ el ángulo interior de un n-polígono?

Actividad 3

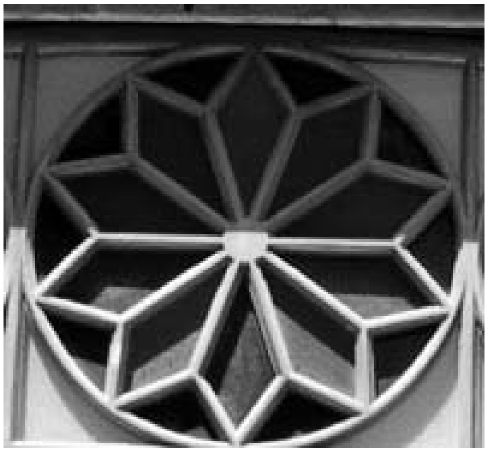


Figura 17. Motivo decorativo

La forma estrellada de la figura 17 está formada por diez cuadriláteros construidos a partir de la estrella |10/2| según el procedimiento descrito.

1. Comprobar que el ángulo α en la punta de las estrellas n/q y $|n/q|$, mide:

$$\alpha = \frac{n-2q}{n}\pi$$

2. A partir del resultado anterior, deducir la medida de los ángulos del cuadrilátero generador de la figura 17.

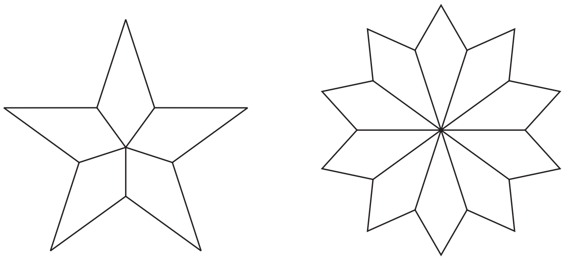


Figura 18. Formas estrelladas compuestas por cuadriláteros

En la parte izquierda de la figura 18 se observa una forma estrellada compuesta por cinco cuadriláteros obtenida según el método mencionado anteriormente aplicado a la estrella |5/2|.

3. Comprobar que los cuadriláteros de ambas formas estrelladas son semejantes. Averiguar en qué condiciones son iguales.

4. Construir las estrellas 10/4 y 5/2. Relacionar la representación geométrica de ambas con la equivalencia de las fracciones que las denotan. Proponer ejemplos de casos similares al dado.

Actividad 4

En la figura 5 están representadas las estrellas derivadas del eneágono regular denotadas por $|9/q|$, con q = 2, 3 ó 4. Suponiendo que el lado del eneágono inicial mide una unidad:

1. Calcular las longitudes de los lados de los polígonos cóncavos $|9/q|$ representados en la figura 5.

2. Calcular las longitudes de los lados de los polígonos estrellados 9/2 y 9/4, así como la longitud del lado de uno de los triángulos que forman la estrella 9/3. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COXETER, H.S.M. (1969): *Introduction to Geometry*, John Wiley Sons, Inc.

FERNÁNDEZ, I., REYES, E.(2003): *Geometría con el hexágono y el octógono*, Proyecto Sur de Ediciones.

GRÜNBAUM, B., SHEPHARD, G.C.(1987): *Tilings and Patterns*, Freeman and Company.

GÓMEZ MARTÍNEZ, J.(1998): *El gótico español de la edad moderna: Bóvedas de crucería*, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid.

GUILLÉN SOLER, G. (1997): *Poliedros*, Síntesis.

KAPPRAF, J. (2002): *Beyond Measure*, World Scientific.

KAPPRAF, J., ADAMSON W. (2003): "A unified Theory of Proportion", *Conference Proccedings ISAMA-BRIDGES*, ISAMA Bridges.

SAVIO, D., SURYANARAYAN, Y., CHEVICHEV E.R. (1993): "Polinomials and Regular Polygons", *Amer. Math. Monthly*, n.º 100, 657-661.

SUMA 49
Junio 2005, pp. 15-23

Sobre el orden de magnitud de un número entero

En este artículo se introduce una función para calcular el número de dígitos de la parte entera de un número y se aplica para: evaluar la potencia de cada calculadora, estimar números muy grandes, demostrar desigualdades numéricas (involucrando factoriales, números combinatorios,...). A continuación, se muestra cómo las ideas anteriores sirven para demostrar un resultado clásico sobre productorios de una manera diferente. El trabajo acaba explicando una alternativa basada en el cambio de base del sistema de numeración para resolver algunos casos en que el método puede no proporcionar información.

In this article we introduce a function to calculate the number of digits of the integer part of a number and it is applied: to evaluate the power of every calculator, to estimate very big numbers, to demonstrate numerical inequalities (involving the factorial of a number, binomial numbers, ...). After that, we show how the previous ideas can be used to demonstrate a classic result on infinite products of a different way. The work is ended explaining an alternative based on the base change of the system of numeration to solve some cases in which the method cannot provide information.

El matemático norteamericano Edward Kasner pidió en una ocasión a su sobrino de nueve años que inventara un nombre para un número muy grande: diez elevado a cien, 10^{100}, un uno seguido de cien ceros. El niño le llamó un *gugol*. He aquí el número: 10. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. Cada uno de nosotros puede hacer números muy grandes y darles nombres extraños. Intentadlo. Tiene cierto encanto, especialmente si la edad de uno resulta ser nueve años (p. 219, Sagan, 1985). Seguramente la petición de Kasner a su sobrino no fue un capricho matemático. En efecto, son muchas las situaciones en el quehacer científico, en las cuales se requiere manejar números muy grandes: el control de una población en Microbiología o el cálculo del capital que obtendrá una empresa al invertir 10^{12} pesetas al cabo de 100 años a un interés compuesto trimestral del 13%, implican el manejo de grandes números. Basta dar un breve paseo por cualquier texto de Astronomía para que rápidamente nos abrumen y empequeñezcan esas cantidades inimaginables:

Carl Sagan

> Es posible que entre todas las galaxias haya 10^{23} planetas.

p. 5, Sagan, 1985.

> La masa del Sol es 1.989×10^{30} kg.

p. 4, Spiegel y Abellanas, 1997.

> El número de protones en el Universo Visible es 10^{80}

García Alcaine, 1997.

Algunos números grandes son tan importantes que reciben nombre propio: en Química la constante de Avogadro, $N=6{,}022\cdot10^{23}$ mol^{-1} (p. 4, Spiegel y Abellanas, 1997), en Física la constante de Skewes,

$$10^{10^{10^{34}}}$$

(García Alcaine, 1997).

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad politécnica de Valencia.

En Matemáticas también nos vemos muchas veces abocados a manejar números muy elevados: quién no recuerda el gran número de granos de trigo que debía pagar el rey indio Iadava al joven bracman, Lahur Sessa, que inventó el ajedrez para que el soberano saliese de una profunda melancolía y tristeza que por entonces le invadía (p. 100, Malba Tahan, 1988). También, problemas actuales como la búsqueda de números primos a través de los cuales se encriptan mensajes secretos requieren el uso de potentes ordenadores, pues implican el manejo de grandes números (Cilleruelo y Córdoba, 1992).

Estas páginas que siguen contienen parte de una investigación matemática, a distintos niveles de contenidos (universitarios y no universitarios), que nos han surgido a los autores desde la Resolución de problemas, en este caso concreto desde la preparación de nuestros alumnos para Olimpiadas Matemáticas, y sobre todo pretenden aportar una experiencia, la nuestra, de la riqueza que comporta el enfrentarse a este tipo de problemas, normalmente abiertos. En este sentido, todos los métodos de resolución que contiene el artículo son originales de los autores, y han surgido de la dinámica interactiva de resolver estos problemas (que no ejercicios) con nuestros alumnos.

El trabajo está estructurado como sigue. En primer lugar definiremos la función que nos da el orden de magnitud de un número real. A continuación daremos algunas aplicaciones para esta función, entre ellas la demostración de desigualdades numéricas. En el cuarto apartado daremos una estimación del número de dígitos del factorial de un número natural y aplicaremos este resultado para probar desigualdades numéricas y desigualdades en una variable. En la siguiente sección, acotamos el número de cifras de un número combinatorio. Para terminar demostraremos un conocido resultado sobre productos infinitos utilizando la función $\delta(x)$.

Definición de la función δ(x)

Estamos interesados en, dado un número real x, conocer su orden de magnitud o equivalentemente el número de cifras de su parte entera, $[x]$, por lo que al ser el signo del número irrelevante, el dominio de la función $\delta(x)$ que nos proporciona el número de cifras de $[x]$ será $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{cccl}\delta: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & \delta(x) = \text{n.º de cifras de } [x]\end{array}$$

Para encontrar la expresión algebraica de $\delta(x)$ basta observar que

$$\delta(10^n) = 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

y que

$$\delta(x) = 1 + [\log x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (2)$$

(siendo *log x*, el logaritmo decimal), ya que, dado $x \in \mathbb{R}^+$ existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$10^n \le x < 10^{n+1}$$

lo que nos indica que

$$\delta(x) = 1 + n$$

Ahora bien, a partir de la última desigualdad por ser la función *log x* creciente en $]0,+\infty[$ se tiene

$$\log 10^n \le \log x < \log 10^{n+1}$$

esto es

$$n \le \log x < n + 1$$

por tanto

$$\delta(x) = 1 + n = 1 + [\log x]$$

Obsérvese que efectivamente (2) generaliza (1), pues si $x=10^n$, entonces por (2)

$$\delta(10^n) = 1 + [\log 10^n] = 1 + n$$

Como veremos más adelante, en la práctica $\delta(x)$ nos será útil para x muy grandes, expresados a través de potencias, raíces, factoriales, números combinatorios....

Algunas aplicaciones de δ(*x*)

La limitación de nuestra calculadora

Las limitaciones físicas de cualquier máquina, en particular de una calculadora de bolsillo o de un ordenador personal hacen que ciertos cálculos no puedan realizarse en ellas. Así, con una calculadora científica (¡que poseen la mayoría de nuestros alumnos!) no es posible calcular 2^{400}, sin embargo, sí es posible evaluar 2^{300}; el resultado que se obtiene en pantalla, 2.037036^{90}, nos indica que 2^{300} tiene 91 dígitos. En efecto

$$\delta(2^{300}) = 1 + \left[\log 2^{300}\right] = 1 + \left[300 \cdot \log 2\right] = 91$$

Del mismo modo, aunque nuestra máquina no sea capaz de calcular 2^{400}, sí podemos decir su característica más relevante, esto es, su orden de magnitud

$$\delta(2^{400}) = 1 + \left[400 \cdot \log 2\right] = 121$$

Esto nos puede invitar a plantear muchas preguntas a nuestros alumnos, como por ejemplo, ¿hasta qué exponente será capaz tú calculadora de evaluar una potencia del tipo 3^n? ¿y 4^n? ¿y 5^n?...

Estimaciones de números

Ya hemos comentado en la introducción que en muchas ocasiones el orden de magnitud de un número muy grande es más interesante, en un primer momento, que quedar abrumados por su interminable expresión decimal. Así, por ejemplo, aunque nuestra calculadora no sea capaz de calcular $5432{,}1^{9021}$, sí podemos realizar una estimación de dicho número dando su orden de magnitud

$$\delta(5432{,}1^{9021}) = 1 + \left[9021 \cdot \log 5432{,}1\right] = 33694$$

Del mismo modo $\delta(x)$ nos servirá, por ejemplo, para hacernos una excelente idea del tamaño de los números de Fermat. Recordemos que Fermat conjeturó que todos los números de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

son primos. Los cuatro primeros números $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ son, de esta manera, primos, pero Euler probó que $F_5 = 651 \cdot 67000417$ y por tanto la conjetura es falsa. Es más, nadie ha podido encontrar hasta la fecha un número primo de Fermat, F_n con $n > 4$. Recientemente se ha logrado factorizar el número de Fermat F_9 con ayuda de un ordenador en el Supercomputer Computacional Research Institute de la Universidad de Florida (p. 17, Cilleruelo y Córdoba, 1992). Aunque no conozcamos el valor de F_9 sí podemos saber, para realizar una estimación de su tamaño, el número de cifras que posee

$$\delta(F_9) = 1 + \left[\log\left(2^{2^9} + 1\right)\right] = 1 + \left[\log 2^{2^9}\right] = 1 + \left[2^9 \cdot \log 2\right] = 155$$

donde hemos utilizado que la parte entera de

$$\log\left(2^{2^9} + 1\right)$$

y la parte entera de

$$\log 2^{2^9}$$

coinciden, ya que para que al sumar una unidad al argumento, la parte entera del logaritmo cambie, se debería cumplir que

$$2^{2^9}$$

acabase en 9, lo cual sabemos que es falso porque las potencias de 2 siempre acaban en 2, 4, 6 u 8.

También podemos utilizar las propiedades de la función $\delta(x)$ para evaluar el número de dígitos de una suma. Así, por ejemplo, y como es bien sabido, la solución del problema del ajedrez (a la cual hicimos alusión en la introducción) es

$$G = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

Para conocer el número de cifras de G no es necesario saber sumar los n primeros términos de una progresión geométrica, pues

$$\delta(G) = \delta(2^{63}) = 1 + \left[63 \cdot \log 2\right] = 19$$

Prueba de desigualdades numéricas

Cuando se nos pide que intentemos demostrar una determinada desigualdad no trivial sobre números, parece poco probable que abordemos el problema intentando comparar el número de dígitos de la parte entera de cada número. Sin embargo, esta estrategia en ocasiones es muy útil. Para ponerlo de manifiesto hemos elegido un problema que apareció en una olimpiada matemática de la antigua URSS (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

¿Qué número es mayor 1000^{1000} o 1001^{999}?

En primer lugar, conviene observar que aquí nuestra calculadora no aporta ninguna información, ya que es incapaz de evaluar cualquiera de los dos números, sin embargo observemos que como

$$\delta\left(1000^{1000}\right) = 1+\left[1000\cdot\log 1000\right] = 3001$$
$$\delta\left(1001^{999}\right) = 1+\left[999\cdot\log 1001\right] = 2998$$

entonces $1001^{999} < 1000^{1000}$. Es interesante contrastar la sencillez de esta solución con la dada en el texto (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993), basada en una hábil manipulación después de la aplicación de la desigualdad

$$2<(1+1/n)^n<3$$

para todo n natural.

En este mismo texto encontramos otro problema del tipo anterior

¿Qué número es mayor 100^{300} o 300!?

(p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993), que nos conduce de un modo natural al siguiente apartado.

El orden de magnitud del factorial de un número

Dado $m\in IN$, en esta sección trataremos de calcular $\delta(m!)$. En realidad, el mejor resultado que alcanzaremos es una cota inferior y una cota superior de $\delta(m!)$.

Como una primera aproximación de $\delta(m!)$ podemos obtener la siguiente cota inferior

$$\delta(m!)=1+\left[\log m!\right]=1+\left[\sum_{k=1}^{m}\log k\right]\geq 1+\sum_{k=1}^{m}\left[\log k\right]=$$

observemos que como

$$\left\{\left[\log k\right]\right\}_{k=10}^{99}=1 \qquad \left\{\left[\log k\right]\right\}_{k=100}^{999}=2 \qquad \ldots$$

podemos continuar la igualdad anterior del siguiente modo

$$=1+9\sum_{k=1}^{[\log m]-1} k\cdot 10^k+\left(m+1-10^{[\log m]}\right)\cdot\left[\log m\right]=$$

y evaluando la suma parcial enésima de la serie aritmético geométrica

$$9\sum_{k=1}^{n}k\cdot 10^k=n\cdot 10^{n+1}-\frac{10^{n+1}-10}{9}$$

continuamos la última igualdad

$$=1+\left(\left[\log m\right]-1\right)\cdot 10^{[\log m]}-\frac{1}{9}\cdot\left(10^{[\log m]}-10\right)+$$
$$+\left(m+1-10^{[\log m]}\right)\cdot\left[\log m\right]=$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log m]+1}\right)+(m+1)\cdot\left[\log m\right]$$

por tanto

$$\delta(m!)\geq\frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log m]+1}\right)+(m+1)\cdot\left[\log m\right] \qquad (3)$$

Esta cota inferior de $\delta(m!)$ puede ser útil en algunas aplicaciones, como por ejemplo en el siguiente problema elegido para que ni la intuición ni la calculadora sean aplicables

¿Qué número es mayor 70^{49} o 100!?

Observemos que como

$$\delta\left(70^{49}\right)=1+\left[49\cdot\log 70\right]=91$$

$$\delta(100!)\geq\frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log 100]+1}\right)+(100+1)\cdot\left[\log 100\right]=93$$

se deduce $100! > 70^{49}$.

Sin embargo, aunque en algunas aplicaciones la cota inferior de la fórmula (3) es útil, en la mayoría de los casos resulta muy burda. Así, por ejemplo, para resolver la cuestión: ¿Qué número es mayor 100^{300} o 300!? anteriormente planteada, (3) no nos sirve pues

$$\delta\left(100^{300}\right)=1+\left[300\cdot\log 100\right]=601$$

$$\delta(300!)\geq\frac{1}{9}\cdot\left(19-10^{[\log 300]+1}\right)+(300+1)\cdot\left[\log 300\right]=493$$

En lo que sigue daremos una buena acotación para $\delta(m!)$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado (p. 749, Apostol, 1989) debido a James Stirling

$$a_m = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m} < m! <$$
$$< \sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m} = A_m \qquad (4)$$

Observemos que por ser $\delta(x)$ monótona creciente se tiene

$$\delta\left(a_m\right)\leq\delta\left(m!\right)\leq\delta\left(A_m\right) \qquad (5)$$

y por otra parte

$$\delta\left(a_m\right)=1+\left[\log a_m\right]=$$
$$=1+\left[\log\sqrt{2\cdot\pi}+\frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e\right] \qquad (6)$$

$$\delta\left(A_m\right)=$$
$$=1+\left[\log\sqrt{2\cdot\pi}+\frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e+\log\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right] (7)$$

donde hemos aplicado las propiedades del logaritmo sobre el producto y la potenciación, ya que las cotas que buscamos deben ser en la práctica computables. Llamando

$$K_m=\log\sqrt{2\cdot\pi}+\frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m - m\cdot\log e$$

tenemos

$$\delta\left(a_m\right)=1+\left[K_m\right]$$

$$\delta\left(A_m\right)=1+\left[K_m+\log\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right]$$

Para $m\in IN$ se tiene

$$1<1+\frac{1}{4\cdot m}<2$$

luego

$$0<\log\left(\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right)<\log 2<1$$

por lo que de las últimas expresiones de $\delta\left(a_m\right)$ y $\delta\left(A_m\right)$ se deduce

$$D=\delta\left(A_m\right)-\delta\left(a_m\right)\in\{0,1\}$$

Esto nos garantiza que (6) y (7) son una excelente estimación del número de dígitos de *m!*. Cuando $D = 0$ (la mayoría de las aplicaciones prácticas) tendremos el valor exacto de $\delta(m!)$.

Ahora ya estamos en condiciones de resolver el problema que había quedado sin responder con la utilización de la cota (3). En efecto, obsérvese que por (6) y (7) respectivamente se tiene

$$\delta\left(a_{300}\right)=$$
$$=1+\left[\log\sqrt{2\cdot\pi}+\frac{2\cdot 300+1}{2}\cdot\log 300-300\cdot\log e\right]=615$$

$$\delta\left(A_{300}\right)=1+[\log\sqrt{2\cdot\pi}+\frac{2\cdot 300+1}{2}\cdot\log 300-$$
$$-300\cdot\log e+\log\frac{4\cdot 300+1}{4\cdot 300}]=615$$

por tanto aplicando (5) se deduce que

$$\delta(300!)=615$$

y como ya sabíamos que

$$\delta\left(100^{300}\right)=601$$

se deduce que $300! > 100^{300}$. Ahora conviene observar que la cota inferior que nos dio (3) es en este caso muy mala. Asimismo, es interesante contrastar la técnica utilizada aquí, con la aplicada en la resolución de este problema dada en (p. 244, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993) o en (p. 22, Korovkin, 1976). Con nuestro método no sólo resolvemos el problema, sino que aportamos más información que las soluciones dadas en las referencias citadas, pues damos el número de cifras de cada número, lo cual nos dice, en nuestro caso particular, que 300! es *mucho mayor* que 100^{300}.

Hasta ahora en este apartado hemos utilizado las acotaciones de $\delta(m!)$ para establecer desigualdades numéricas tales como $70^{49} > 100!$ y $100^{300} > 300!$

En ocasiones nuestra técnica también puede ser útil para demostrar desigualdades en una variable como:

$$m! < \left(\frac{m+1}{2}\right)^m \qquad \forall m \geq 2 \quad (8)$$

Este resultado apareció como problema en una olimpiada matemática de la antigua URSS (p. 65, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

Para probar esto compararemos

$$\delta\,(m!)$$

y

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right)$$

Sabemos por (5) y (7) que

$$\delta\,(m!) \leq \delta\left(A_m\right) = 1 + \left[\log\left(\sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\frac{4\cdot m+1}{4\cdot m}\right)\right] \quad (9)$$

y

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) = 1 + \left[\log\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right] \quad (10)$$

Para demostrar (8) será suficiente probar

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) > \delta\left(A_m\right) \qquad \forall m \geq m_0$$

(donde m_0 está aún por determinar), ya que entonces tan sólo faltará demostrar la desigualdad (8) en el conjunto de valores $\{2, 3, ..., m_0\text{-}1\}$. Ahora bien, si m_0 es suficientemente pequeño esto último se consigue con m_0-2 comprobaciones directas sobre (8).

Utilizando (9) y (10), para demostrar

$$\delta\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\right) > \delta\left(A_m\right) \qquad \forall m \geq m_0$$

bastará probar

$$f(m) - g(m) \geq 1 \qquad \forall m \geq m_0$$

siendo

$$f(m) = \log\left(\frac{m+1}{2}\right)^m$$

y

$$g(m) = \log\sqrt{2\cdot\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)$$

Observemos que

$$f(m) - g(m) = \log\left(\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)}\right)$$

si deseamos ver que

$$f(m) - g(m) \geq 1 \quad \forall m \geq m_0$$

es suficiente con demostrar

$$\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)} \geq 10\ \forall m \geq m_0 \quad (11)$$

Para ello notemos que

$$\left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)} =$$

$$= \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}\cdot\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{4\cdot m}} =$$

$$= \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}\cdot\frac{4\cdot m+4}{4\cdot m+1} \geq$$

$$\geq \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{e}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot m}}$$

y como la función

$$h(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}} \qquad x \in [1,+\infty[$$

cumple

$$h'(x)=\left(\frac{e}{2}\right)^{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2\cdot x}+\ln 2\right)\right)>0\quad\forall x\geq 2$$

y

$$h(15)\cong 10{,}27\geq 10$$

se deduce que (11) se cumple para $m_0 = 15$.

Para terminar la demostración de (8) faltaría comprobar dicha desigualdad sobre el conjunto {2, 3, ..., 14}.

Es posible que entre todas las galaxias haya 10^{23} planetas.
Sagan, 1985.

El orden de magnitud de un número combinatorio

Ahora estudiamos el número de dígitos del número combinatorio

$$C_{n,m}=\frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}\qquad n,m\in IN\ y\ n\geq m$$

Como en el caso del factorial de un número, si $C_{n,m}$ es muy grande la aplicación de (2)

$$\delta\left(C_{n,m}\right)=1+\left[\log C_{n,m}\right]$$

puede no ser útil, debido a las limitaciones físicas de la computadora.

Para estudiar este problema aplicaremos los resultados obtenidos para el factorial de un número. Así, aplicando (4) sobre *m!*, *(n-m)!* y *n!* se deduce

$$\frac{a_n}{A_m\cdot A_{n-m}}<\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}<\frac{A_n}{a_m\cdot a_{n-m}}$$

luego

$$\delta\left(\frac{a_n}{A_m\cdot A_{n-m}}\right)\leq\delta\left(C_{n,m}\right)\leq\delta\left(\frac{A_n}{a_m\cdot a_{n-m}}\right)\quad(12)$$

Por otro lado se tiene (13):

$$\delta\left(\frac{a_n}{A_m\cdot A_{n-m}}\right)=1+\left[K_{n,m}+\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)}\right]$$

$$\delta\left(\frac{A_n}{a_m\cdot a_{n-m}}\right)=1+\left[K_{n,m}+\log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\right]\quad(14)$$

siendo

$$K_{n,m}=\frac{2\cdot n+1}{2}\log n-\frac{2\cdot m+1}{2}\cdot\log m-$$
$$-\log\sqrt{2\cdot\pi}-\frac{2\cdot n-2\cdot m+1}{2}\cdot\log(n-m)\quad(15)$$

Estudiaremos la diferencia

$$\log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)-\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)}=$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)$$

Para ello observemos que como

$$1<\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)<\left(1+\frac{1}{4}\right)^{3}$$

entonces por la monotonía de la función logaritmo

$$0=\log 1<\log\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot(n-m)}\right)<$$
$$<\log\left(1+\frac{1}{4}\right)^{3}=3\log\left(\frac{5}{4}\right)$$

por lo que al verificarse que

$$3\cdot\log\frac{5}{4}\cong 0.29<1$$

de (13) y (14) se deduce

$$\delta\left(\frac{A_n}{a_m \cdot a_{n-m}}\right)-\delta\left(\frac{a_n}{A_m \cdot A_{n-m}}\right)\in\{0,1\}$$

lo que garantiza que (12) es una buena acotación de

$$\delta\left(C_{n,m}\right)$$

Como aplicación demostraremos la siguiente desigualdad

$$\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}<C_{100,50}$$

propuesta en una olimpiada matemática (p. 32, Shklarsky, Chentzov y Yaglom, 1993).

Algunos números grandes son tan importantes que reciben nombre propio: la constante de Avogadro la constante de Skewes...

Nótese que por (13)-(15) se deduce

$$\delta\left(\frac{a_{100}}{A_{50}\cdot A_{50}}\right)=30=\delta\left(\frac{A_{100}}{a_{50}\cdot a_{50}}\right)$$

entonces de (12) se tiene

$$\delta\left(C_{100,50}\right)=30$$

y como

$$\delta\left(\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}\right)=1+\left[100\cdot\log 2-\log 10-\frac{1}{2}\cdot\log 2\right]=29$$

se concluye

$$\frac{2^{100}}{10\cdot\sqrt{2}}<C_{100,50}$$

Estudio de la convergencia de productos infinitos

Terminaremos este trabajo estableciendo, a través de la función $\delta(x)$, la equivalencia entre la convergencia de un producto infinito y su serie logarítmica asociada. Es bien sabido (p. 7, Rainville, 1971) que

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\quad\text{de modo que}\quad a_n\neq -1\ \ \forall\, n\geq 1$$

y

$$\sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right)$$

tienen ambas el mismo carácter.

En la referencia antes citada podemos encontrar una prueba de este resultado. Nosotros demostraremos este teorema como una consecuencia natural de la teoría desarrollada acerca del número de dígitos de la parte entera de un número. En efecto, es claro que

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\ \text{ converge}\Leftrightarrow\delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)<+\infty \qquad (16)$$

por lo que como

$$\delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)=1+\left[\log\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right]=1+\left[\sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right)\right]$$

se deduce

$$\delta\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+a_n\right)\right)<+\infty\Leftrightarrow\sum_{n\geq 1}\log\left(1+a_n\right)\ \text{ converge} \qquad (17)$$

y en consecuencia de (16) y (17) se tiene el resultado deseado.

Conclusiones

El objeto de este trabajo no es dar un método para demostrar desigualdades numéricas, ni mucho menos funcionales. Conscientes de que esta técnica es demasiado burda para alcanzar tan altas cotas, estas páginas tan sólo pretenden mostrar, desde la inspiración que siempre aporta el resolver problemas de olimpiadas matemáticas, un modelo de trabajo para estimar grandes números expresados a través de sumas, potencias, raíces, factoriales... y probar desigualdades entre números muy grandes, mostrando algo más que los métodos convencionales: el orden de magnitud entre ambos números.

Lógicamente el talón de Aquiles de esta técnica es que no es útil para demostrar una desigualdad en la que el número de dígitos de ambos números es el mismo. Así por ejemplo, con ella no podemos responder al siguiente problema:

¿Qué número es mayor 2^{100} ó 3^{63}?

pues

$$\delta\left(2^{100}\right)=1+[100\cdot\log 2]=31=1+[63\cdot\log 3]=\delta\left(3^{63}\right)$$

Cuando esto suceda podemos aplicar la misma técnica averiguando el número de dígitos de los números en cuestión (en nuestro caso 2^{100} y 3^{63}) en un sistema de numeración cuya base sea menor que la decimal, como por ejemplo la base binaria. En efecto, este argumento se apoya en el hecho evidente de que

$$A_{(10}<B_{(10}\Leftrightarrow A_{(2}<B_{(2}$$

donde la notación $A_{(\alpha}$ significa que el número A está escrito en la base de numeración α. La idea se basa en que cuanto más pequeña es la base de numeración, menos números hay que tengan el mismo número de dígitos, con lo que más improbable será que nuestra técnica fracase. Por otra parte conviene observar que el hecho de trabajar en otra base de numeración no implica más cálculos adicionales, pues aplicando la fórmula de cambio de base logarítmica se tiene

$$\delta_2(x)=\delta\left(x_{(2}\right)=1+[\log_2 x]=1+\left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$$

Aplicando esta idea a nuestro caso particular anterior se tiene

$$\delta_2\left(2^{100}\right)=1+\left[\frac{\log 2^{100}}{\log 2}\right]=1+\left[100\cdot\frac{\log 2}{\log 2}\right]=$$
$$=101>100=1+\left[63\cdot\frac{\log 3}{\log 2}\right]=\delta_2\left(3^{63}\right)$$

por lo que $3^{63} > 2^{100}$. Naturalmente este problema está elegido con la única intención de ilustrar la idea de que el cambio de sistema de numeración nos puede ser útil cuando la técnica propuesta falle, ya que podríamos haber respondido a la cuestión anterior mediante razonamientos elementales. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T.M. (1989): *Calculus (vol. II)*, Ed. Reverté, Barcelona.

CILLERUELO, J. y CÓRDOBA A. (1992): *La Teoría de Números*, Ed. Mondadori, Madrid.

GARCÍA ALCAINE, G. (1997): "Los grandes números y la lejanía del infinito", *Revista Española de Física 11(2)*, 53-56.

GARCÍA TUÑÓN, P y ABASCAL FUENTES, P. (1994): "Introducción a la criptografía de la clave pública", *Revista Puig Adam 37*, 17-27.

KOROVKIN, P. P. (1976): *Desigualdades*, Ed. Mir (Colección Lecciones Populares de Matemáticas), Madrid.

MALBA TAHAN (1988): *El Hombre que Calculaba*, Ed. Antalbe, Barcelona.

RAINVILLE, E. D. (1971): *Special Functions*, Ed. Chelsea Publishing Company, New York.

SAGAN, C. (1985): *Cosmos*, Ed. Planeta, Barcelona.

SHKLARSKY, D.O., CHENTZOV N.N. y YAGLOM I.M. (1993): *The URSS Olympiad Problem*, Ed. Dover, New York.

SPIEGEL, M.R. y ABELLANAS L. (1997): *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, Ed. Mondadori, Madrid.

Estrella y poliedro

Fotos Francisco
Martín Casalderrey

SUMA 49

Junio 2005, pp. 25-32

Las hipotecas y la tasa anual equivalente

La mayor parte de nosotros hacemos uso de los créditos que nos ofrecen las entidades financieras para la adquisición de distintos bienes, sobre todo la vivienda. En este artículo pretendemos mostrar las matemáticas que se encuentran debajo de estas operaciones financieras, evitando en lo posible el lenguaje financiero. También introducimos el concepto de la Tasa Anual Equivalente (TAE) que nos sirve para comparar los distintos créditos, así como un programa para DERIVE que nos permite calcularla en distintas situaciones.

Bank loans meant for property acquisition, mainly home acquisition, are commonplace to most of us. This article intends to show the mathematics underlying in financial operations, regardless of financial language when possible. The concept of Annual Percentage Rate (APR), which helps us compare the different loans, is also dealt with, as well as a programme for DERIVE, which will enable us to reckon it in different situations.

En el número 38 de la revista SUMA podemos leer una viñeta de Antonio Fraguas "Forges" incluido dentro del artículo de Fernando Corbalán en cuyo texto se puede leer:

> Mi teoría es que nos enseñan tan mal las matemáticas para que cuando seamos mayores no nos enteremos de lo que nos roban en las hipotecas.

Tras ese chiste, se esconde una realidad asumida por muchas personas; las informaciones que solicitamos a los bancos referidas a los préstamos sólo se pueden calcular mediante el ordenador del propio banco. De este modo, los bancos actúan como auténticas *cajas negras* a las que nosotros acudimos con nuestros datos y nos devuelven la cuota que tenemos que pagar, sin que nada más podamos hacer para comprender lo que está sucediendo.

Las matemáticas que se esconden bajo las hipotecas están al alcance de un alumno de primero de Bachillerato.

Sin embargo las matemáticas que se esconden bajo las hipotecas están al alcance de un alumno de primero de Bachillerato, pues sólo se necesitan logaritmos y exponenciales para comprenderlas. De hecho, en la mayor parte de los textos y programas de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se incluye un apartado dedicado a las matemáticas financieras, pero en la mayoría de los casos (al menos en los que nosotros hemos podido consultar) el capítulo se detiene en las *anualidades de amortización*, quedando más como un hecho anecdótico, que como una aplicación útil y real. No obstante, casi todos nosotros utilizaremos créditos para adquirir algunos de los bienes que necesitaremos (sobre todo la vivienda) y estamos perdiendo una oportunidad de introducir a los alumnos en unos contenidos que pueden resultarles realmente útiles en el futuro y que, desde luego, forman parte de una educación para el consumidor que no debemos dejar de lado.

Francisco Javier Pascual Burillo
IES Enrique de Arfe. Villacañas. Toledo.
Ana Rosa Romero Ramos
IES Garcilaso de la Vega. Villacañas. Toledo.

En el presente artículo pretendemos exponer estos contenidos evitando en lo posible los términos *financieros* que nos los hacen inaccesibles (quizá quieren hacernos creer que las matemáticas financieras son incomprensibles). Estos contenidos están pensados para su incorporación en el currículo de matemáticas del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.

Los préstamos. El método de amortización francés

Los préstamos son una operación financiera mediante la cual, alguien que tiene una cierta cantidad de dinero se la cede a otro individuo con la condición de que se lo devuelva. En la realidad, la primera de estas dos personas suele ser una entidad financiera (un banco, caja de ahorros, etc), mientras que la segunda de las personas somos cualquiera de nosotros. En estos casos, lo normal es que la cantidad que tenemos que devolver al banco sea superior a la que nos ha prestado, puesto que tenemos que devolver también los *intereses*.

Los préstamos son una operación financiera mediante la cual, alguien que tiene una cierta cantidad de dinero se la cede a otro individuo con la condición de que se lo devuelva.

Una de las formas más comunes de devolver un préstamo es el conocido como método francés, en el cual pagamos unas cuotas constantes, parte de las cuales va destinada a pagar la deuda y otra parte a devolver los intereses generados por el capital pendiente de devolver. Este método de amortización está representado gráficamente en la figura 1.

C_i: Deuda al inicio del período i
A: Cuota
A_i: Amortización efectiva en el período i
I_i: Interés del período i

Figura 1. Representación gráfica de la amortización de un préstamo en cuatro cuotas constantes.

Cálculo de la anualidad

La *anualidad* es la cantidad que tenemos que pagar cada año para devolver el préstamo, pero como en la práctica las cuotas que se pagan son mensuales, tiene más sentido hablar de mensualidad. No obstante, el tipo de interés que nos ofrecen los bancos suele ser anual y para poder realizar los cálculos debemos hacer que el interés sea mensual. Esto lo conseguimos dividiendo la cantidad que aparece en el contrato con el banco entre 1200, así obtenemos el tanto por uno efectivo mensual que denotaremos a partir de ahora por i.

Para calcular la mensualidad que tendremos que pagar debemos tener en cuenta que el capital en que se convertirían todas las mensualidades al cabo de n meses debe ser igual a la cantidad en la que se transformaría la deuda C_0 a interés compuesto i durante ese período. (Es lo que se conoce como *equivalencia financiera* al final del período).

Así, el capital inicial C_0, al cabo de n meses se convertiría en $C_0 \cdot (1 + i)^n$. Para calcular el capital al que equivalen todas las mensualidades, observemos las siguiente tabla:

Cuota	Tiempo (meses)	Valor final
A	n-1	$A(1+i)^{n-1}$
A	n-2	$A(1+i)^{n-2}$
A	n-3	$A(1+i)^{n-3}$
...	...	...
A	2	$A(1+i)^2$
A	1	$A(1+i)^3$
A	0	A

Se puede observar que la primera mensualidad está un mes menos, ya que la mensualidad la pagamos al final del mes, mientras que el dinero lo recibimos al inicio.

Entonces $C_0 \cdot (1 + i)^n$ tiene que ser igual a la suma de los valores situados en la última columna, que es una progresión geométrica, de donde obtenemos que

$$C_0 \cdot (1+i)^n = A + A \cdot (1+i) + \ldots + A \cdot (1+i)^{n-2} + A \cdot (1+i)^{n-1} =$$
$$= A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y, despejando A, obtenemos el valor de la mensualidad

$$A = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad (1)$$

Intereses y amortización efectiva de cada mensualidad

En realidad, en cada cuota estamos pagando una parte del capital que le adeudamos al banco y la otra parte se destina a pagar los intereses que genera el dinero que nos han prestado, según se aprecia en la figura 1, es decir

$$A = I_p + A_p$$

Donde I_p representa los intereses que pagamos y A_p la cantidad amortizada en la p-ésima cuota. Podemos calcular la cantidad que destinamos a cada uno de estos conceptos en cada cuota. Para ello, lo más sencillo es calcular ambos valores simultáneamente de forma inductiva. Veamos cómo:

La anualidad es la cantidad que tenemos que pagar cada año para devolver el préstamo, pero como en la práctica las cuotas que se pagan son mensuales, tiene más sentido hablar de mensualidad.

En primer lugar, podemos ver que los intereses que genera el capital prestado durante el primer mes serán

$$I_1 = C_0 \cdot i \qquad (2)$$

de este modo el dinero que dedicamos a la amortización del capital (esto es, la deuda que *nos quitamos*) será

$$A_1 = A - I_1 \qquad (3)$$

de modo que tras pagar la primera mensualidad debemos al banco

$$C_1 = C_0 - A_1$$

y los intereses a pagar en la segunda mensualidad serán

$$I_2 = C_1 \cdot i = (C_0 - A_1) \cdot i = I_1 - A_1 \cdot i$$

y la cantidad amortizada en el segundo período

$$A_2 = A - I_2 = A_1 + I_1 - I_1 + A_1 \cdot i = A_1 \cdot (1 + i)$$

Siguiendo de esta manera es sencillo probar por inducción que

$$A_{p+1} = A_p \cdot (1 + i) = A_1 \cdot (1 + i)^p \qquad (4)$$

Combinando las ecuaciones (1) a (4) se tiene que

$$A_{p+1} = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

lo que nos permite calcular lo pendiente de devolver al final del período p-ésimo, sumando así una progresión geométrica

$$C_p = C_0 - \sum_{k=1}^{p} A_k = C_0 \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1} \qquad (5)$$

Préstamos a interés variable

Uno de los casos más habituales en los préstamos (sobre todo en los hipotecarios) es que en el contrato el tipo de interés sea variable, procediéndose a la revisión del mismo generalmente cada año o cada seis meses. Pero, ¿cómo podemos calcular la nueva cuota que vamos a tener que pagar? Para ello tenemos que tener en cuenta que, tras el período transcurrido, el capital que le debemos al banco es C_p y que el período que tenemos para devolverlo es $n - p$, por lo que si i' es el nuevo tanto por uno de interés que aplicaremos a nuestro préstamo, tenemos que la nueva cuota será

$$A' = C_p \cdot i' \cdot \frac{(1+i')^{n-p}}{(1+i')^{n-p} - 1}$$

es decir, que cada vez que se renueva el préstamo es como si se volviera a abrir uno nuevo con las nuevas condiciones.

Nueva Hipoteca		
Revisión	Tipos	TAE
6 meses	4%	4,42%
1 año	4%	4,39%
Resto	Euribor +0,49%, Revisión anual	
Comisión apertura:	0,30%	
Hasta el 80% del valor de la tasación		

La amortización anticipada

Otro de los problemas que se plantean habitualmente en los préstamos es el de la amortización anticipada, es decir, que cuando va a comenzar el período p ingresamos una cantidad A_e en nuestro préstamo. En ocasiones, por este concepto tenemos que pagar comisiones (que suele ser un porcentaje sobre la cantidad ingresada y que viene especificada en el contrato que firmamos con el banco). En nuestro caso consideraremos A_e como la cuota neta, es decir, ya descontadas las comisiones que estemos obligados a pagar.

Dos son las posibilidades que generalmente nos ofrecen las entidades financieras. La primera es disminuir la cuota. En ese caso, para calcular la nueva cuota, actuaremos como en el apartado anterior, por lo que la nueva cuota vendrá dada por la expresión

$$A' = C'_p \cdot i \cdot \frac{(1+i)^{n-p}}{(1+i)^{n-p}-1}$$

donde $C_p' = C_p - A_e$.

La otra posibilidad es conservar la cuota pero disminuir el período en el que vamos a terminar de pagar el préstamo. En este caso A permanece constante, y debemos calcular el nuevo plazo, que denotamos por k.

$$A = C'_p \cdot i \cdot \frac{(1+i)^k}{(1+i)^k - 1} \Rightarrow \frac{C'_p \cdot i}{A} = 1 - \frac{1}{(1+i)^k}$$

de donde, despejando , obtenemos la expresión que nos da el nuevo período

$$k = \frac{\log\left(\dfrac{A}{A - C'_p \cdot i}\right)}{\log(1+i)}$$

> "El Tipo Anual Equivalente expresa el coste total del dinero, por la suma de los intereses totales pagados, los efectos del sistema de amortizaciones y las comisiones de apertura."
> *Tamames, 1992*

El TAE (Tipo Anual Equivalente)

El Tipo Anual Equivalente expresa el coste total del dinero, por la suma de los intereses totales pagados, los efectos del sistema de amortizaciones y las comisiones de apertura. (Tamames, 1992). Es decir que este tipo de interés tiene en cuenta los intereses pagados, la forma en la que lo hemos pagado y las comisiones que estamos obligados a pagar.

La utilidad de este dato, radica en que nos permite comparar dos créditos sin necesidad de hacer cálculos complicados, ya que, a priori , entre dos entidades que nos ofrezcan créditos siempre será mejor para nosotros aquel que nos ofrezca un menor TAE (no obstante, y aunque esto es cierto en términos generales, tendremos que considerar otras obligaciones que nos impone el banco y leer la *letra pequeña* para decidir entre uno y otro).

Desde nuestro punto de vista de futuros deudores, nos interesa el tanto efectivo para el deudor que se define como aquel que hace que las cantidades recibidas y las devueltas sean iguales, valoradas todas en el momento inicial.

El caso más sencillo ocurre cuando el tipo de interés es fijo. En este caso sólo tenemos que tener en cuenta las comisiones pagadas inicialmente α_0 y las que pagamos con cada mensualidad (si las hay, las consideraremos incluidas en cada cuota). En ese caso, en el instante cero recibimos $C_0 - \alpha_0$, y esta cantidad tiene que ser igual a la suma de las cantidades pagadas, pero valoradas en el instante inicial. Dichos valores se representan en la tercera columna, donde el tiempo representa el período transcurrido entre el instante cero, cuando recibimos el préstamo, y el momento del pago de la cuota.

Cuota	Tiempo (meses)	Valor inicial
A	1	$A(1+i)^{-1}$
A	2	$A(1+i)^{-2}$
A	3	$A(1+i)^{-3}$
...	...	...
A	n-1	$A(1+i)^{-(n-1)}$
A	n	$A(1+i)^{-n}$

Sumando la tercera columna, tenemos

$$A \cdot (1+i)^{-1} + \ldots + A \cdot (1+i)^{-n} = A \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y la ecuación que tenemos que resolver es

$$C_0 - \alpha_0 = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Esta ecuación es irresoluble por métodos algebraicos, por lo que es necesario calcular la solución de forma numérica. Para ello podemos utilizar la función TAE generada por el programa que incluimos en el artículo, si conocemos el valor de las cuotas que tenemos que pagar, o la función TAE_INT si lo que conocemos es el tipo de interés nominal, como se puede ver en los ejemplos que incluimos al final del artículo.

Cuando el interés es variable, las cuentas se complican mucho, ya que en ese caso las mensualidades también varían.

Supongamos que el tipo de interés varía m veces a lo largo de la vida del préstamo. De este modo, las cuotas (incluidas las comisiones) vendrán dadas por $A_1, ..., A_m$ cada una de las cuales las pagaremos durante n_k períodos, con k variando entre 1 y m, de forma que $n_1 + ... + n_m = n$, el total del períodos.

es decir,

$$C_0 - \alpha_0 = A_1 \cdot \sum_{k=1}^{n_1} (1+i)^{-k} + A_2 \cdot (1+i)^{-n_1} \cdot \sum_{k=1}^{n_2} (1+i)^{-k} + \ldots$$
$$\ldots + A_m \cdot (1+i)^{-(n_1+\ldots+n_{m-1})} \cdot \sum_{k=1}^{n_m} (1+i)^{-k}$$

Figura 4

De este modo la cantidad a igualar con $C_0 - \alpha_0$ será la siguiente suma, donde lo que buscamos es el valor de i:

Se denomina EURIBOR al tipo de contado, publicado por la Federación Bancaria Europea, para las operaciones de depósitos en euros a plazo de un año, calculado a partir del ofertado por una muestra de bancos para operaciones entre entidades de similar calificación.

$$A_1 \cdot (1+i)^{-1} + \ldots + A_1 \cdot (1+i)^{-n_1} +$$
$$A_2 \cdot (1+i)^{-(n_1+1)} + \ldots + A_2 \cdot (1+i)^{-(n_1+n_2)} +$$
$$\ldots +$$
$$A_m \cdot (1+i)^{-(n_1+\ldots+n_{m-1})} + \ldots + A_m \cdot (1+i)^{-n}$$

Sumando las progresiones, obtenemos

$$C_0 - \alpha_0 = A_1 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} + A_2 \cdot (1+i)^{-n_1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} + \ldots$$
$$\ldots + A_m \cdot (1+i)^{-(n_1+\ldots+n_{m-1})} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n_m}}{i}$$

Ecuación que podemos resolver numéricamente con las funciones TAE o TAE_INT definidas para DERIVE.

El TAE de los préstamos

En todas las operaciones bancarias es obligatorio que aparezca el TAE, tal obligación viene impuesta por la circular 8/90 del Banco de España. Pero, ¿qué gastos se incluyen en el cálculo del TAE y cuáles no?

La respuesta la encontramos en la circular del Banco de España antes citada. En particular el punto 4 de su Norma Octava dice lo siguiente:

En la información sobre el coste efectivo de las operaciones activas, se aplicarán las reglas siguientes:

a. En el cálculo del coste efectivo se incluirán las comisiones y demás gastos que el cliente esté obligado a pagar a la entidad como contraprestación por el crédito recibido o los servicios inherentes al mismo. No se considerarán a estos efectos las comisiones o gastos que se indican a continuación, (...):

– Los gastos que el cliente pueda evitar en uso de las facultades que le concede el contrato(...).

– Los gastos a abonar a terceros, en particular los corretajes, gastos notariales e impuestos.

– Los gastos por seguros o garantías(...).

Pero cuando contratamos un préstamo cuyo tipo de interés es variable, nosotros, y también nuestro banco, desconocemos cómo se va a comportar dicho tipo de interés en el futuro. La misma Norma, en el punto 6, nos indica la manera en la que debemos calcular el TAE:

En las operaciones a tipo de interés variable, el coste o rendimiento efectivo que se ha de reflejar en la documentación contractual se calculará bajo el supuesto teórico de que el tipo de interés de referencia inicial permanece constante, durante la vida del crédito, en el último nivel conocido en el momento de celebración del contrato.

Si se pactara un tipo de interés fijo para cierto período inicial, se tendrá en cuenta para el cálculo, pero solo durante dicho período inicial. Excepcionalmente, si el tipo inicial se aplicara durante un plazo de diez años o más o durante la mitad o más de la vida del contrato, aplicándose, al menos durante tres años, en el cálculo del coste o rendimiento efectivo solo se tendrá en cuenta ese tipo inicial pactado.

Plazo	Importe Máximo	Tipo de interés	Mensualidad por 6000€ a plazo máximo	T.A.E.*
Hasta 1 año	3 mensualidades (máx. 6000€)	7,00%		9,67%
Hasta 3 años	6 mensualidades (máx. 6000€)	7,50%		8,64%
Comisiones:	Apertura: 1,20% (mínimo 42€)	Estudio: Exento	Cancelación parcial: 3%	Cancelación total anticipada: 3%

*TAE calculado a plazo e importe máximo, con cuotas mensuales.

Figura 2. Anticipo nómina, con nómina domiciliada

Esta normativa aclara todas las posibles dudas que puedan surgir. Todos los créditos hipotecarios de interés variable se rigen por unos índices de referencia, cuyo valor publica mensualmente el Banco de España. Estos índices son, el MIBOR, el EURIBOR, CECA y el IRPH con tres versiones, de Bancos, de Cajas y del Total de las Entidades. De este modo, en los contratos de créditos hipotecarios lo que aparece es el período tras el cual se revisará el préstamo y el diferencial aplicado. Uno de los más habituales es el EURIBOR, así no es extraño ver en la prensa que un préstamo se ofrece a, por ejemplo EURIBOR + 0'80.

Aplicaciones didácticas

Una primera aproximación a estos contenidos podría hacerse con alumnos de Secundaria cuando se introducen los conceptos de interés simple e interés compuesto. Basta con que estos conozcan la existencia del TAE y su utilidad para comparar productos financieros. Para ello sugerimos una actividad por grupos en la que los alumnos busquen anuncios y recortes de prensa donde aparezca la palabra TAE. Poste-riormente los deben clasificar en productos de ahorro y de crédito, para después comparar y ordenar de mejor a peor producto las distintas ofertas.

> *En todas las operaciones bancarias es obligatorio que aparezca la TAE, tal obligación viene impuesta por la circular 8/90 del Banco de España.*

Por otra parte, los libros de texto de Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales suelen incluir en su primer curso una referencia a las hipotecas; en general se detienen únicamente en el cálculo de la cuota a pagar en un préstamo a interés fijo. Con estos alumnos, los contenidos expuestos podrían servir para elaborar actividades de profundización, sobre todo para los alumnos que cursen las optativas relacionadas con la economía. Sugerimos que se organicen por grupos y elaboren un trabajo relativo a estos temas; partiendo de los conocimientos teóricos, y con el fin de hacer más atractiva la investigación, los alumnos pueden dirigirse a las entidades financieras de su localidad para pedir información sobre las hipotecas, los créditos al consumidor, las tarjetas de crédito y los productos de ahorro, para posteriormente trabajarlo en grupo y exponerlo al resto de sus compañeros. Pueden completar la información recogida en las entidades financieras con recortes de prensa, anuncios de televisión o radio, etc.

Ejemplos de cálculo del TAE

Ejemplo 1
Veamos los créditos que nos ofrece la entidad financiera en la tabla que aparece en la figura 2. Solicitamos un préstamo de 6000 euros a devolver en un año. Como la comisión de apertura es del 1'20% tendremos que abonar por este concepto 72 euros. Para el cálculo del TAE, introducimos en DERIVE:

#25: TAE_INT (6000, 72, [7.50], [36])

y simplificamos la expresión, obteniendo como resultado

#26: [8.644318450]

que redondeado a las centésimas nos da el 8'64% indicado en el folleto.

Todos los créditos hipotecarios de interés variable se rigen por unos índices de referencia, cuyo valor publica mensualmente el Banco de España.

Si decidimos devolver el crédito en menos tiempo, por ejemplo en 2 años, vemos como el TAE aumenta, ya que el efecto de la Comisión de Apertura tiene cada vez más importancia,

#27: TAE_INT (6000, 72, [7.50], [24])

#28: [9.052897079]

Es decir, el 9'05%.

También podemos observar cómo el TAE aumenta cuando disminuye la cantidad que solicitamos al banco. Así supongamos que solicitamos 3000 euros, a devolver en 3 años. La comisión de apertura en este caso será 3000·1'20% = 36 euros, pero como el mínimo es de 42, ésta es la comisión a pagar. Calculamos el TAE:

#29: TAE_INT (3000, 42, [7.50], [36])

#30: [8.793263106]

Ahora el TAE es del 8'79%.

Ejemplo 2
Vemos el anuncio del la figura 3 (se encuentra en la página siguiente). En éste se nos ofrecen unas condiciones que parecen inmejorables. Aunque hay ocasiones como esta, en las que la diferencia entre el Tipo de interés nominal y el TAE resultan bastante importantes. Veámoslo. Supongamos que compramos un electrodoméstico por valor de 1500 €. En ese caso y según las condiciones propuestas, tenemos que pagar una entrada del 20% (300 €) por lo que la cantidad que en realidad nos prestan es de 1200, que tendremos que devolver en 15 meses. De esta cantidad hay que pagar un 2% junto con la primera mensualidad (24 €), por lo que será más sencillo calcular el TAE a través de las cuotas. Para calcular la cuota básica, como el tipo de interés es del 0%, basta con dividir el total entre los 15 meses (1200 € / 15 = 80 €). Si a la cuota del primer mes le sumamos la comisión tendremos todos los elementos para calcular el TAE:

#31: TAE (1500, 300, [80+24, 80] , [1, 14])

#32: [3.078039114]

Es decir, un TAE del 3'08%.

Ejemplo 3
Observemos ahora la figura 4 (se encuentra dos páginas hacia atras). En este caso se nos dice que la Hipoteca es a tipo variable con un tipo de interés de EURIBOR + 0'45. Como tenemos que calcular el TAE, debemos tener en cuenta tal y como nos dice la circular del Banco de España el tipo de referencia de Febrero de 2002 (3'594%) y considerarlo fijo durante toda la vida del préstamo. Supondremos que vamos a solicitar un préstamo de 90.000 € a devolver en 20 años (240 meses). Como la comisión de apertura es del 0'30%, habrá que pagar como comisión 270 €. Para calcular el TAE introducimos en DERIVE la instrucción:

#33: TAE_INT (90000, 270, [3.594+0.45], [20*12])

que nos da como resultado

#34: [4.155747729]

que redondeando a dos decimales nos da 4'16%, el TAE expresada en el anuncio.

La cuota a pagar también la podemos obtener con DERIVE.

En este caso con la orden

#35: CUO_INT (90000, [3.594+0.45], [20*12])

#36: [547.4712056]

Una cuota de 547’47€.

Pero si vamos a solicitar el crédito en Septiembre de 2004, y además lo queremos devolver en 25 años, lo que necesitamos es actualizar ese TAE, considerando que el EURIBOR fijado para septiembre fue del 2'302%, introducimos

#37: TAE_INT (90000, 270, [2.302 + 0.45], [25*12])

y obtenemos

#38: [2.814768702]

Un TAE del 2'81%.

Tal y como nos indica la Circular del Banco de España, debemos considerar el tipo de interés de referencia del momento en el que vamos a calcular el TAE (en nuestro caso, en septiembre de 2004 el EURIBOR es de 2'302%), por lo tanto para calcular el TAE de un préstamo de 70000 €, introducimos:

#39: TAE_INT (70000, 210, [4, 2.302 + 0.49], [12, 228])

#40: [2.995023291]

Un TAE del 3%.

Para calcular el importe de las cuotas a abonar, introducimos:

Figura 3

Ejemplo 4

En este último caso vamos a calcular el TAE de un préstamo como el especificado en la figura 5. En él se nos especifica que durante un período inicial de un año, vamos a pagar un 4% de interés, y, a partir del primer año, se revisará a EURIBOR + 0'49, además la comisión de apertura es del 0'30%.

#41: CUO_INT (70000, [4, 2.302 + 0.49], [12, 228])

#42: [424.1862305, 382.7706667]

Es decir, cuotas de 424'19 € y de 382'77 €. Aunque la segunda de ellas tiene un carácter meramente informativo, ya que el tipo de interés de referencia puede variar notablemente al alza o a la baja en el transcurso de un año. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Normativa de los préstamos: Circular 8/1990 del Banco de España, de 7 de Septiembre.

ÁLVAREZ, M. (1992): *Matemáticas financieras*, Alhambra Longman, Madrid.

BIOSCA, A., ESPINET, M. J., FANDOS, M. J., JIMENO, M., REY, J. (1998): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*, Edebé, Barcelona.

CORBALÁN, F. (2001): "La actualidad matemática", Suma n.º 38, 99-102.

GONZÁLEZ, V. (1984): *Introducción a las Operaciones financieras, bancarias y bursátiles*, Tebar Flores, Madrid.

KUTZLER, B. (1998): *Introducción a DERIVE para Windows*, Diazotec, Valencia.

ROMO, J. J.; CUEVAS, A,; DELICADO, P. (2000): *EULER, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*, Ediciones SM, Madrid.

TAMAMES, R., (1992), *Curso de economía*, Alhambra Longman, Madrid.

SUMA 49
Junio 2005, pp.33-35

Diseñando camisetas: Un viaje por la geometría nazarí

En Diseñando camisetas: un viaje por la geometría nazarí*, se describe cómo confeccionar camisetas en el aula de matemáticas a partir de diseños obtenidos tras resolver dos problemas geométricos planteados en clase: La teselación del plano con mosaicos regulares y la obtención de mosaicos nazaríes utilizando el principio de conservación de la superficie pero no de la forma.*

On Designing t-shirts: A journey through the nazarí geometry *we can discover how to make t-shirts in Mathematics class, by using desings obtained from solving two geometry problems: To cover the surface with regulars mosaics and to obtain ´nazaries mosaics´we use the principle of conservation of area not of shape.*

¿Es posible unir belleza con matemáticas en un curso de 3º de la ESO? ¿Se podría conjugar en un aula el sentido estético de la geometría con la rigurosidad que, de alguna manera, impone el currículo de Educación Secundaria Obligatoria? ¿Podríamos fundir el rigor matemático junto a la creatividad del artista, de manera que nos viéramos envueltos por la matemática?

Ser envuelto por la matemática. ¿Existe algún objetivo más lícito que, como profesores de matemáticas, hemos de intentar conseguir con nuestro alumnado?

La Alhambra de Granada

Pasear por la Alhambra de Granada hace que tengamos el convencimiento de que la matemática, por sí misma, es capaz de resultar significativa. Siempre queda en la memoria, casi sin querer, un diseño geométrico, una forma de teselar el plano, una simetría en el color...

El gran dominio de los polígonos que tenían los artesanos nazaríes consigue que, de forma inadvertida, estemos totalmente envueltos por la matemática.

En este artículo, describimos cómo se produjo un efecto parecido en alumnos y alumnas de 3º de ESO; pasando de matemáticos resolutores de problemas geométricos a creadores de mosaicos; de alumnos con más o menos interés por la asignatura a creadores de sus propias camisetas en las que se plasmaban los conocimientos geométricos adquiridos. En definitiva, de meros espectadores en la clase de matemáticas a artesanos capaces de cubrir el plano con polígonos, plasmando su trabajo en una camiseta, convirtiéndose a posteriori, en verdaderos transmisores de conocimientos geométricos para con sus compañeros.

Antonio Israel Mercado Hurtado
IES Torrellano. Elche. Alicante.
María Zoraida Custodio Espinar
Alicante.

¿Teselar camisetas en el aula de matemáticas?

El convencimiento absoluto de que nuestra labor como profesores de matemáticas es más sencilla, en tanto que los conocimientos que intentamos transmitir entren por los sentidos a nuestro alumnado, se convierte en la línea conductora de este trabajo.

¿Cómo puede nuestro alumnado percibir casi sin darse cuenta la grandiosidad de la geometría? Intentando dar respuesta a esta pregunta surgió la inspiración. A partir de ahí, uniendo la creatividad por un lado y la rigurosidad por otro, el camino estaba abierto para nosotros. Íbamos a diseñar camisetas, de fácil realización, en las que se plasmaran los conocimientos geométricos adquiridos en clase y que pasearíamos allá por donde fuéramos.

De una parte estudiaríamos aspectos geométricos y de otra, seríamos transmisores de los mismos, mediante nuestra propia ropa.

El proceso de motivación del alumnado se hizo diseñando varios tipos de camisetas, siguiendo modelos nazaríes: el polihueso, la pajarita, el poliavión...

Diseño de camisetas nazaríes respetando el principio de conservación del área del cuadrado, pero no de la forma.

La espontaneidad de los alumnos y alumnas, a la hora de calificar las camisetas que llevaba su profesor de matemáticas al aula, hizo que, plantearles el estudio de un tema matemático con el objetivo final de que cada uno se construyera su propia *camiseta matemática*, fuera una tarea muy grata. La motivación estaba plenamente conseguida. Los alumnos y alumnas habían quedado envueltos en las redes geométricas del arte nazarí casi sin darse cuenta.

En clase estudiamos el tema de “Movimientos Isométricos en el Plano”, y al finalizar el mismo, cada alumno elaboró su propia camiseta.

¿Cómo teselar una clase?

Una vez estudiados en clase traslaciones, giros y simetrías (Mercado, 2000) , centramos nuestro trabajo en la resolución de dos problemas geométricos:

1. Estudio de los mosaicos regulares y semirregulares, partiendo del problema: *¿Cómo rodear un punto utilizando polígonos regulares, siendo el punto, vértice de los polígonos utilizados?*

2. Estudio de los mosaicos nazaríes, partiendo del problema: *¿Cómo teselar el plano con polígonos obtenidos mediante el principio de conservación de la superficie y no de la forma?* (Ruiz Garrido y Pérez Gómez, 1987).

Una vez estudiados y resueltos estos dos problemas, nos dispusimos a confeccionar nuestras camisetas.

Los materiales necesarios para elaborar *camisetas nazaríes* en clase de matemáticas son muy sencillos, fáciles de conseguir y baratos:

- Una camiseta de manga larga o corta.
- Parches adhesivos tipo rodilleras de diversos colores.
- Un cúter.
- Plantilla con el modelo del mosaico que vamos a construir (concretamente las plantillas que nosotros utilizamos estaban confeccionadas con Cabri-Géométrie).
- Una plancha para pegar los parches a la camiseta.

Pasear por la Alhambra de Granada, hace que tengamos el convencimiento de que la matemática, por sí misma, es capaz de resultar significativa.

Camisetas de varios modelos finalizadas

El proceso de confección de una camiseta es muy sencillo:
En primer lugar, se elige un modelo de entre los encontrados en clase al resolver los problemas planteados. A partir de este modelo, con el cúter, se cortan los polígonos necesarios en los parches adhesivos, (ya sean polígonos regulares o polígonos nazaríes), utilizando unas plantillas hechas en ordenador. Posteriormente, se monta el modelo sobre la camiseta y se pega con el calor de la plancha.

Proceso de recorte de teselas básicas

Planchado del mosaico

Conclusiones

En muchas ocasiones, los profesores de matemáticas buscamos actividades *motivadoras* para nuestro alumnado. En esta búsqueda, contamos con la ayuda inestimable de la propia matemática. En esta tesitura nos encontrábamos cuando la inspiración nos llegó a través del arte nazarí.

Confeccionar camisetas con motivos geométricos, que surgen de la resolución de problemas de matemáticas en el aula, es una actividad motivadora de primer orden.

Hemos enfocado esta actividad como finalización del estudio de una unidad didáctica, pero también es una actividad que se puede plantear como un taller organizado por el Departamento de Matemáticas en alguna ocasión especial, como semanas culturales...

Cuando un alumno o una alumna lleva una camiseta teselada que ha confeccionado y es preguntado por algún otro compañero del Centro sobre el motivo que decora su camiseta, de nuevo se repite el proceso: *Otro alumno o alumna, ha sido envuelto por la matemática.* ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C., PÉREZ, R. Y RUIZ, C. (1997): *Simetría Dinámica. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*, Síntesis.

COXETER, H.S.M. (1984): *Fundamentos de geometría*, Ed. Limusa SA.

MERCADO, A. I., (2000): "Traslaciones, giros y simetrías", *Épsilon*, n.º 48, 225-231.

SAEM THALES (1995): *La Alhambra*, Proyecto Sur Ediciones, SAL., Granada.

Simetría y sección

Fotos Francisco
Martín Casalderrey

SUMA 49
Junio 2005, pp. 37-46

Matemáticas en la elaboración de estrellas. Demostraciones con cartulinoflexia

En este trabajo se presentan y analizan los problemas propuestos en el concurso matemático "El inGENIO no tiene edad", que tuvo lugar en nuestro colegio y en el que se enfrentaron alumnos de todas las edades, desde Infantil hasta Bachillerato. Cada problema iba relacionado con un paso para construir una estrella de papel con interesantes propiedades matemáticas. El equipo que resolvía todos sus ejercicios aprendía a crear estrellas.

This article introduces and analyses the exercises which were presented in the mathematical competition "El inGENIO no tiene edad", which took place in our school and children of all of ages took part. Each exercise dealt with a step in the building of a paper start with interesting mathematical properties. The team which achieved a resolution of all the exercises learned how to make a paper star.

¿Se puede decir que *demostrar que las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro* es un problema de ingenio? ¿A qué edad será genial nuestra respuesta? En un principio, parece difícil comparar la demostración utilizando coordenadas cartesianas de un alumno de 1º de Bachillerato con los argumentos de doblado de papel de un alumno de 3º de Primaria, aunque el hecho de usar menos herramientas matemáticas complejas parece premiar como resolución más ingeniosa a la segunda. ¿Qué ocurriría si enfrentamos a alumnos de todas las edades, desde Infantil de 3 años hasta 2º de Bachillerato, ante los mismos problemas *ingeniosos*? Nace así nuestro concurso "El inGENIO no tiene edad". Tres fueron los grandes objetivos para diseñarlo:

- Coordinar equipos de alumnos formados por un alumno de cada clase (desde Infantil de 3 años hasta 2º de Bachillerato) para resolver problemas propuestos en cada nivel.
- Buscar un elemento matemático común en el que se planteasen los problemas adecuándose a cada edad.
- Motivar al alumno para que el enfoque no fuese el de un complicado concurso de problemas matemáticos, sino que los participantes se enfrentasen jugando.

Para la realización de esta actividad era preciso la colaboración de todo el Departamento de Matemáticas, desde Infantil hasta Bachillerato, por lo que la organización del concurso ha sido llevada a cabo por: dos profesoras de Infantil, dos profesoras de Primaria, tres profesores de matemáticas de ESO y Bachillerato, un profesor de Primaria y coordinador de actividades extraescolares y diez alumnos de 4º de ESO que venían participando durante el curso en un Taller de Ingenio celebrado en nuestro colegio: El Carmelo de Granada.

Se motivó el concurso con carteles y elementos de papiroflexia en todas las clases. Durante las semanas previas al concurso, se animó a participar a todos los alumnos.

Para acercar nuestra experiencia a todas las edades, cada equipo debía de estar formado por 15 miembros: un alumno por cada curso, desde Infantil hasta Bachillerato, pasando por Primaria y ESO. La formación de los equipos era totalmente libre, siendo generalmente los de mayor edad los que *fichaban* a los más pequeños. Los alumnos de infantil fueron seleccionados por sus profesoras y, en el caso de que un equipo necesitase algún componente, éstos eran completados por la organización.

Rafael Ramírez Uclés
Colegio El Carmelo de Granada. Granada.

Plantear problemas para esta amplia gama de edades suponía encontrar algún material manipulativo que resultara atractivo tanto por su forma como por sus posibilidades matemáticas. Los elementos utilizados fueron estrellas de doce puntas construidas a partir de piezas de papel. Aprendimos a construir estas estrellas de nuestra alumna Maravillas Peláez en un taller de papiroflexia, mientras doblábamos pajaritas, cerditos y elefantes. Tres meses después de este concurso nos sorprendió gratamente encontrar la estrella como trabajo ganador de un concurso de papiroflexia propuesto por la revisa QUO.

En cada problema se describía un paso para la elaboración de la estrella y se planteaba un problema relacionado con este paso. Así, si el equipo coordinaba todos sus ejercicios, aprendía a *crear estrellas*.

Nuestro concurso constaba de tres fases que se desarrollaron en el salón de actos en una misma mañana:

- Primera fase:

El equipo disponía de treinta minutos aproximadamente.

Cada concursante (excepto los de infantil y 2º de Bachillerato) recibía las pruebas de todos los niveles y tenía que resolver el problema propuesto para su nivel. Una vez transcurrido el tiempo, se entregaban las soluciones.

- Segunda fase:

Se reunían los equipos y cada uno decidía qué problemas quería intentar resolver de nuevo y qué miembro lo haría individualmente. Para esta reunión sólo disponían de cinco minutos. Era importante, ya que alcanzaba más puntuación, que dentro de un equipo los problemas los resolvieran individualmente alumnos de niveles inferiores a la dificultad propuesta en el problema.

- Tercera fase:

Resolvían individualmente los problemas que habían decidido anteriormente. Para ello disponían de diez minutos.

En la prueba para los alumnos de 2º de Bachillerato e Infantil, la estrella era usada como dado (un cubo con las esquinas truncadas), donde las diferentes simetrías y las múltiples combinaciones de colores la convertían en un interesante objeto matemático que estudiaremos en este artículo. Esta actividad la realizaron de manera simultánea mientras el resto de su equipo resolvía sus correspondientes pruebas, disponiendo de una hora para realizarla.

Finalmente, se sumaban las puntuaciones obtenidas en la primera y tercera fase junto con los puntos conseguidos por los alumnos de infantil y de 2º de Bachillerato. El equipo ganador recibía una estrella y una camiseta con el logotipo del concurso para cada uno de sus integrantes.

Para una mayor claridad expositiva, seguiremos el siguiente esquema de presentación, aconsejando al lector la construcción de la estrella para una mejor comprensión de los problemas:

- Sección I: se explican los pasos para la construcción de la estrella de papel.

- Sección II: se describen los materiales de los que disponían los equipos para resolver los correspondientes problemas.

- Sección III: se presentan los problemas para cada uno de los cursos.

- Sección IV: se analizan los contenidos matemáticos de cada uno de los problemas anteriores, así como algunos comentarios al respecto.

- Sección V: se describen algunas conclusiones obtenidas tras el desarrollo de la actividad.

Los problemas vendrán posteriormente ordenados por cursos, ya que agrupados de esta forma los recibían los alumnos.

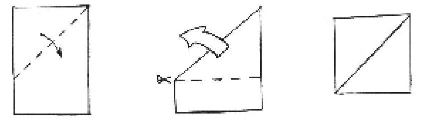
La relación entre los pasos para la elaboración de la estrella y los problemas de cada curso (desde primaria hasta ESO) vienen dados en el siguiente esquema:

- Paso 1: 4º de Primaria
- Paso 2: 1º de ESO
- Paso 3: 2º de Primaria
- Paso 4: 3º de Primaria
- Paso 5: 5º de Primaria
- Paso 6: 6º de Primaria
- Paso 7: 4º de ESO
- Paso 8: 3º de ESO
- Paso 9: 1º de Primaria

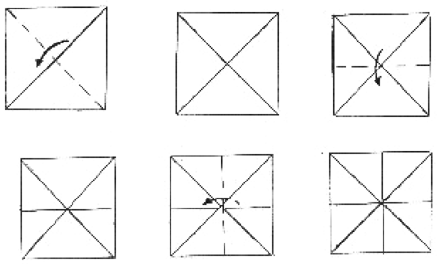
Los problemas de 2º de ESO y 1º de Bachillerato iban relacionados con pasos previos a la elaboración de la estrella, mientras que los problemas para Infantil y 2º de Bachillerato eran posteriores a esta.

Construcción de la estrella

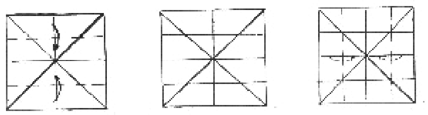
A continuación describimos los pasos para construir y ensamblar las piezas que forman la estrella. Si nos atrevemos con la cartulinoflexia, la belleza y consistencia de la estrella es mayor.



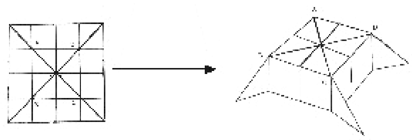
- Paso 1: Conseguir un cuadrado a partir del folio rectangular.



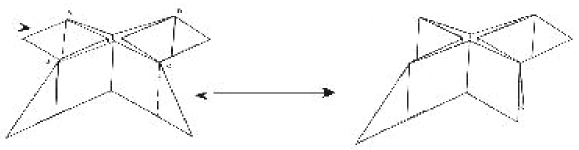
- Pasos 2, 3 y 4: Doblar las diagonales y las mediatrices de los lados del cuadrado.



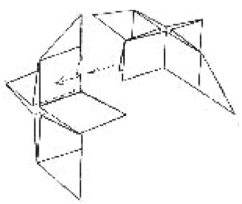
- Pasos 5 y 6: Doblar las mitades de las mitades de los lados.



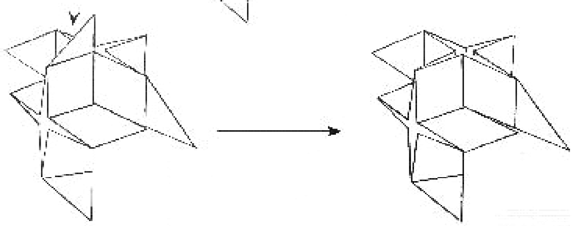
- Paso 7: Obtener la pieza dibujada en el paso siguiente localizando el cuadrado formado por los cuatro cuadrados centrales y uniendo en un mismo punto los puntos medios de sus lados.



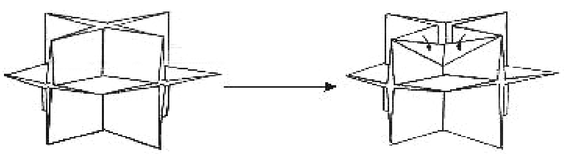
Doblando hacia dentro dos puntas opuestas, obtenemos la pieza quedando dos brazos cuadrados y dos triangulares. Necesitaremos 6 piezas para la fabricación de la estrella.



- Paso 8: Para ensamblar dos piezas, introducimos uno de sus brazos cuadrados en el interior del cuadrado del mismo tamaño que aparece en el brazo triangular de otra pieza.

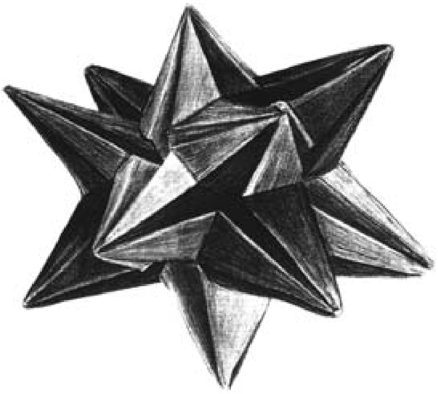


Para unirlas basta introducir el extremo triangular en el cuadrado de la otra pieza. Repetiremos este ensamblaje con las seis piezas, uniendo siempre brazos cuadrados con triangulares.



- Paso 9: Al unir todas las piezas quedan los tres planos obtenidos al seccionar el cubo perpendicularmente por los puntos medios de sus aristas. Para obtener las puntas, doblaremos hacia fuera las intersecciones de los planos anteriores como se indica en la figura.

- Paso 10: Obtenemos así una estrella con doce puntas, dos por cada una de las piezas. Cada una de estas puntas se localizaría en los puntos medios de las aristas de un cubo. Al unirlas queda un cubo con las esquinas truncadas hasta los puntos medios de las aristas.



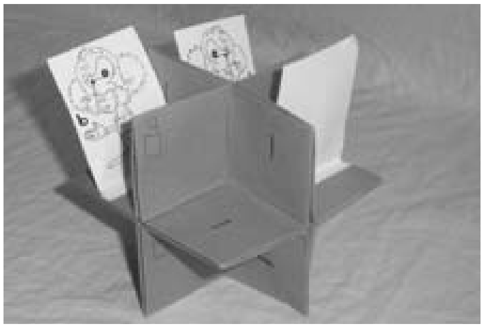
¿Se puede decir que demostrar que las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro es un problema de ingenio? ¿A qué edad será genial nuestra respuesta?

Material utilizado

Cada equipo disponía de estrellas de doce puntas para usarlas como dados. Cada color equivalía a una puntuación. Las estrellas se apoyaban sobre tres o cuatro puntas y si alguna de ellas coincidía con su color en el tablero, se añadía un punto a la suma obtenida. Había puntas blancas, azules, rojas, amarillas y verdes, por lo que se obtenía una amplia gama de combinaciones.

Los alumnos del curso de 1º de Primaria debían descubrir las imágenes que se formarían en una habitación llena de espejos (arriba, abajo, izquierda y derecha) cuando nuestro *Genio* mira la letra b.

Si desaparece el *Genio* y doblamos hacia dentro las esquinas, obtenemos la estrella.



Los alumnos de 4º de Primaria debían construir este cuadrado partiendo de un A4, pidiéndoles una *demostración*.

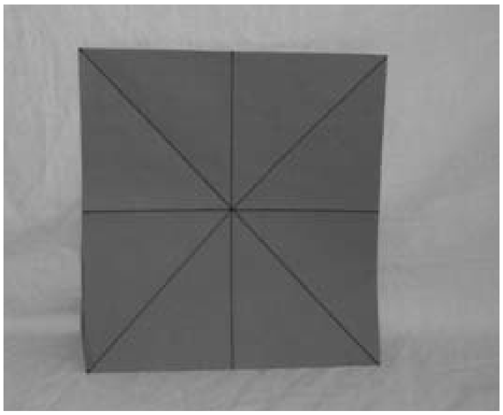
En esta figura están marcados los primeros dobleces para construir las fichas.

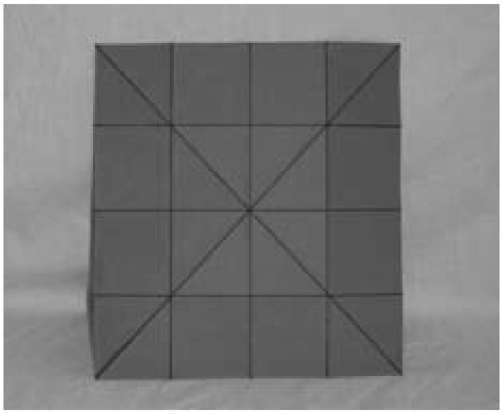
Aquí debían resolver sus problemas los alumnos de 2º y 3º de Primaria.

Al añadir los siguientes dobleces, se obtenía la figura de la izquierda.

Cada uno de los alumnos de 5º y 6º de Primaria recibían esta pieza y la utilizaban para resolver sus correspondientes problemas.

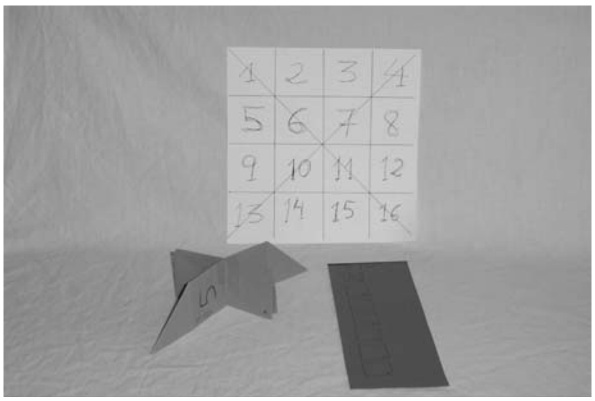
Este último juego, junto con el de 1º de Bachillerato, fue en el que los equipos encontraron una mayor dificultad.





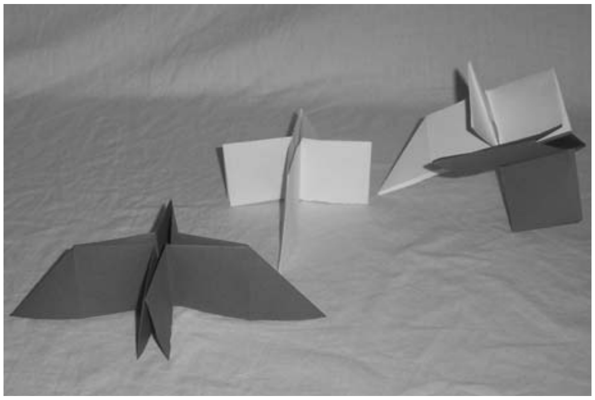
En la primera de las dos figuras anteriores se presenta el material para el juego de 4º de ESO Las fichas ya dobladas no se podían abrir (estaban pegadas) y con esta actividad se aprendía a construir las piezas que luego ensambladas de forma adecuada formarían la estrella. Los alumnos debían colocar con la posición adecuada los números del 1 al 16 en las caras correspondientes, usando como referencia el número 5 en una de ellas.

Se pretende motivar al alumno para que el enfoque no fuese el de un complicado concurso de problemas matemáticos, sino que los participantes se enfrentasen jugando.



El juego de 3º de ESO consistía en ensamblar las piezas. Los alumnos recibían dos piezas sueltas y otras dos unidas (introduciendo un extremo cuadrado de una de ellas en otro de la otra pieza y doblando el pico correspondiente de la otra hacia dentro).

Una vez recortado el cuadrado de un DIN-A4, queda un rectángulo. Si suponemos que el lado pequeño mide 1, los alumnos de 1º de Bachillerato tenían que conseguir que se convirtiera en un rectángulo áureo. Para ello sólo podían doblar el papel y utilizar otro folio como regla.



Problemas propuestos

A continuación, describimos los problemas con los que se enfrentaban los alumnos. Todos ellos iban acompañados del material correspondiente. Además, junto a los enunciados se marcaba el orden de los pasos a seguir para que, una vez resueltos, cada equipo pudiese construir la correspondiente estrella de papel. Señalamos aquí que cada alumno disponía de los problemas del resto de sus compañeros para ir pensando soluciones para la puesta en común.

Problemas de Primaria
1º Primaria: Noveno paso para hacer la estrella

Para hacer una estrella, nuestro genio está en una habitación mágica llena de espejos. En su mano tiene una letra, que cuando se coloca delante de cualquier espejo se queda escrita en él. Cuando el genio se mira en un espejo, su imagen aparece justo en la otra habitación reflejada, como en el ejemplo. ¿Podrías escribir en cada espejo la letra que aparecería, si nuestro genio viaja por las ocho habitaciones?

2º Primaria: Tercer paso para hacer la estrella

Para empezar a hacer la estrella, nuestro genio necesita contar cuántos rectángulos y cuántos cuadrados hay en la pieza. Ayúdale y recuerda que los cuadrados son rectángulos con todos los lados iguales.

3º Primaria: Cuarto paso para hacer la estrella

Nuestro genio se ha liado contando todos los triángulos que hay en la pieza que tienes en tus manos. Ayúdale y cuidado, que aunque parecen todos iguales, hay muchos distintos.

4º Primaria: Primer paso para hacer la estrella

Para empezar a hacer la estrella, nuestro genio necesita buscar el cuadrado más grande que se puede encontrar en un DIN-A4 (que es un rectángulo). Encuentra un cuadrado lo más grande posible e intenta convencer al genio, *con una demostración*, de que no puede haber uno mayor que el tuyo.

5º Primaria: Quinto paso para hacer la estrella

Doblando papeles para hacer la estrella, nuestro genio necesita contar cuántos cuadrados hay en la pieza. Ayúdale, pero cuidado, que hay más de los que parece.

6º Primaria: Sexto paso para hacer la estrella

Con tanto doblar el papel, nuestro genio no se ha dado cuenta de que quizás haya contado mal. Ayúdale a contar todos los triángulos que hay, y cuidado que aunque todos parecen iguales, hay muchos distintos.

El cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un rectángulo es el de lado igual al mínimo de los lados del rectángulo.

Problemas de ESO

1º ESO: Segundo paso para hacer la estrella

Dobla en el folio las dos diagonales con mucho cuidado. Dobla también cada lado por la mitad y te darás cuenta de que las dos diagonales se cortan justo donde se cortan los otros dos dobleces. El genio es un mago: si colocas en este punto tu dedo, verás que el cuadrado no se cae. ¿Podrías convencer a nuestro genio, *con una demostración*, de que el centro de un cuadrado es el punto donde se cortan las diagonales?

2º ESO: Para pensar antes de hacer la estrella

Al genio se le ocurren preguntas rarísimas: ¿Por qué los folios (A4) son de este tamaño? Ayúdale a encontrar la respuesta con *una demostración*. Una pista: ¿qué le pasa a un folio si lo doblas por la mitad de su lado mayor?

3º ESO: Octavo paso para hacer la estrella

Para terminar de hacer la estrella nuestro genio necesita unir piezas, como las dos que tienes ya unidas. ¿Cuántas piezas tendremos que unir como mínimo para que no se quede ninguno de sus cuatro brazos sin pareja?

4º ESO: Séptimo paso para hacer la estrella

Una de la partes de la elaboración de estrellas que al genio le cuesta más es doblar las piezas. Doblando el cuadrado que tienes numerado desde el 1 hasta el 16, se obtiene la pieza que el genio necesita colocar. Échale una mano y escribe en cada uno de las caras que ves de la pieza el número que le corresponde antes de doblarla. Atención, que está prohibido abrir la pieza (esto nunca lo hace un buen genio).

Problemas de Infantil y Bachillerato

1º Bachillerato: Para pensar mientras se hace la estrella

El rectángulo que tienes ha salido de quitarle un cuadrado a un A4. El genio se ha dado cuenta de que no es proporcional al folio, porque es mucho más alargado. Si el lado más pequeño vale 1, ¿podrías decir cuál debería de ser la medida del lado más largo, para que, al quitar un cuadrado el resto tuviese la misma proporción que el trozo que te hemos dado? Una vez que consigas este número *áureo* haciendo cuentas, ¿lo podrías conseguir doblando el papel? Pista: Un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2 tiene una hipotenusa "bastante" parecida.

1º y 2º Infantil: Para jugar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con estrellas de colores. Cada color tiene un valor y hay estrellas de muchos colores. Intenta jugar en equipo y lanzar la estrella a la cartulina de su mismo color. Si aciertas, a los puntos obtenidos se le suma 1; pero si no aciertas, a los puntos obtenidos se le resta 1. Suerte y puntería.

3º Infantil: Para jugar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con unos dados muy divertidos. Son estrellas y cada color tiene un valor. Cuando la estrella cae al suelo, toca con unas cuantas puntas. Tienes que contar los colores que tocan el suelo y darle la puntuación al jugador de tu equipo de 2º de Bachillerato.

2º Bachillerato: Para pensar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con unos dados que son un tanto particulares. Cuando se lanzan, se suman las puntas que tocan el suelo.

Si tus pequeñitos aciertan con algún color en el lugar correspondiente, a la puntuación obtenida le sumas 1; pero si no aciertan, a la puntuación obtenida le restas 1. Calcula las puntuaciones posibles de las estrellas y elige el número de lanzamientos que necesitas para obtener las puntuaciones de cada juego de los que se proponen. Ganas si consigues el número exacto; pero si no lo haces, intenta quedarte lo más cerca que puedas.

Las matemáticas en la estrella de papel

Analizamos aquí algunas de las propiedades que presentan nuestras estrellas de papel desvelando, según el orden de fabricación, algunas de las soluciones de los problemas propuestos. No buscamos la rigurosidad de la demostración, sino el ingenio aportado por los concursantes.

Primer paso
¿Cuál es el cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un A4?

La solución es aún más general: *El cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un rectángulo es el de lado igual al mínimo de los lados del rectángulo*.

Una demostración bastante ingeniosa sería recortar dicho cuadrado. Si existiese un cuadrado de área mayor, nuestro cuadrado podría contenerse dentro y basta girar el cuadrado sobre la superficie del rectángulo para demostrar que, ni tan siguiera un giro del nuestro, está contenido en el rectángulo.

Segundo paso
¿Por qué las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro?

Lo que es inmediato comprobar doblando papel, se puede demostrar diciendo que el punto donde se cortan las mediatrices de los lados equidista de los cuatro vértices, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita. Como las diagonales serían diámetros, su intersección es el centro del cuadrado.

Tercer paso
¿Cuántos rectángulos?

Hay cinco cuadrados (cuatro pequeños iguales y el cuadrado completo) y cuatro rectángulos iguales.

Cuarto paso
¿Cuántos triángulos?

Hay cuatro triángulos rectángulos grandes y ocho rectángulos pequeños con su hipotenusa sobre las diagonales y cuatro con su hipotenusa sobre los lados . En total: 16, todos rectángulos e isósceles.

> *Es inmediato comprobar doblando papel que el punto donde se cortan las mediatrices de los lados equidista de los cuatro vértices, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita.*

Quinto paso
Más cuadrados

Hay dieciséis cuadrados 1x1, nueve 2x2, cuatro 3x3 y uno 4x4. En total 30.

Sexto paso
Más triángulos

Contando los triángulos rectángulos que tienen su hipotenusa en un mismo lado de una diagonal se tiene la siguiente suma: 4+3+2+1=10. Consideramos los cuatro lados de las dos diagonales y tenemos 40. Basta añadirle los que no tienen la hipotenusa en la diagonal, que son 2x4=8. En total 48 triángulos rectángulos e isósceles.

Séptimo paso
Doblando papel

La resolución de este paso es básicamente constructiva y basta localizar en la pieza el cuadrado al que pertenece al doblar el papel.

Octavo paso
Pegando papel

Por la forma de ensamblar las piezas, se comprueba que cada pieza va unida a cuatro distintas. Basta una pieza más para que todas estén unidas. En total seis piezas.

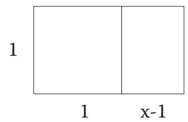
Noveno paso
Simetrías

Basta ser un poco presumido para mirar en el espejo las letras b, d, p y q.

Analizamos con más detalle los problemas propuestos para Bachillerato:

Rectángulos áureos

Para convertir un rectángulo de anchura 1 en un rectángulo áureo, debemos resolver la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que resulta al plantear la proporcionalidad



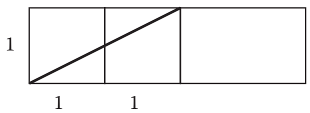
1/x=(x-1)/1

La solución es

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El problema se reduce a doblar $\sqrt{5}$, que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2.

En los dibujos anexos se observa el procedimiento.

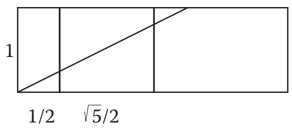


Como hemos conseguido la longitud

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

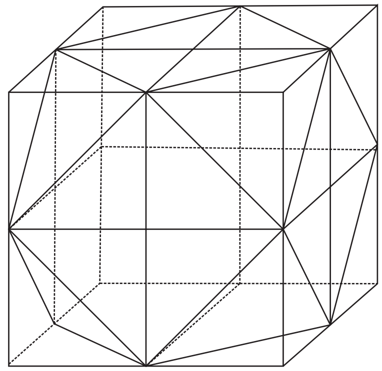
si dividimos la diagonal dibujada en dos partes iguales, basta sumarla a 1/2.

Todo esto, doblando papel.



Quizás los resultados más interesantes aparezcan en el problema propuesto para 2º de Bachillerato y en el juego de Infantil.

Si unimos con caras cuadradas y triangulares las puntas sobre las que se puede apoyar la estrella, obtenemos:



Las estrellas pueden caer sobre tres o cuatro puntas. Para visualizar mejor todas las posibilidades, veamos la estrella como un cubo truncado de lado L=½, ya que la longitud del cuadrado inicial que originaba la pieza era 1.

Sin considerar defectos de construcción y estabilidad, podemos considerar la probabilidad a priori de caer sobre una cara proporcional a su área.

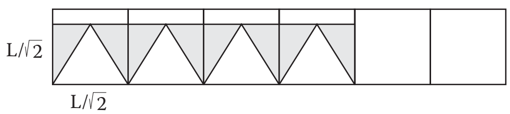
Aparecen seis caras cuadradas: cada una con área $L^2/2$ y ocho caras triangulares, cada una con área

$$\frac{\sqrt{3}}{8}L^2$$

El área total sería

$$6\frac{L^2}{2}+8\frac{\sqrt{3}}{8}L^2=\left(3+\sqrt{3}\right)L^2$$

Para comparar estas áreas colocamos seguidas las seis caras cuadradas y sobre ellas disponemos las ocho caras triangulares, como se muestra en la figura siguiente. Se demuestra así que es más probable que caiga sobre cuatro puntas, aunque hay ocho posibilidades para caer sobre tres puntas por las seis de caer sobre cuatro.



Si consideramos la probabilidad proporcional al área, quedaría que la probabilidad de que caiga sobre una de las caras concretas de cuatro puntas sería

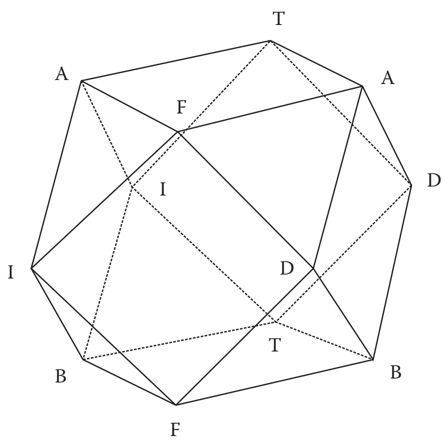
$$\frac{3-\sqrt{3}}{12}=0{,}1056...$$

mientras que la de que caiga sobre una de las caras de tres sería

$$\frac{\sqrt{3}-1}{16}=0{,}0457...$$

Quedaría que la probabilidad de que caiga sobre cuatro puntas es 0,6339... y de que caiga sobre tres, 0,3660...

Para analizar las puntuaciones posibles al lanzar la estrella, utilizaremos la siguiente notación para las fichas: A (arriba), B (abajo), D (derecha), I (izquierda), F (frente) y T (atrás). Por la construcción, la estrella quedaría:



Consideramos las caras cuadradas en este orden: C_1=ATAF (arriba), C_2=FIFD (frente), C_3=IAIB (izquierda), C_4=TITD (detrás), C_5=DADB (derecha) y C_6=BFBT (abajo). Nombraremos las caras triangulares por: T_1=AFD, T_2=FAI, T_3=ATI, T_4=TAD, T_5=BFD, T_6=FBI, T_7=BTI y T_8=TBD.

Si asignamos a cada una de las letras *A, B, I, D, F* y *T* las puntuaciones *a, b, i, d, f* y *t* respectivamente, obtenemos, por ejemplo, que la puntuación obtenida al caer la estrella sobre la cara C_1 sería $2a+t+f$ y sobre la cara T_1 sería $a+f+d$. Podemos recoger todas las combinaciones en la siguiente matriz *M*, en la que las primeras seis columnas dan las puntuaciones de las caras cuadradas y las ocho últimas dan las de las caras triangulares.

$$M=\begin{pmatrix}2&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\1&0&0&2&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&2&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&2&0&0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz de valores V= (a,f,i,t,d,b) por M, obtenemos las puntuaciones para todas las caras recogidas en la matriz

$P=(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8)$.

Es decir, $V * M = P$.

Como ejemplos significativos analizamos los siguientes:

- Si todas las piezas son del mismo color y le damos el valor a, esto es, $a=f=i=t=d=b$, se obtiene:

  $(a, a, a, a, a, a)\ M=a(4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

- Si una única pieza es de distinto color, por simetrías bastaría suponer af=i=t=d=b,

  $(a, f, f, f, f, f)\ M = (2a+2f, 4f, a+3f, 4f, a+3f, 4f, a+2f, a+2f, a+2f, a+2f, 3f, 3f, 3f, 3f)$.

  El caso particular a=2 y f=1, se obtiene así:
  (6, 4, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3).

- Las estrellas elaboradas con tres colores distintos y dos fichas por cada color, colocadas para que no enganchen dos colores iguales, presentan interesantes simetrías. Sería el caso $a=b$, $i=d$ y $f=t$. Quedaría:

  $(2a+2f, 2f+2i, 2i+2a, 2f+2i, 2i+2a, 2a+2f, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i)$.

  En el caso particular a=1, f=2 y i=3, se obtiene:
  (6, 10, 8, 10, 8, 6, 6, 6, 6, 6, 6 ,6 ,6 ,6).

> *Creemos que esta ha sido una actividad que ha conseguido convertir la resolución de algunos problemas en una actividad atractiva para los alumnos.*

Conclusiones

Quizá la sorpresa mas agradable fue que casi doscientos alumnos de todas las edades participaran ilusionados en un concurso matemático. Esto superó con creces nuestras primeras expectativas, ya que en otras actividades matemáticas el número de participantes fue bastante inferior.

Nos gustaría destacar que ha sido un punto de encuentro de los distintos niveles educativos, tanto para los profesores que lo organizamos como para los alumnos, intercambiando en todo momento experiencias que en el aula pasan inadvertidas. Ha sido un gran trabajo en equipo, tanto de los profesores implicados como del resto de la comunidad educativa, ya que en la elaboración del material y de los problemas han participado todos.

Creemos que ha sido una actividad que ha conseguido convertir la resolución de algunos problemas en una actividad atractiva para los alumnos. El hecho de enfrentarse a los ejercicios en un ambiente distinto al aula, con compañeros de otras edades, lo convertía en un juego. El reto de descubrir soluciones para problemas de mayor nivel y aprender ideas de alumnos de cursos inferiores tiene una doble lectura:

Por un lado, el alumno percibe que el conocimiento matemático debe crecer: en cada curso va a conocer más herramientas e ideas para poder resolver ejercicios. Por otro lado, se da cuenta de que la intuición y la creatividad para enfrentarse a estos problemas ya está presente en todas las edades. ■

Logotipo del concurso: Lidia Padial Vera
Ilustraciones de la estrella: Carolina Moreno Aguilar
Ilustraciones de los pasos: Francisco Cervantes Ibáñez.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, J.L. (1999): *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*, Gredisa, Barcelona.

De Alonso, M. (2002): *Los juegos en el aula*, Servicio de Publicaciones de CSI-CSIF.

Gardner, M. (1988): *Matemática para divertirse*, Granica, Barcelona.

Ramírez, R. (2003): "El ingenio no tiene edad", *Encuentro de profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria*, Castellón 2003.

Ramírez, R. y Morales, S. (2002): "¿Cuánto de ingenio hay en un problema de ingenio?", *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, Cardeñoso, J.M. y otros (Eds.), Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES, Granada, pp. 223-228.

Revista Quo, n.º 95, Agosto 2003, pp.110-111.

Stewart, I. (2000): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*, Gredisa, Barcelona.

SUMA 49
Junio 2005, pp. 47-52

El diablo de los números*

Se trata de una propuesta de trabajo cuyos objetivos fundamentales son animar a la lectura desde el área de Matemáticas, conocer parte de la historia de las Matemáticas y a sus protagonistas, fomentar la utilización de las nuevas tecnologías en la búsqueda de información, mejorar la actitud del alumno hacia las Matemáticas, haciéndole descubrir la magia que hay en ellas e impulsar la actitud investigadora del alumnado a través de la lectura del libro, la realización de una ficha de investigación previa y un trabajo de investigación.

In this paper we present a work proposal, based on the reading of his book "The devil of the numbers", whose goals are: to encourage our students to read from the area of Mathematics, so that they become interested in the history of Mathematics and its protagonists and to promote the use of new technologies for information search. We hope that our students, by carrying out a research project , have a better attitude towards Mathematics, discovering the magics which can de found in them.

Hans Magnus Enzensberger recibió el Premio Príncipe de Asturias de Humanidades del año 2002.

Es un conocido escritor alemán que ha brillado en diferentes géneros tales como poesía, ensayo...; uno de sus libros, "El diablo de los números" trata sobre Matemáticas y, sorprendentemente, llegó a ser un éxito de ventas, mostrando el interés de un amplio sector del público por esta disciplina científica.

Hans Magnus Enzensberger

Cuando Hans Magnus Enzensberger vino a Oviedo a recibir el Premio se nos ocurrió que sería muy interesante realizar alguna actividad con los alumnos relacionada con su libro, motivándolos a leerlo con detalle y planteándoles una serie de actividades que los estimulasen y pusiera a prueba su grado de conocimiento de dicha obra. "El diablo de los números" trata diversos temas en cada una de sus noches, presentados con gran amenidad, de forma que puedan llegar a los estudiantes, haciéndoles pasar un rato agradable, aprendiendo Matemáticas y, sobre todo, desarrollando su interés por esta disciplina.

* De Hans Magnus Enzensberger, ediciones Siruela.

María de Andrés Alonso
IES Alfonso II. Oviedo.
Rosa Ana Álvarez García
IES Santa Bárbara. La Felguera. Langreo.
Mª Oliva San Martín Fernández
IES Mata-Jove de La Calzada. Oviedo.
Cristina Suárez Arteche
IES Doña Jimena. Gijón.
Abel Martín
IES Pérez de Ayala. Oviedo.

Nos llama la atención el carácter humanístico de la formación de Enzensberger; estudió Filosofía y, como siempre ha tenido especial interés por las Matemáticas, se refleja así que la combinación entre cultura científica y la humanística es posible y deseable.

Con esta propuesta de trabajo hemos pasado muy buenos ratos leyendo el libro y preparando estas actividades, por lo que expresamos nuestro agradecimiento al autor.

"El diablo de los números" trata diversos temas en cada una de sus noches, de forma que puedan llegar a los estudiantes, haciéndoles pasar un rato agradable, aprendiendo Matemáticas y, sobre todo, desarrollando su interés por esta disciplina.

Iniciamos el trabajo con la intención de:

- Animar a la lectura desde el área de Matemáticas.
- Conocer parte de la historia de las Matemáticas y a sus protagonistas.
- Trabajar las Matemáticas en contextos diferentes a los habituales.
- Fomentar la utilización de las nuevas tecnologías en la búsqueda de información.
- Mejorar las actitudes de los alumnos hacia las Matemáticas, haciéndoles descubrir la magia que hay en ellas.
- Impulsar la actitud investigadora de los alumnos.

Esta experiencia se llevó a cabo mediante las siguientes fases:

A) Lectura del libro.

Para valorarla, incluimos un cuestionario de *Preguntas indagatorias* que nos permitirá conocer este hecho, el grado de profundización e incluso si su lectura ha sido completa. Esta parte la evaluaremos dentro del apartado de *Actitud* del alumno hacia la asignatura. Se dará por conseguido el objetivo si el número de aciertos es mayor o igual a 8.

Quedamos muy satisfechos de la actividad de opinión propuesta, pues enriquece mucho nuestro conocimiento acerca del grado de interés, capacidad de expresión escrita, comprensión... del alumno.

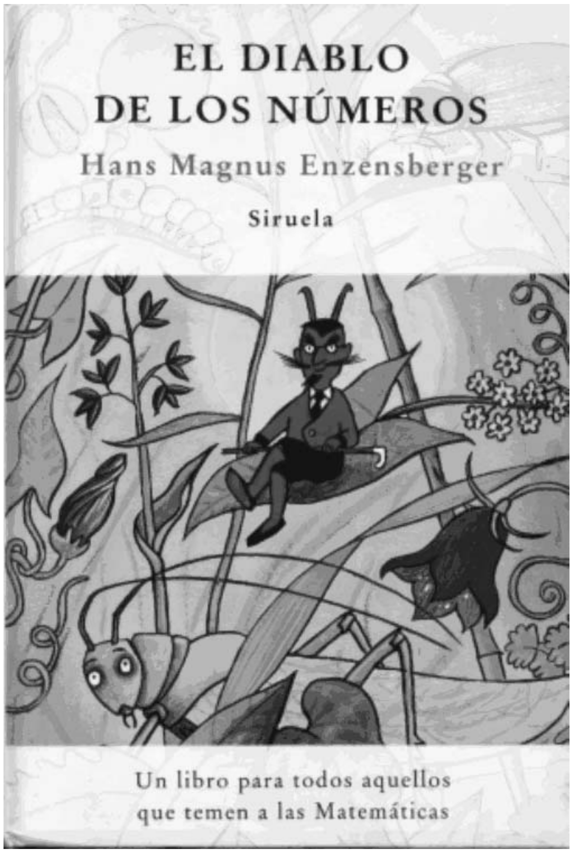
B) Ficha de investigación previa.

Con esta actividad se pretende conocer al autor, su biografía... y la relevancia de los Premios Príncipe de Asturias.

C) Trabajo de investigación.

Dividimos la clase en grupos; a cada uno de ellos se le asigna una sola noche, excepto en los casos de las noches primera y segunda, que se ha tomado como un bloque, así como la tercera y cuarta.

En esta parte se profundizará a través de preguntas de investigación y actividades de comprensión.



El diablo de los números

Preguntas indagatorias

1.- ¿Cuándo se encontró Robert con el diablo?

a) En clase de Matemáticas.
b) Mientras dormía.
c) En el infierno.
d) En el cine.

2.- El autor trata de explicarnos la famosa serie de números descrita por un matemático llamado Bonatschi. ¿Qué animales utiliza para su ilustración?

a. Liebres.
b. Animales imaginarios que no existen en la realidad.
c. No utiliza animales.
d. Gnomos.

3.- El diablo, para explicar los números triangulares, se subió a una palmera pero, ¿qué tiraba al suelo en su demostración?

a. Dátiles.
b. Cocos.
c. Palmitos.
d. Almendras.

4.- ¿Por qué está preocupada la madre de Robert?

a. Porque enfermó de viruela.
b. Está todo el día metido en su cuarto cantando *La Traviata.*
c. Está todo el día encerrado en su cuarto pintando liebres y murmurando números.
d. Porque no quiere comer.

5.- ¿Qué han construido con la pirámide de números?

a. Un monumento.
b. Un monitor.
c. Una cometa.
d. Una casa.

Hans Magnus Enzensberger, nacido en Kaufbeuren, Baviera (Alemania) en 1929, es un escritor, ensayista y periodista, una de las figuras más importantes del pensamiento alemán de la posguerra.

6.- ¿Qué utiliza el diablo para explicar la combinatoria?

a. Los números de clase de los compañeros.
b. Sus motes.
c. Las iniciales de sus nombres.
d. Sus nombres completos.

7.- ¿Qué es un número PUM?

a. Un número primo.
b. Un número impar.
c. Un número con un signo de exclamación detrás.
d. El número del diablo.

8.- ¿Cómo llama el diablo a las sumas infinitas?

a. Sucesivas.
b. Series.
c. Megasumas.
d. Supermegasumas.

9.- En la pesadilla que Robert tiene en la undécima noche es perseguido por un ejército infinito de:

a. Conejos.
b. Señores Bockel.
c. Números locos.
d. Soldados profesionales.

10.- Cuando el diablo de los números explica a Robert cómo se demuestran las cosas en Matemáticas, lo compara con:

a. Atravesar un río saltando de una piedra a otra hasta llegar a la orilla.
b. Construir un edificio desde los cimientos.

c. Montar la maqueta de un barco.
d. Unir los eslabones de una cadena.

11.- En la última noche Robert recibe una invitación muy especial y en ella se le cuenta cuál es el nombre de su diablo de los números.

a. Se llama Teplotaxl.
b. Su nombre es Sr. Bockel.
c. Le llaman Quetzal.
d. No responde a ninguno de los nombres anteriores.

12.- ¿Qué regalo especial recibe Robert en esta cena?

a. Una gran tarta redonda.
b. Una calculadora mágica.
c. Una estrella de oro de cinco puntas.
d. Una botella de Klein.

Actividad de opinión: Imagínate que eres crítico literario de un importante periódico. Escribe una reseña de 5 líneas para la sección de cultura del *Dominical*.

Proyecto de investigación

Ficha de investigación previa
Conociendo al autor.

- Nombre: Hans Magnus Enzensberger.
- Fecha de nacimiento.
- Años en la actualidad.
- Lugar de nacimiento.
- Busca en un mapa y señala dicho lugar, así como una ciudad importante que se encuentre cercana.
- Señala algún dato de su biografía que te resulte interesante.
- Si observas sus libros, comprobarás que abarca una amplia y extensa temática. Investiga acerca de su obra.
- Esta persona ha sido galardonada con el Premio Príncipe de Asturias 2002. ¿Sabrías decirnos en qué modalidad?
- Buscar algunos recortes de prensa o noticias relacionados con el autor.
- ¿Cuáles han sido los últimos 5 ganadores en dicha modalidad?
- ¿Conoces el título de algún libro relacionado con las Matemáticas que haya sido un líder en ventas?

Actividades
El diablo de los números, noche a noche.

La primera noche:

- ¿Por qué hay infinitos números?
- ¿Por qué se pueden escribir números tan pequeños como se desee?
- ¿Cómo construirías los números 2, 3... a partir del uno?
- ¿Qué ocurre cuando haces la operación: 11111111111 x 11111111111?

La segunda noche:

- ¿Por qué los números romanos son poco prácticos?
- ¿Por qué es tan importante el cero?
- ¿Podríamos escribir números sin el cero?
- Investiga de dónde procede nuestro sistema numérico.

La tercera noche:

- ¿Qué es un número primo?
- ¿Qué es la Criba de Eratóstenes?
- ¿Qué dice la Conjetura de Goldbach?

La cuarta noche:

- ¿Cuáles son los números racionales?
- ¿Cuáles son los números irracionales? ¿Cómo los llama el autor?
- Demuestra: 3 x 0.3333333... = 1
- ¿Qué números tienen período?

- Al 7 se le llama *número cíclico*; describe lo que ocurre con los decimales de las fracciones: 1/7, 2/7, 3/7, ..., 6/7
- Investiga unidades de medida. ¿Cuáles utiliza el autor?

La quinta noche:

- Construye y escribe los primeros 10 números triangulares.
- Deduce una fórmula general para obtener un número triangular cualquiera.
- Diseña una cartulina con los números triangulares para colocarla en el aula.
- ¿Cuántos números triangulares hay?
- Si vas restando sucesivamente 2 números triangulares, ¿qué obtienes?
- Construye los siguientes números sumando un máximo de 3 números triangulares:
  a. 30
  b. 28
  c. 77
- Investiga qué números se obtienen formando cuadrados. ¿Y pentágonos?

La sexta noche:

- ¿Sabrías decirnos a qué famoso matemáticos se refiere realmente el autor cuando nos habla de Bonatschi? Investiga su vida.
- En cuanto conozcas el mecanismo de obtención de los sucesivos números, escribe los 20 primeros números de esta famosa serie.
- Si sumas los 8 primeros y añades una unidad, ¿qué obtienes? Ahora suma los 12 primeros y añade una unidad, ¿qué deduces?
- Se menciona en muchas ocasiones el comportamiento matemático de la naturaleza; expón algún argumento que impida que este crecimiento numérico de las liebres sea posible.

La séptima noche:

- Investiga quién era Niccoló Tartaglia.
- Construye las 14 primeras filas de su triángulo, que el diablo llama pirámide.
- ¿Es realmente una pirámide? Argumenta tu respuesta.
- ¿Cómo se llaman los números 1, 3, 6, 10...?
- ¿Qué suma cada fila de la pirámide? ¿Cuál sería la expresión general de ese resultado?
- ¿Qué ocurre si sólo coloreamos los números pares en la pirámide construida? ¿Y los múltiplos de cuatro?

La octava noche:

- Define la operación matemática n! y calcula 5!
- Si tenemos 8 alumnos para la limpieza del aula:
  a. ¿Cuántas grupos distintos de tres se pueden formar?
  b. ¿Y si lo que quisiéramos es elegir delegado, subdelegado y secretario?
- Investiga qué parte de las Matemáticas se encarga de estudiar todos estos fenómenos. Haz un breve esquema de las diferentes formas en que se pueden hacer diferentes grupos si se tiene o no en cuenta el orden.

La novena noche:

- Investiga sobre Cantor, matemático del siglo XIX que hizo mucho por la formalización de las Matemáticas.
- Busca la definición de conjunto infinito, léela con detenimiento y trata de entenderla.
- ¿Cómo le explica el diablo a Robert que hay tantos números naturales como pares, impares, triangulares...?
- ¿Sabrías calcular el término general de las dos series que aparecen en el capítulo?
- Zenón de Elea fue un filósofo griego. Aunque en el libro no se le nombra, sus ideas subyacen en los razonamientos de Robert. ¿De qué trata su paradoja de la dicotomía?

La décima noche:

…las montañas no son como conos, las nubes no son esferas, ni la corteza de los árboles es lisa… (Benoit B. Mandelbrot) y los copos de nieve no son simples esferas.

En el libro, el diablo intenta que Robert se fije en su forma y sin nombrarlo, nos descubre los fractales.

- ¿Qué matemáticos estudian por primera vez la geometría fractal?
- Investiga las siguientes figuras fractales clásicas y explica brevemente su proceso de formación:
  Conjunto de Cantor.
  Triángulo de Sierpinski.
  Curva de Koch.
  Copo de nieve de Koch.
- ¿Qué invento del siglo XX ha posibilitado enormemente el estudio de la geometría fractal? ¿Por qué?
- ¿Qué es la razón áurea? ¿Dónde aparece en el libro?

La undécima noche:

- Enumera alguno de los principios básicos de las Matemáticas que se citan en el libro.
- Investiga, teniendo en cuenta las pistas que aparecen en el capítulo, cuál es el nombre de pila de Lord Russell. ¿Encuentras alguna similitud entre las biografías del escritor del libro y Lord Russell?
- Busca en un libro una demostración matemática. Cópiala y trata de entenderla. Busca el significado de los símbolos que aparecen.

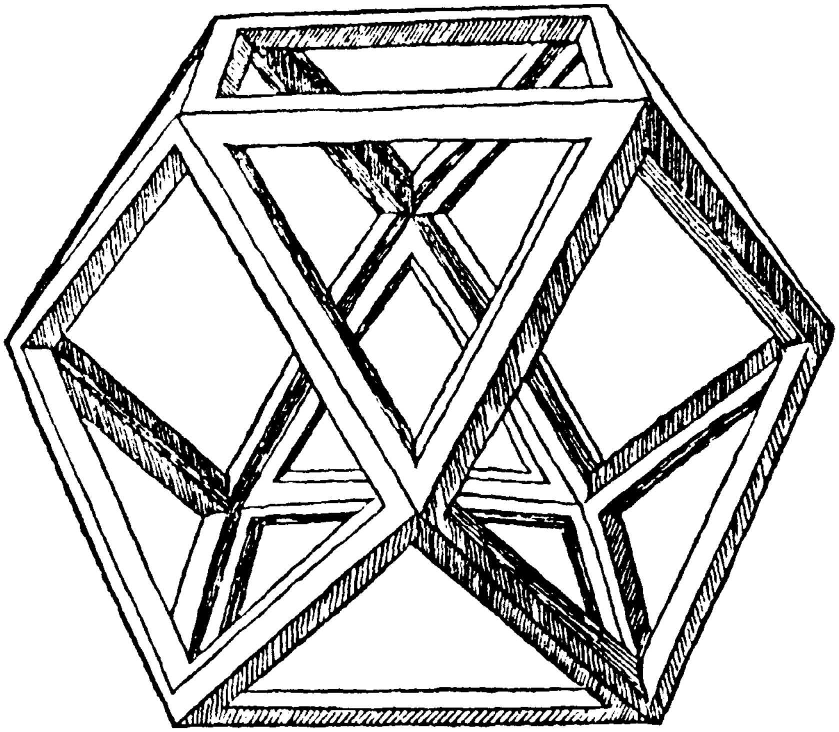
La duodécima noche:

- Investiga cuál ha sido el papel de la mujer en la historia en las Matemáticas. Busca el nombre de alguna y haz una reseña de su vida y obra.
- Ordena cronológicamente la lista de todos los matemáticos de los que se habla en la duodécima noche. Trata de encontrar el retrato de cada uno de ellos, ¿se parecen a las caricaturas que hace el ilustrador del libro?
- En un mapa actual de Europa sitúa a cada uno de estos matemáticos en su país de nacimiento.

Otras lecturas recomendadas

Guedj, D. (2000): *El teorema del loro*, Editorial Anagrama, Barcelona.
Frabetti, C. (2000): *Malditas matemáticas, Alicia en el País de los Números*, Alfaguara, Madrid. ■

poliedro



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

SUMA 49
Junio 2005, pp. 55-62

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La transcendencia (II)

El algoritmo es el estadio superior del cálculo, ya sea aritmético o algebraico. Mucho mejor cuanto más sintético, porque simplifica las operaciones, ofrece rapidez en las operaciones y alivia el trabajo, nada creativo, del calculista o, en la actualidad, porque favorece su automatización electrónica. Hasta ahí, la opinión del científico. La del técnico, no digamos. Pero, para quien tiene la responsabilidad de favorecer una profundización en el sentido de las cosas, el algoritmo acabado no puede ser más que la culminación de un largo proceso de aprendizaje en el que el viaje, una vez más, es lo importante. Aprender por pura memorización ese resultado final, tan alejado de su razón última y del proceso creativo de quienes lo ingeniaron[1], no tiene otro sentido que adiestrar en la disciplina de la obediencia ciega a normas incomprensibles y preestablecidas[2].

Podemos discutir si, históricamente hablando, hubo otros momentos en que esto no fue así pero, si algo debemos a Pascal, Neper o Leibniz[3], es su esfuerzo en pro de la mecanización. Un afán estéril, didácticamente hablando, si no aceptamos el reto de la reflexión, de la creatividad... de la discrepancia, en definitiva. Hoy mucho más si, en el necesario proceso de automatización de estrategias de cálculo, no asumimos la importancia de cultivar un aspecto fundamental del pensamiento matemático: la riqueza de las relaciones numéricas o algebraicas. Una clamorosa necesidad una vez que se ha abandonado casi totalmente el cálculo mental y, el uso indiscriminado y acrítico de la calculadora, contra el que tanto clamamos los partidarios de su incorporación didáctica, hayan hecho el resto. Y es que, de algoritmos y de eficacia calculística vamos a hablar en los párrafos que siguen.

El diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos

Ya comentamos en el artículo anterior[4] cómo, en los albores del siglo XIV, Chu Shih Chieh, tanto en *El precioso espejo de los cuatro elementos* como en su *Introducción a los estudios matemáticos* (*Suan Shu Chi Meng*), ya había hecho un extenso tratamiento del triángulo aritmético, cuya primera referencia, dentro del ámbito de la matemática china, data del siglo XI. También comentamos cómo ese mismo autor habla del *Viejo Método del Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos* y presenta un dibujo con la misma estructura triangular que hoy nos es tan familiar. Una distribución equilátera que no encontraremos después ni en su versión árabe ni en la europea ya que en ambos casos aparece formando un rectángulo cortado en diagonal.


Eyn Newe
Unnd wolgegründte
underweysung aller Kauffmanß Rechnung in dreyen Büchern / mit schönen Regeln vñ fragstucken begriffen. Sunderlich was fortl unnd behendigkait in der Welschē Practica vñ Tolletn gebraucht wirdt / des gleychen fürmalß weder in Teützscher noch in Welscher sprach nie gedrückt. durch Petrum Apianū von Leyßnick / ð Astronomei zu Ingolstat Ordinariū / verfertiger.

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

Una forma de presentación que parece estar relacionada con la propia génesis de esta herramienta matemática y que pudiera ser determinante a la hora de interpretar sus posibles vías de difusión. Tanto en la obra de al-Khalil ibn Ahmad (718, 786) como en la de Pascal (1623,1662), su origen está relacionado con el recuento de posibilidades. Una actividad que se presta, de forma natural, a ordenar la información en tablas. En China, sin embargo, el uso de lo que hoy llamamos binomio de Newton para el cálculo de raíces y la resolución de ecuaciones, constituyó su principal razón de ser. Una ordenación de resultados que lleva de forma natural a la disposición equilátera[5].

El algoritmo es el estadio superior del cálculo, ya sea aritmético o algebraico. Mucho mejor cuanto más sintético, porque simplifica las operaciones, ofrece rapidez en las operaciones y alivia el trabajo, nada creativo, del calculista o, en la actualidad, porque favorece su automatización electrónica.

Parece claro que las coordenadas en que se movieron unos y otros fueron distintas, ahora bien, cuando nos referimos al uso del Triángulo Aritmético en el cálculo de raíces y ecuaciones, ¿a qué nos estamos refiriendo? ¿Cuál fue su papel en el desarrollo de la aritmética china?

Sobre el uso e importancia del Triángulo Aritmético

Al parecer, *El Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos* fue el gran revulsivo de la resolución de ecuaciones de grado superior a uno en la matemática china. El procedimiento general de cálculo de raíces cuadradas y cúbicas aparecía ya en el último capítulo del *Chiu Chang Suan Shu* (300 a. de C., 200 d. de C.), pero es muy posible que fueran Yang Hui y Chu Shih Chieh los artífices de este salto cualitativo en la extracción de raíces del que estamos hablando. Al menos son los primeros de quienes sabemos que usaran de forma sistemática esta herramienta matemática. Ahora bien, la propia denominación de *Viejo Método* que hace Chu y el hecho de que el propio Yang Hui cite, hacia 1261, un trabajo anterior de Chia Hsien (≈1050) sobre el tema, hacen pensar en una tradición más que en un desarrollo nuevo.

Pero, para quien tiene la responsabilidad de favorecer una profundización en el sentido de las cosas, el algoritmo acabado no puede más que la culminación de un largo proceso de aprendizaje en el que el viaje, una vez más, es lo importante.

Chia Hsien ya había diferenciado dos métodos de extracción de raíces: el *tseng cheng fang fa* y el *li chieng shih shuo*, pero es en este último en el que utiliza los coeficientes del Triángulo. Para entender la importancia de esta incorporación es necesario desentrañar su sentido y eso nos obliga a adentrarnos en ese mundo de las certezas, firmemente asentadas en la tradición, y en la fe ciega en las verdades reveladas del que hablábamos al principio. Un universo algorítmico en el que el alumnado —que pertenece a una sociedad educada en la satisfacción inmediata del deseo[6]— privado de los caminos de la razón, ajusta su conducta a los criterios de la linealidad para hacer $(a+b)^2=a^2+b^2$ o $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, incapaz de obedecer al miedo.

Hace años dedicamos un artículo[7] a la perversa costumbre de enseñar los algoritmos como verdades reveladas, sin explicación alguna y, lo que es peor, como si fueran únicos. Allí hicimos un extenso análisis de los de la suma, resta, multiplicación y división, hoy le tocaría el turno a los de las raíces cuadradas y cúbicas. Aunque, bien es cierto que, en este caso, no haremos otra cosa que asomarnos a ellos. Primero porque nos dejaremos llevar por el interés histórico más que por el didáctico y después porque, afortunadamente, el de la raíz cúbica fue desterrado de las aulas hace tiempo y el de la cuadrada parece tener sitial y urna en el museo de los algoritmos de lápiz y papel[8]. Sin embargo, nos interesa recorrerlos sucintamente para poder reconstruir cuál pudo ser el proceso de pensamiento que llevó a la matemática china hasta el triángulo aritmético.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{12,04,09} & 347 \\
\underline{9} & \underline{64\ \ 4\ \ 256} \\
3\,04 & 687\ \ 7\ \ 4809 \\
\underline{2\,56} & \\
48\,09 & \\
\underline{48\,09} & \\
0 &
\end{array}
$$

Si desglosamos el algoritmo, con idea de generar otro menos sintético y, como consecuencia, más cercano a la intuición, también el álgebra nos abre sus puertas. Si el objetivo es encontrar un número $ABC \equiv a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ que sea raíz cuadrada de 120409, estamos buscando el lado de un cuadrado cuya área sea 120409. Podríamos pensar en elevar al cuadrado $a\cdot 100+b\cdot 10+c$, al cubo si la raíz fuera cúbica, y así sucesivamente, para tratar de acercarnos al algoritmo. En este caso nos quedaría:

$$N = \mathbf{1}\cdot a^2\cdot 10000 + \mathbf{2}\cdot a\cdot b\cdot 1000 + (\mathbf{1}\cdot b^2+\mathbf{2}\cdot a\cdot c)\cdot 100 + \mathbf{2}\cdot b\cdot c\cdot 10 + \mathbf{1}\cdot c^2$$

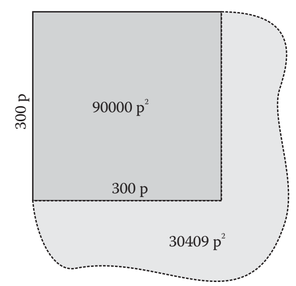
Ahora bien, como el número obtenido tiene tres cifras necesitamos los coeficientes del trinomio. Dicho de otro modo, necesitamos un Triángulo de Chu en tres dimensiones, de cuatro si el número tiene cuatro cifras, etc. Entonces: ¿sólo obtuvieron raíces cuadradas de números menores que 10000, o conocían los coeficientes del trinomio, cuatrinomio, etc? La respuesta aparece con toda la obviedad que cabía esperar al analizar uno de los 24 problemas del *Shao kuang* (*Cuánta anchura*), último capítulo del Chiu Chang, que, por cierto, da como única pista de la resolución del problema el resultado: 268.

Desglosaremos el algoritmo de la raíz cuadrada, con la idea de generar otro menos sintético y más cercano a la intuición, También para esto el álgebra nos abre sus puertas.

Su enunciado[9], y el análisis que muchos siglos más tarde[10] hará de este problema *Yung Lo Ta Tien*[11], nos permite reconstruir algebraicamente el procedimiento de cálculo y el sentido geométrico que acompaña su desarrollo.

Paso 1

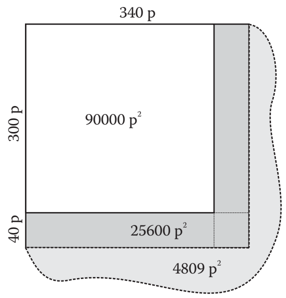
$\sqrt{12,04,09}$ | 300
9 00 00
3 04 09



$$N - (a100)^2 = 30409$$

Paso 2

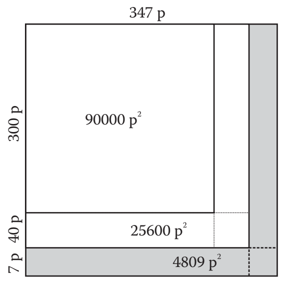
$\sqrt{12,04,09}$ | 300+40
9 00 00 | (2×300+40)40=25600
3 04 09
2 56 00
48 09



$$N - (a100)^2 - (2a100 + b10)\cdot b10 =$$
$$= N - A^2 - 2AB - B^2 = 4809$$

Paso 3

$\sqrt{12,04,09}$ | 300+40+7
9 00 00 | (2×300+40)40=25600
3 04 09 | (2(300+40)+7)7=25600
2 56 00
48 09
48 09
0



$$N - (a100)^2 - (2a100+b10)\cdot b10 - (2(a100+b10)+c)c =$$
$$= N - A^2 - 2AB - B^2 - 2AC - 2BC - C^2$$
$$N = A^2 - 2AB - B^2 - 2AC - 2BC - C^2 = (A+B+C)^2$$

Efectivamente, un simple tablero de varillas, el chino o cualquier otro, permitiría obtener raíces cuadradas por este procedimiento[12]. Y, efectivamente, sirve con los coeficientes de la segunda fila del Triángulo para algoritmizar el cálculo de una raíz cuadrada. De modo similar, utilizando la tercera fila del *Diagrama de los Cuadrados Multiplicativos* y, aplicando sistemáticamente los pasos anteriores, se obtienen las cúbicas: $N-a^3-(3a^2+3ab+b^2)b-\{(3a^2+3ab+b^2)+(3ab+2b^2)+[(3(a+b)^2c+c^2]\}c$.

Hemos de recordar que el Triángulo de Chu Shih Chieh de 1303 tenía siete filas.

El cálculo de raíces en Pascal

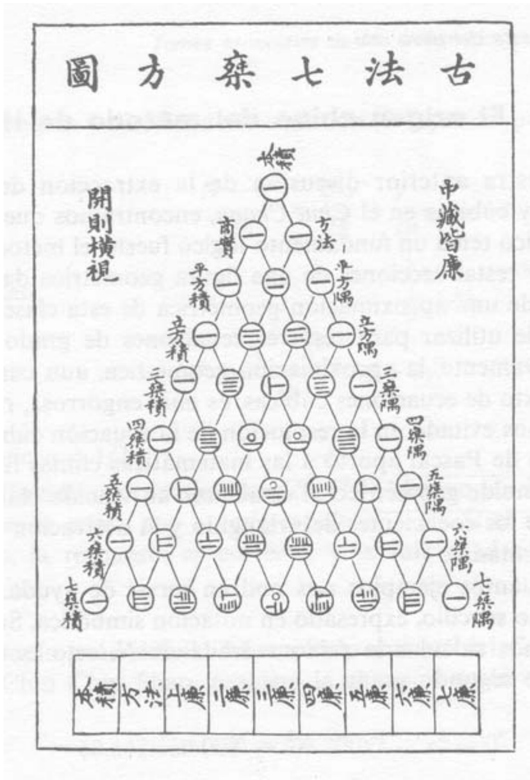
Analicemos de forma breve lo que aporta Pascal en este terreno. Efectivamente le dedica un pequeño capítulo[13] que titula: Resolución general de las potencias numéricas. En él enuncia exclusivamente el siguiente resultado[14]: Para calcular la k-ésima raíz entera, por defecto, de un número dado se buscan los k factores consecutivos cuyo producto más se aproxime, por defecto, a ese número dado[15]. Designemos con la letra a al menor de ellos. Se calcula la raíz k-ésima entera de $k!$ y se suma a $a-1$. El resultado es el límite inferior de la raíz buscada. Se elige ahora el k-ésimo número triangular, se divide entre k y se suma a a para obtener el límite superior de la raíz que tratamos de hallar. Elevemos a k los dos límites obtenidos y elijamos, entre los números enteros que se encuentran entre ellos, aquel cuya potencia k-ésima mejor se aproxime al valor dado.

> Suprimo la demostración de esta regla, que tengo lista pero que es larga, si bien fácil, y más aburrida que útil: dejémosla pues y tornemos hacia un tema que promete reportar más frutos que exigir esfuerzos.
>
> *Pascal*

Podríamos pensar que la aportación de Pascal es puramente inductiva y experimental si no fuera por el colofón final: *Suprimo la demostración de esta regla, que tengo lista pero que es larga, si bien fácil, y más aburrida que útil: dejémosla pues y tornemos hacia un tema que promete reportar más frutos que exigir esfuerzos.* Toda una declaración de intenciones, coherente con su esfuerzo por diseñar una máquina que liberase al ser humano del ingrato cálculo aritmético, y bajo la que parece aflorar su concepto didáctico de lo que debe ser una presentación de resultados y la convicción de que *el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano* como diría Jacobi.

Pero, llegados a este punto, quizás sea bueno plantearse: ¿a quién dirigía Pascal sus escritos de matemáticas? Resulta evidente que a sus colegas. Así parece manifestarlo él mismo cuando dice: *Es posible que no haya meditado suficientemente en esta última parte de la solución. La daré, sin embargo, tal y como la he encontrado, sin omitir retomarla otra vez con más cuidado si parece ser digna.*

El análisis de este párrafo presenta dos evidencias: la primera, que se mueve al nivel del trabajo matemático de su época. La segunda, que los resultados que presenta son obra de su creatividad, sin contraste bibliográfico alguno, como si de un juego de ingenio se tratase, como si fueran el fruto maduro de la ociosidad de un intelectual del momento. No parece que se esconda tras ellos preocupación práctica alguna más allá de dar respuesta a las no menos ociosas tribulaciones del caballero de Meré.



Volviendo la mirada al álgebra china

De cualquier modo, el cálculo de raíces, aunque importante, no pasa de ser un caso particular de ecuación de grado k, más concretamente: $x^k = N$. Pascal se conformaba con una aproximación entera de la raíz, pero el pensamiento chino era eminentemente práctico y, en ese ámbito de trabajo, una buena aproximación es la mejor de las soluciones del mismo modo que un algoritmo que permita un orden ilimitado de exactitud es el mejor procedimiento de cálculo. Esto, que parece una obviedad manifiesta, tardaría mucho tiempo en pasar a formar parte de las preocupaciones matemáticas europeas. Concretamente hasta que Vieta[16] en 1600 llegase a obtener un método mimético al que los chinos pusieran en práctica cinco siglos antes y Horner (1789–1837) dos más tarde, llevándose los honores[17].

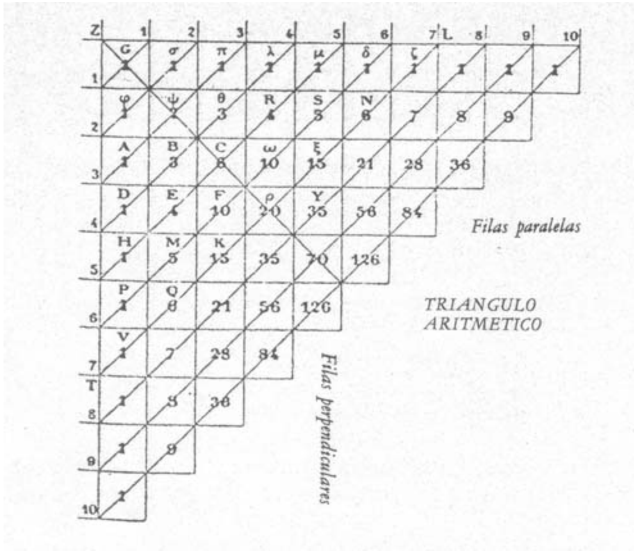
Pero, para tratar de recrear cuál pudo ser el proceso creativo de los matemáticos chinos debemos volver la vista al aula una vez más y elegir uno de esos problemas clásicos del álgebra elemental. Clásico tanto por la antigüedad de su enunciado —algunos de ellos son anteriores a Beda— como por la desconexión tan fuerte que mantienen con la relalidad. Por ejemplo: *¿Cuántas escaleras hay en mi casa si al subirlas de dos en dos y bajarlas después de tres en tres doy 40 pasos?* Si tal duda se correspondiera con una necesidad, cualquier persona en su sano juicio las contaría y listo. Si no existiera la duda, ¿quién iba a pensar que tal cosa pudiera ser un problema? No nos dejaremos llevar del positivismo más reduccionista y nos tomaremos el acertijo como lo que es: un juego.

Puestos en tal tesitura, cualquier estudiante de segundo o tercero de ESO, que no hubiera sido sometido a un enérgico —y exitoso—lavado de cerebro, comenzaría por dibujar una escalera o poner una tabla y tratar de inducir una solución. Es bien seguro que muy pocos plantearían la ecuación $x/3 + x/2 = 40$ como hacen la mayoría de nuestros alumnos y alumnas. Ellos saben que no es un juego, que es un problema de álgebra.

Planteémonos cómo podría abordarse su resolución a través de una tabla. Sería algo parecido a esto:

Escaleras	Pasos al subir	Pasos al bajar	Total pasos
12	6	4	10
18	9	6	15
48	*24*	*16*	*40*

La primera conclusión que se deduce es que el número de escaleras ha de ser par y múltiplo de tres[18] para que *salgan las cuantas exactas*. Así pues, si con 12 escaleras doy 10 pasos, para dar 40 pasos, que es cuatro veces más, necesitaré 48 escaleras[19]. Este sencillo método, que se catalogaría, despectivamente, como una variante de *la cuenta de la vieja*, y que ha pasado a la historia de las matemáticas bajo el nombre de *regula falsi* o *regla de la falsa posición*, fue ampliamente usado en todas las civilizaciones antes de la llegada del planteamiento de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, fue muy popular en la Europa medieval.



Si lo aplicamos estimando una solución, a, de la raíz cuarta de un número *N*, por ejemplo, y estudiamos más tarde el error obtenido, *e*, en busca de un mejor resultado, la ecuación $x^4 = N$ se transforma en: $(a+e)^4=N$. Y puesto que a es un valor conocido esta se convierte a su vez en:

$$N - a^4 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 \qquad (1)$$

con lo que, el problema de encontrar la raíz cuarta de *N*, se transforma ahora en el de resolver la ecuación en *e*:

$$e^4 + 4ae^3 + 6a^2e^2 + 4a^3e + (a^4 - N) = 0$$

Un tipo de ecuaciones en las que el término independiente $a^4–N$ es negativo (cuando se toma a como una aproximación por defecto) y al que dedicaron una especial atención las matemáticas chinas.

El cálculo de raíces nos ha llevado de forma natural a la resolución de ecuaciones, como la regla de falsa posición nos va a transportar a un sistema de cálculo que el eurocentrismo bautizó muchos años después como método de Rufini–Horner.

Ahora bien, los coeficientes de la fila cuarta del triángulo aritmético surgen aquí como resultado de la necesidad de expresar un proceso y por tanto juegan un papel meramente descriptivo que no justifica en modo alguno su trascendencia como revulsivo de la matemática china del siglo XIV. Sin embargo, si profundizamos un poco más y tratamos de resolver una ecuación de cuarto grado como la que aparece en (1).

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (2)$$

tomamos h como una nueva aproximación por defecto y llamamos e al error cometido, tenemos:

$$a_4(h+e)^4+a_3(h+e)^3+a_2(h+e)^2+a_1(h+e)+a_0=0$$

que, desarrollando, se transforma en otra ecuación de cuarto grado en e:

$$\begin{aligned} & a_4e^4+ \\ & \quad +(4a_4h+a_3)e^3+ \\ & \quad +(6a_4h^2+3a_3h+a_2h)e^2+ \\ & \quad +(4a_4h^3+3a_3h+2a_2h+a_1)e+ \\ & \quad +(a_4h^4+a_3h^3+a_2h^2+a_1h+a_0)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

que podríamos transformar en:

$$b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+a_0=0$$

y seguir iterando hasta encontrar un valor que resultase suficientemente ajustado a nuestras necesidades reales de precisión. Y es ahí, donde el triángulo aritmético juega un papel trascendental como operador. Si nos fijamos en (3) los coeficientes b_i se han obtenido multiplicando las filas del triángulo por los a_j correspondientes.

$$\begin{array}{llllll} a_0 & 1 & & & & \\ a_1 & 1 & 1 & & & \\ a_2 & 1 & 2 & 1 & & \\ a_3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ a_4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

con lo que nos queda:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1 & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2 & & 2\,a_2 & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3 & & 3\,a_3 & & 3\,a_3 & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4 & & 4\,a_4 & & 6\,a_4 & & 4\,a_4 & & 1\,a_4 \end{array}$$

Por su parte, la distribución de las h se ajusta a sus diagonales que quedan multiplicadas así por sus potencias respectivas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1 & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2 & & 2\,a_2 & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3 & & 3\,a_3 & & 3\,a_3 & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4 & & 4\,a_4 & & 6\,a_4 & & 4\,a_4 & & 1\,a_4 \\ & & & & & & & & \\ h^4 & & h^3 & & h^2 & & h^1 & & h^0 \end{array}$$

es decir:

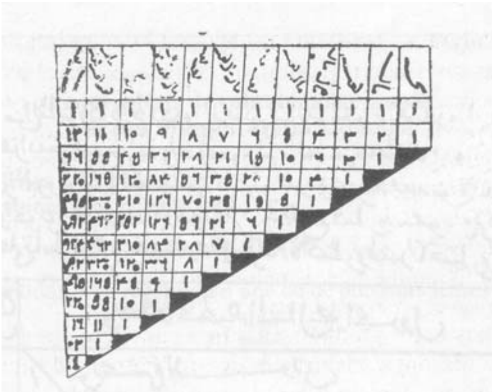
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1h & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2h^2 & & 2\,a_2h & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3h^3 & & 3\,a_3h^2 & & 3\,a_3h & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4h^4 & & 4\,a_4h^3 & & 6\,a_4h^2 & & 4\,a_4h & & 1\,a_4 \\ & & & & & & & & \\ b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 \end{array}$$

Con lo que, sumando ahora estas diagonales en la otra dirección, obtenemos los b_i correspondientes:

El *Diagrama de los Cuadrados Multiplicativos* se convierte así en un operador que facilita los cálculos de forma considerable[20]. Esa fue seguramente su principal virtud y lo que hizo de él un instrumento indispensable para la resolución de ecuaciones como las que plantea Chiu Sao en el capítulo IV del *Su Shu Chiu Chang*: $-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000=0$. Nada cercano a la evidencia, como puede comprobarse.

Visto lo cual, quedan dos cuestiones fundamentales para hacer de este método un sistema eficaz de cálculo. La primera: el tratamiento del cero y los números negativos. La segunda, contar con un modelo estimatorio que evite que el proceso se alargue innecesariamente.

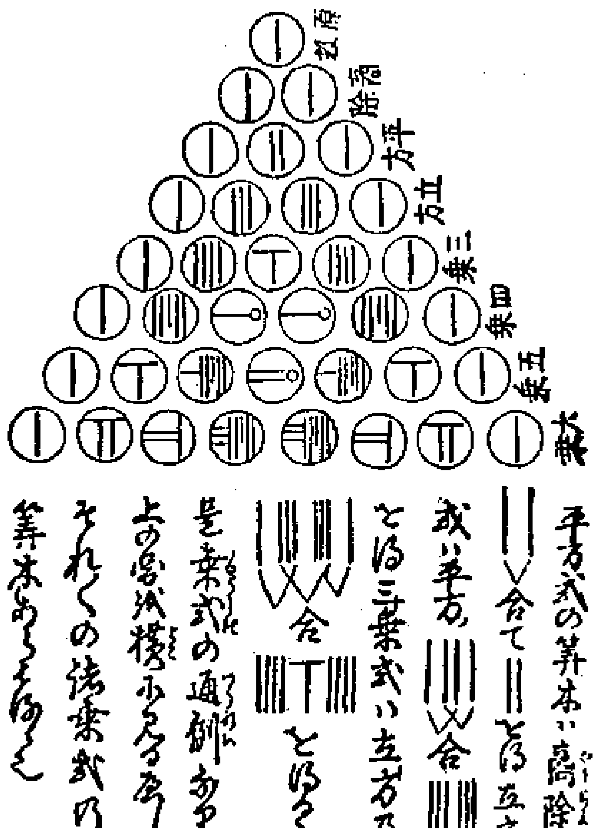
El problema del uso de números negativos se resolvió fácilmente utilizando varillas de dos colores. En cuanto al cero, la ausencia de varillas no elimina el problema de forma satisfactoria en todos sus aspectos pero permite los cálculos. La estimación sin embargo aparece como un proceso algo más complejo. Es cierto que el cálculo con varillas la favorece pero no sabemos hasta qué punto fue algo más que un arte.



Le triangle arithmétique d'al-Karajī

En cualquier caso, este sistema de cálculo les permitió realizar divisiones de polinomios de forma sintética mediante un procedimiento muy similar al que utilizó más tarde Rufini y que hoy, lleva su nombre. Lo que sabemos acerca del papel que jugaron algunos jesuitas como Mateo Ricci (1552–1610) en el trasvase de ideas matemáticas entre China y Europa no permite aventurar hipótesis acerca de un posible contacto entre Rufini, Vieta y los métodos chinos de cálculo[21]. Tampoco sabemos si se pudo establecer esa vía de comunicación a través del mundo árabe. Nos consta que al-Nasawi empleó el triángulo aritmético para extraer raíces cúbicas en el siglo XI y que al-Kashi, en el XV, hizo lo propio con las de cuarto grado; a partir de ahí sólo cabe especular.

En cualquier caso, casi como un guiño, los caminos del mestizaje quedan abiertos a una imagen del mundo científico que nunca fue tan cerrada y acotada como algunos se han empeñado en dibujar. Aunque la ósmosis fuera lenta y hubieran de pasar siglos para que resultara posible un trasvase eficaz de ideas, aunque una gran parte de ese caudal se evaporara[22], las fronteras fueron mucho más permeables de lo que se nos ha hecho creer y la deuda acumulada con el resto de las culturas mucho mayor de lo que le gustaría a la militancia eurocentrista. ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURBAKI, N.1972, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Edit., Madrid

BOYER, C. B., 1986, *Historia de la matemática*, Alianza Ed., Madrid

GEORGE GHEVERGHESE, Joseph, 1991. *La cresta del pavo real*, Editorial Pirámide, Madrid

PASCAL, B., 1983. *Obras*. Alfaguara, Madrid. Traduce Carlos R. de Dampierre, prologa: J. L. Aranguren.

PASCAL, B., 1995. *Obras Matemáticas* (Selección de textos), Edita Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Méjico. Traduce Santiago Ramírez, prologa: Rafael Martínez.

PASCAL, B., 1998. *Pensamientos*. Cátedra. Madrid. Traduce y prologa: Mario Parajón.

RAMÍREZ, A., 2000. *Máquinas de calcular. De la mano a la electrónica*. UNED. Barbastro (Huesca).

RÍBNIKOV, K.1987. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú.

RUSHED, R. (director), 1977 *Histoire des sciences arabes*. Editions du Seuil. París.

NOTAS

1 En ocasiones tras siglos de pasos intermedios y refinamientos sucesivos.

2 Y no estamos pensando sólo en la división o en el cálculo con fracciones, hablamos también de la regla de Cramer, del cálculo de la matriz inversa, de la descomposición en fracciones simples o del sentido mismo de dx a la hora de integrar.

3 [Ramírez, 2000].

4 En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría (I). *SUMA*, nº 48. Febrero 2005.

5 La excepción a la regla la puso Halayudha en India en el siglo X, quien dispuso los términos en forma equilátera a pesar de estar haciendo recuentos de sonidos.

6 Una especie de exaltación colectiva que roza la paranoia y que equipara la libertad individual a la capacidad de consumo.

7 "...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones" (*SUMA* nº 22). Y más recientemente en "¿Por qué seguir anclados en Egipto?" (*SUMA* nº 35) hacíamos una valoración general del tratamiento algorítmico.

8 En cualquier caso, las preguntas se agolpan a medida que se avanza en el cálculo de la raíz cuadrada de 120.409 que muestra el ejemplo: ¿por qué se separan los dígitos de dos en dos? ¿Es real ese manifiesto paralelismo con el de la división? ¿Por qué 3, luego 2·3 y después se le añade un número? ¿Qué operación se esconde tras el *añadido*? ¿Y qué sentido tras esa duplicación y ese producto? Planteadas en 3º de ESO, por ejemplo, su respuesta es una bonita excusa para interrelaccionar los enfoques aritmético, algebraico y geométrico como una estrategia de resolución de problemas.

9 Existe un campo cuadrado de 71.824 pu cuadrados de área. ¿Cuánto mide su lado?

10 En el XV concretamente

11 Una enciclopedia ¡de más de 11.000 volúmenes! que recoge los comentarios de Yang Hui sobre el Chiu Chang.

12 Geverghese [1991] explica con todo detalle, en las página 223 a la 233, el cálculo a través del sistema de varillas.

13 Páginas 85 a 88 en la traducción de Santiago Ramírez Castañeda (México, 1995) citada en la bibliografía.

14 Una vez más lo presentamos adaptado a la terminología actual.

15 En un capítulo anterior describe algorítmicamente cómo se ha de proceder para conseguirlo.

16 *De numerosa potestatum... resolutione*.

17 Boyer [1986] en la pág. 267 reconoce sin ambages el origen chino del método y en la pág. 390 la primacía de Vieta sobre Horner.

18 Y, un poco más tarde, que por cada seis escaleras de aumento, los pasos crecen en cinco.

19 Intentar recuperar la libertad y el sentido común para aplicar cualquier razonamiento que lleve a la solución, abrir las posibilidades de acercarse a ella por diferentes caminos, algorítmicos o no, resulta complicado una vez que el uso de la x ha acotado todos los dominios del pensamiento. Realizar unos cuantos problemas, de los que llamamos *de planteamiento*, sin utilizarla puede constituir una excelente terapia.

20 Lo que aquí se aporta no pasa de ser una reconstrucción por parte de los autores del prolijo y difícilmente comprensible capítulo 7.3.2. de Gheverghese [1996] en el que se llega a intuir con dificultad la importancia de este potente operador.

21 Gheverghese [1996] aventura tal posibilidad en la página 281.

22 Muchas veces entre las llamas con las que algunos sacrificaban el conocimiento al miedo que les producía su propia ignorancia.

SUMA 49
Junio 2005, pp. 63-67

Problemas para manipular

Uno de los grandes retos que tenemos en la actualidad muchos profesores de matemáticas es la introducción de la *Resolución de Problemas* como una actividad cotidiana en nuestras clases.

No es una propuesta fácil pues choca con planteamientos currriculares más inclinados a los conceptos y sus procedimientos asociados, donde, por tanto, priman los ejercicios como actividad de enseñanza-aprendizaje para trasmitir-adquirir los contenidos; choca con la asignación temporal del área, escasa, cuando la *Resolución de Problemas* necesita bastante tiempo y choca con las concepciones y actitudes de los alumnos, que creen que eso no es matemáticas y, en gran medida, no muestran unas actitudes necesarias cuando se resuelven problemas: interés, paciencia, reflexión, confianza en sí mismo…

Nosotros no tenemos una respuesta totalmente satisfactoria; sí realizamos aproximaciones desde diversos planteamientos temporales: Concursos de Resolución de Problemas a lo largo de varios meses, Salones de Juegos, Gymkhanas matemáticas o días puntuales en clase (final de trimestre, semana cultural, Día Escolar de las Matemáticas…), etc.

Otro aspecto que ayuda a hacer atractiva la *Resolución de Problemas* es la presentación de los mismos. En edades tempranas es un requisito imprescindible. Una presentación cuidada, con buena impresión de los textos e imágenes en color, nos atrae a todos. Si se utilizan elementos cotidianos (fichas de damas, tapones de botellas de plástico, piezas de juegos ya desechados, tacos de madera, etc.) además de una cierta familiaridad estamos reciclando objetos que seguramente acabarían en la basura.

Queremos mostrar hoy algunos problemas donde el poder manipular elementos produce, en primer lugar, un efecto de atracción y, posteriormente, facilita su resolución, porque permite explorar, analizar las distintas posibilidades y elegir una y no otras sin tener que anotar ni borrar nada.

Los tableros necesarios para estos problemas son fáciles de construir sin más que un procesador de textos y un programa de tratamiento de imágenes. Es bastante interesante que el enunciado del problema figure en el propio tablero pues da autonomía a los alumnos y no es necesaria una presencia constante del profesor.

Los problemas que presentamos permiten, en general, adaptaciones a diversos niveles de dificultad, desde Primaria a Secundaria, y debe ser el profesor, en virtud de los alumnos con los que vaya a trabajar, el que modifique adecuadamente los enunciados.

> *Uno de los aspectos que ayuda a hacer atractiva la* Resolución de Problemas *es la presentación de los mismos.*

Edificios

El tablero siguiente es una manzana de edificios, uno por casilla. En cada línea, horizontal o vertical, los edificios son todos de distinta altura. Los números del contorno indican cuántos edificios son visibles desde esa dirección. Por ejemplo, si se

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

mira la secuencia de alturas 1, 4, 3, 2 de izquierda a derecha veremos 2 edificios (el 1 y el 4) y mirando de derecha a izquierda se ven 3 (el 2, el 3 y el 4). En la esquina superior izquierda aparecen dos números que señalan las alturas que se dan en esa manzana.

¿Cuál es la distribución de los edificios?

1-4	3	1	2	2	
2					3
2					1
1					3
3					2
	2	3	1	2	

Edificios 1

Si la presentación de este problema fuese simplemente así se trataría de un pasatiempo con lápiz y papel cuya resolución no es atractiva para los alumnos por la inseguridad de la equivocación y el tener que estar borrando con frecuencia.

Para evitar esto, nosotros lo planteamos como un problema para manipular. En una hoja de papel A4 diseñamos el tablero como una tabla de Word, en color para que sea atractivo, y por otro lado construimos los edificios. Para ello utilizamos ortoedros de madera de 4x2x1 cm; pensando en utilizarlos en un juego de hasta cinco plantas hacen falta 75 piezas base (cinco de cinco plantas, cinco de cuatro, cinco de tres…) que se pegan con cola de carpintero para conseguir los edificios necesarios.

En la actualidad, uno de los retos que tenemos en el aula es la introducción de la Resolución de Problemas *como una actividad cotidiana en nuestras clases.*

A partir de este momento comienza el razonamiento y la manipulación. Aunque en un principio no se sabe cómo empezar, pronto se cae en la cuenta de que se ve un edificio solamente cuando todos los que están detrás son más bajos, por lo tanto, si en el margen hay un 1 es porque el primer edificio es el más alto. Siguiendo el procedimiento de colocar los que estén seguros por la indicación numérica y completar, teniendo en cuenta la regla de que en cada fila y columna sólo hay un edificio de una determinada altura, se va rellenando el tablero en su totalidad.

Una vez construidos los edificios basta con elaborar distintos tableros sin más que modificar el contorno numérico, así se rentabilizará el esfuerzo realizado en la construcción de los edificios. Además permite plantear situaciones con distintos grados de dificultad (como veremos en las posibles variantes de este tipo de problemas) para abarcar los distintos niveles de desarrollo que podemos encontrarnos entre los alumnos de una clase.

Puede ocurrir que un problema tenga más de una solución, esto ocurre a partir de cinco plantas, porque pueden permutarse los bloques más bajos *tapados* por los más altos sin que incumplan la condición numérica. Tal es el caso del ejemplo de cinco alturas que proponemos a continuación.

1-5	1	2	2	2	4	
1						4
2						2
2						2
4						1
3						2
	3	2	1	3	2	

Edificios 2

Variante 1
Una forma de presentar el problema es no dando todos los datos del contorno, pero sí los necesarios para la resolución. Aunque en principio puede asustar un poco, realmente no se necesita más información.

1-4		1			
					3
1					
2					
2					1
		3		1	

Edificios 3

Variante 2

La única diferencia entre esta variante y los edificios regulares es que ahora hay espacios en blanco (uno en cada fila y columna), que corresponden a parques. No son edificios y al no tapar la vista, no se cuentan. ¿Puedes colocar los edificios?

1-3	1	2	2	2	
1					3
2					2
2					1
2					2
	2	2	1	2	

Edificios 4

Es frecuente encontrarse con enunciados de problemas donde un tablero y fichas sean los elementos necesarios para cumplir determinadas condiciones. En este caso el material es sumamente fácil de elaborar.

Variante 3

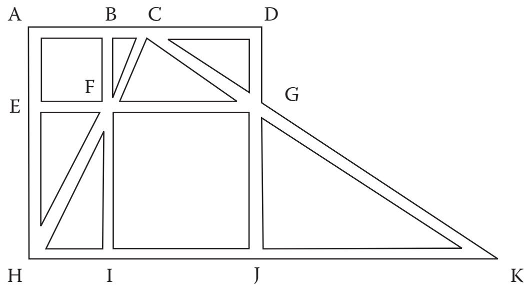
En esta modalidad los números del contorno indican la suma de las alturas de los edificios que se pueden ver desde ese lado de la fila o la columna; por ejemplo, la fila 2-4-1-3 tiene una suma de 6 vistos de izquierda a derecha y una suma de 7 vistos de derecha a izquierda.

1-4			9		
7					
					8
					9
7					
		9			

Edificios 5

Puestos de vigilancia

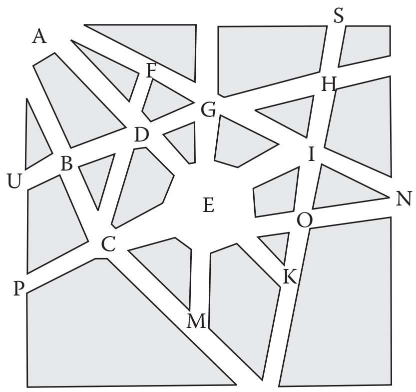
El plano siguiente muestra las calles de una ciudad. Coloca tres policías en las esquinas de forma que vigilen todas las calles y que en una misma calle no haya más de un policía.



Este tipo de problemas tiene unas condiciones muy simples (tres policías, ver todas las calles y no haber más de dos en una calle) que lo hacen asequible para alumnos de Primaria (a partir de 2º ciclo). Sin embargo sería sumamente complicada su resolución a estas edades si no se hace de forma que se puedan mover, en caso de error, los policías.

Basta diseñar un tablero con el plano ampliado (es aconsejable que aparezca también el enunciado del problema), imprimirlo, plastificarlo (para evitar su deterioro) y buscar tres objetos que hagan de policías: monedas, piedrecitas, fichas de parchís o damas… para empezar a resolverlo.

Otro plano de un barrio, donde con tres policías hay que vigilar todas las calles interiores, es el siguiente:



Colocando fichas

Es frecuente encontrarse con enunciados de problemas donde un tablero y fichas sean los elementos necesarios para cumplir determinadas condiciones. En este caso el material es sumamente fácil de elaborar y como fichas se pueden utilizar tapones de refresco, que se pueden conseguir de distintos colores y cantidades abundantes, sobre todo si se hace un acopio colectivo con toda una clase, y que además sirve para reutilizar un elemento que de otra manera acabaría, en el mejor de los casos, en el contenedor de plástico.

Los niveles de dificultad suelen ser variados según los enunciados y muchas veces se pueden adaptar a distintas edades: utilizando tableros de mayor o menor tamaño (3x3, 4x4…); exigiendo simplemente la colocación de las fichas o pidiendo además todas las formas posibles en que se puede hacer...

Fichas a la vista

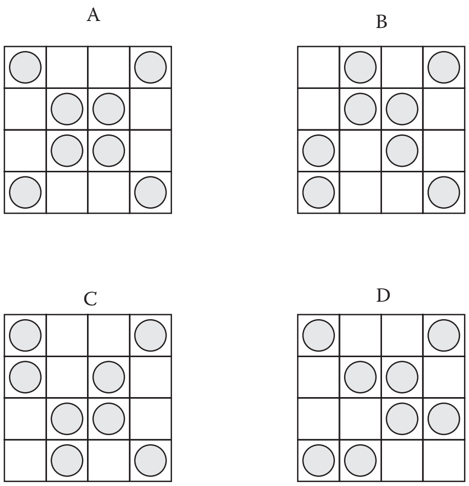
Dos fichas colocadas en un tablero cuadrado “se ven” si:

a. en cada cuadro no hay más que una ficha,
b. están en la misma fila o columna,
c. entre ellas no hay ninguna otra ficha.

A. ¿Cuántas fichas se pueden colocar en un tablero 3x3 (4x4, 5x5…) de forma que cualquiera de ellas “vea” exactamente a otras dos?

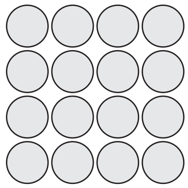
B. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar? Dos posiciones se consideran diferentes si no son simétricas respecto de alguno de los cuatro ejes de simetría del cuadrado o respecto del centro.

Para ejemplificar esto último tenemos en la siguiente imagen cuatro posiciones correspondientes a un tablero 4x4. A y B son soluciones diferentes; sin embargo, B, C y D son la misma.



Ocho Tapones

Coloca ocho tapones (cuatro de un color y cuatro de otro) en un tablero de círculos 4x4, como máximo uno en cada círculo, de manera que no haya dos tapones de un mismo color en casillas que se encuentren en la misma fila, columna o diagonal.



Diez Tapones

Coloca diez tapones en un tablero 4x4, como máximo uno en cada círculo, de manera que cada fila, cada columna y cada diagonal principal tenga un número par de tapones.

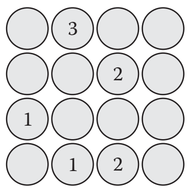
> *Los niveles de dificultad de los juegos suelen ser variados según los enunciados y muchas veces se pueden adaptar a distintas edades.*

Buscaminas

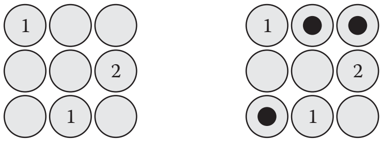
Casi todo el mundo conoce, sobre todo los alumnos, el juego del buscaminas que suele venir instalado con Windows. En una cuadrícula está oculta determinada cantidad de minas. Al inicio todas las celdas de la cuadrícula están tapadas. Cuando destapamos una celda que oculta una mina, hemos perdido el juego; si no oculta una mina, la celda destapada nos indicará cuántas minas hay en las ocho casillas adyacentes a ella (horizontales, verticales o diagonales). Se gana el juego si se destapan todas las casillas que no contienen minas.

Nosotros proponemos una variante para poder manipular fichas.

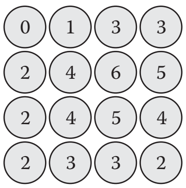
En el tablero hay 5 minas. Cada mina ocupa una casilla. Los números indican la cantidad de minas que hay en las casillas vecinas, en horizontal, vertical o diagonal. Las casillas con números no tienen minas. ¿Dónde están situadas las minas?



Es un juego muy adaptable, en tamaño y dificultad. A continuación aparece un tablero 3x3 (junto con su solución), en el que hay escondidas tres minas, que se puede utilizar con los alumnos de Primaria. De nuevo basta realizar un tablero y manejar los tapones que representarán las minas.



Buscando casas negras.
VI Olimpiada Matemática Gallega, 2º ESO, 2004
El siguiente tablero representa un barrio formado por casas blancas y negras que hay que descubrir. La cifra que aparece en cada celda indica el número de casas negras que tiene alrededor (incluida ella misma).



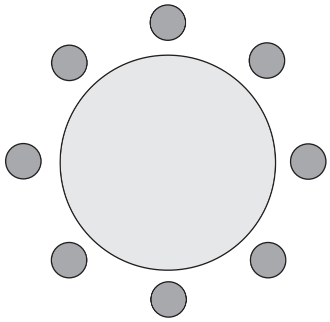
Problemas de lógica

Los dos problemas siguientes están planteados para alumnos de Primaria. Los elementos que se pueden manipular son objetos (figuras geométricas o números) que se pueden construir fácilmente en cartón, plástico o madera.

El problema del restaurante
Los señores Círculo, Cuadrado, Rectángulo y Triángulo (en color azul) fueron, con sus respectivas esposas (en color rojo), a comer a un buen restaurante. Se sentaron en una mesa circular, de manera que:

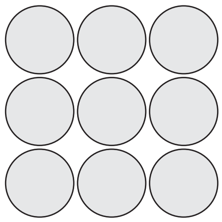
- Ninguna esposa se sentaba al lado de su marido.
- Enfrente diametralmente del señor Cuadrado se sentaba el señor Triángulo.
- A la derecha de la señora Círculo se sentaba el señor Rectángulo.
- No había dos esposas juntas.

¿Quién se sentaba entre los señores Cuadrado y Círculo?



Los números ordenados
Coloca los números del 1 al 9 en tres filas y tres columnas, teniendo en cuenta que:

- 3, 6 y 8 están en la línea horizontal superior.
- 5, 7 y 9 están en la línea horizontal inferior.
- 1, 2, 3, 6, 7 y 9 no están en la línea vertical izquierda.
- 1, 3, 4, 5, 8 y 9 no están en la línea vertical derecha.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEDESMA LÓPEZ, A.: Edita anualmente en Valencia la memoria del correspondiente Open Matemático de Resolución de Problemas; en 2004 se celebró el XVI Open.

RUÍZ RUÍZ-FUNES, C. y OTROS: *Matemáticas sin números*, Imagina y razona,

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/

SÁNCHEZ PESQUERO, C. y CASAS GARCÍA, L. (1998): *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas*, Ministerio de Educación y Cultura, Madrid.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: -
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: -
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herranz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apartat de Correus 835, 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Fac. Matemáticas. Apto. 1160 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa "Pedro Sánchez Ciruelo" de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima"
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Calle García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática.
Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 49
Junio 2005, pp. 69-76

iMÁTgenes 16, 17 y 18

Hoy vengo a exponer una queja. Cada día, casi a todas horas, y, prácticamente en todo el mundo, soy maltratado. Y ese maltrato no es fruto del azar. Obedece patrones bien determinados de antemano por las voluntades de mis torturadores. Reconozco que a veces no es un maltrato auténtico y que incluso puede divertirme. Eso me mantiene en forma y me da un dinamismo que mi posición habitual no sugiere.

Lo primero que me hacen, curvarme [f(x)], *lo soporto bien siempre que las curvas que me dejen no sean demasiado pronunciadas. Curvado así me consideran muy distinto de lo que era. He adquirido un nuevo rango. No me importa que luego me suban y me bajen* [f(x) + a, $a\in\mathbf{R}$] *o que me estiren* [$a\cdot$ f(x), $a\in\mathbf{R}$] *aún cuando muchos creen que lo que me están haciendo en realidad es girarme. Me gusta verme en el espejo* [−f(x)] *y que me paseen arriba y abajo* [f(x) + a, $a\in\mathbf{R}$] *o a derecha e izquierda* [f(x + a), $a\in\mathbf{R}$]. *Tolero bien los estiramientos (a* > 1*) y contracciones (a* < 1*) longitudinales* [f($a\cdot x$), $a\in\mathbf{R}$] *y transversales* [$a\cdot$ f(x), $a\in\mathbf{R}$] *mientras no sean exagerados. Mientras poseo esa nueva identidad me aplican tratamientos más sofisticados que, a veces, me deleitan lo indecible. Por ejemplo, me encanta que se me perfile como los niños se perfilan la mano extendida sobre un folio y me den la compañía de una pareja con la que congenio sobremanera. La llaman curva paralela a (x,* f*(x)) a distancia* d*:*

$$\left(x,\mathrm{f}(x)\right)+\frac{d}{\sqrt{1+\mathrm{f}'(x)^2}}\left(-\mathrm{f}'(x),1\right)$$

Lástima que no lo hagan más a menudo. Imagino que si no lo hacen es porque demasiado a menudo mi paralela no es tan suave como yo e incluso puede dejar de ser una función. ¡Qué le vamos a hacer!

Lo que me sienta fatal es que me doblen mediante un giro especular que me produce codos angulosos [|f(x) + a|, $a\in\mathbf{R}$]. *Este es el preámbulo de la peor tortura: la acupuntura. A quienes me la aplican podrá sentarles muy bien, pero a mi eso de hacerme agujeritos no me gusta un pelo. Empiezan haciéndome uno* [(x – a) · f(x) / (x – a)] *o dos* [(x^2 – a) · f(x) / (x^2 – a)]. *Luego más. Hasta media docena los aguanto bien, pero cuando me dejan como un colador unidimensional me pongo histérico:*

$$\frac{\mathrm{f}(x)\prod_{k=0}^{n}(x-k)}{\prod_{k=0}^{n}(x-k)}\quad n,k\in\mathbf{N}$$

Pero lo más duro de todo son los desmembramientos. La crueldad de los que me someten a ellos no tiene límite. Me siento como un pollo en manos del carnicero. En lugar de dibujarme con finos trazos negros o azules, deberían trazarme con una brocha chorreante de pintura roja. De algunos me recupero con facilidad [y = f(x)/(x − a)]. En cambio, *otros constituyen un descuartizamiento sinfín del que me cuesta un mundo recuperarme* [$x\in\mathbf{Q}$: f(x) = 1, $x\notin\mathbf{Q}$: f(x) = 0].

A estas alturas no creo que haga falta presentarme. Soy el eje x, el de abcisas, el horizontal. El que sirve de punto de partida a la representación gráfica de una función dependiente de una variable. Según el valor dado a esa variable, mi colega, el eje y, responde con una cifra que levanta cada uno de mis puntos [(x, 0)] *hasta una altura determinada* [(x, f(x))]. *Una vez allí, mi nuevo yo resume el carácter de la función representada. Lo que queda debajo es mi anterior yo, la camisa de una serpiente que acaba de mudar. Acuérdate de esto la próxima vez que...*

Hola. ¿Sigues ahí? ¿Me permites un momento antes de girar la página? Soy el eje y, el de ordenadas, el vertical. Quiero que sepas que agradezco tu trato. Raramente me lo paso tan mal como mi colega, aunque hay veces, sobre todo cuando haces inversas de funciones [x = f^{-1}(y)], *que me las haces pasar canutas. Pero mientras sigas así, realizando una inversión muy de vez en cuando, no me quejaré. Por suerte, tampoco tienes mucho tiempo para regodearte con florituras de ese tipo, ¿no? El caso es que soy testigo del sufrimiento de mi tocayo y quisiera pedirte que lo trataras un poco mejor. Evita dejarle en manos de ignorantes o, si no es posible, impide que le hagan nada sin prever el resultado de la actuación y que, por favor, vuelvan a dejarlo siempre en su sitio tal y como estaba. ¿De acuerdo?* ■

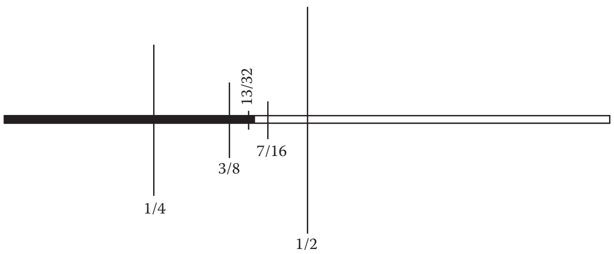
Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

En la iMATgen n.º 13 formulé una pregunta referente a la predilección por el punto medio. Aplicando el algoritmo de sentarse en medio de los huecos que deja la gente, un banco acaba por llenarse. La cuestión planteada entonces era si podía decirse lo mismo de un banco matemático como el intervalo [0, 1]. La verdad es que todo $x\in[0, 1]$ es límite de una serie de potencias de $^1/_2$.

Dado $x\in(0, 1)$, definimos $a_1 = {}^1/_2$. Si $x = a_1 = {}^1/_2$, hemos terminado. De lo contrario, será $x < a_1$ o $x > a_1$. Si $x < a_1$, definimos $a_{21} = a_1 - {}^1/_{2^2}$. Si $x > a_1$, definimos $a_{22} = a_1 + {}^1/_{2^2}$. Si $x = a_{12}$ o $x = a_{22}$, también hemos terminado. En caso contrario, será $x < a_{21}$ o $x>a_{21}$. O bien será $x < a_{22}$ o $x > a_{22}$. Definimos entonces: $a_{41} = a_2 - {}^1/_{2^3}$, $a_{42} = a_{21} + {}^1/_{2^3}$, $a_{43} = a_{22} - {}^1/_{2^3}$, $a_{44} = a_{22} - {}^1/_{2^3}$. Continuando este proceso construimos una serie de potencias de $^1/_2$ en la que lo único que varía es el signo de cada término. Esta serie de potencias es convergente porque la serie de sus términos en valor absoluto lo es. Su límite es precisamente la unidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

Por ejemplo, la serie para $\sqrt{2} - 1=0{,}4142\ldots\in[0, 1]$ es $^1/_2 - {}^1/_{2^2} + {}^1/_{2^3} + {}^1/_{2^4} - {}^1/_{2^5} + \ldots$ Véase su representación en la figura siguiente. La parte negra del segmento [0, 1] corresponde a $\sqrt{2} - 1$:



En general, y siendo $s(n)=\pm1$, cada $x\in[0,1]$ puede obtenerse sumando o restando las sucesivas potencias de $^1/_2$:

$$x=\frac{1}{2}+\sum_{n>1}\frac{\sigma(n)}{2^n}$$

Esta serie puede ser finita o no, aunque esto no signifique que el número x en cuestión sea o no racional. Para $x = {}^1/_3$, la serie es infinita. Si $\sigma(n)=-1\ \forall n$, tenemos $x=0$. Si $\sigma(n) = +1\ \forall n$, se obtiene $x=1$. Obsérvese que el valor $x = {}^1/_2$ no se consigue haciendo $\sigma(n)=0\ \forall n$ porque $\sigma(n)$ no puede ser nulo, sino con $\sigma(2) = +1$ y $\sigma(n) = -1\ \forall n>2$. Este detalle permite ver que la descomposición no será única. Ese mismo valor, x = 0'5, puede obtenerse de muchas formas:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{m=2}^{k}\frac{1}{2^m}+\sum_{n>k}\frac{-1}{2^k}$$

La iMATgen n.º 14 surgió del azar. ¿Pero qué es el azar? Un suceso cualquiera se produce o no con relación a un ámbito más amplio al que se somete. Bajo las condiciones de ese ámbito el suceso puede ocurrir o no. Aquel suceso que siempre se produzca en ese ámbito se llama seguro. Análogamente, aquel que bajo las mismas condiciones no puede ocurrir nunca se llama imposible. Entre lo seguro y lo imposible reside lo que puede suceder o no, el quizá, el tal vez, lo probable. Un suceso así es aleatorio. Cuantificar sus posibilidades de realización constituye lo que en Matemáticas se llama probabilidad. Puede concretarse 'a priori' en términos de modelización matemática, como la proporción numérica entre dos áreas. Pero también puede ser 'a posteriori' tras el recuento de una serie de frecuencias.

Jugando con la probabilidad uno adquiere prejuicios sobre los sucesos que le llevan a valorar de forma intuitiva el grado de probable o improbable de un suceso. Por ejemplo, la distribución de guijarros en la fotografía de la iMATgen n.º 14 parece verdaderamente surgida del azar. En cambio, una disposición circular o triangular no habría parecido fruto del azar. Aún así creemos imposible que al lanzar de nuevo las piedras vuelvan a caer exactamente como quedaron en la fotografía. Tan imposible como que queden formando un cuadrado o el perfil de un escorpión como ocurre con algunos grupos de estrellas en el firmamento. Aquella distribución pareció aleatoria y me creíste cuando dije que lo era. Pero si hubiesen quedado en forma de cuadrado, ¿me habrías creído? Tendemos a relacionar el azar con lo caótico y con lo irreconocible. Gracias a ese modelo, lo caótico y lo irreconocible parecen azarosos.

Eso vincula las iMÁTgenes 14 y 15. ¿Quién dejó las curvas de espuma en el parabrisas? ¿Fue realmente un inmigrante? ¿Fue el empleado de un lavacoches? ¿Fui yo mismo? Sólo puedes confiar en mí. La realidad necesita testigos. Yo lo soy de las realidades que ves, lees e iMATginas en esta serie de la revista SUMA. Amo la sinceridad y procuro ser sincero, pero admito que la tentación me acosa de vez en cuando. Cada acoso trae consigo una duda. No me importa, los matemáticos y educadores sabemos que la duda es productiva. ■

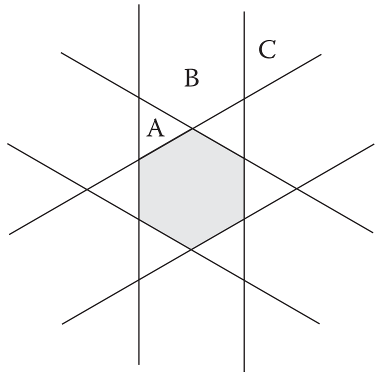
iMATgen 16

Cuando se hizo esta fotografía la mayoría de los alumnos que ahora terminan el cuarto curso de la ESO estaban naciendo. Ha pasado mucho tiempo, pero quizá las cosas no hayan cambiado tanto desde entonces en Xexaouen o Xauen o Chef-chauen o Chauen o Chichauen o como sea que se transcriba el nombre de esa localidad del Rif marroquí. Se sitúa entre dos cumbres que semejan, según la gente local, un par de cuernos de donde procede su nombre. Su característica más destacada es la de tener las casas pintadas con el color de un cielo con nubes. En los ochenta protagonizó una película de éxito, *Bajarse al moro*, pero ese es otro tema.

Chef-chaouen se encarama monte arriba. Sus calles son cuestas a menudo escalonadas y con rellanos, por lo que escasean las plazas. En su guía sobre Marruecos, Enric Balasch habla de la plaza de Uta el Hammam en Chef-chaouen: ‘De forma irregular esta plaza está dominada por las cumbres de las montañas que circundan la ciudad. A su lado la Gran Mezquita construida en el s. XV posee un minarete de forma hexagonal finamente decorado.’ (Balasch, 1987, p. 51)

La imagen muestra esa mezquita. Se levanta por encima del suelo de la plaza y se accede a ella por tres escaleras. El hombre que entra en la imagen por la izquierda no inclina su cabeza en señal de respeto o porque el muecín llame a la oración. Es una casualidad que da más significado a la fotografía. El minarete se yergue ante un cielo inmaculado. Basta contemplarlo un instante mientras recordamos las palabras de Balasch para ver que ahí está la iMATgen. La planta de este minarete, ¿es hexagonal? Comprender la imagen es comprender realmente cómo es la base de esa construcción. La perspectiva matemática nos permitirá ver aquello que en la imagen es invisible.

Teniendo en cuenta que la luz viaja en línea recta, observemos cómo se ven las cosas desde un punto alejado de la base de una construcción en forma de prisma recto de base poligonal. Por ejemplo, en el caso de una torre hexagonal, por cuestiones de simetría, tenemos tres regiones desde la que veremos diferente número de vértices y lados:

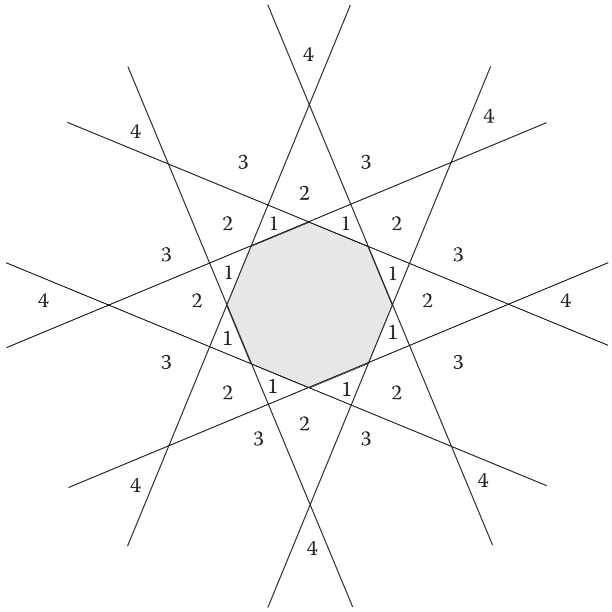


Desde la región *A* solo vemos 1 lado. Desde *B* vemos 2. Si estamos en *C* vemos 3. El número máximo de lados visibles se corresponde con la zona determinada por el punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos del polígono. Como sucede en el vértice de la zona *C* en la figura anterior. Cuanto mayor sea el número de lados del prisma poligonal, más habrá que alejarse de su base. Un sencillo análisis de la situación permite conocer cuál es el número máximo de lados visibles, V(*n*), para los primeros prismas cuyas bases son polígonos regulares:

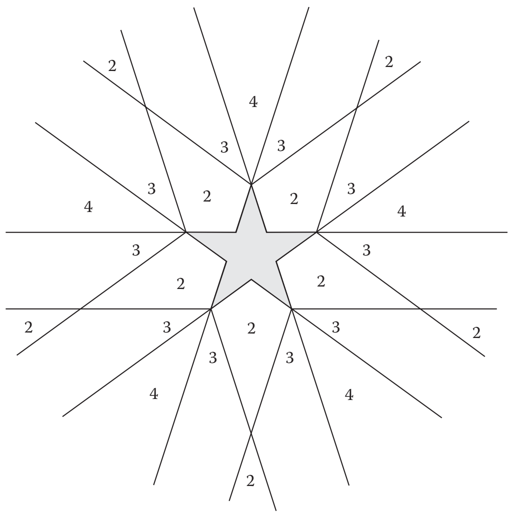
$$V(3)=2,\ V(4)=2,\ V(5)=3,\ V(6)=3,\ V(7)=4,$$
$$V(8)=4,\ V(9)=5,\ V(10)=5$$

La regularidad de esta serie de valores permite saber cómo es n a partir de V(*n*). Si n es par, $V(n)={}^{n}/_{2}$. Si n es impar, $V(n)={}^{n+1}/_{2}$. Nunca veremos más de la mitad de los lados de un polígono por la misma razón por la que nunca es visible el diámetro completo de un círculo desde su exterior. La relación también puede leerse en sentido contrario: Si *V* es el número máximo de lados visibles, entonces o bien $n=2V$ (*n* par) o bien $n=2V-1$ (*n* impar).

Como en la imagen se ven cuatro lados del minarete, *n* puede ser 8 ($n=2\cdot4$) o 7 ($n=2\cdot4-1$). Teniendo en cuenta el ambiente cultural en el que nos encontramos, hay que hacer dos observaciones. La primera, que no solo en la cultura islámica, sino en prácticamente todo el mundo, las construcciones con base poligonal acostumbran a tener un número par de lados. La segunda, que la simetría de octavo grado (simetría de rotación de 45º) posee una importancia capital en la cultura islámica. Uno de sus diseños más característicos es precisamente la estrella de ocho puntas rectangulares configurada mediante la superposición de dos cuadrados con el mismo centro, pero uno girado 45º con relación al otro. En conclusión, que las posibilidades de que ese minarete tenga planta heptagonal son nulas. Se trata pues de una construcción que tiene por base un polígono regular de ocho lados. La figura siguiente muestra la distribución de zonas para este caso con el número de lados visible en cada una de ellas:



En el caso de un polígono no convexo como una estrella de cinco puntas, veríamos las cosas así:



En ambos casos, los diseños resultantes recuerdan las decoraciones del arte islámico. Por eso formará parte del título de esta iMATgen una palabra de uso corriente en castellano y que se utilizada para expresar el deseo de que algo, generalmente bueno, suceda. Tanto ella como las cifras que protagonizan esta iMATgen forman parte del legado árabe de nuestra cultura: ***¡Ojalá lo veas!*** ■

REFERENCIA

Balasch, E. (1987): *Marruecos*. Laertes Ediciones SA.Barcelona.

iMATgen 17

Mientras esperas que te traigan la comida se te acerca un joven, te saluda y te pide permiso para sentarse a tu mesa. Respondes a sus preguntas con amabilidad: ¿Cuándo has llegado? ¿De dónde vienes? ¿Cuánto tiempo llevas aquí? ¿Estás viajando solo? ¿Estas casado? ¿Tienes hijos? ¿Qué vas a hacer mañana? ¿Te gustaría ver un funeral?

Justo entonces. En ese instante de silencio que sucede a la última pregunta es cuando se produce un cambio en ti del que no eres consciente. Los ojos se te han abierto más de lo normal, pero no mucho, sólo un poquito. Un cambio del que no se darían cuenta ni siquiera quienes te conocen en tu país, pero una abertura suficiente para alguien de ojos rasgados como quien te interroga y para quien tus ojos son redondos como platos. Tu, víctima inocente, que hasta ese instante habías contestado de forma automática a todas sus preguntas, confirmas el interés insinuado en esa sutil apertura ocular formulando la pregunta que tu interlocutor esperaba:

—¿Dónde?
—En mi pueblo.
—¿Dónde está tu pueblo?
—¡Oh! Es un pueblo muy pequeño.
—Sí, pero ... ¿Donde está? ¿Cómo se llama?
—Está al norte de la región.
—Ya. ¿Y cómo se llama?
—To’ Tallang.
—¿To qué?
—To’ Tallang!

Sacas un mapa de la bolsa y lo escudriñas a conciencia. To’ Tallang, To’ Tallang, To’ Tallang, ... te repites. Tu amigo espera. No dice nada. No siente ningún interés por tu búsqueda porque conoce el resultado. Por fin, se aviene a ahorrate trabajo:

—No sale en el mapa.

Tu, ni caso. Tu mapa es una joya que compraste por una pasta antes de venir. To’ Tallang tiene que aparecer en él. Sin embargo, al cabo de un rato, te rindes:

—No sale en el mapa.
—¡Ya te lo he dicho! Es un pueblo muy pequeño. No está en el mapa.
—¿Por qué zona dijiste que estaba?
—Al norte. Es el pueblo donde nací.
—¡Qué raro! Debería estar por aquí.

Repasas otra vez nombres de caminos, ríos, montañas y localidades minúsculas.

—Pues no sale.
—¡Claro que no! Ya te lo dije.
—¿Y no podrías indicarme por donde está?
—Es difícil de encontrar. No hay carretera hasta allí.
—Ya veo. Pero este mapa incluye caminos y pistas sin asfaltar. ¿Por dónde está?

Tu amigo se inclina sobre la sábana de papel coloreado que has desplegado encima de la mesa. Extiende su índice en el aire y lo dirige hacia la zona norte. Tu ojos abiertos de par en par siguen ese dedo con sumo interés. El extremo del índice describe una curva en el aire y acaba posándose sobre el papel. Pero justo cuando lo toca no se detiene para señalar un punto, sino que se agita frenético describiendo círculos alrededor de un área indeterminada y te grita:

—¡Por aquí!

Tus ojos giran y giran en sus órbitas a toda velocidad reflejando el remolino que describe aquel dedo espasmódico. ¡Si pudieras verte te acordarías de Marujita Díaz! En la vorágine, preguntas:

—¿Dónde, dónde ...?

Pero él ya no te hace caso. Y tu, mareado, vuelves a rendirte. Te das cuenta de que su pueblo nunca saldrá en ningún mapa. Pese a ello, mañana te levantarás temprano para irte con él a ver el modo en que tratan a los muertos en Tana Toraja. De camino, te encontrarás con casas de arquitectura diversa. Algunas, las más sofisticadas, propias de la más alta clase social. Otras, como la de esta imagen, te parecerán tan modestas como son en realidad. Entender la imagen es entender esa casa.

La fotografía muestra algunos ejemplos de la utilidad del bambú en la arquitectura. Sirve de pilar, viga o escalera. Para el tejado se usan hojas de cocotero. El suelo parece hecho de tablas de madera y cañas. Las paredes, en cambio, parecen hechas solamente de cañas. Su verticalidad se conserva gracias a unos travesaños también de bambú. Pero si nos fijamos bien veremos que las cañas verticales de las paredes en la parte inferior de la vivienda presentan unas líneas transversales oscuras. Esas líneas transversales indican cuál es verdaderamente su origen. Las paredes de la casa no están hechas de hatillos de cañas, sino de enormes troncos de bambú abiertos. Con N troncos de bambú de diámetro D y longitud L levantaremos una pared rectangular de dimensiones $N{\cdot}L{\cdot}D$. En cambio, cortando longitudinalmente esos troncos, abriéndolos, extendiéndolos en el suelo y luego uniéndolos uno a continuación del otro, obtendremos una pared mucho mayor, de dimensiones $N{\cdot}L{\cdot}\pi{\cdot}D$. Más del triple que antes.

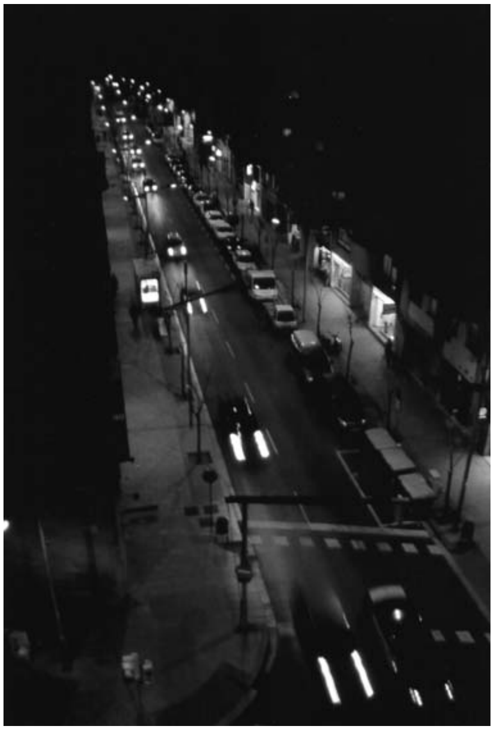
Estamos acostumbrados a recortar y pegar en el ámbito topológico los más diversos objetos geométricos elásticos, desde una banda de Möbius hasta una botella de Klein. El bambú más fino y flexible de esta región de la isla de Sulawesi se llama *Bulo* y es parecido al que abunda en nuestro país. Más rígido y grueso es el llamado *Tallang*. El *Ao'* es amarillo y escaso, bonito y muy apreciado. El mayor de todos es el *Pattung*. Este sobrepasa fácilmente el palmo de diámetro, su pared tiene más de un dedo de grosor y se yergue hasta los quince metros de altura. Sólo ahí arriba, donde los extremos se afinan, logra vencerle la gravedad y se curva. En las paredes de esa casa tenemos un ejemplo real extraordinario de la puesta en práctica de un homeomorfismo topológico. Y no aplicado a un objeto dócil como tiras de papel o botellas elásticas, sino desarrollado con un objeto duro e inflexible como es un tronco de *Pattung*.

Ese homeomorfismo continuo entre un cilindro desprovisto de una recta longitudinal (tronco de bambú abierto de extremo a extremo) y un rectángulo del plano (tronco abierto extendido sobre el suelo) se realiza en la práctica señalando primero, a golpe de machete, multitud de segmentos longitudinales en el *Pattung*. Estos no deben ser lo suficientemente profundos como para atravesar la madera. Luego sí, se incide en uno de ellos hasta atravesarla y conseguir en el *Pattung* un corte longitudinal, de extremo a extremo. A continuación, se abre la pieza con cuidado hasta dejarla extendida en el suelo. Por último, se cortan las asperezas presentes en una cara del rectángulo resultante, la que antes era interior. Al abrir el bambú todos los fragmentos longitudinales de este lado son cóncavos y, por ello, más cortantes. También en este lado es donde hay las irregularidades de los nudos. Los fragmentos correspondientes al lado exterior no constituyen un problema porque son convexos:

La traducción al castellano de *To' Tallang* podría ser *Villabambú*. Quienes ahí viven lo hacen realmente dentro del bambú, en el interior de un único pero ingente tronco de *Pattung* construído con los de un haz. Un tronco artificial de sección rectangular que transforma en verdad la broma del nativo. *To' Tallang*, *To' Ao'* y *To' Pattung* no aparecen en el mapa porque están en todas partes. Los hay a centenares. Eso es ***To' Tallang: habitar el bambú***. ■

iMATgen 18

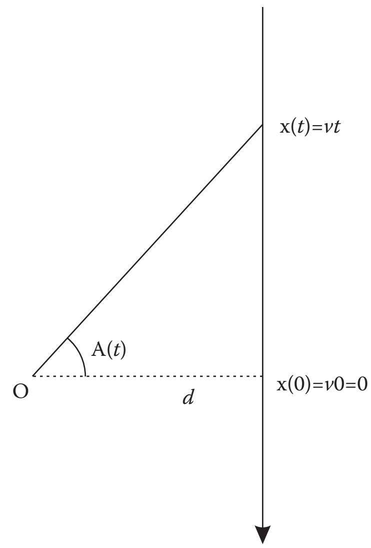
Uno, dos, tres, cuatro, hasta nueve automóviles acercándose hacia el observador por el carril situado a la izquierda de la imagen. En el carril central un único automóvil que acaba de iniciar su marcha desde la línea que señala el paso de peatones. En el carril derecho, una hilera de coches aparcados. Si la foto se viera en color, verías que el semáforo de peatones está en rojo, igual que el de los coches del cruce perpendicular, justo al pie de la fotografía. A diferencia del coche que inicia la marcha, los otros, los del carril izquierdo, no tuvieron que reducir su velocidad para detenerse en el semáforo. Pudieron pasarlo continuando su camino a la misma velocidad que llevaban, la cual, lo recuerdo bien, era la misma para todos. De ahí que la distancia entre ellos sea tan parecida.



Desde la primera de las iMÁTgenes de esta sección sabemos cómo disminuye el tamaño de las cosas al aumentar la distancia. Pero aquí, dado que la fotografía se hizo sobre algo en movimiento, cabe señalar algo importante. Las luces de los coches más cercanos dejan un vestigio luminoso más extenso que las de los más alejados. Sólo los últimos automóviles aparecen con luces casi puntuales y redondeadas como sus faros. Cuanto más lejos, menos movidos aparecen. No así los primeros. Los coches más cercanos se ven imprecisos, fantasmagóricos. Sus luces convertidas en líneas tan largas como... He ahí la cuestión. ¿Tan largas como qué? ¿Cómo la velocidad que llevan? En parte sí, pero sólo en parte.

Si las cosas disminuyen con la distancia y una fotografía recoge vestigios luminosos correspondientes a un intervalo de tiempo determinado, las cosas en movimiento más lejanas al punto de observación se captan con menor velocidad puesto que en el mismo tiempo disminuye el espacio aparente que recorren. Los trazos de los faros en la fotografía lo corroboran. Ésta es una explicación, pero el análisis matemático permitirá precisar un poco más un detalle importante que esta simple respuesta pasa por alto. Para entendernos mejor, si en lugar de automóviles lo que apareciera en la fotografía y se acercara al observador fuese un tren, la locomotora y los primeros vagones aparecerían movidos mientras los últimos se verían con nitidez. ¿Pero acaso los vagones de un mismo tren se desplazan a distinta velocidad? No. Aquí es donde esta imagen se convierte en iMATgen.

Supongamos que desde un punto O observamos el paso de un móvil desplazándose a velocidad constante v siguiendo una trayectoria rectilínea (hacia abajo, como en la imagen). Sea $t=0$ el instante en que más cerca, a distancia d, pasa de nosotros el móvil y llamemos $x(0)=0$ a dicha posición. Sea $x(t)=v\cdot t$ el espacio recorrido desde que lo vemos hasta llegar a nuestra altura ($t=0$). Sea $A(t)$ el ángulo formado entre la visual dirigida al móvil desde nuestra posición O y la visual dirigida al punto $x(0)=0$:



Puestas así las cosas, tenemos:

$$\mathrm{A}(t) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{x}(t) - \mathrm{x}(0)}{d}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{vt}{d}\right)$$

La velocidad con la que vemos pasar el coche no es la que lleva él, sino la determinada por la variación del ángulo A(t) con el que lo observamos con relación al tiempo. Es una velocidad angular y su valor viene dado por la derivada de A(t) con respecto al tiempo. Esa es la velocidad aparente con la que el observador percibe el móvil que se le aproxima:

$$\mathrm{A}'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{vt}{d}\right)^2} \bullet \frac{v}{d} = \frac{d \bullet v}{d^2 + v^2 t^2}$$

Cuanto más lejos está el coche del observador, a medida que la hipotenusa $D=(d^2+v^2t^2)^{1/2}$ del triángulo anterior crece, disminuye la velocidad aparente A'(t). Los coches más alejados no salen borrosos en la foto, siendo su velocidad 'aparente' prácticamente nula:

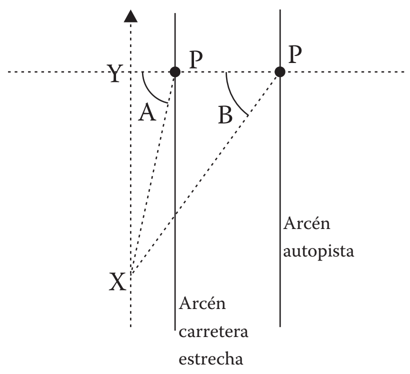
$$\lim_{D \to \infty} \mathrm{w}(t) = \frac{d \bullet v}{D^2} = \frac{d \bullet v}{\infty} = 0$$

Sin embargo, en el instante t=0, cuando el móvil pasa junto al observador, la velocidad 'aparente' es A'(0)=v/d y se hace prácticamente infinita cuando la distancia d es muy pequeña:

$$\lim_{d \to 0} \mathrm{A}'(0) = \lim_{d \to 0} \frac{v}{d} = \frac{v}{0} = \infty$$

Ocurrirá esto por muy despacio que se desplace el móvil, mientras v no sea cero.

Supón que viajas a velocidad constante siguiendo la dirección y sentido de la flecha según se indica en la figura siguiente. Pasas por el punto X y te fijas en un punto P del arcén. Hasta llegar a su altura, es decir, hasta llegar al punto Y, el ángulo con el que lo percibes ha variado más si viajas por una carretera estrecha (ángulo A) que si lo haces por autopista (ángulo B). En el mismo tiempo has recorrido el mismo espacio, la distancia XY, pero en el primer caso la variación angular es A y en el segundo, B. La sensación de velocidad en la calle estrecha será mucho mayor que en la autopista o en una calle ancha:



Por eso cuando vamos en el metro y miramos por la ventanilla tenemos la sensación de desplazarnos mucho más rápido de lo que lo hacemos en realidad. Las paredes del túnel y todo lo que cuelga de ellas pasan a todo trapo cuando quizá no vayamos a más de cuarenta o cincuenta kilómetros por hora. En cambio, en una autopista vamos a cien y parece que apenas nos movemos. Las referencias están más lejos, la calzada es más amplia, la distancia d es grande. Si quieres sensación de velocidad, no cojas el coche y lo pongas a doscientos por hora, mejor ponte a correr por un callejón. ¿Será por eso que ahora mucha gente hace *footing* por la ciudad?

Este fenómeno viene a ser la visualización de un efecto físico auditivo conocido como efecto Doppler. Todos lo experimentamos cada día. Una moto se acerca hacia nuestra posición zumbando como un abejorro en celo. Percibimos un ruido intenso y agudo, pero justo al pasar junto a nosotros este ruido baja de tono para diluirse en el confín de nuestra mirada. Esta iMATgen no se centra en el aspecto sonoro, sino en el visual: ***Tan cerca, tan fugaz.*** ■

SUMA 49
Junio 2005, pp. 77-80

Apología del paraguas

Muchos objetos cotidianos forman parte de nuestro entorno más inmediato y sin embargo no les prestamos la atención suficiente. La propuesta de este clip es ensalzar el mundo de los paraguas intentando dar respuesta a preguntas infrecuentes que posiblemente nunca se han formulado sobre estos mecanismos.

¿Qué es realmente un paraguas?

Una primera aproximación (sólo válida para los de letras) podría ser "estructura que extendida puede evitar que el agua caiga sobre el individuo que se coloca debajo", definición que le lleva inexorablemente a incluir junto a los paraguas tradicionales, periódicos, balcones, árboles, cubiertas de gasolinera, paracaídas, palios eclesiásticos, coches, metros, grandes almacenes, etc. No intente precisar tanto y confórmese con la imagen que tiene del paraguas que usa los días de lluvia o pasea sin desplegar los días en que el servicio metereológico le ha anunciado como lluviosos.

¿Por qué en inglés se dice *umbrella* y no *stopwater*?

Porque *paraguas* en castellano (o *parapluie* en francés) indican directamente la función del aparato para protegerse de la lluvia, pero en inglés se evoca directamente la idea histórica

Cantando bajo la lluvia uno de los paraguas más famosos de la historia

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

del *parasol* indicando (a través del latín *umbra*) la vieja función de aportar sombra.

¿Qué existió antes el parasol o el paraguas?

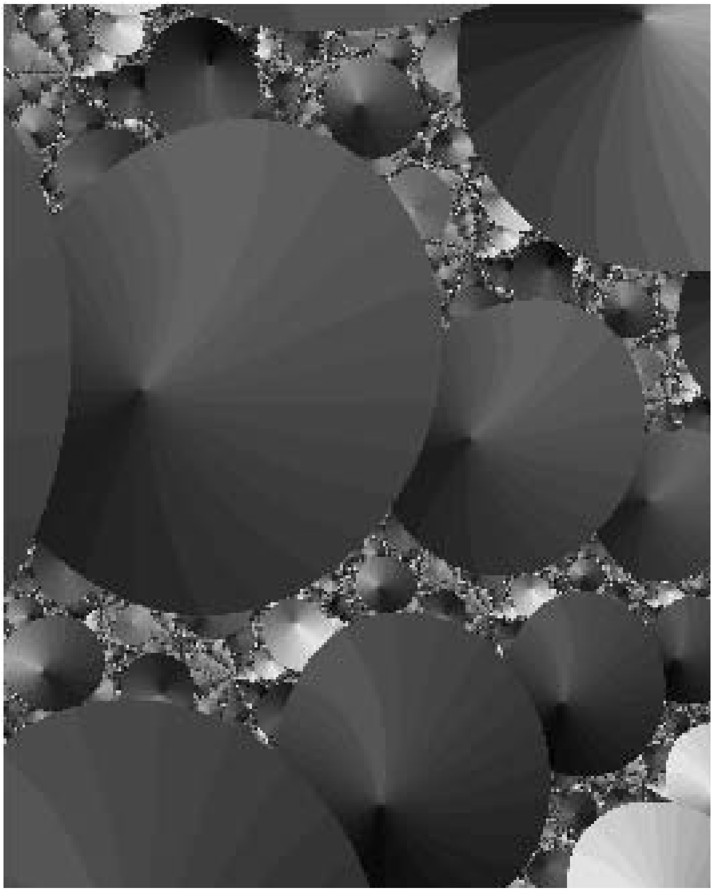
¡El parasol! Con él puede remontarse a los mejores años de las civilizaciones chinas, asirias, griegas y romanas, donde siempre fue muy femenino el resguardarse del sol. También en Asia y África hubo parasoles distintivos de realeza y notoriedad.

¿A partir de que momento ya hay paraguas anti-lluvia?

Hay diversos precedentes antiguos singulares (parasoles readaptados)… pero hasta el siglo XVIII no surgen los paraguas en el sentido actual, que fueron pensados solo para mujeres.

¿Los hombres preferían la lluvia?

¡No! Pero cascos, sombreros, boinas, capas, etc. les permitieron retardar su adopción de paraguas. Seguramente el origen femenino del uso también ayudó a retrasar la masculinización del artefacto.


Paraguas fractales

¿Y ya no hay parasoles?

¡Claro que sí! En grandes formatos para las playas, mesas exteriores, jardines, etc. y en formas individuales en países con mucho sol y señoras deseosas de conservar la blancura. Mientras en Occidente a partir de 1930 se optó por la "belleza" de las quemaduras cutáneas (sol, rayos UVA…) en Oriente aún se suspira hoy por evitarlas.

¿Cuál fue la primera tienda de paraguas?

Hasta el siglo XIX no aparecen tiendas donde adquirir paraguas. Incluso en la lluviosa Inglaterra uno debe remontarse al 1830 para encontrar en el 53 de New Oxford Street de Londres (aún existe) la tienda de James Smith and Sons. Se trataba de paraguas lujosos hechos artesanalmente.

¿Cuándo se introdujeron las varillas de hierro?

Si bien la idea de usar telas resistentes al agua cuajó pronto, la idea de varillas de hierro desplegables tuvo que esperar a 1852 para ser introducida. El genio fue Samuel Fox al observar que podría dar salida a su abundante stock de varillas para fajas de señora a través de este nuevo uso estructural. La primera patente americana no se produjo hasta el 8 de Agosto de 1885 (número de registro *US Patent# 323,397*) cuando William C. Carter la presentó.

¿Por qué los paraguas tienen estructura octagonal?

La forma octagonal es ya "tan cercana" visualmente a la forma circular que la apariencia de la tela del paraguas abierto es, prácticamente, la de un círculo. Por otra parte la simetría del octágono es notable y por tanto la repartición de las varillas resulta muy uniforme.

¿Cómo se abre un paraguas?

¿Hasta esto pregunta? Al empujar el aro central a lo largo del eje central, las ocho varillas articuladas en él se ven obligadas a subir y estando sus otros extremos articulados en las ocho varillas largas correspondientes (engarzadas en el extremo del eje) necesariamente estas varillas se abren forzando a la tela a distribuirse tensa sobre ellas. Si se miran los planos de simetría determinados por parejas opuestas de varillas largas, se aprecia como parte de estas (con sus correspondientes varillas cortas) forman rombos movibles de perímetro fijo pero de ángulos (y área) cambiante. Los ocho rombos forman una bipirámide estupenda.

Mecanismo de un paraguas

¿La estructura del paraguas es sorprendente?

Sí, por ser articulada e inclinada. Materializa un modelo arborescente, un principio fractal, el divide y vencerás que también Gaudí recrea en sus columnas de la Sagrada Familia: la columna-tronco sirve de apoyo a las columnas-ramas repartiéndose pues las cargas convenientemente. Las varillas pequeñas del paraguas son inclinadas como las columnas del Park Güell de Gaudí.

¿Y los plegables?

En los tipos más comunes, el primer secreto es el encaje telescópico del eje central forzado a irse alargando al abrir el paraguas. La parte superior sigue (en pequeño) el mismo principio que acabamos de explicar. La novedad es que las varillas largas se han dividido en trocitos iguales y más pequeños paralelogramos convenientemente articulados fuerzan a cada juego de varillas a extenderse linealmente. ¡Un festival de cuadriláteros está servido!

¿No hay paraguas cuadrados o hexagonales?

¡Si! Están de moda y sólo se venden en tiendas muy exclusivas. Los pude ver recientemente en tiendas de lujo de Santiago de Chile. No disimulan su forma cuadrada o hexagonal pero con medidas adecuadas hacen igual servicio que los usuales, tienen menos varillas, pesan menos… y acaparan la atención.

¿Hay paraguas de distintas tallas?

¡Claro! Hay tallas (medianas) distintas para poder cobijar correctamente a niños, a señoras menudas, a hombres grandes, etc. Los más enormes son los de golf.

¿El diseño de los paraguas es perfecto?

¡No! Si bien la simetría de las varillas es perfecta y pueden lograrse versiones muy plegables, la función de resguardar de la lluvia aun es mejorable. El paraguas aguantado por la mano delante del cuerpo protege mejor la parte delantera del cuerpo que la espalda. La ergonomización del paraguas está pendiente. Además la lluvia inclinada es indiferente a la tela negra y las fuertes ráfagas de viento son asesinas en serie de paraguas. ¿Se imagina marineros con paraguas campeando el temporal?

¿Cómo se clasificarían los paraguas entre los objetos cotidianos?

Forman parte de estos mecanismos flexibles fruto de una geometría experimental y que resultan útiles como los sacacorchos, las bicicletas, las tijeras, los limpia-parabrisas, los rompe-nueces, las mesas plegables, etc., etc., etc. son diseños nacidos de una matemática aplicada a las formas usables y por tanto son interesantes para ser analizados.

¿Así los paraguas también deben estar en clase de matemáticas?

¡Sí claro! Para ilustrar simetría, estructuras, polígonos, cuadriláteros, ángulos, áreas cambiantes con perímetros fijos, fuerzas de acción-reacción, factores de transmisión de fuerzas, etc.

¿O sea que los profesores a clase con paraguas?

¡Sí...! y "cantando bajo la lluvia" que el temporal arrecia.

Para pensar un rato

Aquí tiene unas preguntas por si quiere reflexionar bajo la lluvia:

¿Qué medidas ergonómicas deberían tenerse en cuenta al fabricar un paraguas?

¿Cómo varían todos los ángulos entre las varillas del paraguas al desplegarse?

¿Qué mecanismos se basan también en el despliegue de varillas?

¿Podría servir un paraguas para inscribir polígonos en una circunferencia? ¿Qué tipo de polígonos?

Cualquier comentario sobre estos asuntos puede ser enviado a *elclip.suma@fespm.org* ■

PARA SABER MÁS

ALSINA, C., *Geometría Cotidiana, Placeres y Sorpresas del Diseño,* Barcelona: Editorial Rubes, 2005.

BOLT, B., *Mathematics Meets Technology,* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

CLARKE, D., *The Encyclopedia of Inventions,* New York: Galahad Books, 1977.

NORMAN, D.A, *The Design of Everyday Things,* New York: Doubleday, 1989.

PETROSKI, H., *The Evolution of Useful Things,* New York: Vintage Books, 1992.

EN LA WEB:

http://www.tecnum.es.paraguas

www.backyardcity.com/Umbrellas-Umbrella-History.htm

www.oldandsold.com/articles13/umbrella-history.shtml

inventors.about.com/library/inventors/blumbrella.htm

www.laterlife.com/laterlife-T.S.Crawford-umbrella.htm

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

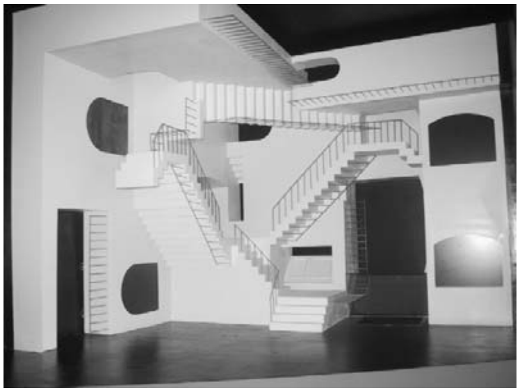
Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 49
Junio 2005, pp. 81-94

Gedankenexperiment de una exposición

La exposición temporal *Albert & Blas Einstein y Cabrera*, del Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas de Gran Canaria, comienza presentando una maqueta versión 3D de la obra "Relatividad" de M.C. Escher. Las *ventanas* de la obra contienen pantallas que emiten imágenes que representan cómo se ha manipulado la imagen de A. Einstein en los medios, en el cine, en la publicidad, etc.



Maqueta de una versión 3D de la obra "Relatividad" de M.C. Escher

También aparece dentro de la obra un *teatro virtual* donde se hace una presentación de la exposición, tratando de motivar al visitante con el famoso símil de R. Feynman:

> Descubrir las leyes físicas es como tratar de aprender las reglas del ajedrez a base de observar partidas

y con frases que parecen hablar de un mundo fantástico, donde ocurren y se preguntan cosas inverosímiles: ¿Te gustaría visitar tu ciudad dentro de 1000 años?

Y es que la exposición pretende conmemorar el 2005: Año Mundial de la Física, conmemorar los 100 años del *annus mirabilis* de Albert Einstein y de paso, el cincuentenario de su muerte. La publicidad institucional del *World Year of Physics 2005* dice:

> ¡Ayúdanos a que el 2005 sea otro año milagroso!

y pensábamos que sí, que era la oportunidad de divulgar el conocimiento básico de la obra de Einstein, de acercarlo de verdad al gran público, a los jóvenes, a los escolares, no sólo universitarios, sino de secundaria y de bachillerato.

Nos propusimos una exposición que fuera un gran laboratorio donde experimentar (con experimentos reales y experimentos pensados, "Gedankenexperiment de una exposición"), una exposición en la línea habitual en nuestro Museo: interactiva y participativa. No era poco: gran laboratorio, experimentos pensados, interactividad, participación, historias... Ir más allá del icono de que Einstein fue *mal estudiante*, llevaba el pelo poco arreglado y decía que *todo era relativo*.

Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

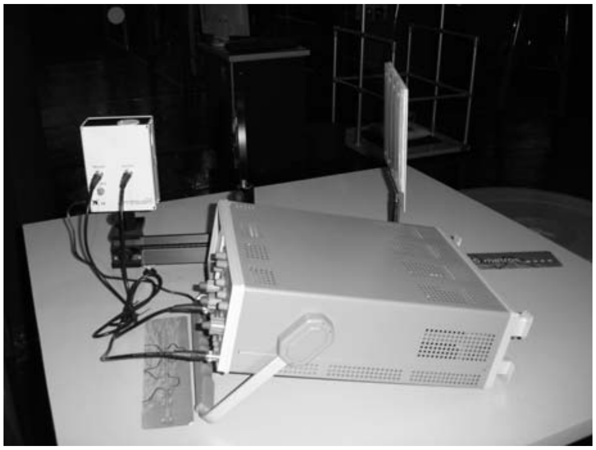
Para presentar y explicar la relatividad especial, verdadero objeto de la efemérides, se buscaron ideas en clave divulgativa y con poquitas matemáticas. Ya G. Gamow en su "Biografía de la física" y sus cuentos de Mr. Tompkings nos allanaba el camino, al igual que el librito de L. Landau; incluso el clásico "Cosmos" de Sagan, sin olvidar las popularizaciones en "Tío Alberto" de R. Stannard, eran referentes importantes. Y nos quedamos con el primero y el último.

¿Se detiene realmente el tiempo para alguien que se mueve a la velocidad de la luz?¿Qué motivaría a Einstein en Berna para empezar a sospechar del tiempo?

Gamow había sido el maestro de la popularización de la teoría de la relatividad y de la teoría cuántica, ¡vaya personaje!, casi de su boca salieron además, por primera vez, términos como ADN o Big-Bang. Aquí decidimos, con sus cuentos, hacer el mayor esfuerzo: hicimos dos guiones adaptados y produjimos sendas películas en dibujos animados 3D "Velocidad máxima" y "Un universo de juguete". R. Stannard sabía utilizar el lenguaje y los símiles adecuados para motivar y acercar el conocimiento de la relatividad a los jóvenes, su *Uncle Albert* es un clásico. Y además Stannard vino por aquí; en Canarias había expuesto en una conferencia organizada por la Fundación Canaria Orotava de historia de la Ciencia, *el fascinante mundo de Albert Einstein*. Allí motivó a la joven audiencia con las preguntas alocadas: ¿Saben ustedes cómo llegar a ser más viejos que sus padres? ¿Se imaginan que podrían pesar tanto como diez aviones Jumbo sin tener que engordar? ¿Saben cómo escachar a una persona dejándola más plana que un CD, sin que sienta nada en absoluto?...

Aquí la decisión fue crear unos personajes de comics (Albert y Blas) que fueran protagonistas y que contestaran a todas esas preguntas.

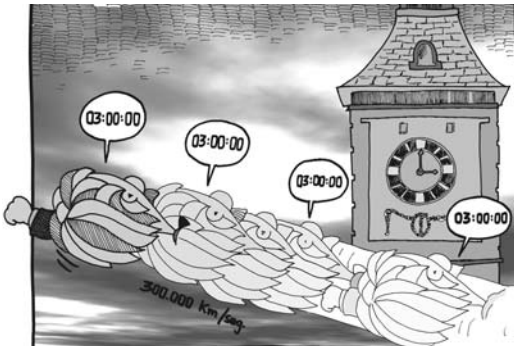
Con estos mimbres nos pusimos manos a la obra; quedaban por preparar múltiples módulos interactivos, plataformas audiovisuales y el Laboratorio, al que al final pusimos el nombre de *Experimenta*.



Módulos del Laboratorio Experimenta: cálculo de la velocidad de la luz y experimento de Michelson y Morley

La pregunta de Albert

Cuando Albert Einstein era un adolescente tenía un amigo muy instruido, llamado Max Talmud, que le regaló “El libro popular de la ciencia natural” de Bernstein; en ese libro Albert vio descrita la enorme velocidad de la electricidad a través de los hilos y de la luz a través del espacio. Y se imaginaba a sí mismo (primer *Gedankenexperiment*) a las tres de la tarde, alejándose a la velocidad de la luz del reloj de la torre de su ciudad.



El reloj le parecía parado porque viajaba junto a la luz que reflejaba su esfera mostrando las tres en punto.

¿Se detiene realmente el tiempo para alguien que se mueve a la velocidad de la luz?

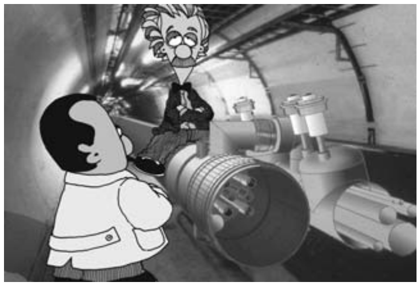
Esta pregunta se la planteó Albert Einstein muchas veces, y se decía: *Algo raro sucede a la velocidad de la luz*. Más aún, surgen más y más paradojas cuando uno va muy rápido, cerca de la velocidad de la luz.

¿Qué motivaría a Einstein en Berna para empezar a sospechar del *tiempo*?

Aventura en el CERN

La Relatividad empieza considerando qué sucede cuando uno va rápido. Y quiero decir muy rápido, a velocidades cercanas a la de la luz: 300.000 kilómetros por segundo.

¿Cómo se puede alcanzar tales velocidades? Pues en una máquina como ésta, situada en las afueras de Ginebra, Suiza, en el Laboratorio Europeo de Física de Altas Energías, conocido como CERN.



Tomemos unas minúsculas partículas subatómicas y pongámoslas en este tubo hueco. Entonces las impulsamos mediante intensos campos eléctricos para acelerarlas.

El tubo parece recto pero no lo es. Mirándolo desde este ángulo vemos que tiene una ligera curvatura. De hecho, es parte de un círculo. El tubo se enrolla alrededor de sí mismo para formar un enorme círculo, de 27 km de circunferencia. La máquina es tan grande que tardaríamos unas cuatro horas en darnos un paseo a lo largo de ella.

Está enterrada bajo el suelo, así que no se puede ver desde la superficie.

Se hace que las partículas giren alrededor del tubo muchas veces alcanzando más y más velocidad. Es algo parecido a un lanzador de martillo olímpico, haciendo girar el martillo alrededor de la cabeza varias veces para aumentar su velocidad antes de lanzarlo.

Lo primero que descubrimos es que hay una velocidad límite. No podemos conseguir que algo vaya más rápido que la velocidad de la luz.

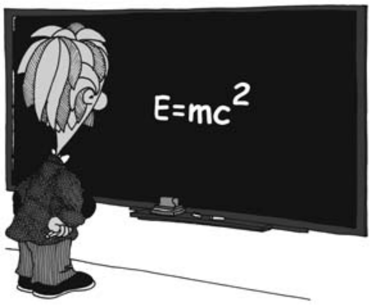
No importa lo fuerte que impulsemos las partículas, ni durante cuánto tiempo mantengamos el impulso; 300.000 km por segundo es el límite.

¿Por qué? Una buena manera de verlo es decir que cuanto más rápido viaja un objeto más pesado se hace.

E = mc²

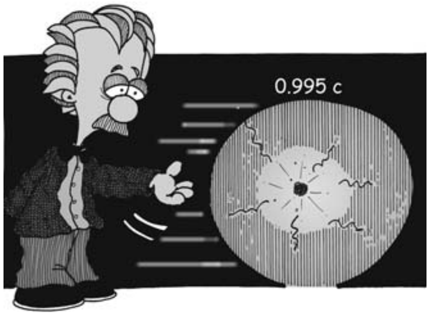
La Teoría de la Relatividad explica cómo la energía pesa, tiene masa. Eso se resume en la ecuación más famosa de Einstein:

$$E = mc^2$$



E es la energía y *m* es la masa que acompaña a esa energía; c^2 es la velocidad de la luz al cuadrado y se incluye para permitirnos escribir la masa en unidades de energía.

Así que mientras la partícula se va acelerando debe volverse más pesada a causa de la energía extra que ahora posee. No puede captar la energía extra sin que además coja la masa extra que va con la energía.



Y eso a su vez significa que es más difícil conseguir acelerarla todavía más. Es como empezar empujando una carretilla y terminar intentando empujar un camión de diez toneladas.

Cuando se mueven al 90% de la velocidad de la luz las partículas pesan el doble de lo normal. Y cuando se aproximan a la velocidad límite, la masa se convierte en infinita.

Un acelerador lineal de 3 km de longitud acelera minúsculos electrones a velocidades tan cercanas a la de la luz que emergen por el otro extremo con una masa 40.000 veces superior a la que tenían cuando partieron. Si a ustedes los aceleráramos a la misma velocidad que esos electrones acabarían pesando el equivalente a diez aviones Jumbo.

¿Qué creen que le pasa a la masa de esos electrones cuando llegan al reposo de nuevo? Al parar pierden toda la energía que tenían, lo que significa que pierden toda la masa que iba con esa energía. Así que la masa de los electrones vuelve a ser la que era originalmente.

Energía y masa van juntas. Si tienes energía, tienes masa; si tienes masa, tienes energía.

Bomba atómica

Esta moneda de 1€ tiene masa, pero ¿que significa eso?

Significa que tiene energía, incluso aunque no se mueva. Tiene una forma empaquetada de energía.

¿Cuánta energía puedo obtener con este euro? ¡Suficiente para devastar 100 Km a la redonda! Si la energía contenida en él fuese liberada de repente sería equivalente al estallido de una bomba nuclear.

Pero no se preocupen, está empaquetada de forma segura. No podemos disponer de ningún modo de esa energía.

Sin embargo hay ciertas circunstancias especiales donde una pequeña fracción de la energía empaquetada en forma de materia puede ser liberada. Eso ocurre cuando la parte central de un átomo —llamada núcleo— se divide o fusiona con otro núcleo atómico para formar otros tipos de núcleo.

Ésa es la fuente de energía de las bombas nucleares y de las centrales nucleares: energía en forma de materia que se convierte en otras formas de energía, tales como calor, luz y otros tipos de radiación.

Así que eso fue lo primero que descubrió Einstein acerca de lo que ocurre cuando se viaja muy rápido: que no se puede en ningún caso alcanzar la velocidad de un rayo de luz a causa del incremento de masa.

Pero todavía está por llegar una sorpresa aún mayor:

La velocidad afecta al tiempo

El tiempo pasa más lentamente para un astronauta en una nave espacial que se desplaza a gran velocidad que para un controlador de la misión en tierra. El reloj en la pared de la nave espacial va despacio y también el parpadeo de las luces en el panel de control.

Todo lo referente al cuerpo del astronauta va despacio: su frecuencia respiratoria, su pulso cardíaco, incluso el ritmo de su envejecimiento.

¿Es consciente él de esos cambios? No.

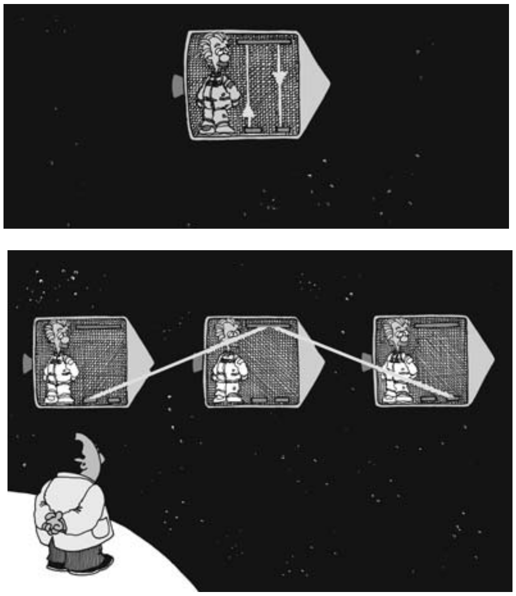
La cuestión es que si todo lo que hay en la nave espacial se ha ralentizado, entonces sus procesos cerebrales se habrán ralentizado también, en la misma proporción, y por lo tanto, también sus pensamientos.

Si miras un reloj lento con un cerebro lento, entonces el reloj parecerá normal.

De hecho, la vida en la nave espacial continuará normalmente en cuanto a lo que concierne al astronauta. Sólo desde el punto de vista del controlador de la misión todo lo que ocurre allá arriba se ha ralentizado.

Dilatación del Tiempo en la Relatividad Especial: una Demostración Simple

Imagina (*Gedankenexperiment*) un cohete moviéndose a una velocidad y alejándose de la Tierra. A bordo del cohete, dos espejos enfrentados de forma que un rayo de luz puede rebotar entre los dos a lo largo de una línea que es perpendicular al movimiento del cohete. Nos lo podemos imaginar como un reloj, donde cada rebote de la luz es un *tic* del reloj.



Definiciones:

c = velocidad de la luz.
v = velocidad del cohete medida en la Tierra.

t_{tierra} = intervalo de tiempo entre clics medidos en la Tierra.
t_{cohete} = intervalo de tiempo medido a bordo del cohete.

El haz de luz viaja de un espejo al otro a través de un distancia $c{\cdot}t_{cohete}$ medido a bordo del cohete. Mientras, el cohete se mueve hacia delante la distancia $v{\cdot}t_{tierra}$ medida en la Tierra. Durante el mismo intervalo, el haz de luz debe por lo tanto moverse una distancia $c{\cdot}t$ mayor que la vista desde la Tierra.

Recordando, Velocidad (v) = distancia (d) / tiempo (t)

De modo que,

$$d = v{\cdot}t$$

Pero la velocidad de la luz c es la misma para todos los observadores (lo aprendí en el Laboratorio *Experimenta*). Por lo tanto, t_{cohete} debe ser menor que t_{tierra}. En otras palabras, los intervalos de tiempo correspondientes son más cortos a bordo del cohete que en la Tierra.

Aquí está la solución cuantitativa, usando sólo unas pocas líneas de simple álgebra y el Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo:

$$(c{\cdot}t_{cohete})^2 + (v{\cdot}t_{tierra})^2 = (c{\cdot}t_{tierra})^2$$

Despejando:

$$(c{\cdot}t_{cohete})^2 = (c{\cdot}t_{tierra})^2 - (v{\cdot}t_{tierra})^2$$

Dividiendo cada término por c^2:

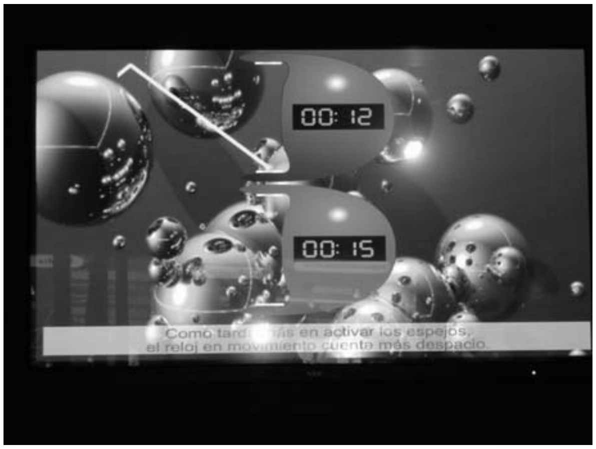
$$(t_{cohete})^2 = t_{tierra}^2 - (v^2/c^2)\, t_{tierra}^2 = (1 - v^2/c^2)\, t_{tierra}^2.$$

Sacando la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$t_{cohete} = t_{tierra}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t_{tierra}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

El factor de la raíz cuadrada es menor que 1, así que t_{cohete} (cualquier intervalo en el cohete) debe ser menor que t_{tierra} (el correspondiente intervalo en la Tierra).

El efecto es enorme para velocidades que se aproximan a la de la luz. Por ejemplo, si viajamos al 99% de la velocidad de la luz, entonces 1 - $(0{,}99)^2$ = 0,02, la raíz cuadrada de esto es 0´14, así que nuestro t_{cohete} sería solamente un 14% de t_{tierra}. Por tanto, si un viajero del espacio abandonara la Tierra al 99% de la velocidad de la luz, y volviera 100 años más tarde, cronometrándolo desde la Tierra, sería solamente 14 años más viejo según su reloj biológico.

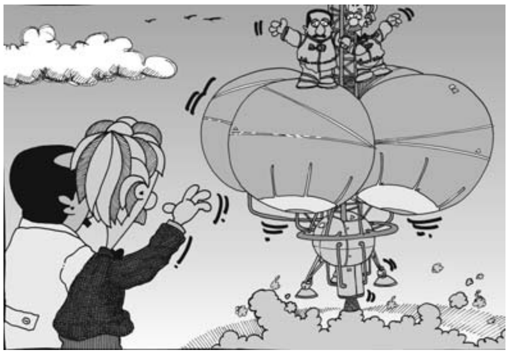


Módulo interactivo: Reloj de luz

De aquí proviene la famosa …

Paradoja de los gemelos

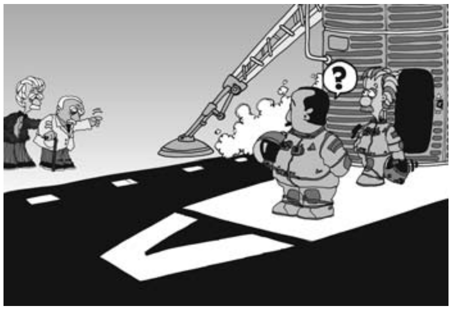
Supongamos, por ejemplo, que ustedes mismos tuvieran una de esas naves espaciales de gran velocidad. Podrían invitar a sus padres y a sus maestros para hacer un viaje de crucero en ella. Los suben a bordo pero ustedes no viajan con ellos. Luego los lanzan a una velocidad cercana a la de la luz.



Mientras tanto ustedes llevan una vida normal. Los años pasan. Ustedes crecen, dejan la escuela, consiguen un trabajo, tienen niños, los niños crecen.

Entonces un día, recuerdan de repente a sus padres y profesores. Ellos todavía están volando alrededor del universo. Ustedes deciden hacerlos regresar.

Ellos salen de la nave no mucho más viejos que cuando se subieron a ella. Mientras tanto ustedes han ido envejeciendo de forma normal. Resulta que ahora ustedes tienen más años que los que ellos tenían cuando inicialmente se subieron a la nave. De modo que ahora son ustedes más viejos que sus padres y profesores.



Según voy de un lado a otro me muevo en relación a ustedes, lo que significa que mi tiempo va más lento que el suyo. Estoy envejeciendo más lentamente, pensando más lentamente, mi reloj está yendo más despacio.

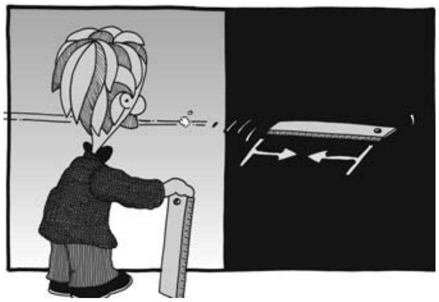
¿Entonces significa eso que ahora que ya no me estoy moviendo necesito ajustar mi reloj para recuperar ese tiempo perdido y de ese modo sintonizarlo con sus relojes?

No, y la razón es que al tipo de velocidad a la que me estaba moviendo el efecto es muy, muy pequeño.

Los astronautas experimentan el efecto de envejecer un poco menos que el resto de nosotros... Como el astronauta ruso Sergei Avdeyev, que estuvo en órbita un total de 748 días durante tres viajes en la estación MIR y es alrededor de un cincuentavo de segundo más joven que si hubiera permanecido en la Tierra todo el tiempo.

Hay una cosa más sobre lo que ocurre a altas velocidades. No sólo afecta al tiempo, también afecta al espacio

Cuanto más rápido va una nave, más pequeña se hace. Cuando va al 90% de la velocidad de la luz la nave se encoge a la mitad de su longitud normal.



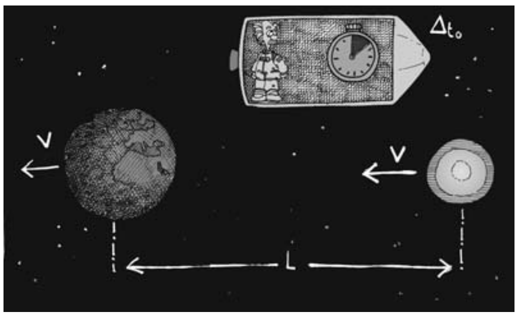
Y no sólo la nave, sino todo en su interior, incluyendo el astronauta (es el espacio mismo el que se contrae). A la velocidad de la que estamos hablando, el astronauta queda reducido a la mitad de su anchura normal.

Él no sentiría nada. Todos los átomos de su cuerpo se han encogido a la mitad de su tamaño normal, así que sólo necesitarán la mitad de la talla normal del cuerpo para encajar cómodamente.

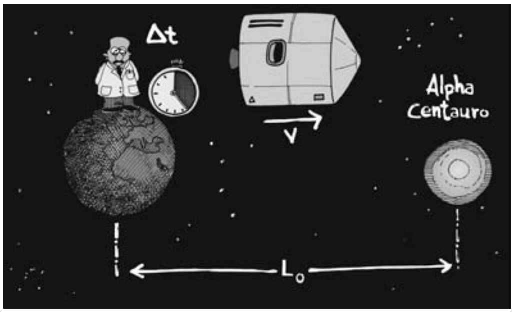
Cuanto más rápido va una nave más pequeña se hace. Cuando va al 90% de la velocidad de la luz la nave se encoge a la mitad de su longitud normal.

Él ni siquiera podrá ver que las cosas se han contraído. Eso es así porque su retina, en la parte trasera del ojo, que contiene la imagen de lo que él está mirando, se ha contraído en la misma proporción. De esa manera, la escena que él está viendo todavía ocupa la misma fracción de la retina que ocuparía normalmente, por lo que al cerebro le parece normal.

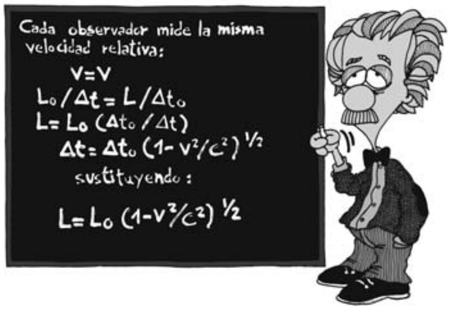
Incrementando la velocidad hasta casi la velocidad de la luz, la nave podría contraerse hasta ser más estrecha que un CD, y el astronauta seguiría dentro sin sentir nada en absoluto.



Un observador en la Tierra mide L_0 (el observador en tierra está en reposo respecto a la línea que va desde la Tierra a la estrella, así que mide la longitud L_0)



El astronauta mide el intervalo Δt_0 (Como el reloj del astronauta está presente tanto al principio como al final del evento —salida de la Tierra y llegada a la estrella— mide un intervalo de tiempo Δt_0)



El tiempo de vida de un Muón

Módulo: Detector de Muones

Los Muones son partículas inestables que se producen cuando la atmósfera absorbe los protones emitidos por el Sol. Cada segundo llega, aproximadamente, un muón por $c{\cdot}m^2$ a la superficie de la Tierra.

Los muones viajan a poco menos de la velocidad de la luz,

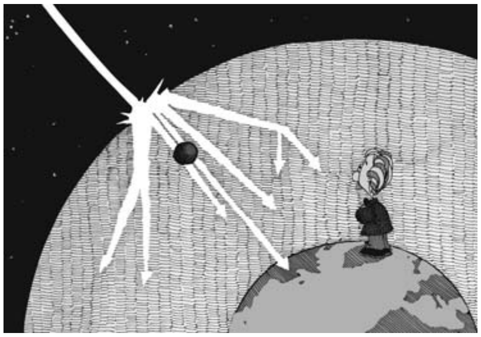
$$v = 0{,}99\ c$$

Los observadores que se encuentren en reposo con respecto a los muones miden que su tiempo de vida medio es de 2,2 μs; este es el intervalo de tiempo transcurrido entre su creación en la alta atmósfera y su desintegración.

$$\Delta t_0 = 2{,}2\ \mu s$$
$$\Delta t = \Delta t_0 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$
$$v / c = 0{,}99$$
$$[1 - (0{,}99)^2]^{1/2} = 0{,}14$$

$$\Delta t = \Delta t_0 / 0{,}14 = 2{,}2\ \mu s / 0{,}14 = 15{,}6\ \mu s$$

Un observador en tierra mide un tiempo de vida del muón en movimiento de 15.6 μs.



Ambos observadores miden la misma velocidad relativa v.

Para el observador terrestre, el espesor de la atmósfera es de 10.000 m y la vida del muón $5{\cdot}10^{-5}$ s.

Para el observador en movimiento con el muón el espesor de la atmósfera es de 450 m y la vida del muón es de $2{\cdot}10^{-6}$ s.

El evento comienza con el nacimiento de un muón y acaba con su desintegración.

Un observador sobre la Tierra se mueve con respecto al evento, por tanto mide un tiempo dilatado:

$$\Delta t = 5{\cdot}5{\cdot}10^{-5}\ s$$

El mismo observador mide una distancia más larga L_0.

Un observador que viaje con el muón mide una distancia más corta :

$$\Delta t_0 = 2{\cdot}2{\cdot}10^{-6}\ s,$$

y la distancia contraída L.

Cuatro dimensiones mejor que tres

Ahora bien, todo esto suena muy confuso: la gente sin poder ponerse de acuerdo sobre los intervalos de tiempo y las distancias. Pero las cosas no son tan malas como parece, no cuando las vemos de la manera en que Einstein las vio.

Echen un vistazo a este bastón.

¿Qué ven desde ahí? Ven un bastón corto, porque ustedes están alineados en la dirección en la que apunta el bastón. Lo ven de modo oblicuo.

Observen esta otra figura. Ahora ven un bastón largo. Eso es porque lo están viendo de costado.

¿Les preocupa a ustedes el hecho de estar unos y otros en desacuerdo sobre la apariencia del bastón? ¿Acaso no están viendo la misma cosa?

Por supuesto que no les preocupa. Se dan cuenta de que lo que pueden ver no es nada más que la proyección bidimensional del bastón en un plano perpendicular a su línea de visión.

Pero el bastón no existe en dos dimensiones, existe en el espacio tridimensional.

Si quieren saber cuál es la verdadera naturaleza del bastón, tienen que tener en cuenta no sólo la longitud proyectada sino además su extensión a lo largo de la línea de visión en la tercera dimensión.

Para unos, el bastón se extiende un buen trecho en la tercera dimensión; mientras que para otros en cambio, tiene muy poca extensión a lo largo de su línea de visión. El resultado es que cuando cada uno de ustedes utiliza sus propias medidas individuales de la longitud proyectada perpendicularmente a su línea de visión con la longitud proyectada a lo largo de su línea de visión, tanto los unos como los otros llegan al mismo valor para la longitud verdadera del bastón en el espacio tridimensional.

Dado que ustedes están de acuerdo en la longitud tridimensional, ya no se preocupan más por las diferentes apariencias del bastón. Las reconocen como lo que son: meras proyecciones de la realidad, contempladas desde diferentes puntos de vista.

La genialidad de Einstein fue encontrar que había una explicación parecida para los diferentes tiempos y distancias que encontramos a altas velocidades.

Propuso que en vez de tener un espacio tridimensional y una dimensión temporal separada, deberían combinarse en un simple espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

De esa manera una distancia medida en el espacio de tres dimensiones sería meramente una proyección tridimensional de lo que realmente es tetradimensional.

De manera similar, una medida de tiempo sería meramente una proyección unidimensional de la realidad tetradimensional, a lo largo del eje del tiempo.

Ya no necesitamos preocuparnos más sobre si el astronauta y el controlador de la misión tienen ideas diferentes sobre la distancia entre la parte frontal y la trasera de la nave, o sobre los intervalos de tiempo.

Como la gente que mira el bastón, esos intervalos y distancias diferirán dependiendo del punto de vista de cada uno. En el caso del bastón, eso depende de dónde están sentados en la sala con relación al bastón. En el caso de la nave espacial, depende de cuál es su velocidad relativa.

La cuestión realmente importante es que, cuando insertan sus propias medidas individuales de tiempo y espacio en la fórmula para calcular la longitud en cuatro dimensiones, llegan al mismo resultado para la longitud o intervalo tetradimensional.

El hecho de que todo el mundo esté siempre de acuerdo en las medidas en cuatro dimensiones es lo que nos hace creer que la realidad es realmente tetradimensional.

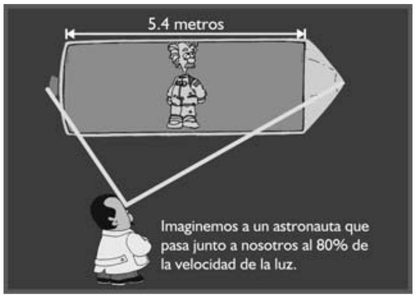
Para calcular distancias de acuerdo con la geometría ordinaria, tenemos una fórmula que involucra tres términos: cada uno muestra la contribución a la distancia total proveniente de cada una de las tres proyecciones espaciales.

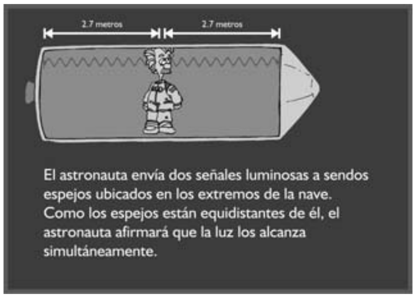
Para hacer cálculos en cuatro dimensiones, simplemente tenemos que añadir un cuarto término para representar la contribución de la proyección sobre el eje del tiempo.

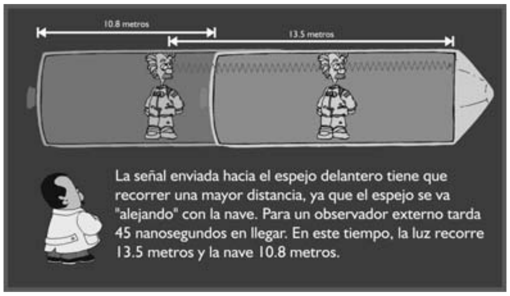
Dodecaedro

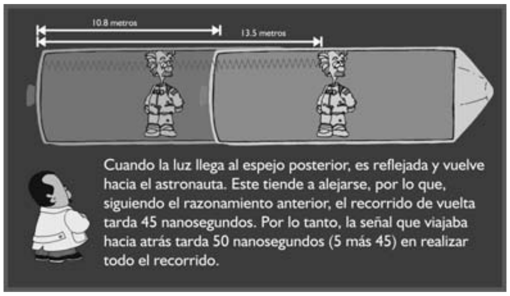
En la exposición se incluye un expositor en forma de dodecaedro, en las cinco caras laterales superiores se presentan cinco informaciones que tratan de clarificar los diagramas clásicos que se usan en las explicaciones sobre la relatividad especial.

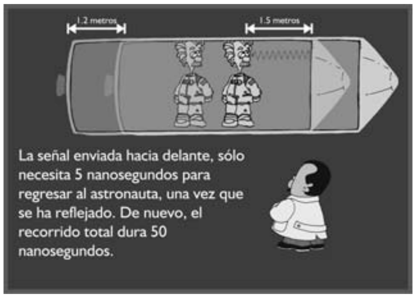
Simultaneidad universal ¡no!









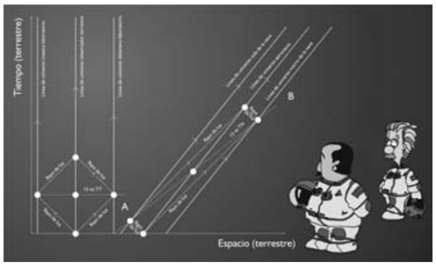


En este *Gedankenexperiment* observamos, pues, que los rayos de luz retornan al astronauta a la vez, exactamente igual que él. Pero él percibe que los rayos alcanzan simultáneamente los espejos anterior y posterior, ya que se halla en el centro de la nave. Nunca coincidiremos en si la llegada de la señal a cada uno de los espejos se produjo simultáneamente o no. La cuestión no radica en quién está equivocado, sino en que cada uno tiene su propio marco de referencia.

El diagrama del abuelo*

* Se refiere a Max Born, premio Nobel de Física y abuelo de la cantante Olivia Newton-John.

Este esquema representa el diagrama espacio-temporal del escenario anterior. La línea de universo del astronauta y las del morro y la cola de su nave son las que aparecen inclinadas. Tomemos una regla, mantengámosla horizontal y hagamos un barrido desde la parte inferior a la superior del diagrama. Las intersecciones de las líneas de universo con la regla representarán el modo en que la escena tiene lugar desde nuestro punto de vista. Observemos cómo el astronauta y su nave se mueven de izquierda a derecha a medida que movemos lentamente la regla hacia arriba. Los rayos de luz que el astronauta envía hacia el morro y la cola de la nave y luego recibe de vuelta son líneas inclinadas 45 grados, puesto que viajan a 0,3 metros por nanosegundo. La llegada del rayo de luz a la cola de la nave (el suceso *A*) ocurre, para nosotros, antes que la llegada del rayo de luz al morro (suceso *B*). Pero para el astronauta, que se considera en reposo, ambos sucesos son simultáneos, como indican los pequeños relojes y la línea inclinada de trazos (con la etiqueta 15 *ns TN*, que lo une).



En la misma figura se muestra un experimento equivalente, realizado por un observador terrestre. La línea de universo de este observador asciende en vertical, ya que permanece inmóvil respecto a nosotros cuando movemos la regla hacia arriba. La línea que une los relojes terrestres, que representa 15 nanosegundos de tiempo terrestre (y etiquetada con 15 *ns* TT), es horizontal pues se halla en reposo respecto a nosotros.

El espacio-tiempo es como una barra de pan. Si corto el pan horizontalmente, tendré rodajas que representan diferentes instantes de tiempo terrestre. Dos sucesos serán simultáneos si se hallan en la misma rebanada. Pero un astronauta en movimiento cortará el pan de otra manera, inclinando el cuchillo. Los sucesos que estén en una misma rodaja inclinada serán simultáneos para él. Esto explica también por qué el astronauta y nosotros discrepamos sobre la longitud de la nave. Simplemente estamos cortando la línea de universo tetradimensional de manera diferente.

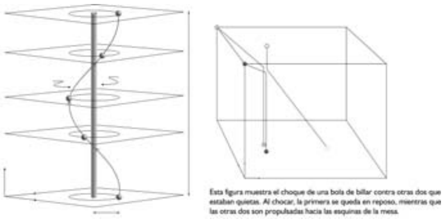
El "-" marca la diferencia. Universo tretradimensional

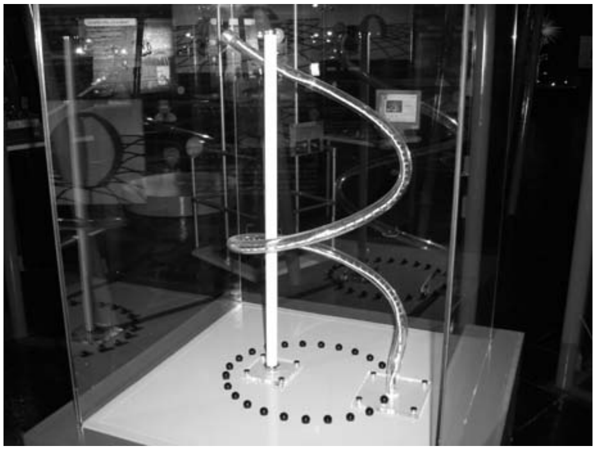
El libro de H.G. Wells "La máquina del tiempo" fue verdaderamente profético por considerar el tiempo como una cuarta dimensión. Einstein utilizaría esta idea en su teoría de la relatividad especial. Para localizar un suceso en el universo hacen falta cuatro coordenadas.

Si deseo invitar a alguien a una fiesta, le debo proporcionar cuatro coordenadas. Por ejemplo, la fiesta será en la Calle Popa, esquina con Pascal, en el piso 5 a las doce menos diez. Las dos primeras coordenadas informan a mi invitado sobre el punto de la superficie terrestre al que debe acudir; la tercera, la altura que debe alcanzar sobre ese punto, y la cuarta, en qué momento llegar. Cuatro coordenadas, cuatro dimensiones.

Podemos visualizar nuestro universo tetradimensional utilizando un modelo de tres dimensiones, dos espaciales y una del tiempo. Imaginemos una película del Sistema Solar que mostrara el movimiento giratorio de la Tierra alrededor del Sol. Si cortamos esa película en fotogramas y los apilamos unos sobre otros, obtendremos una representación adecuada del espacio-tiempo.

Si fuésemos capaces de pensar en cuatro dimensiones, veríamos que la Tierra no es simplemente una esfera; en realidad es una hélice, un gigantesco trozo de espagueti girando en espiral, a lo largo del tiempo, alrededor de la línea de universo del Sol.





Módulo interactivo XYT

Para comparar separaciones en el espacio y separaciones en el tiempo, usaremos unidades en las que la velocidad de la luz es igual a 1 (los años-luz y los años son unidades de esta clase).

Einstein propuso que en vez de tener un espacio tridimensional y una dimensión temporal separada, deberían combinarse en un simple espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

La luz viaja a la velocidad de 1 año-luz por año. Si usamos pies y nanosegundos, la luz recorre un pie en un nanosegundo.

La de la luz es una velocidad *mágica*, una velocidad sobre la que todos pueden ponerse de acuerdo, así que será ideal para comparar las separaciones en el espacio y en el tiempo.

Un viajerio espacial y un observador externo nunca se pondrán de acuerdo en las distancias ni en los tiempos, pero sí en los *intervalos*, en la separación de dos sucesos en el tiempo y en el espacio.

$$\text{Intervalo}^2 = \text{ditancia}^2 - \text{tiempo}^2$$

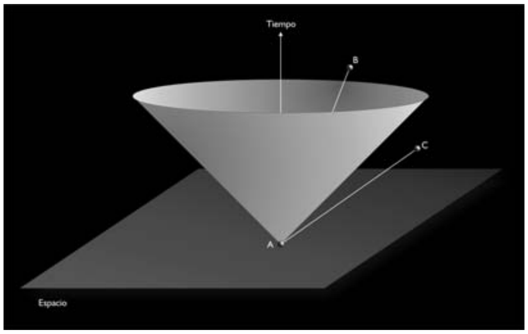
El *menos* asociado al tiempo es fundamental, separa futuro y pasado, permite la causalidad en nuestro mundo y dificulta viajar libremente en el tiempo.

Los relojes y las varas de medir de los dos observadores pueden diferir, con tal de que convengan que la velocidad de la luz vale 1 en sus unidades.

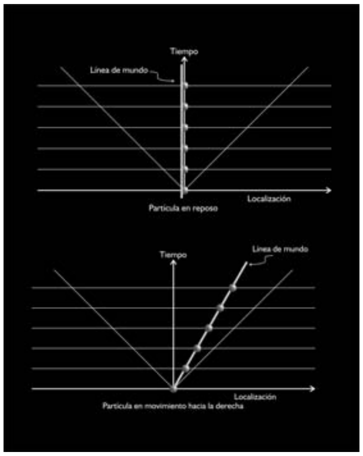
Geometría minkowskiana. Universo tetradimensional

Las ondas luminosas se propagan, como ondas circulares en la superficie del agua, a la velocidad de 1 año-luz por año. Si queremos ver cuál es el aspecto del universo en un momento concreto, bastará con cortar una rebanada horizontal en nuestro diagrama tridimensional y echarle un vistazo. En un instante determinado, las ondas de luz emitidas parecerán un círculo alrededor de nosotros.

Un cono de luz divide los sucesos entre los que están casualmente relacionados y los que no lo están. Si ocurre un suceso en *A* puede influir en los sucesos que se encuentran dentro de dicho cono de luz, como el suceso *B*, pero no en los situados fuera del cono de luz, como *C*, porque la señal no puede viajar de *A* a *C*.



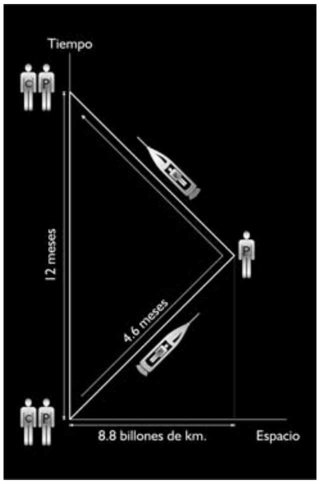
La *línea de universo* de una partícula no es más que el trazado de su posición cuando aumenta el tiempo. En este diagrama aparece la línea de universo de una partícula en reposo. Sigue en la misma ubicación cuando aumenta el tiempo, así que su línea de universo es vertical.



Este diagrama, en cambio, muestra la línea de universo de una partícula moviéndose a una velocidad uniforme hacia la derecha, así que se desplaza hacia ese lado a medida que aumenta el tiempo, así como su línea de universo.

En ambos diagramas, las líneas con 45 grados de inclinación,son líneas de universo de la luz, que pueden viajar a 1 metro en 1 metro de tiempo de viaje de la luz. Nada puede viajar más deprisa que la luz, así que nada tiene una línea de universo que se incline más que ese ángulo.

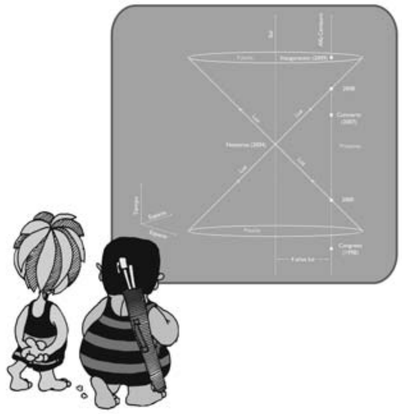
Supongamos que usted tiene un hermano y hoy es su cumpleaños. Como se ven muy poco deciden quedar para el próximo, pero toman caminos distintos para llegar a la cita. Su hermano se queda esperando en casa, por lo que la cita tarda en llegar doce meses. Pero usted, emprende un viaje al 93% de la velocidad de la luz, hacia un planeta que está a 8,8 billones de kilómetros. Cuando usted regresa, sólo han pasado 4,6 meses, usted ha tardado mucho menos en llegar a la cita.



En el espacio-tiempo, con su divertida geometría minkowskiana, tenemos que acostumbrarnos a la idea de que una línea recta corresponde al intervalo más largo entre dos sucesos.

Inauguración en alfa centauro (2009). Universo tetradimensional

Supongamos que nos invitan a una inauguración dentro de cinco años en Alfa Centauro, que se encuentra a cuatro años luz de la Tierra, y que podemos ir en una nave espacial que viaja al 80% de la velocidad de la luz. Todos los observadores estarían de acuerdo en que la fiesta se halla en el *futuro* respecto a nuestra situación, pues podemos hacer planes sobre cómo asistir a ella. La fiesta está separada de nuestro *aquí-y-ahora* una distancia de cuatro años luz en el espacio y cinco años en el tiempo. Por lo tanto, empleando años luz y años como unidades, el cuadrado de la separación en el tiempo sería: 42-52=16-25=-9. La fiesta tiene una separación tipo tiempo desde nuestro *aquí-y-ahora*. Cualquier par de sucesos de esta clase puede ser conectado mediante una nave espacial que viaje entre ellos.



Pero un concierto que se celebre en Alfa Centauro dentro de tres años es un suceso al que no podríamos asistir, puesto que no podemos viajar más rápido que la luz. El concierto tiene una separación tipo espacio desde nuestro *aquí-y-ahora* (se halla en nuestro presente). El cuadrado de su separación en el espacio menos el de su separación en el tiempo es positivo: 42-32=16-9=7. Un observador que viajara al 75% de la velocidad de la luz rumbo a Alfa Centauro afirmaría que nuestro presente en la Tierra y el concierto de Alfa Centauro son sucesos simultáneos. No le sorprendería que no pudiéramos asistir. ¿Cómo íbamos a hacerlo si, según él, los dos cosas ocurren al mismo tiempo?

Consideremos ahora un congreso celebrado en Alfa Centauro hace seis años. El suceso está en nuestro *pasado.* Un astronauta podría haber asistido a dicho congreso y encontrarse tomando un café con nosotros en este momento; podría haber regresado a la Tierra a dos terceras partes de la velocidad de la luz (el congreso y nuestro *aquí-y-ahora* presentan una separación tipo tiempo, por lo que el astronauta puede visitar este *aquí-y-ahor*a tras haber participado en él. El congreso se halla, pues, en el *pasado* de donde nos encontramos actualmente). De este modo podemos dividir nuestro universo tetradimensional en tres regiones: el pasado, el presente y el futuro.

La línea de universo de Alfa Centauro atraviesa el cono de luz (en el año 2008, concretamente). Podemos enviar una señal a cualquier suceso que esté situado dentro del cono de luz futuro. La inauguración en Alfa Centauro dentro de 5 años, contados desde 2004 (por lo tanto en el año 2009), está en el interior de dicho cono: el suceso pertenece a nuestro futuro. Es posible participar en aquellos eventos que estén dentro del cono de luz futuro.

El diagrama muestra también el cono de luz pasado, un cono que se contrae hasta llegar a nuestro *aquí-y-ahora*. Los sucesos que se encuentren en el cono de luz pasado son sucesos que podemos ver hoy. El cono de luz pasado cruza la línea de universo de Alfa Centauro hace cuatro años (en nuestro caso, en 2000). Los rayos de luz emitidos por la estrella en esa fecha llegan aquí en 2004. Cuando hoy observamos Alfa Centauro, la vemos tal como era hace cuatro años. Cuanto más lejos miremos, más atrás veremos en el tiempo.

Todos los observadores están de acuerdo sobre qué sucesos pertenecen a cada región (el pasado, presente y futuro del suceso *aquí-y-ahora*) porque todos ellos ven viajar la luz a la misma velocidad y coinciden al decidir a qué lado de cada cono de luz se halla un suceso dado. ■

Cartel de la Película de dibujos animados 3D
Velocidad Máxima

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gamow, G. (1980): *Biografía de la física*, Alianza.

Gamow, G. (1993): *Mr. Tompkins in Paperback*, Cambridge University Press, Cambridge, England.

Gamow, G. (1985): “El breviario del señor Tompkins: En el país de las maravillas”. *La Investigación del átomo*, Fondo de Cultura Económica, México.

http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/fondo2000/vol1/pais-maravillas/html/indice.html

J. Richard Gott: *Los Viajes en el tiempo y el universo de Einstein*, Metatemas.

Landau, L.; Rumer, Y.: *¿Qué es la teoría de la relatividad?* Akal, Madrid.

Standard R.: "El Fascinante Mundo de Albert Einstein". Conferencia para la Fundación Orotava de Historia de la Ciencia, 2004.

http://nti.educa.rcanaria.es/fundoro/einstein_escuela/einstein_russell.htm

Stannard R. (1989): *The Time and Space of Uncle Albert*, Faber and Faber, London.

Sagan, C.: *Cosmos*, Planeta.

Exposición EINSTEIN (American Museum of Natural History, New York 2002-03) http://www.amnh.org/exhibitions/einstein/

Año mundial de la física: *www.physics2005.org*

SUMA 49
Junio 2005, pp. 95-99

Hamilton: La liberación del álgebra

Hace 200 años, el 3 de agosto de 1805, nacía, en Dublin, Willam Rowan Hamilton. Era el menor de cuatro hermanos, tres varones y una mujer. Su padre, Archibald, se dedicaba a negocios relacionados con las leyes, si bien no tenía una formación universitaria, pero era de su madre, Sarah Hutton, altamente dotada desde el punto de vista intelectual, de quien se piensa provenía la brillante inteligencia de William. Ambos murieron cuando William era todavía muy joven. Debido a las exigencias de su trabajo, Archibald se veía obligado a viajar con frecuencia, con lo que descuidaba la educación de su hijo, que, aun antes de haberse quedado huérfano, estuvo dirigida por su tío, el reverendo James Hamilton, gran apasionado al estudio de las lenguas.

Willian Rowan Hamilton (1805-1865)

William Hamilton demostró ser un niño tan extraordinariamente precoz que con solo cinco años era capaz de leer latín, griego y hebreo, a los ocho años leía italiano y francés, a los diez añadía a su bagaje lingüistico el sánscrito y el árabe, y a los catorce el persa.

A los doce años, a partir de su encuentro con el calculador americano Zerah Colburn, verdadero prodigio del cálculo mental, se inclina decisivamente hacia las matemáticas. Al año siguiente inicia el estudio del *Álgebra* de Clairault. A los quince años caen en sus manos los trabajos de Newton y Laplace. Con diecisiete años, encuentra un error en la *Mecánica celeste* de Laplace. Esto llama la atención de John Brinkley, astrónomo real de Irlanda, que dice de William:

> Este joven, no sé lo que será en el futuro, pero en estos momentos es el primer matemático de su edad.

Conoce y mantiene una buena amistad con los poetas Wordsworth y Coleridge. Escribe poesías, nada buenas por cierto, desde su adolescencia, que busca como refugio en los momentos de crisis amorosas. Se las enseña a Wordsworth, pero éste le dice que su talento está en la ciencia y no en la poesía.

En 1823 ingresa en el Trinity College de Dublín, y ya entonces presenta una memoria sobre Óptica que merece el honor de ser leída, al año siguiente, en la Real Academia de Irlanda. Corregida y aumentada, esta memoria se presenta de nuevo a la Academia en 1827 con el título de *A theory of systems of rays* (Una teoría de los sistemas de rayos), y en ella expone una cons-

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

trucción de la óptica geométrica que constituye un verdadero cuerpo de doctrina e introduce las funciones características de la óptica. Posteriormente, publicará tres suplementos a su teoría sobre la óptica geométrica, y aplicará la noción de función característica a sus estudios sobre dinámica.

En agosto de 1824, conoce a Catherine, hija de unos amigos de su tío James, de la que se enamora perdidamente, y a la que no pudo proponer matrimonio debido a que, entonces, con 19 años, todavía le quedaban tres años de estudios en el Trinity College. En febrero del año siguiente, la madre de Catherine le comunica que su hija se iba a casar con un clérigo, quince años mayor que ella pero con mejor posición que él.

En 1827, sucede a John Brinkley en la cátedra de Astronomía del Trinity College, donde destaca en sus tareas docentes. Al mismo tiempo, es nombrado astrónomo real de Irlanda y director del Observatorio de Dunsink

En 1831, se casa con Helen María Bayly. Sin embargo, de quien verdaderamente sigue enamorado es de Catherine, a la que ve con cierta frecuencia. Con Helen tiene tres hijos, varones los dos primeros, William Edwin y Archibald Henry, y niña la tercera, Helen Eliza Amelia.

En su concepción del mundo sensible, Hamilton considera la unidad indisoluble del espacio y del tiempo. De ahí saca una conclusión un tanto decepcionante: que así como la geometría es la ciencia del espacio el álgebra debe ser la ciencia del tiempo.

Físico, astrónomo y matemático, es en esta última materia donde Hamilton destaca de una manera especial. Dedica varias memorias al estudio de las secciones cónicas y a la resolución de la ecuación de quinto grado.

Pero, su gran aportación a las matemáticas consiste en liberar el álgebra abriendo sus puertas a otras álgebras menos restrictivas. Su reputación llegó a ser tan grande que a la edad de treinta años es elevado al rango de la nobleza, llegando a ser considerado como el matemático más importante habido en lengua inglesa después de Newton.

Los números irracionales

En su concepción del mundo sensible, Hamilton considera la unidad indisoluble del espacio y del tiempo. De ahí saca una conclusión un tanto decepcionante: que así como la geometría es la ciencia del espacio el álgebra debe ser la ciencia del tiempo. No obstante, este punto de vista, consistente en asociar el álgebra al tiempo, será decisivo, como se verá más adelante, en su aportación a la matemática y a la ciencia en general.

Centenario del descubrimiento
de los cuaterniones, 1943

Efectivamente, en 1833 y 1835, da lectura, en la Royal Irish Academy, a sendas memorias, que se publicarían en 1837 con el título de *Theory of conjugate functions, or algebraic copules; with a preliminary* and *elementary essay on* a*lgebra as the sciencie of pure time...* (Teoría de las funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como la ciencia del tiempo puro...). En la segunda sección de este trabajo, escoge Hamilton la noción de tiempo como principio y fundamento de la unidad numérica. Escribe:

> La idea de continuidad en la progresión de un momento de tiempo a otro engloba la idea de una progresión continua, de manera semejante, en las cantidades...

De aquí deduce...

> ...la existencia de un número o de una razón a que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón b.

Siguiendo por este camino, y partiendo de la media proporcional de dos números positivos, establece que

$$\text{si } a > \frac{n'}{m'} \text{ para } \frac{n'^2}{m'^2} < b \text{ y si } a < \frac{n''^2}{m''^2} > b, \text{ entonces } a = \sqrt{b}$$

Llega así a la introducción de $a = \sqrt{b}$, esto es, de los números irracionales, como una partición definida por dos sucesiones, p_i^2 y p_j^2, tales que

$$p_i^2 < b < p_j^2, \text{ con } i, j = 1,2,3...$$

Y no continua desarrollando su teoría de los irracionales. Solo le interesa definirlos mediante los racionales.

Quizá la mayor aportación de Hamilton a las matemáticas fue liberar al álgebra del sometimiento a que la tenía constreñida el principio de permanencia de las leyes formales.

El álgebra de las parejas

Hacia 1830 ya estaban bastante admitidos los números complejos, gracias a la representación geométrica que cinco autores, Argand, Gauss, Mourey, Warren y Wessel, habían dado de los mismos, y, según parece, independientemente unos de otros. La autoridad y el prestigio de Gauss habían contribuido decisivamente a que esta representación fuese ampliamente difundida entre los matemáticos de la época. Sin embargo, ninguno de esos autores se había preocupado por extender la noción de número complejo al espacio de tres dimensiones. Aquí es donde el punto de vista de Hamilton resulta importante, porque al asociar el álgebra al tiempo y no al espacio, se desliga de la representación geométrica. Por otro lado, Hamilton señala que un número complejo $a + bi$, no es una suma en el sentido en que lo puede ser la suma de dos enteros, como 3 + 5, por ejemplo. El uso del signo + no autoriza a que la expresión bi pueda ser añadida al número a . En realidad, concluye, el número complejo $a + bi$ no es más que una pareja de números reales, (a, b).

En 1833, lee en la Real Academia de Irlanda sus escritos, en los que considera a los números complejos como pares ordenados de números reales. En la obra citada anteriormente (Teoría de las funciones conjugadas...), en su sección tercera, introduce, en efecto, el par ordenado de números reales (a, b) y define las operaciones sobre ese par, de acuerdo con las siguientes reglas:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$$

Al final de esta sección, sostiene la identidad entre el par (a, b) al número complejo $(a+bi)$ y afirma:

> En la teoría de los números simples (reales), el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y designa una raíz imposible, o un número imaginario simple; pero en la teoría de las parejas, este mismo símbolo es significativo, y designa una raíz posible, o una pareja real, la raíz cuadrada principal de la pareja $(-1,0)$.

Por lo que se refiere al producto de parejas, Hamilton lo interpreta como una rotación, del mismo modo que ya hiciera Gauss, a partir de su representación en el plano, cuando interpretaba geométricamente el producto de dos números complejos como rotaciones, dilataciones o contracciones.

Pero la mentalidad de Hamilton era buscar fórmulas de generalización de todo cuanto estudiaba, así que acaba su exposición de la teoría de las parejas con un anuncio interesante, dice que está investigando tripletas de números reales.

Las propiedades de las operaciones con los números conocidos hasta entonces se consideraban fundamentales para la consistencia algebraica de un campo numérico. Se pensaba incluso que eran las propiedades las que definían las operaciones y no definiciones intrínsecas, más o menos formalizadas.

Los cuaterniones

Las propiedades de las operaciones con los números conocidos hasta entonces, entre ellas la conmutativa, se consideraban fundamentales para la consistencia algebraica de un campo numérico. Es decir, todo sistema numérico debía cumplir con este principio de permanencia de las leyes formales, hasta el punto de que ya se pensaba que eran las propiedades las que definían las operaciones y no definiciones intrínsecas, más o menos formalizadas.

En estas circunstancias, el trabajo anunciado con los tripletes ocasionaba numerosos quebraderos de cabeza a Hamilton. Se trataba de generalizar la adición y la multiplicación de los números complejos, $a + bi$, a los números de la forma $a + bi + cj$, o sea, pasar de un espacio de dos dimensiones a un espacio de tres dimensiones. La adición no ofrecía ninguna dificultad, pero sí el producto. Hamilton no encontraba la manera de multiplicar dos números complejos, o, y por lo mismo, no veía cómo construir un álgebra consistente con las tripletas. Son muchos los años que se dedica a pensar sobre esta cuestión.

Recibe incluso las burlas de sus hijos, que todas las mañanas, le preguntan al levantarse:

> —¿Qué, papá, puedes ya multiplicar tripletas?

Hoy sabemos que el álgebra de las tripletas no pude construirse, como probó el matemático estadounidense O. May Kenneth en su artículo *The imposibility of a division álgebra of vectors in three dimensional space* (*The American Mathematical Monthly*, 1966).

Un día de octubre de 1843, estaba de paseo con su mujer, por la orilla del canal real, cuando de pronto se le ocurrió la solución. Debía pasar de tres a cuatro coordenadas y además prescindir de la propiedad conmutativa. Las unidades, *i*, *j*, *k*, debían estar sometidas a las siguientes condiciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

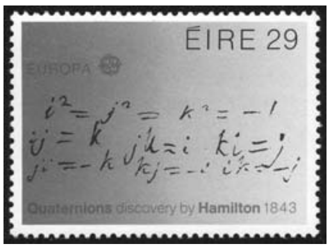
Los nuevos objetos, que llamó cuaterniones (o cuaternios), son de la forma

$$a + bi + cj + dk.$$

El propio Hamilton recordará así, quince años después, su gran descubrimiento:

> Mañana será el décimoquinto cumpleaños de los cuaterniones. Surgieron a la vida, o a la luz, ya crecidos, el 16 de octubre de 1843, cuando me encontraba caminando con la Sra. Hamilton hacia Dublín, y llegamos al puente de Broughman. Es decir, entonces y ahí, cerré el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que cayeron fueron las ecuaciones fundamentales entre *i*, *j*, *k*; *exactamente como* las he usado desde entonces. Saqué, en ese momento, una libreta de bolsillo, que todavía existe, e hice una anotación, sobre la cual, *en ese mismo preciso momento*, sentí que posiblemente sería valioso el extender mi labor por al menos los diez (o podían ser quince) años por venir. Es justo decir que esto sucedía porque sentí, en ese momento, que un *problema* había sido resuelto, un deseo intelectual *aliviado*, deseo que me había *perseguido* por lo menos los *quince años* anteriores. [La cursiva aparece en el equivalente original inglés].

Parece ser que aquel día, Hamilton no pudo por menos que grabar las ecuaciones, resultado de su inspiración, en la madera del puente de Broughman.



Serie Europa, 1983

Ese mismo día, pedía la autorización correspondiente a la Academia para leer una comunicación sobre los cuaterniones en la siguiente sesión.

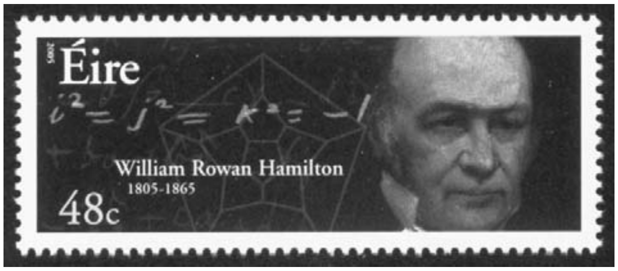
Como puede verse, los cuaterniones están formados por dos partes, la parte real, o escalar, y el resto que es la parte vectorial. Precisamente, la palabra *vector* es debida al propio Hamilton. De este modo, la multiplicación de cuaterniones puede realizarse utilizando las reglas algebraicas de los números reales, sin más que tener en cuenta que no se verifica la propiedad conmutativa y que las nuevas unidades, *i, j, k,* cumplen las igualdades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$jk = i \qquad ki = j \qquad ij = k$$

$$kj = -i \qquad ik = -j \qquad ji = -k$$

La República de Irlanda, en este año de 2005, en honor de Hamilton y con motivo del 200 aniversario de su nacimiento, emitió este sello, en el que se recogen las igualdades inscritas en el puente de Broughman:



Conmemoración del 200º aniversario de su nacimiento, 2005

Hamilton continua sus trabajos sobre los cuaterniones durante los diez años siguientes, publicando una versión bastante completa de su teoría, en 1853, bajo el título de *Lectures on cuaternions* (Lecciones sobre los cuaterniones). Los siguientes años, hasta su muerte, en 1865, se dedica a la preparación de una versión ampliada, *Elements of cuaternions* (Elementos de los cuaterniones), que publicó póstumamente su hijo mayor, William Edwin, en 1866. Se trata de un voluminoso estudio, de más de 700 páginas, en el que Hamilton no solo desarrolla su teoría de los cuaterniones sino que presenta múltiples aplicaciones a la geometría, óptica y mecánica.

Incluye Hamilton, en los *Elementos de los cuaterniones,* la invención de un importante operador diferencial, que hoy designamos por el símbolo ∇ (aunque Hamilton lo colocaba así $\triangleleft$), y que el propio Hamilton llamó *nabla*, dado su parecido con un antiguo instrumento musical hebreo de ese nombre. Lo define, como sabemos, por la igualdad:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Pero, lo que interesa destacar aquí ahora, es el hecho de que al aplicar el operador *nabla* a una función vectorial da un cuaternión:

$$\nabla v = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(v_1 i + v_2 j + v_3 k \right) =$$

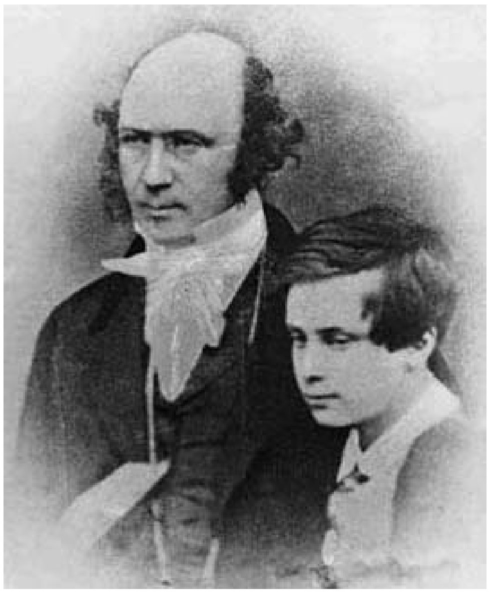
$$= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) k$$

la parte escalar, salvo el signo, es lo que hoy llamamos "divergencia de v", y la parte vectorial es lo que llamamos "rotacional de v".

Con ser importante la contribución que hace Hamilton al desarrollo de lo que conocemos como cálculo vectorial, al cual contribuyeron otros muchos matemáticos de la época y posteriores, quizá lo que más aportó Hamilton a las matemáticas fue la liberación del álgebra del sometimiento a que la tenía constreñida el principio de permanencia de las leyes formales, y, en particular, la propiedad conmutativa. Hamilton nos asoma a las álgebras no conmutativas. A partir de él, los matemáticos pierden el miedo a investigar otras posibles álgebras no conmutativas, como las álgebras vectoriales, así la del alemán Grassmann, contemporáneo de Hamilton, y las álgebras de dimensión finita. Puede decirse que los trabajos de Hamilton fueron al álgebra lo que las geometrías no euclideanas fueron a la geometría, o, dicho de otro modo, que la propiedad conmutativa encadenaba al álgebra como el quinto postulado de Euclides encadenaba a la geometría.

Los últimos años de Hamilton no pueden calificarse de felices. Una esposa casi inválida, su afición al alcohol y la poca aceptación de sus teorías por parte de los físicos, amargaron un tanto su final, que se produjo, en Dublín, fruto de un ataque de gota, el 2 de septiembre de 1865. A finales del siglo, ya el cálculo vectorial y tensorial experimentaría un gran desarrollo, y tanto físicos como matemáticos lo aplicaban en múltiples direcciones de su ciencia. Poco antes de morir, eso sí, recibía Hamilton la noticia de su elección como miembro de la *Academia Nacional de Ciencias* de Estados Unidos, siendo el primer extranjero en alcanzar semejante honor. ■

Puede decirse que los trabajos de Hamilton fueron al álgebra lo que las geometrías no euclideanas fueron a la geometría, o, dicho de otro modo, que la propiedad conmutativa encadenaba al álgebra como el quinto postulado de Euclides encadenaba a la geometría.



Roma esférica (y semiesférica)

Patio de la Piña, Museos Vaticanos y *Panteón*

Fotos de Francisco Martín Casalderrey

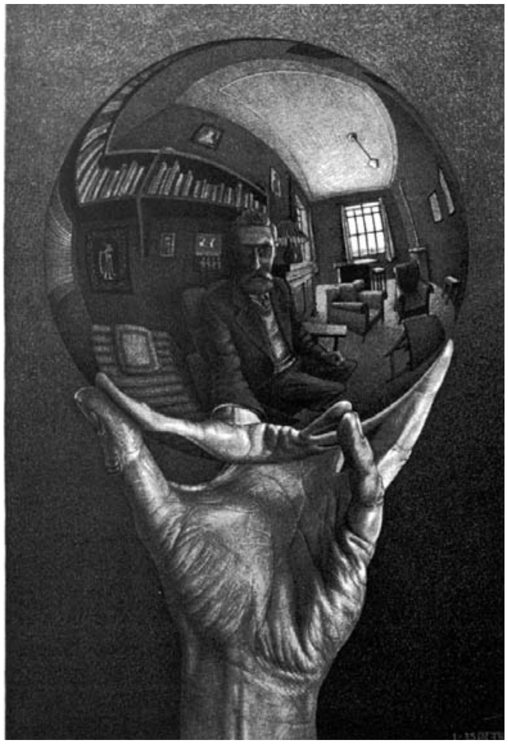
SUMA 49
Junio 2005, pp. 101-108

Escher I: Las matemáticas para construir

Una de las características de las matemáticas que hacen difícil el enseñarlas, es su doble naturaleza de herramienta para *construir cosas* y herramienta para *pensar sobre las cosas.* A lo largo de este número y el siguiente, reflexionaremos sobre la manera en que la obra del grabador holandés Escher ilustra esta doble naturaleza de las matemáticas.

Maurits Cornelius Escher nació en 1898 y murió en 1972. Es contemporáneo, por ejemplo a Marcel Duchamp (1887-1968) y Pablo Picasso (1881-1973) y, aunque la obra de estos tres artistas no puede ser más distinta, un aspecto une a los tres creadores: todos se inspiraron en algún momento en ideas matemáticas, y en los tres casos las matemáticas pueden, a su vez, ayudarnos a entender su obra (Cipra, 1999). Curiosamente, además, se da una aparente paradoja: por un lado, mucho del trabajo de Escher tiene un aspecto clásico, mientras que Duchamp y Picasso son, sin ninguna duda, artistas del siglo XX; por otro, las matemáticas que inspiraron a Duchamp y Picasso datan del siglo XIX, mientras que Escher se metió de lleno en algunas de las creaciones geométricas más hermosas del siglo XX. Trabajó fundamentalmente en grabados sobre madera y litografías, y muchas de las imágenes que produjo están inspiradas directamente por las distintas nociones matemáticas de *simetría.*

Clásicamente, en matemáticas se distinguen tres superficies "muy" simétricas (Mazur, s.a): el plano euclídeo, el plano hiperbólico y la esfera. Estas tres superficies (ó geometrías)



Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

satisfacen todas ellas todos los postulados de la geometría euclídea salvo uno: el postulado quinto, un postulado muy sutil que nos habla de la existencia y unicidad de las rectas que pasan por un punto y son paralelas a otra recta dada. Curiosamente, estas tres geometrías se caracterizan (y, muy elegantemente, se distinguen entre sí) precisamente por cómo se comportan respecto a este postulado de las paralelas. La geometría euclídea nos garantiza la existencia de una única recta que pasa por un punto y es paralela a una recta dada (que no pase por el punto, claro), en la geometría esférica no hay tal recta, y en la geometría hiperbólica podemos construir cuantas rectas queramos que sean paralelas a una recta dada y se corten en un punto exterior a ella. La obra de Escher nos ayuda a comprender mejor las propiedades de estas tres geometrías y, a su vez, las matemáticas nos permiten entender mejor la obra de Escher, y apreciarla como un catálogo bastante completo de imágenes que ilustran cómo fueron cambiando las nociones de geometría y simetría en matemáticas desde finales del siglo XVIII (en que sólo se concebía como tal la geometría euclídea), hasta principios del siglo XX. Y es sobre este cambio sobre lo que reflexionaremos, de la mano de la obra de Escher, en este primer artículo.

Escher y el plano euclídeo

Muchos de los grabados más conocidos de Escher están basados en la división regular del plano: recubrir de forma regular el plano mediante *losetas.* Este tipo de construcciones se conocen como *enlosetados*, y consisten en figuras en forma de pájaros, peces, ángeles y otras formas animadas con las que, utilizadas como los *zelig* árabes que las inspiraron, se recubre todo el plano. El interés de Escher por los enlosetados aparece ya en sus primeros trabajos; sin embargo, fue precisamente tras un viaje a Granada en 1936 que se convirtieron en el tema central de su obra.

No es de extrañar que su visita a la Alhambra despertase en Escher una pasión por el estudio de la simetría que le duró toda su vida, pues la Alhambra nos ofrece un catálogo *completo* de todos los enlosetados posibles (Costa, 1995). La Alhambra demuestra, pues, que los árabes habían encontrado todos los posibles enlosetados antes del siglo XIII. Sin embargo, se ha necesitado muchísimo tiempo, muchas matemáticas, y un profundísimo proceso de abstracción para demostrar que estas diecisiete maneras son, de hecho, las únicas posibles. Ha sido necesario definir con precisión nociones como grupo, grupo de simetrías o el paralelogramo básico de un enlosetado y, dando un paso más en el proceso de abstracción, identificar este paralelogramo con un *toro* (una rosquilla), un paso con el que el problema original (encontrar de cuántas maneras distintas se puede recubrir un plano con losetas), referido a un plano, se convierte en un problema espacial, el estudio de ciertas transformaciones de un toro. Herramientas todas ellas desarrolladas en el siglo XIX y utilizadas por primera vez simultáneamente en el XX.

En 1937, de vuelta en Holanda y buscando en bibliotecas cómo entender y cómo *construir* él mismo lo que había visto en Granada, Escher descubrió el artículo del matemático húngaro George Pólya, "Sobre la analogía de las simetrías del cristal en el plano" (Pólya, 1924). En este artículo Pólya explica, entre otras cosas, por qué pese a la infinidad de diseños planos con los que aparentemente se puede cubrir un plano, hay tan sólo diecisiete tipos esencialmente distintos que pueden ser clasificados con toda precisión según sus simetrías, y da un ejemplo para ilustrar cada uno de estos diecisiete diseños. Escher no entendió el artículo de Pólya, carecía de los conocimientos matemáticos necesarios, pero sí que entendió, después de haber copiado en su cuaderno muchos de los arabescos de la Alhambra, la ilustración con la que Pólya acompañaba su trabajo.

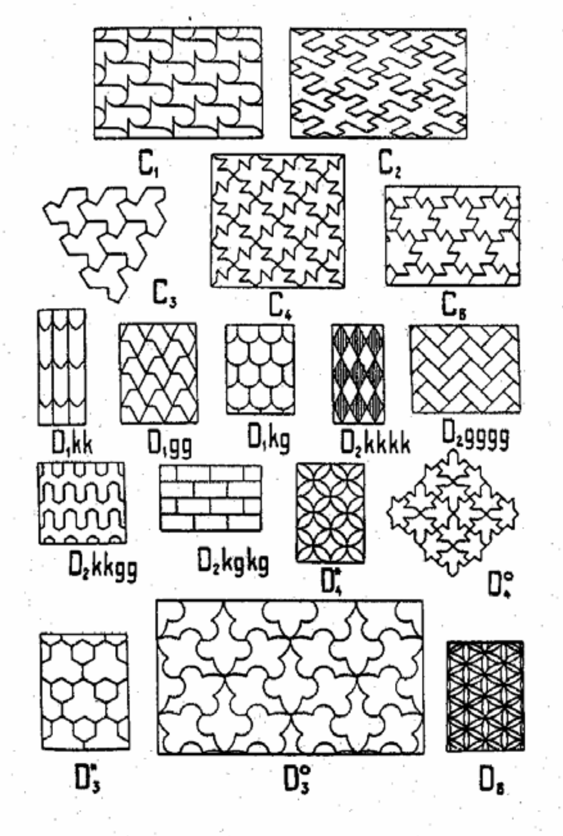


Figura 1. Ilustraciones de Pólya de los 17 grupos de simetrías, 1924

Basándose en los dibujos del artículo de Pólya, Escher desarrolló a lo largo de cuatro años sus propias teorías y explicaciones ("populares", no técnicas) sobre cómo construir las diecisiete simetrías planas, y las recogió en un cuaderno al que tituló "División regular de un plano con polinomios congruentes asimétricos". Este cuaderno fue la fuente en que basó mucho de su trabajo posterior.

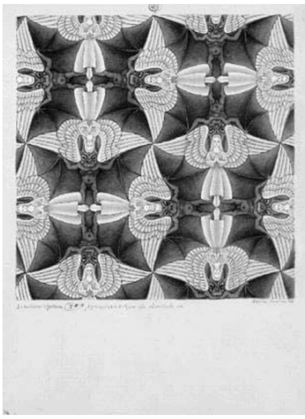


Figura 2. *Ángeles y demonios*, Escher

Pronto Escher, dominando ya las construcciones usuales de enlosetados (esto es, las que recubren el plano euclídeo), se preguntó si sería posible ir un paso más allá y recubrir el plano con figuras que, manteniendo su forma y engarzadas unas en otras, fuesen cambiando de manera regular de tamaño. El problema de cómo llevar a cabo estas construcciones se lo resolvió, una vez más, una ilustración en un artículo matemático.

Escher y el plano hiperbólico

En efecto, en 1958 la matemática volvió a inspirar a Escher cuando, en el artículo "Cristal Symmetry and Its Generalizations" de H.S.M. Coxeter (1957), encontró un enlosetado del modelo que Henri Poincaré construyó del plano hiperbólico, una superficie no euclídea en la que, como ya se ha comentado, por cada punto pasan una infinidad de rectas paralelas a una dada.

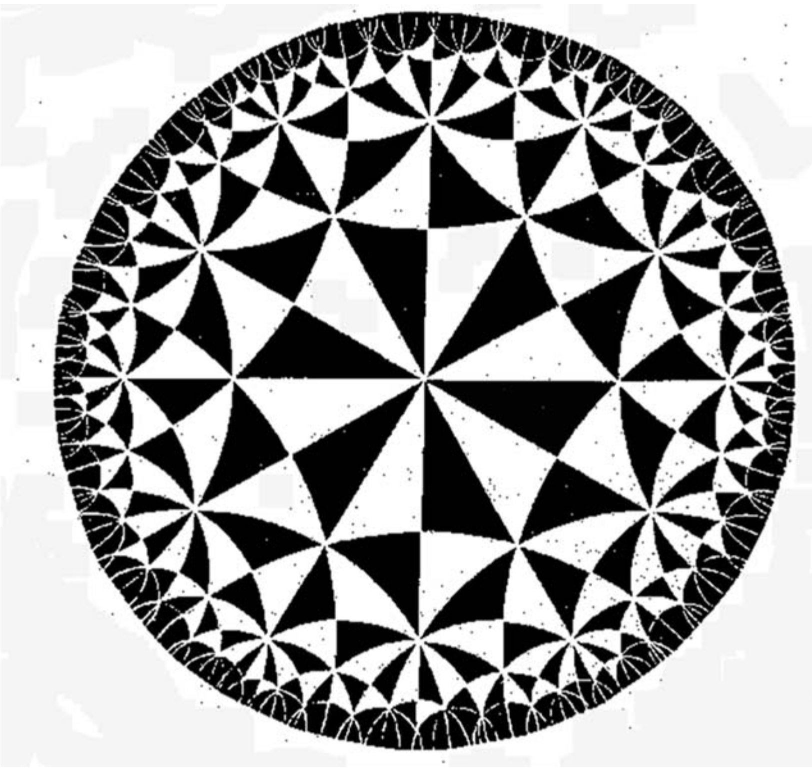


Figura 3. Ilustración de Coxeter de un enlosetado del modelo de Poincaré del plano hiperbólico

El diagrama de Coxeter le resolvía a Escher el problema ya mencionado con el que andaba peleándose: cómo conseguir una sucesión de imágenes entrelazadas que, manteniendo su forma, fuesen disminuyendo en tamaño. De nuevo, para llevar a cabo sus construcciones no necesitaba entender las matemáticas, le bastaba con que le indicasen *cómo medir*, esto es, *cómo son las rectas* en la nueva situación, que es precisamente lo que ilustra la gráfica de Coxeter. La propiedad métrica que caracteriza al mundo de Poincaré es que todo va disminuyendo de tamaño al aproximarse al borde del mundo, y haciéndose cada vez más grande al ir alejándose de él. Como consecuencia de esta propiedad, una persona que viva en el mundo de Poincaré nunca podrá alcanzar el borde de éste, porque si comienza a caminar cuando está, por ejemplo, a un kilómetro y con un cierto tamaño, para cuando se encuentre a medio kilómetro de distancia habrá reducido su tamaño a la mitad, y luego a la mitad de la mitad, y así ininterrumpidamente, haciéndose cada vez más pequeña, por lo que nunca llegará al borde. La métrica y aspecto de las rectas en este modelo de geometría hiperbólica es precisamente lo que intenta explicar la ilustración de Coxeter que encontró Escher en 1958, con la que aprendió a construir enlosetados hiperbólicos.

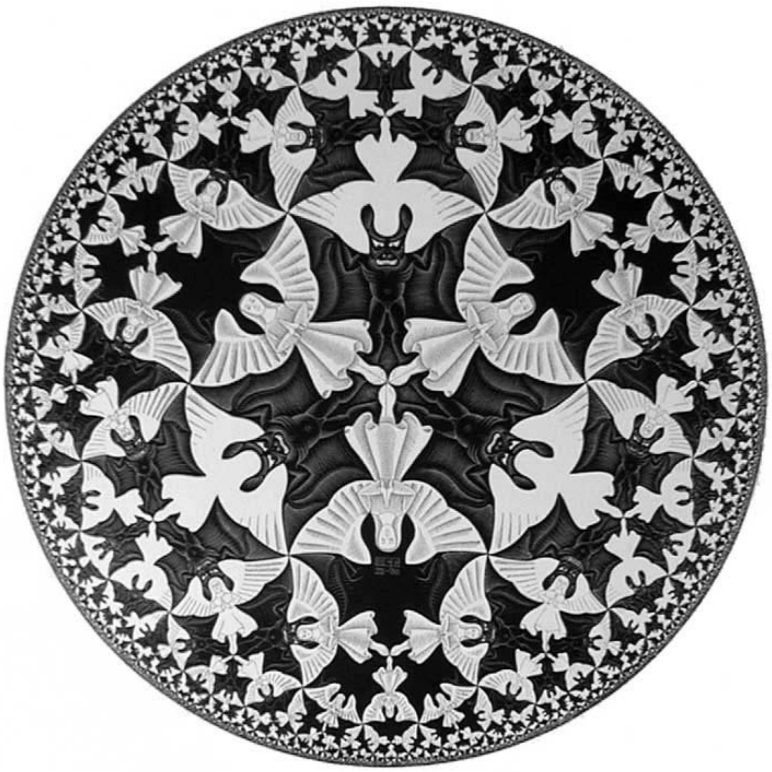


Figura 4. *Ángeles y demonios hiperbólicos*, Escher, 1960

Escher y las curvas elípticas

Si miramos con atención la última imagen de Escher, nos damos cuenta de que podríamos, sin ningún problema, interpretar que Escher ha cubierto con sus ángeles y demonios una esfera, una pelota, y luego ha dibujado ésta desde arriba. No es la primera vez que Escher se enfrenta a la esfera: en 1945, en el grabado “Balcón”, nos ilustra qué ocurre cuando a una superficie le “sale un grano” esférico.

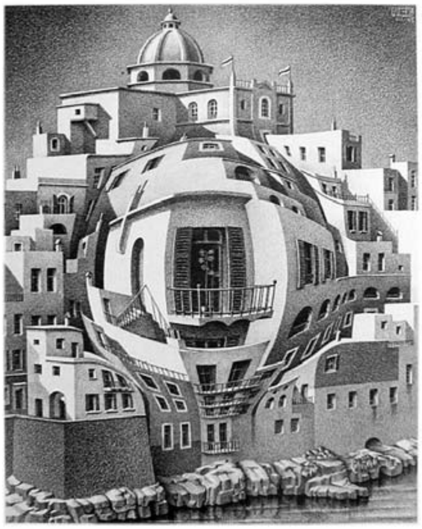


Figura 5. *Balcón*, Escher, 1945

Tampoco es la esfera la única superficie “no plana” sobre la que Escher trabajó. Hace unos años, el matemático holandés Hendrick Lenstra viajaba de San Francisco a Amsterdam en avión, y en la revista de la compañía aérea encontró reproducida una litografía bastante inusual que Escher hizo en 1956.

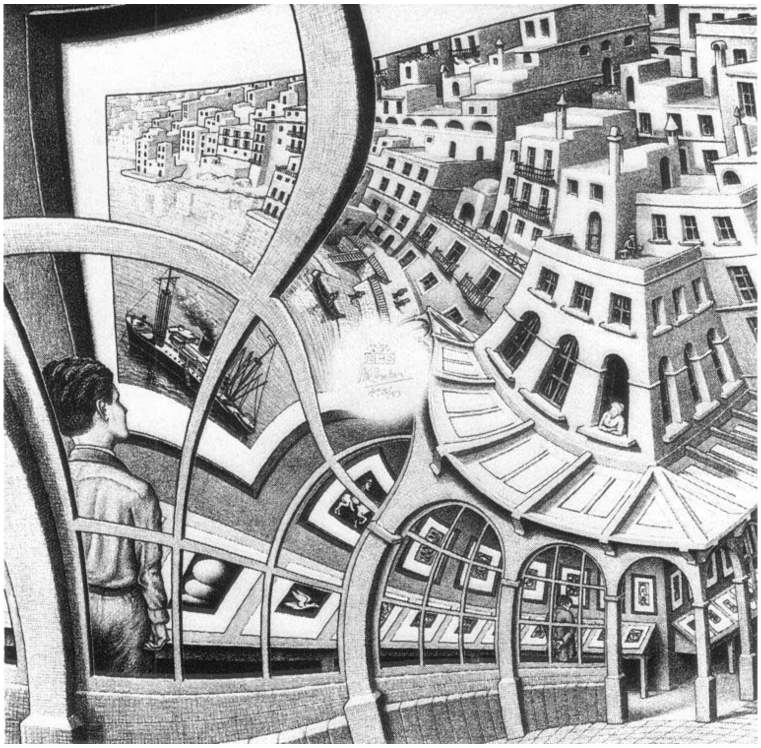


Figura 6. *La galería de grabados*, Escher 1956

Prententententoonstelling (*La Galería de Grabados*), la tituló Escher, y muestra un hombre en una galería de arte contemplando una imagen del puerto marítimo de Malta. Cuando los ojos del hombre recorren los edificios que, junto al malecón, aparecen en el grabado, descubre entre ellos la propia galería en la que él se encuentra. Una mancha circular blanca aparece en mitad de la litografía, y sobre ella el monograma de Escher con su firma.

Buscando entretenerse durante el viaje, Lenstra se preguntó por qué aparece el agujero blanco en el centro y si habría alguna manera satisfactoria de rellenarlo utilizando las matemáticas. Para poder contestar a estas preguntas necesitaba entender qué había hecho Escher en el cuadro, la estructura interna tras *La Galería de Grabados.* Lo primero que le llamó la atención es que, como ya hemos mencionado, la galería donde está el joven vuelve a reproducirse en el interior del cuadro, sugiriendo que lo mismo debería ocurrir tras el borrón blanco; dicho con otras palabras, que estamos ante lo que Lenstra, en homenaje al famoso chocolate holandés, llama *efecto Droste.*

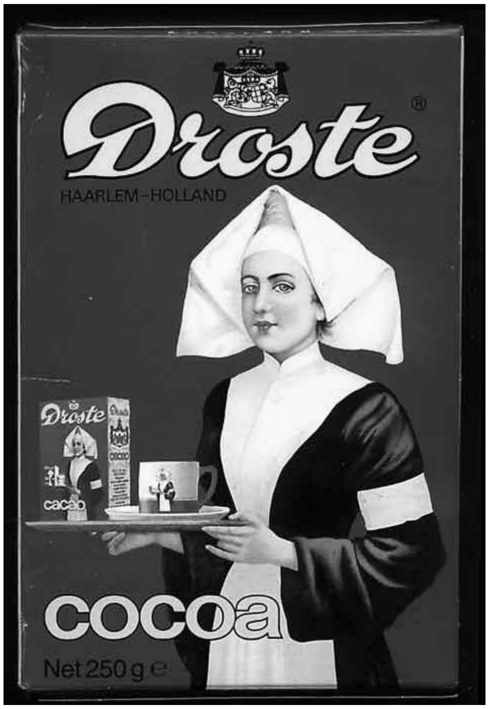


Figura 7. El papel de chocolate holandés *Droste*

La diferencia esencial entre el papel del chocolate y el grabado, es que en el primero la figura está dibujada sobre un plano, mientras que la escena de *La Galería de Grabados* está dibujada sobre una superficie claramente no plana. Qué superficie, y cómo acabar el dibujo son las dos preguntas que se hizo Lenstra y que las matemáticas le ayudaron a contestar.

Si Escher, artista, había encontrado las instrucciones para utilizar las matemáticas en las ilustraciones de matemáticos, es lógico que Lenstra, matemático, buscase las pistas de cómo utilizar las matemáticas en las ilustraciones de los artistas. Al llegar a Holanda, consultó el libro *El espejo mágico de M.C. Escher*, escrito por el amigo del artista Hans de Rijk bajo el seudónimo de Bruno Ernst. Rijk visitó con frecuencia a Escher en su estudio mientras éste trabajaba en *La Galería de Grabados* y su libro, revisado y autorizado por el propio artista, describe con detalle el método que éste utilizó, y explica que lo que Escher intentaba es una expansión circular continua, una protuberancia o abultamiento en una formación de anillo cerrado, sin principio ni fin. Buscando esta construcción —para la que no encontró ayuda en las ilustraciones de los textos matemáticos que consultó, lo que no es de sorprender, pues las curvas elípticas estaban todavía poco estudiadas a mediados del siglo XX—, Escher creó primero esta expansión o abultamiento en una trama de líneas rectas, distorsionándola y haciendo que el tamaño de los cuadrados de la trama creciesen un factor de 256 según se movía a lo largo de un bucle cuadrado desde el centro hacia afuera.

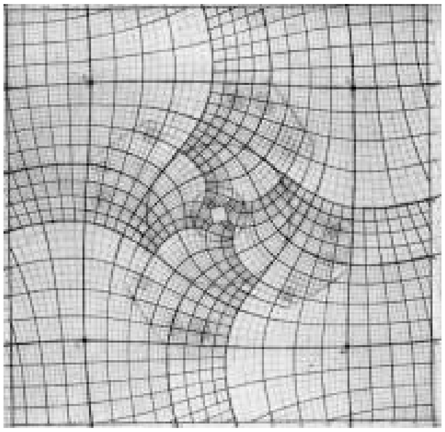


Figura 8. La trama de Escher

Una vez tenía esta trama distorsionada dibujada, Escher dibujó la escena de la galería —en la que uno de los cuadros reproduce el puerto de Malta, entre cuyos edificios vuelve a aparecer la galería con el cuadro en el que aparece el puerto de Malta, etc.—, colocó sobre él la trama rectilínea sin distorsionar y, dibujando una a una cada una de las celdillas cuadradas, fue trasladando la imagen a una trama distorsionada. No es de extrañar que acabase con un borrón blanco en el centro, pues además de la dificultad para llevar a cabo los cálculos matemáticos de las medidas en la nueva situación, Escher tenía un verdadero problema material: no hay pincel lo suficientemente fino para pintar tan chiquito.

Pero ni el tamaño ni los cálculos supusieron un problema para Lenstra, matemático en el siglo XXI, ¿para qué, si no, están los ordenadores? Mirando la imagen de la trama distorsionada de Escher en el libro de Rijk, se preguntó, ¿Hay alguna transformación matemática que nos permita reproducir el proceso llevado a cabo por Escher? La respuesta es sí. No tenemos más que combinar rotaciones, funciones exponenciales y logarítmicas, y reducción de tamaño o escala, transformaciones todas ellas muy conocidas y estudiadas en el Bachillerato. Combinando estas cuatro funciones para valores apropiados de las constantes (que encontraron por el método de ir probando hasta acertar) Lenstra y su equipo de la Universidad de Leiden lograron entender la imagen de Escher; el grabado contiene una copia de sí mismo rotada 157,6255960832... y reducida en escala por un factor de 22,5836845286... (Lenstra y Smit, 2003).

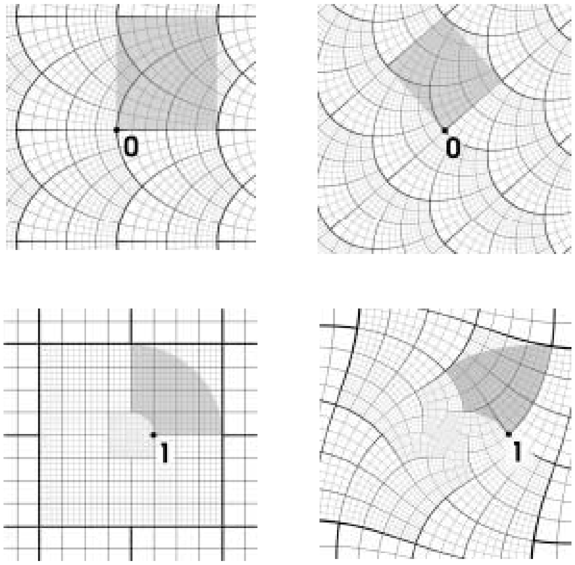


Figura 9. Reproduccion de la trama de Escher por Lenstra y su equipo

Identificadas las transformaciones, reconocer la superficie que estas transformaciones producen cuando se las hace actuar de manera continuada sobre una trama no es difícil: se trata de un toro, una superficie con un agujero —técnicamente, una curva elíptica definida sobre el cuerpo de los números complejos—. Para verlo, basta pensar en una situación física donde aparezca un *bucle* producido por un giro, quitar el tapón de un lavabo lleno de agua, por ejemplo. Enseguida aparecerá nuestro bucle, que antes o después se convertirá en un agujero. Ya tenía Lenstra respuesta a la primera de sus preguntas: Escher había intentado proyectar su escena sobre una rosquilla. De hecho, tenía mucho más, tenía las transformaciones exactas con las que producir dicha rosquilla.

Con esta información, y utilizando ordenadores, el equipo holandés de matemáticos pudo "rellenar el agujero". Los pasos sucesivos que recorrieron al hacerlo (y que aparecen explicados e ilustrados con todo detalle, tanto con imágenes fijas como por películas, en el trabajo publicado en la página de Internet http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/) son los siguientes.

- **Paso 1**. Haciendo actuar sobre el grabado de Escher las inversas de las transformaciones que se han identificado, *plancharlo*, llevarlo de nuevo a una cuadrícula plana.

- **Paso 2**. Rellenar el agujero en el modelo plano y completar la escena.

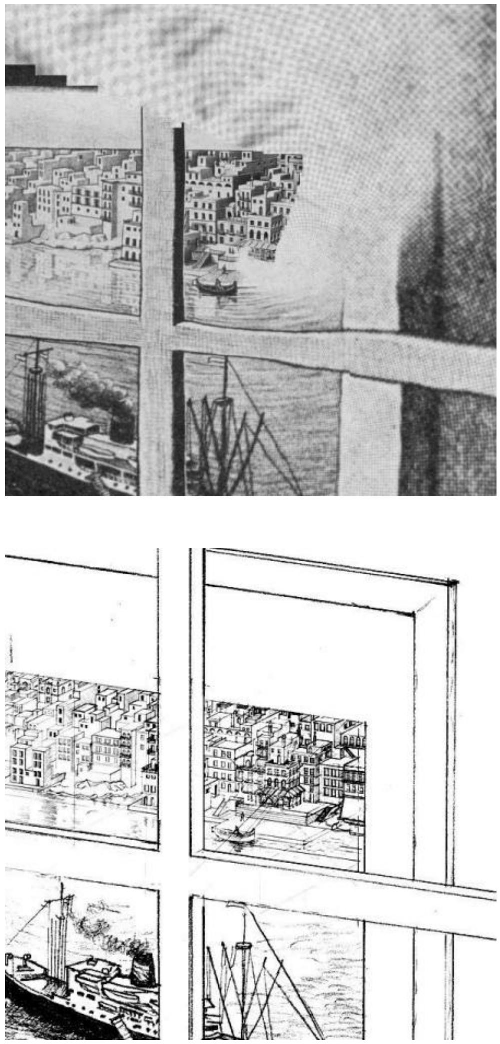


Figura 10. Ejemplo de *aplanado* y relleno de una parte del agujero

(Nótese que el ordenador dibuja marcos de aluminio, no de madera cómo Escher, un detalle siempre a tener en cuenta cuando se trabaja con máquinas.)

- **Paso 3**. Devolverle su forma original haciendo actuar sobre ella las transformaciones que conocemos.

Y, así, una vez más y casi cincuenta años después de su muerte, las matemáticas ayudan a Escher a llevar a cabo sus construcciones. ■

Figura 11. El agujero rellenado

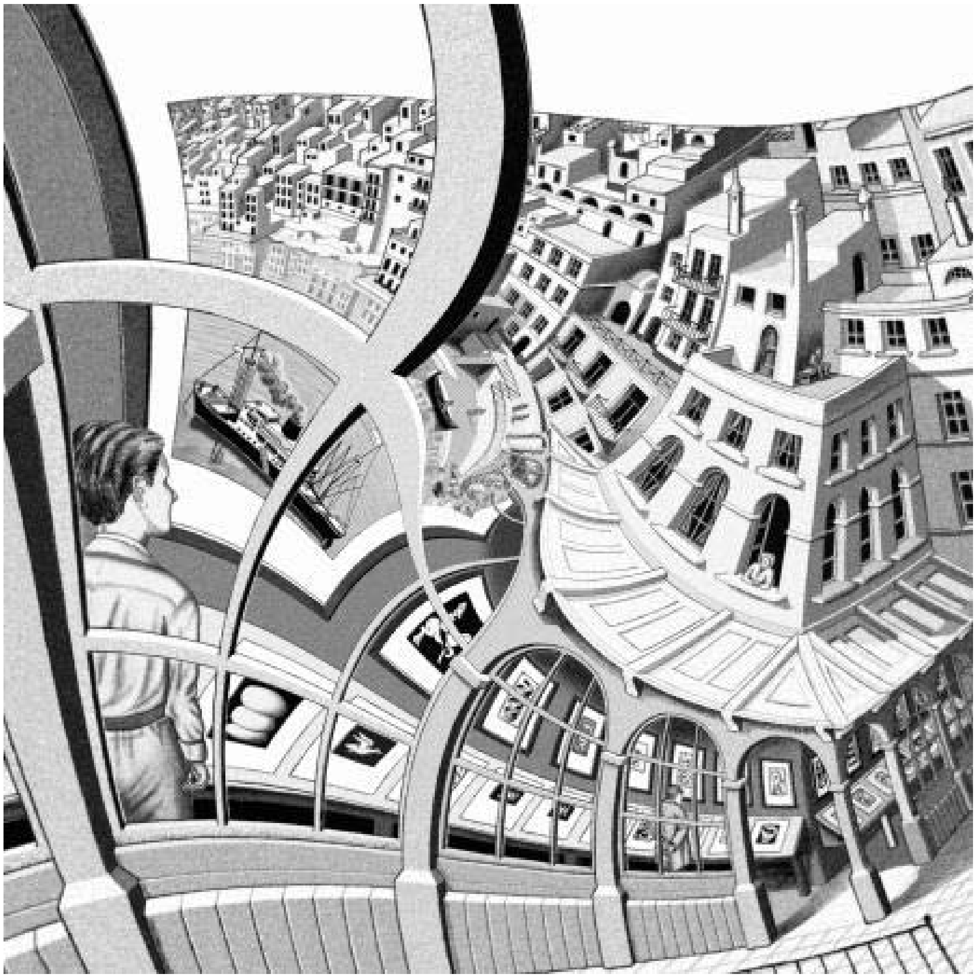


Figura 12. El grabado terminado

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CIPRA, Barry, 1999, "But Is It Math?", en *What´s Happening in the Mathematicas Sciences* 4 (1998-999), AMS.

COSTA GONZÁLEZ, A., 1995, *Arabescos y Geometría*, Videos UNED.

COXETER, H.S.M., 1957, "Cristal symmetry and its generalizations", *Royal Soc. Canada* (3) 51.

ESCHER, 2004, Escher, la vida de las formas, catálogo de la exposición, Fundació La Caixa.

ERNST, B., 1976, *The magic mirror of M.C. Escher*, Ballantine Books.

LENSTRA, H. W. y de SMIT, B., 2003, "The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery", *Notices of the AMS* (4) 50.

MAZUR, Barry (s.a.) "Plus symétrique que la sphère", *Per la science* 41.

PÓLYA, George, 1924, "Sobre la analogía de las simetrías del cristal en el plano", *Zeitschrift für Kristallographie*.

SUMA 49
Junio 2005, pp. 109-112

Don Quijote y Sancho Panza ...desfaciendo entuertos matemáticos

El hombre fue creado para jugar: fue el pecado original el que le condenó a trabajar

Claude Aveline

No es de reciente creación la genial idea de lanzar retos de contenido matemático a desconocidos lectores a través de la letra impresa en libros, revistas y periódicos…

Todos, al menos los más viejos, recordamos la gloriosa sección de Martin Gardner, en *Scientific American*; o sin salir de nuestro país la remota Cacumen, que a principios de los 80 nos deleitó con ingeniosos y creativos retos plagados de creatividad y gracia, obra de prestigiosos autores de nuestro país y de más allá de nuestras fronteras…

Pero la tradición viene de lejos.

En la segunda mitad del siglo XIX, hacia 1870, el reverendo Charles Lutwidge Dodgson, quizás más popular por su seudónimo, Lewis Carroll, ya torturaba a los lectores de una publicación, poco más que humilde hoja parroquial, con unos *cuentos humorísticos*. Como indicaba el propio Lewis Carroll, eran unos cuentos que planteaban una o más cuestiones matemáticas —de aritmética, álgebra o geometría, según el caso— para el entretenimiento, y posible edificación, de los lectores...

Con estos gloriosos antecedentes queremos inaugurar esta nueva sección, que pretendemos duradera, esperando una buena acogida y multitud de respuestas por parte de los lectores de SUMA.

Y aprovechando el cuarto centenario del Quijote, que impregna las actividades culturales de nuestro país y que inspirará el *Día Escolar de las Matemáticas* de este año, iniciamos esta andadura con un cuento, al estilo de Carroll pero inspirado en nuestro genial hidalgo manchego y universal, obra de nuestro amigo Joaquín Collantes en la parte literaria, al alimón en la parte matemática con el coordinador de la sección.

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

Don Quijote y Sancho ...desfaciendo entuertos matemáticos

Don Quijote y su escudero, después de dormir aquella noche de primavera al raso y de desayunar, apenas despuntada el alba, los torreznos y el pan candeal que Sancho Panza sacó de su zurrón, se pusieron en marcha por los campos de La Mancha.

— ¿Hacia donde dirigimos nuestros pasos hoy, mi señor?
— Hacia donde nos lleve el caprichoso destino, Sancho, amigo.
— Sí; estoy de acuerdo, pero como cuerdo que estoy, no me acuerdo del lugar que mencionasteis anoche, antes del nocturno reposo.
— Pues repasa tu cerebro de pasa y recordarás que propuse seguir la senda hacia El Toboso, para ver si de una vez por todas encontramos a la sin par Dulcinea del Toboso, que así se la nombra por morar en dicho pueblo, que si viviera en Valdepeñas, pues sería nombrada Dulcinea de Valdepeñas. Pero así no lo escribirá don Miguel de Cervantes.
— ¿Y quién es ese don Miguel de no sé qué? —preguntó Sancho.
— El Manco de Lepanto, el Príncipe de los Ingenios, el Rey de las Letras, el Más Grande escritor entre todos los Más Grandes, más grande aún que el muy grande don William Shakespeare, que allá, en la Pérfida Albión, más conocida como la Gran Bretaña, escribe comedias y tragedias para el teatro.
— ¿Y qué es lo que escribirá el excelso manco?
— ¿Qué ha de ser, pardiez? Mis aventuras, bellaco. Don Miguel logrará los laureles gracias a mis aventuras, y yo la inmortalidad gracias a su pluma.
— ¿Y saldré yo también en esas dichas aventuras?
— Saldrás, seguro; y hasta mejorado de ingenio.
— ¡Qué cosas, mi señor don Quijote, qué cosas!

Y así hablando el caballero y preguntando el escudero llegaron, pasado el mediodía, a una venta que estaba al borde del camino real. Bajaban de sus monturas con ánimo de reponer fuerzas cuando observaron que, junto a una tapia, dos albañiles discutían desaforadamente ante dos montones de bloques de adobe.

— ¿Cuál es le motivo del enojo de vuesas mercedes? —preguntó don Quijote alzándose la visera de la celada.
— Pues que nos hemos repartido estos 100 bloques de adobe para levantar esta tapia. Nos los hemos repartido en dos partes, pero sin contarlos, así, a ojo de buen cubero —contestó uno de los albañiles, el más delgado.
— ¿Y qué?
— Pues que yo los he ido colocando en hileras de cinco bloques, mientras que aquí, mi compañero, los colocaba en columnas de siete bloques.
— ¿Y qué? —repitió don Quijote.
— Pues que cuando hemos terminado de colocarlos, a mí me quedan dos bloques sin colocar —contestó el albañil delgado.
— Y a mí me han sobrado cuatro bloques —dijo el albañil gordo.
— Pero, vamos a ver, ¿cuántos bloques ha tomado cada uno? — preguntó esta vez Sancho.
— Eso es lo que quisiéramos saber nosotros.

Y allí se quedaron los dos albañiles, tratando de resolver su problema, mientras que don Quijote y Sancho Panza entraban en la venta, el caballero intentando justificarse:

— Es que yo reconozco que no soy muy buen ciudadano de la República de los Números, que lo mío es deshacer entuertos.

Ya en el comedor de la venta, y antes de sentarse a la mesa, observaron que en el mostrador el ventero pesaba unos chorizos en una balanza.

—Maese ventero...

El ventero hizo callar a Sancho con un gesto imperioso, al estar inmerso en los cálculos que hacía en voz alta y bien alta, como si oyéndose a sí mismo lo entendiera mejor su caletre, que muchas luces no parecía tener:

— Tengo *n* chorizos, cada uno de un peso *p*.
— ¿Por qué llama *n* a los chorizos? —susurró Sancho al oído de don Quijote, para no volver a interrumpir los cálculos del ventero.
— Es una manera matemática de hablar —contestó el caballero.
— ¡Ah! —exclamó Sancho, como si lo hubiera entendido.

Mientras tanto, el ventero, que no se había enterado de los comentarios de los recién llegados, siguió con sus cálculos en voz alta:

— Si peso los chorizos por parejas, la suma de los pesos de todas las parejas posibles, es 120.
— ¡Ah! —volvió a exclamar el escudero, hasta que un codazo de su señor lo hizo callar.
— Y si los peso por ternas...
— ¿Qué son ternas? —ahora sí que interrumpió Sancho al ventero.
— Un conjunto de tres objetos, de tres chorizos, en este caso. ¡Y calla ya, malandrín! —contestó don Quijote, indicando al ventero con un gesto que siguiera con sus cálculos.
— Muy bien, sigo: Y si peso los chorizos por ternas, la suma de los pesos de todas las ternas posibles, es 240. Ahora no tengo más que calcular *n*.
— Pues calcule vuesa merced todas las enes que quiera, pero antes de eso fríanos *n* chorizos, con unos buenos huevos, que gallinas hemos visto en el corral.

En ese momento entró la ventera que, secándose las manos en el delantal, saludó a sus clientes y les preguntó:

— Noble hidalgo y rústico rufián, ¿quieren vuesas mercedes acompañar los huevos con chorizo con un buen caldo de col y carnero?
— Tentadora oferta, pardiez —exclamó Sancho, un tanto molest0 por el tratamiento, aunque ya menos ante la culinaria oferta.
— Pues si os dignáis acompañarme al huerto bien podréis elegir la col que más os plazca, que a eso, con el pasar de los siglos, se le llamará “self service”.

Salieron los tres al huerto viendo como ante su tapia a medio hacer, los dos albañiles seguían a vueltas con sus montones de bloques de adobe. Ya en el huerto, y cuando iban a elegir su col, entró en el recinto una señora que era la dueña de la tienda de ultramarinos del pueblo, es decir, de la tienda que vendía productos de ultra mar, de allende el océano, de las Américas, junto a productos locales, por supuesto.

— Mi querida mesonera, a la que tengo en grande estima, ¿puedo elegir 6 coles para venderlas en mi colmado?
— Por supuesto, honrada tendera, elegid los que sean de vuestro agrado.
— Y la tendera se metió en la plantación de coles que, en número de treinta y seis, estaban plantadas formando un cuadro de seis coles de lado, o sea, seis coles en cada fila y seis coles en cada columna, así:

o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o
o o o o o o

Antes de que la tendera eligiera sus seis coles, la ventera se adelantó para advertirle que eligiera sus seis coles no aleatoriamente, que las eligiera de tal manera que siguiera habiendo un número par de coles en todas las filas, en todas las columnas y, además, también en las diagonales.

Ante las dudas de la tendera, y viendo por el sol que se les hacía tarde, don Quijote y Sancho Panza, dando el caldo por perdido, volvieron a la venta:

— Más vale *n* chorizos con huevos fritos en mano, que cien coles volando —sentenció el caballero de la triste figura.
— Pero, mi señor, tengo una duda, ¿qué coles debe de elegir la tendera siguiendo las indicaciones de la ventera?
— Por ventura que lo ignoro, a mi pesar, que con el estómago vacío se me obnubila el majín.

Después de almuerzo y contentos gracias al vino de Valdepeñas con que habían regado los huevos con chorizo, don Quijote y Sancho Panza volvieron al camino real. Apenas si habían salido del pueblo cuando vieron un aprisco en el que trabajaban dos pastores, arreglando la cerca. Sancho, aterrado ante la posibilidad de que su señor confundiera de nuevo a las ovejas con los ejércitos del gran emperador Alifanfarón de la Trapolana, como había hecho apenas un mes antes, y de que los pastores les apedrearan de nuevo, se adelantó a los acontecimientos, requisándole lanza, escudo y espada, por si acaso. Así, llegaron ante el cercado en construcción, saludando a los pastores:

— Buenos días nos dé Dios.
— Y que vuesas mercedes los disfruten, señor caballero y la rústica compañía. Pues aquí nos tienen, trabajando en el cercado. Es que hemos descubierto que si este corral fuese cuadrado en lugar de rectangular podríamos ahorrarnos dos postes de la cerca —explicó uno de los pastores
— Ah, ¿sí?
— Pues sí; aunque lo cierto es que aunque sea cuadrado o rectangular servirá para el mismo número de ovejas, pero, en cambio, si fuera cuadrado habría un poste donde atar a cada oveja.
— Pero, ¿cuántas ovejas hay en el rebaño? —preguntó Sancho.
— Buena pregunta —contestó el otro pastor— No sabemos cuantas ovejas tiene el dueño del rebaño, dado que nosotros solamente somos los encargados de cercar el aprisco, pero puedo daros datos para averiguarlo, si tanto interés tenéis: se supone que en ambas formas, la cuadrada y la rectangular, los postes de la cerca están separados por iguales distancias; que las áreas del corral cuadrado y del rectangular son iguales y que, además, el rebaño está formado por menos de 3 docenas de ovejas. ¿Está claro?
— Clarísimo —contestó Sancho— Bueno, señores, a más ver y queden con Dios.

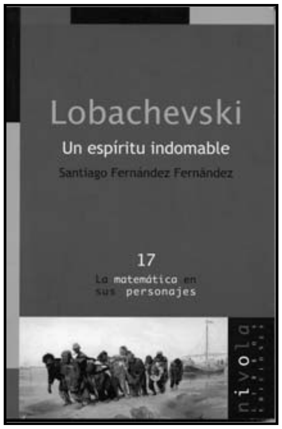
El caballero y su escudero, después de despedirse de los pastores, prosiguieron su camino hacia El Toboso, hasta que don Quijote, asombrado aún, le dijo a su escudero:

— Sancho, amigo; no puedo creer que hayas entendido el problema planteado por los pastores.
— Ni yo tampoco, mi señor, ni yo tampoco

Contestó Sancho Panza que, a pesar de no haber entendido el planteamiento del problema, trataba de calcular, contando con los dedos de ambas manos, cuántas ovejas podría tener el rebaño. ■

SUMA 49
Junio 2005, pp. 113-117

Lo que parece antinatural no tiene por qué ser imposible



LOBACHEVSKI. UN ESPÍRITU INDOMABLE
Santiago Fernández Fernández
Nivola, libros y ediciones
Madrid 2004
ISBN 84-95599-69-4
240 páginas

Que Santiago Fernández es un tipo culto, persona entrañable, amante de las matemáticas y de conversar sobre ellas, lo sabía desde hace muchos años. Su interés por el mundo ruso del s. XIX lo he intuído después, cuando recibí su libro sobre Lobachevski. La portada que ha elegido no podía ser casual. El contraste de los miserables sirgadores del cuadro de Ilya Repin debajo del nombre del matemático ilustre, habla de una sociedad arcaica y despiadadamente feudal que sin embargo encerraba una enorme potencialidad de creación individual y colectiva. Es además una llamada a la solidaridad, a la advertencia de que más allá de la torre de marfil del geómetra puro está la base social que le permite desarrollar su labor. Una contextualización política nada habitual en el platónico mundo de las matemáticas y sus publicaciones.

¿Recordáis la película de Eisenstein *Iván el terrible*? ¿Aquella llamada —*¡A Kazán!*, *¡A Kazán!*— sobre las filas de soldados que depositan una piedra antes de ser encaminados al asedio de la ciudad? A la vuelta, el número de piedras sin recoger indicaba el número de bajas. Buscad Kazán en el mapa.

La portada de este libro es una llamada a la solidaridad, a la advertencia de que más allá de la torre de marfil del geómetra puro está la base social que le permite desarrollar su labor.

Ángel Ramímez Martínez
IES Sierra de Guara (Huesca).
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro S. Ciruelo.

Tampoco en la época soviética parece que llegara a ser un núcleo especialmente importante. Imagino que debió serlo antes del asedio de Iván. Las matemáticas, desde luego, pueden saltar barreras políticas y espaciales, pero la problemática generada por el quinto postulado de Euclides no se dirigió hacia San Petersburgo ni llamó a la puerta de Ostrogradski —de familia adinerada y con estudios en Europa[1]— sino que eligió a una persona salvada de su limitada predestinación social por el esfuerzo de su madre en el centro de unas estepas olvidadas por el paso de los tiempos.

¿Abandonó Lobachevski alguna vez Kazán a lo largo de su vida? Santiago nos presenta a un provinciano de miras muy abiertas, preocupado por su ciudad y sus ciudadanos, buen gestor, profesor preocupado por la didáctica, empirista convencido, insertado a pesar de su situación periférica con las líneas de trabajo matemático y de pensamiento europeas, y pilar básico sobre el que su universidad se asienta para dar sus primeros pasos.

Las matemáticas, como cualquier otra actividad humana, son el resultado de una creación colectiva desarrollada mediante diálogos anacrónicos, diacrónicos y/o contemporáneos entre un grupo mucho más amplio de personas que el que recogen los manuales, permitido y sostenido con distintas variaciones por las sociedades de cada época.

La continuidad del devenir histórico

La ideología de cada cual le hará opinar de una u otra manera sobre las catástrofes o la continuidad como modelo evolutivo de la Historia. Podemos pensar también en una síntesis, pero ello supone admitir que las catástrofes se preparan cuidadosa e inconscientemente por el azar, las personas y el entorno social. Desde el punto de vista de la evolución interna de las matemáticas, la visión que proporcionan muchos manuales de historia es la de una serie de catástrofes —léase aportaciones de matemáticos más o menos brillantes— más o menos cercanas entre sí. Una especie de bosque abierto —como el de sabinas— en el que cada árbol-catástrofe crece con libertad casi absoluta. Sabe que existen —o existieron— "los otros" pero es cuasi-autónomo. Un avance, en cualquier caso, respecto a modelos más trasnochados que lo fiaban todo al genio, pero la ausencia de conexiones entre los árboles termina produciendo insatisfacción. El modelo debería ser más bien un bosque con maleza; con mucha maleza sin la cual no podría prosperar. Es decir: las matemáticas, como cualquier otra actividad humana, son el resultado de una creación colectiva desarrollada mediante diálogos anacrónicos, diacrónicos y/o contemporáneos entre un grupo mucho más amplio de personas que el que recogen los manuales, permitido y sostenido con distintas variaciones por las sociedades de cada época.

Desde la lista de postulados de Euclides hasta el grupo de Gauss, los Bolyai, Lobachevsky y Riemann, los nombres de Proclo, Ibn Qurra, Omar Jayan, Al-Tusi, Wallis, Saccheri, Lambert, Playfair (a él se debe el enunciado del quinto postulado en términos de paralelas), Legendre, Schweikart, Taurinus, etc., testimonian sobre un primer y temprano malestar acrecentado con el transcurso del tiempo hasta la respuesta colectiva del XIX, que se produce cuando tiene que producirse: cuando la exploración del problema ha terminado de convencer de que —en palabras de Gauss— *No hay que confundir lo que nos parece antinatural con lo que es absolutamente imposible*; cuando se han conseguido convencimientos personales en grado suficiente como para buscar descaradamente lo antinatural.

La "maleza", esa imprescindible masa de matemáticos-maleza que cubren los espacios entre los matemáticos-árboles, desaparece muchas veces de los manuales. En el amplio índice del Boyer no figuran Schweikart ni Taurinus. Sí los cita Bell[2], pero su breve referencia no hace justicia al apasionamiento con que sin duda trabajaron y que puede sentirse en el resumen de sus ideas que incluye Santiago en su libro. A pesar de los olvidos, los actores secundarios son fundamentales para el buen desarrollo de una historia. Saccheri *construye una nueva teoría sin contradicciones lógicas partiendo de la hipótesis del ángulo agudo*[3], Lambert conjetura que esa hipótesis *se verifica en una esfera de radio imaginario*, la fórmula de Schweikart para el límite superior del área de un triángulo en su geometría astral se diferencia de la de Gauss sólo en el valor de una constante y Taurinus —convencido de la certeza de su geometría— se sorprende de que *un asunto evidente pueda permanecer oculto durante mucho tiempo incluso a los hombres más perspicaces*. Un ejemplo más: la fórmula de Lobachevski, Janos Bolyai y Gauss para el ángulo de paralelismo es la misma que la de Taurinus.

A pesar de las incomprensiones y de los desconocimientos —Lobachevski partía de una situación mayor de aislamiento que Gauss y Bolyai— eran demasiados pasos hacia lo antinatural como para que finalmente no se terminara de andar el camino.

Tomar en serio lo "antinatural"

Santiago explica cómo se dieron los "pequeños" pasos. Con audacia, desde luego, pero con las herramientas disponibles en ese momento. Sin duda por mi desconocimiento anterior de la profundidad de estas etapas intermedias, me ha sorprendido el papel que jugaron en ellas la trigonometría esférica y las funciones hiperbólicas. ¿Acaso podría haber sido de otra manera? Nadie crea a partir de la nada. Incluso como docentes pensamos poco, por ejemplo, en el hecho de que el currículo de bachillerato es un bonito ejemplo de revisiones sucesivas de ideas viejas —me refiero al tiempo de nuestros alumnos y alumnas— con enfoques nuevos.

Pero hay algo más. En matemáticas se dispone desde el s. XVII de una potente herramienta: un álgebra libre, independizada gracias a su particular lenguaje simbólico. Perdida la guía de la intuición, desorientada incluso por los caminos que la lógica obliga a transitar, es posible continuar la marcha gracias al álgebra-lazarillo que guía al matemático ciego que no puede de momento utilizar modelos plásticos. Las ecuaciones, independientemente de su conexión con la realidad material, tienen vida propia. Cuando ofrezcan un resultado se puede cerrar el círculo y construir entonces, con más información, el modelo "real". Fielker teatralizó muy bien estos procesos matemáticos de revisión y búsqueda a oscuras —pero con fe— de lo antinatural, en aquel excelente artículo en el que cuenta cómo propone a sus alumnas y alumnos que busquen un polígono de 2'5 lados. El punto de partida había sido el estudio de la evolución de los valores de los ángulos de un polígono regular según su número de lados. Advierte Fielker que *forma parte de la esencia de las matemáticas tomar en serio preguntas como ésta*.

Si el hilo conductor de la historia de las matemáticas es su imparable tendencia hacia la algebrización, la investigación que ilustra de forma paradigmática sobre la naturaleza de esta especial actividad de los seres humanos bien puede ser la búsqueda de las geometrías no euclídeas.

Mi segunda sorpresa desde el punto de vista internalista ha sido que sabiendo cómo funcionan este tipo de procesos no los hubiera supuesto antes en la búsqueda final de la geometría hiperbólica. Santiago nos explica que *el trabajo de Taurinus es básicamente algebraico. Es la primera vez que se aborda el problema de las paralelas sin recurrir a figuras o razonamientos estrictamente geométricos.* Ello no le impide obtener el área de un triángulo conocidos sus lados, la longitud de una circunferencia, la superficie y el volumen de una esfera, etc. De nuevo la pregunta anterior: ¿podría haber sido de otra manera?

Queda luego, claro, el empirismo insatisfecho de Lobachevski —también sus trabajos son analíticos y sin dibujos que los acompañen— que intenta comprobaciones experimentales de su teoría pero no puede concluir nada por la imprecisión de los instrumentos de medida de su época.

***

Si el hilo conductor de la historia de las matemáticas es su imparable tendencia hacia la algebrización, la investigación que ilustra de forma paradigmática sobre la naturaleza de esta especial actividad de los seres humanos bien puede ser la búsqueda de las geometrías no euclídeas. Tengo que agradecer a Santiago la oportunidad que me ha dado de volver sobre todo esto, aportándome de forma amena muchos datos e ideas que no conocía y haciéndome revisar las que tenía archivadas. Hay en su libro mucho más de lo que he comentado. Da para hablar sobre Rusia, sobre ética y la dignidad de los seres humanos, sobre las fascinantes consecuencias matemáticas en el s. XX del agitado s. XIX (aparecen también en el libro Beltrami, Poincaré, Klein, etc.), incluso sobre el amor (no tuvo suerte Lobachevski y me apetecería conjeturar con Santiago por qué) ...

El carácter de divulgación general de la colección de Nívola ha obligado a Santiago a guardar en el tintero muchas cosas. Ojalá se anime a ofrecernos una segunda parte. ■

NOTAS

1 No conocía datos personales de Ostrogradski. Me ha sorprendido su fuerte conservadurismo: *Todo lo que no he comprendido de la geometría de Lobachevski está por debajo de lo mediocre.*

2 Me refiero a las dos obras clásicas de ambos autores. Boyer: *Historia de la matemática* y Bell: *The Development of Mathematics.*

3 Equivalente a que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a dos rectos.

Geometría y diseño de objeto cotidianos

GEOMETRÍA COTIDIANA. PLACERES Y SORPRESAS DEL DISEÑO
Claudi Alsina
Rubes
Barcelona, 2005
ISBN 84-497-0017-5
140 páginas

Si en *Contar bien para vivir mejor* nos descubría facetas novedosas que hacían que los números nos ayudaran en el difícil empeño de la vida, ahora en el libro que comentamos el autor la emprende con los aspectos geométricos de los objetos que nos rodean, que creíamos conocer, pero solo era, en la mayoría de los casos, de forma aparente. Porque Claudi Alsina, como los magos, nos hace resaltar en muchos de ellos cualidades que no habíamos percibido y que sin embargo están ahí y en muchos casos tienen que ver con la geometría.

El objeto confesado del libro es *que a pesar de las miserias humanas y del consumismo feroz, no deja de ser un reto intentar* racionalizar *y* optimizar, *aunque sea formalmente, el diseño de formas útiles para que cumplan dignamente unas funciones. Y en este proceso, la geometría tiene mucho que aportar: el fin último de estas páginas es que usted lo descubra.*

Y uno se adentra en sus páginas avanzando entre objetos cotidianos: clips y mecedoras, escaleras y tapones, pinzas y lápices, latas y tetrabricks, diamantes y trompetas,..., entre muchos otros. Lo hace contando curiosas historias, citas chispeantes (como *El huevo es una forma perfecta, aunque esté hecha con el culo*, de Bruno Munari) y agradables sorpresas, que para cada uno serán diferentes. Yo señalaré algunas de las que a mí me han llamado la atención. Así, en el capítulo 3 (*Una visita a prismas y cilindros*), nos encontramos con Piet Hein (el diseñador de juegos como el Soma o el Hex) y su sorprendente y geométrico diseño de la plaza Sergel de Estocolmo; y también, más adelante, mediante brocas apropiadas (que tiene que ver con el triángulo de Reuleaux) la forma de lograr taladrar agujeros cuadrados y ¡hasta hexagonales!

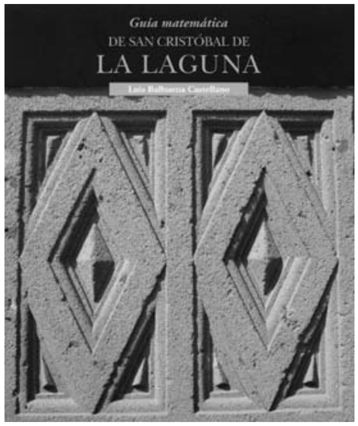
O en la visita a *El país de las cajas* (capítulo 4) nos encontramos con 'cajas divinas', que tienen que ver con la proporción áurea, y también con cerámicas o muebles comercializados asociados al mismo número. Y en *Un mundo esférico* (capítulo 6) nos endulza el diseño de los chupa-chups o la relación entre la famosa ópera de Sydney y las manzanas. Y encontramos inesperadas relaciones entre famosos personajes: *Supongo que les habrá parecido raro que la palabra revolución sirva, a la vez, para designar un violento conflicto social y las pobres figuras geométricas del espacio que se obtienen al girar una curva plana alrededor de un eje determinado. Aclarar la conexión Che Guevara-Euclides queda, pues, como tema abierto salvo que se conforme con la idea de que los revolucionarios desean dar un 'giro' a la situación.*

A pesar de que el título es muy apropiado para el contenido, enlazando con su libro anterior podría haberse titulado "Geometrizar bien para vivir mejor". Y en ese objetivo tan importante para las matemáticas de hacerlas visibles en nuestro entorno más próximo, aporta una cantidad enorme de ejemplos y perspectivas inesperadas, resaltando el esfuerzo, el conocimiento y la imaginación que supone cualquier diseño perdurable.

Por terminar, se puede decir que recrea de forma escrita el clímax de las celebradas charlas del autor, con sus sorpresas, sus informaciones y conexiones sorprendentes, su calidez y esa cualidad tan propia de los grandes comunicadores de hacernos percibir toda una nueva gama de matices incluso en los paisajes que creíamos conocer muy bien. Si alguien no le ha oído nunca todavía es una buena forma de descubrirlo. Todos los demás podrán volver a degustar, de forma tan pausada como quieran, el sabor de sus conferencias. ■

Fernando Corbalán
IES Ángel Sanz Briz, Casetas, Zaragoza

Entre rombos y simetrías. Un paseo por la Laguna

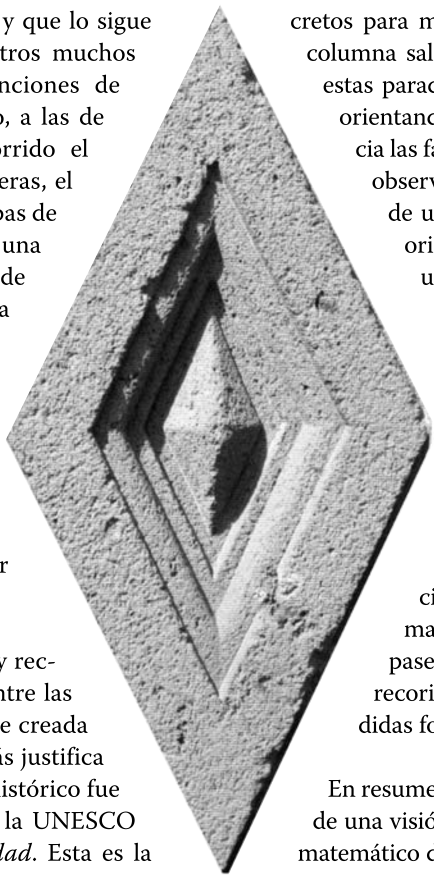


GUÍA MATEMÁTICA DE SAN CRISTOBAL DE LA LAGUNA
Luis Balbuena Castellano
Servicio de Publicaciones de la Caja Gral. de Ahorros de Canarias
La Laguna, 2004
ISBN 84-7985-195-04
208 páginas

El polifacético Luis Balbuena, que lo ha sido casi todo en el mundo de la educación matemática y que lo sigue siendo cada día desde sus clases y en otros muchos foros; añadiendo además ahora sus funciones de Consejero del Consejo Escolar del Estado, a las de innovador nato, después de haber recorrido el mundo de los relojes de sol, el de la banderas, el de los bordados y hasta el mundo de las tapas de las alcantarillas, nos sorprende ahora con una guía peculiar de su ciudad, San Cristobal de La Laguna. Y como no podía ser menos la guía es una guía matemática.

San Cristobal de La Laguna, fundada cuatro años después del descubrimiento de Ámerica por Alonso Fernández de Lugo y antigua capital de las Islas Canarias por decisión de los Reyes Católicos es la ciudad universitaria por escelencia.

La Laguna es una ciudad de calles largas y rectas lo que le da una personalidad única entre las ciudades canarias. Esto es debido a que fue creada sobre el lecho de una laguna lo que además justifica su nombre. Es una ciudad bella. Su casco histórico fue declarado el 2 de diciembre de 1999 por la UNESCO *Bien Cultural Patrimonio de la Humanidad*. Esta es la ciudad que Luis declara con pleno derecho suya, aunque no sea lagunero de nacimiento. Nos presenta en este libro una guía matemática de la ciudad distribuyéndola en ocho zonas y proponiéndonos otros tantos paseos para recorrerla y abarcarla.



En cada uno se nos sugiere que nos paremos en rincones concretos para mirar una ventana, una reja un capitel o una columna salomónicamente retorcida sobre sí misma. En estas paradas, el eje de la mirada variará su angulación orientando nuestra vista hacia los edificios delante, hacia las farolas arriba, pero también hacia el suelo, para observar los rombos del mosaico grabado en la tapa de una alcantarilla o hacia el cielo a través de los orificios verticales de una escultura tubular en una plaza.

Los rombos y las simetrías constituyen un hilo conductor de estos pasesos. El que él bautiza como *rombo lagunero* será el *leit motiv* que unirá las distintas piezas.

Un extenso glosario, al final, que realmente es mucho más que una simple lista de definiciones sirve para complementar la información –y la formación matemática– del lector no matemático, ayudándole a entender lo que en los paseos puede ver y, a quien sólo pueda hacer el recorido a través de esta magnífica guía, las esplendidas fotos que acompañan.

En resumen, nos encontramos ante un libro que, a través de una visión de lo local, convierte en universal el interés matemático de la ciudad de la La Laguna ■

Francisco Martín Casalderrey
sumadireccion@fespm.org

Fachada lateral de la casa Anchieta

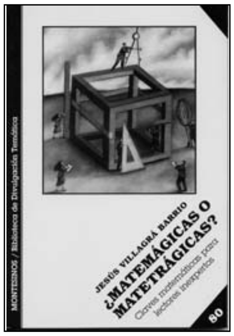
Hornacina y simetría

Fotos tomadas de *Guía matemática de San Cristobalk de la Laguna.*

Luis Balbuena Castellano

Publicaciones recibidas

SOFÍA. LA LUCHA POR SABER DE UNA MUJER RUSA
Xaro Nomdedeu Moreno
Nivola
La matemática en sus personajes
Madrid, 2004
ISBN: 84-95599-87-2
221 páginas



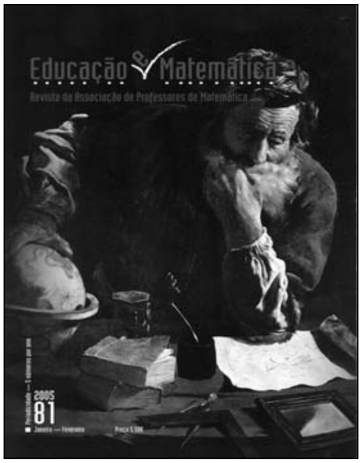
¿MATEMÁGICAS O MATETRÁGICAS?
Jesús Villagrá Barrio
Montesinos
Biblioteca de divulgación temática
Barcelona, 2004
ISBN: 84-96356-07-8
189 páginas

REPENSAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
Carlos Gallego Lázaro *et al.*
Graó
Barcelona, 2005
ISBN: 84-7827-371-9
197 páginas

PROBLEMAS CLÁSICOS DE GEOMETRÍA DESDE UN PUNTO DE VISTA ACTUAL.
J.J. Escribano, M.P. Jiménez, M.T. Pérez y J.A. Virto
La Rioja, 2005
ISBN: 84-689-0215-2
CDRom

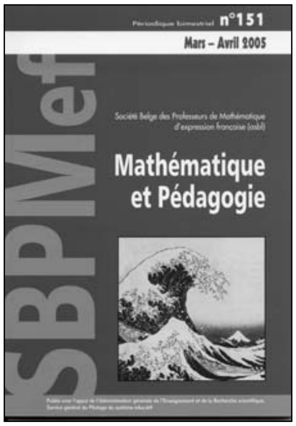
MEDIATRIZ. ACTAS DE LAS III JORNADAS REGIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Murcia, 2004
ISSN: 1577-3043
50 páginas

Publicaciones recibidas



Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 81, Janeiro-Fevereiro
Lisboa, 2005
48 páginas

Mathématique et Pédagogie
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (ASBL)
N.º 151, Mars-Avril
Belgique, 2005
ISSN: 0773-7378
92 páginas

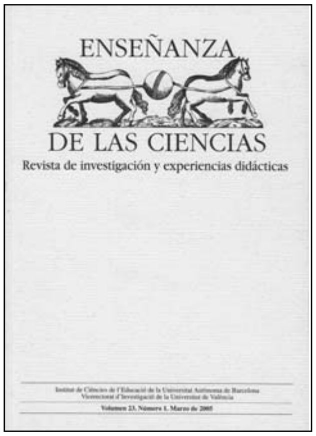


Quadrante. Revista de Investigação em Educação Matemática
Associação de Professores de Matemática
Vol. XIII, n.º 1
Lisboa, 2004
ISBN: 0872-3915
149 páginas

Biaix
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
N.º 22- Juliol
Barcelona, 2004
ISSN: 1133-4282
108 páginas

SUMA 49
Junio 2005, pp. 121-124

Veintidós años de *Enseñanza de las Ciencias*



TÍTULO: **ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS**
Edita: ***ICE de La Universitat Autònoma de Barcelona***
Periodicidad: ***tres números anuales (marzo, junio y nov.)***
Lengua: ***Español***
Dirección: ***ICE de La Universitat Autònoma de Barcelona***
Edificio A
08193 Bellaterra (Barcelona)

Página web: *http://blues.uab.es/rev-ens-ciencias*
Número comentado: : ***Volumen 23. Número 1, Marzo 2005***
ISSN: 0212-4521

Varios son los motivos que me han hecho escoger en esta ocasión la revista *Enseñanza de las Ciencias* para ocupar el espacio de esta sección. En primer lugar por tratarse de, quizá, la principal revista en la que publica habitualmente la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas de habla hispana. Este hecho, por sí mismo ya justificaría ampliamente el que le dedicásemos nuestra atención, ya que los profesores de matemáticas de los diferentes niveles (especialmente los de educación secundaria) no podemos mantenernos al margen de los avances que se producen en el campo teórico de la didáctica de nuestra disciplina. A nadie se le ocurriría que, por ejemplo, un médico, ya sea de familia, urgencias o de cualquier especialidad, ignorase los hallazgos y las conclusiones que se alcanzan en los laboratorios y que produce la investigación médica. Seguro que consideraríamos que se trata de un "mal profesional" que fía toda su práctica a los aprendizajes hechos en su pasado como estudiante y en la limitada experiencia adquirida a través de su práctica diaria de la medicina. Todos apreciamos a los médicos que están al día y deseamos que, en caso de tener que recurrir a ellos, nos proporcionen una atención que use lo mejor que haya producido la ciencia médica. Sin embargo, parece que en nuestra concepción de la profesión de enseñante quepa más la figura del profesor como la de un "improvisador", que es capaz de salir airoso con su "arte" para des-

> Enseñanza de las Ciencias *es, quizá, la principal revista en la que publica habitualmente la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas de habla hispana.*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org

envolverse ante las diversas situaciones que se le plantean en su quehacer cotidiano. Es verdad que para muchos profesores lo que acabo de decir no es más que una gran exageración, sin embargo esto no creo que quite razón a la afirmación de que en este momento predomina una corriente ideológica entre nuestro colectivo profesional que desconfía de los conocimientos didácticos y que considera que las preocupaciones de la investigación didáctica son fundamentalmente académicas y están alejadas de los verdaderos problemas que existen en el aula.

El rigor con el que Enseñanza de las Ciencias *ha acometido sus objetivos a lo largo de los últimos 22 años, ha hecho de ella un foco de atención y una publicación de referencia para todos los profesionales de la investigación didáctica en matemáticas y ciencias experimentales de habla hispana.*

El segundo motivo para la elección está íntimamente relacionado con lo que acabo de exponer en el párrafo anterior. Con el *Editorial,* que se publicó en el Número 1 del Volumen 22, —cuyo título ilustra perfectamente su contenido: *21 años de* Enseñanza de las Ciencias*. Llamamiento para un nuevo impulso*— la dirección reclamó a sus lectores sus opiniones y críticas sobre lo que habría que cambiar o mantener de la actual orientación de *Enseñanza de las Ciencias.* Un año después, en el *Editorial* del Número 1 del Volumen 23 se constata que pocos han sido los que han manifestado su opinión. Pero, con una sinceridad que es digna de elogio se resumen esas aportaciones de la siguiente manera:

> Entre quienes han manifestado su opinión, predomina la idea de que Enseñanza de las Ciencias se ha afianzado como una revista académica de didáctica de las ciencias (y de las matemáticas) pero que ha dejado de interesar a la mayoría de los profesores de enseñanza secundaria y bachillerato en activo. Se critica la progresiva disminución del interés por la práctica cotidiana de la enseñanza de las ciencias (y de las matemáticas) en las aulas; se expresa cierta decepción por la divergencia que se percibe entre las necesidades de los profesores y los objetos de estudio de los investigadores.

En cualquier caso, un panorama bastante desolador que provoca la necesidad de una profunda reflexión sobre el papel de la revista y su futuro, y que se amplía a una discusión sobre la relación entre investigación y docencia. Con este objeto se propone abrir un debate en el que se pueda reflexionar sobre el papel de la revista, sobre su actual orientación y hacer propuestas que conduzcan a acrecentar su papel como instrumento para la mejora de la enseñanza y del aprendizaje apoyada en la investigación didáctica. Esta reflexión debe partir de dos hechos fundamentales. Por un lado el tiempo transcurrido desde la creación de la revista, que por sí sólo es un elemento de desgaste y que requiere por parte de los responsables un esfuerzo por la renovación. Por otro, la constatación de un ambiente sociopolítico en el que hay una clara pérdida de ilusión en los proyectos renovadores y también por la pérdida de interés de la principal razón de ser de la revista: los profesores interesados por la mejora de su enseñanza. Para iniciar y animar el debate, la revista ha encargado en este número a José Mª Oliva que exponga en forma de artículo sus ideas al respecto, lo que comentaré más adelante.

Los objetivos

Antes de entrar en el contenido de la revista propiamente dicho, creo que es conveniente recordar los principales objetivos que se propone esta publicación tal como se exponen en su página web (*http://blues.uab.es/rev-ens-ciencias*). Cito textualmente:

- En primer lugar, en relación con el campo de la enseñanza de las ciencias, profundizar en la base teórica de los estudios e investigaciones publicados, propiciar reflexiones fundamentadas en relación con el estado y las perspectivas de las diferentes líneas de investigación prioritarias en la actualidad, y fomentar trabajos interpretativos que permitan avanzar en la comprensión de problemas significativos relacionados con el aprendizaje científico.

- En segundo lugar, promover los estudios que correspondan a las necesidades del profesorado de ciencias y matemáticas y que profundicen en el impacto de diferentes prácticas educativas ya sea en el aula o en contextos informales; favoreciendo la publicación de estudios, relacionados con la enseñanza y aprendizaje de contenidos científicos y matemáticos, que analicen la gestión del aula (trabajo en pequeño o gran grupo, cooperación y trabajo individual, etc.), el grado de implicación del estudiante en el aprendizaje, su autonomía o dependencia, la atención a la diversidad de intereses y niveles de los estudiantes de un grupo-clase, el diseño y la aplicación de actividades de diferentes tipos, la regulación de los errores en el proceso de aprendizaje, etc.

- Por último, animar los análisis críticos sobre los trabajos que se están realizando en la actualidad.

El rigor con el que han sido acometidos estos objetivos por la revista, a lo largo de los últimos 22 años, ha hecho de ella un foco de atención y una publicación de referencia para todos los profesionales de la investigación didáctica en matemáticas y ciencias experimentales de habla hispana. Es más, también ha servido para dar a conocer en España e Iberoamérica importantes trabajos hechos por investigadores de prestigio de todo el mundo.

Los contenidos

Enseñanza de las Ciencias dedica la mayor parte de su espacio a las investigaciones didácticas y dentro de ellas a las que se hacen en el ámbito de la enseñanza de las ciencias experimentales. Sin embargo no es una revista exclusiva de estas áreas. Por ejemplo, hay artículos que por su carácter teórico general, pueden ser interesantes para los profesionales de todas las áreas. Es el caso de la reflexión propuesta en *Hacia una teoría de los contenidos escolares*, de Mercè Izquierdo, en el que desde las ciencias cognitivas y de la lingüística concluye que los contenidos escolares han de hacer posible el desarrollo de actividad científica por los alumnos y que ellos deben ser los protagonistas de dicha actividad.

> Enseñanza de las Ciencias *dedica la mayor parte de su espacio a las investigaciones didácticas y dentro de ellas a las que se hacen en el ámbito de la enseñanza de las ciencias experimentales.*

En cada número de la revista pueden leerse varios artículos de investigación didáctica de las matemáticas. Sin ir más lejos, en el número que nos ocupa, hay tres. Aunque en *Enseñanza de las Ciencias* se contemplan varias secciones, como la de *Historia y epistemología de las ciencias,* o la de *Innovaciones didácticas,* casi todos los artículos van a parar a la sección de *Investigación didáctica.* Los tres que aparecen en este números están en dicha sección: En *Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas,* los autores analizan las ideas que se manifiestan sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las creencias que subyacen y los problemas con que se encuentran los alumnos de final de la carrera de Matemáticas en la realización de las prácticas de enseñanza. En *Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo*, Sabrina Garbin, presenta los resultados de una investigación sobre ideas de infinito entre sujetos que ya han recibido instrucción formal sobre calculo diferencial e integral y que por lo tanto presentan interconexiones y confusiones entre el aspecto formal e informal de los conceptos implicados. Por último, en el trabajo *Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de* Integral impropia. *Algunas dificultades, obstáculos y errores,* los autores muestran cómo éstas en ocasiones parecen estar asociadas al concepto de integral impropia mientras que otras veces lo están a la ausencia de significado o a dificultades y errores con otros conceptos del cálculo. En los tres artículos tiene importancia la presencia de un marco teórico en el que se inscriben las cuestiones analizadas y la utilización de instrumentos de análisis cualitativo o cuantitativo para dar consistencia a los resultados que se alcanzan. Por su contenido, el interés para un profesor de educación secundaria es decreciente del primero al último. Las cuestiones planteadas en los artículos de este número se refieren al ambito de la enseñanza de las matemáticas en la univeridad principalmente, pero esto no siempre es así. Corroborar este hecho nos llevaría a analizar otros números de la revista lo que no entra dentro de mis propósitos.

Antes prefiero, dedicar la última parte de este apartado al artículo de José Mª Oliva, *Sobre el estado actual de la revista* Enseñanza de las Ciencias *y algunas propuestas de futuro.* El autor constata la paradoja existente entre la evidente consolidación de la revista en el ámbito profesional e internacional, su influencia en el diseño del currículo, libros de texto o materiales didácticos, por un lado y por el otro el escaso número de profesores en los que el mensaje renovador ha calado. Esta situación hace que los cambios en las clases se produzcan con una lentitud extrema —cuando se producen—, y muy lejos de la rapidez e intensidad con que los investigadores desearían que se produjesen. Además está el hecho de que cada vez es menos el profesorado de primaria y secundaria implicado en investigaciones didácticas.

El análisis de la situación le conduce a una reflexión, que como el propio autor reconoce, en algunos aspectos podrían aplicarse a otras revistas —¿quizá a SUMA?—, aunque unos sean específicos de *Enseñanza de las Ciencias,* y otros respondan a características del sistema educativo de las que la revista hace de caja de resonancia.

Para José Mª Oliva *el conjunto de causas que justifican estas limitaciones podría resumirse en la existencia de una importante brecha entre el profesorado, de un lado, y la investigación educativa y didáctica de las ciencias como disciplina, de otro; brecha que se amplía día a día….* Esta brecha se manifiesta a través de cuatro planos que están bastante interrelacionados:

- El avance de la disciplina académica de la didáctica de las ciencias no se ha visto acompañada por un desarrollo paralelo en la formación inicial del profesorado y tampoco en la formación continua. Los conocimientos de los investigadores cada vez resultan más incomprensibles a los docentes y los objetivos de sus propuestas curriculares son difíciles de asumir por parte de los que deben ponerlas en práctica.

- El profesorado de ciencias y matemáticas tiene una escasa *identidad profesional*, en el sentido de que durante su ejercicio profesional sigue sintiéndose científico antes que docente. Eso le lleva a interesarse más por los conocimientos disciplinares que por los didácticos.
- El profesorado tiene la sensación de que la investigación didáctica hace mucho hincapie en los aspectos de diagnóstico de ideas previas, dificultades, obstáculos, que en las aportaciones práticas para la enseñanza. La percepción del profesorado es que el interés de los investigadores tiene que ver más con los marcos teóricos que con los problemas prácticos del día a día. No es raro que así el profesorado pierda el interés por la investigación didáctica.
- Aunque no nulo, si ha sido escaso el interés de los investigadores por aspectos como el estatus de las materias, las opciones de ciencias en los currículos, los problemas de desarrollo profesional, los contenidos y estrategias para la formación del profesorado en ejercicio, la formación de investigadores noveles, etc.

Enseñanza de las Ciencias es *una revista de gran calidad y su contenido está abalado por un riguroso trabajo de selección y asesoramiento en el referenciado de los artículos.*

Una vez analizadas las causas de esta brecha, el autor hace una serie de propuestas que de cara al futuro podría contribuir a una mejora de la revista. La primera parte hace referencia a lo mucho que de lo actual sería necesario conservar: un peso importante de los artículos de investigación, las secciones, el estilo del consejo asesor y de referenciado de los artículos, las normas de publicación, etc. Entre las propuestas de mejora yo destacaría las siguientes:

- Reforzar el papel de los artículos editoriales, a través de los cuales se podría influir en el programa de investigación, marcando líneas de investigación a las que convendría prestar atención y también atender a una vertiente sociocrítica, un tanto descuidada en la actualidad, que se pronunciase sobre la defensa de intereses colectivos, ideas, posiciones, etc.
- Retomar la sección de *Experiencias de aula*, que resultan especialmente útiles al profesorado en ejercicio.
- Volver a dar un espacio a la reseña de artículos de interés aparecidos en otras revistas.
- Abrir un espacio a los problemas profesionales del profesorado de ciencias y de los investigadores en didáctica de estas disciplinas: formación inicial, profesorado novel, estatus de las disciplinas en los currículos oficiales…

Y finalmente la evaluación

Enseñanza de las Ciencias encierra más cosas, pero no me detendré en ellas por falta de espacio. Sólo quiero acabar comentando que a través de la página web se permite a los suscriptores acceder al contenido completo de la revista, pudiendo descargar los artículos en formato PDF, y a los no suscriptores un acceso limitado a su índice.

Enseñanza de las Ciencias es una revista de gran calidad, tanto en los aspectos simplemente materiales como en su contenido que está abalado tanto porque en ella colaboran los principales investigadores en didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales de habla hispana, como por el riguroso trabajo de selección y asesoramiento realizado por su consejo asesor en el referenciado de los artículos. La labor hecha por su equipo directivo a lo largo de los años es tremendamente positiva y merece el aplauso de todos los enseñantes de matemáticas y ciencias. Desque aquí quiero expresar mi felicitación por su labor a la directora de la revista, que durante unos años también fue Secretaria General de la FESPM, Carmen Azcárate. ■

SUMA 49
Junio 2005, pp. 125-137

Matemáticas e Historia

En los últimos años, Historia y Matemáticas aparecen unidas cada vez con más frecuencia en artículos de revistas, comunicaciones en jornadas y al final de cada tema en muchos libros de texto; pero siguen siendo relacionadas escasamente en la clase diaria. Parece así que hay un convencimiento bastante general de que la perspectiva histórica enriquece el aprendizaje de las Matemáticas; pero también de que, no siendo un elemento de la clase tradicional, tampoco pasa nada por dejarlo para otra ocasión.

> *En los últimos años, Historia y Matemáticas aparecen unidas cada vez con más frecuencia en artículos de revistas, comunicaciones en jornadas y al final de cada tema en muchos libros de texto; pero siguen siendo relacionadas escasamente en la clase diaria.*

En 2000, *Año Mundial de las Matemáticas*, Televisión Española produjo *Universo Matemático*, excelente serie documental de 10 programas sobre Historia de las Matemáticas galardonada internacionalmente, dirigida y presentada por Antonio Pérez. Como ya ocurriera con su predecesora *Más por Menos*, su emisión en martes por la mañana le quitó audiencia entre el profesorado, que a esa hora estaba en el aula. Afortunadamente, TVE comercializó esta serie bastante pronto y ya hace tiempo que es posible adquirirla y disponer de originales para la clase. Son documentales muy didácticos, que consiguen el acercamiento a los personajes, temas y épocas de forma comprensible, pero no trivial, para un público de formación media.

En nuestro intento de aprovechar el cine en clase, no hemos encontrado largometrajes centrados en matemáticos célebres, salvo el *Galileo* de Liliana Cavani (1968) y a este respecto hay que hacer algunas precisiones. La figura de Galileo ha trascendido sobre todo como físico y astrónomo. Fue ante todo el primer experimentador. La búsqueda de la Ley de caída de los cuerpos le condujo al estudio pionero de la dependencia funcional de dos variables: $s=c\cdot t^2$ (c = espacio recorrido en caída libre durante la primera unidad de tiempo). Además, la imposibilidad manifiesta de progresar hacia su objetivo de demostrar con las Matemáticas de la época que la aceleración de caída es constante sirvió como acicate para que surgiera el Cálculo Diferencial, de la mano de Newton y Leibnitz. Son méritos más que suficientes para dar a Galileo un lugar de honor en la Historia de las Matemáticas.

Pero la película de Cavani no repara en esos hechos; se centra en las primeras observaciones con el telescopio, que confirmaban las teorías de Copérnico, y en el conocido enfrentamiento con la Inquisición, que forzó a Galileo a la abjuración. Así que, aunque es una película altamente recomendable para los alumnos de Bachillerato en las asignaturas de Ciencia, Tecnología y Sociedad o en Historia de la Filosofía, no exprime las posibilidades matemáticas del personaje. Contiene, eso sí, una referencia, cuando un predicador fanático grita:

José María Sorando Muzás
decine.suma@fesmp.org

¡La Matemática es un arte del demonio contra los profetas! Y un serio inconveniente es que esta película es muy difícil de encontrar, si no es por copias de amigos.

Esta ausencia de películas sobre los grandes matemáticos universales se suple en pequeña medida con algunos episodios de series documentales que tienen una puesta en escena muy cinematográfica. Se trata de las norteamericanas *Cosmos* y *El Universo Mecánico*, donde a veces se utilizan actores, figurantes, vestuario y localizaciones o decorados de época. En estos casos, no hay diálogos sino la voz en off del narrador. Están a medio camino entre el documental y el cine. Por ello resultan atractivas y se pueden usar bien en la clase de Secundaria. Y, por supuesto, *siempre nos quedará el Pato Donald...*

Con cine o sin él, si hemos decidido relacionar Historia y Matemáticas en la clase, enseguida nos encontraremos con al menos tres enfoques posibles. Aunque no son excluyentes y suelen entrelazarse, conviene diferenciarlos para decidir mejor en cada situación y con cada material dónde vamos a poner un énfasis mayor o menor.

Con cine o sin él, si hemos decidido relacionar Historia y Matemáticas en la clase, enseguida nos encontraremos con al menos tres enfoques posibles: Historia de las Matemáticas; Matemática en la Historia e historias de matemáticos.

Historia de las Matemáticas

Se trata de recrear, cuando sea posible, los procesos de pensamiento que condujeron a la solución de un problema o a la génesis de un concepto o teoría; a veces como hallazgos puntuales (por ejemplo, el cálculo del tamaño de la Tierra por Eratóstenes), a veces como procesos a lo largo de muchos siglos (por ejemplo, los diversos modelos geométricos del Universo que culminan en las Leyes de Kepler).

Un ejemplo emblemático son los problemas de apuestas planteados por el Caballero De Méré a Blas Pascal, que suscitaron el tratamiento matemático del azar en la correspondencia de éste con Fermat. Su recreación, en Bachillerato por ejemplo, no ocupa más de una clase ni supone *salirse del programa*. Sin embargo, en muchos otros casos suele ocurrir que esa recreación excede las posibilidades de la clase; entonces podemos dar al menos una perspectiva histórica.

Matemáticas en la Historia

Como obra humana, las Matemáticas han avanzado con el favor o a pesar del poder político, la religión y las condiciones sociales. Y, a la vez, el progreso de las Matemáticas ha influido en la transformación de esa realidad colectiva. Para abordar en la clase situaciones que acreditan ambos fenómenos a lo largo de los tiempos, no es necesario que los alumnos sepan mucha Historia. Se pueden presentar esas ideas ya en 1º y 2º de la ESO, como veremos, a través de sencillos ejemplos. Conforme subimos de nivel, es aún más factible.

En 1º ESO se comienza con los Números Naturales y Sistema de Numeración. Es muy interesante que los alumnos conozcan la lenta introducción en Occidente del sistema posicional árabe, a través de las cambiantes fronteras de los reinos musulmanes y cristianos en la Península Ibérica, con no pocas trabas religiosas. A propósito de esto, una obra muy recomendable, que en algunos centros se viene trabajando en este nivel conjuntamente con la asignatura de Lengua, es el relato juvenil *El Señor del Cero* (Mª Isabel Molina. Alfaguara). También en 1º, los alumnos estudian el Sistema Métrico Decimal. Viene al caso que conozcan que su adopción se produce precisamente en París y después de la Revolución Francesa, cuando se intentaba una organización racional de la sociedad. *Tuvieron que rodar cabezas...*

En 2º ESO, el citado cálculo de Eratóstenes se puede relacionar con las grandes navegaciones de los siglos XV y XVI, como veremos con la película *1492 La Conquista del Paraíso*; asimismo, el *Teorema de Pitágoras*, con las mediciones de los agrimensores egipcios tras las inundaciones del Nilo; etc.

Historias de matemáticos

Las Matemáticas, tantas veces llamadas *Ciencias Exactas*, se suponen tan perfectas que a muchos les cuesta relacionarlas con personas de carne y hueso, gente que tuvo sus grandezas y sus debilidades. Esta visión las humaniza y acerca al alumno. Por eso mismo, contar vidas de matemáticos no se puede convertir en contar *vidas de santos*. Los matemáticos han sido héroes y villanos, pero lo que de ellos queda es su obra.

En este enfoque se trata de humanizar las Matemáticas y las anécdotas, sin ser lo esencial, pueden cumplir su papel amenizador. Entre los muchos matemáticos de primera línea que podemos vincular a los temas que están estudiando nuestros alumnos, proponemos escoger aquellos que sirvan como arquetipos de ciertas actitudes (a veces confrontadas) y den pié a la reflexión ética y la Educación en Valores. De los tres enfoques comentados, éste es el más susceptible de guionización para la pantalla. ■

Donald, un clásico

DONALD EN EL PAÍS DE LAS MATEMÁGICAS
(DONALD IN MATHMAGIC LAND)
Director: **Hamilton Luske**.
Producción: *Walt Disney EEUU 1959.*
Distribución: *Disney Home Video. Disponible en VHS y DVD.*
Duración: *25 minutos*.

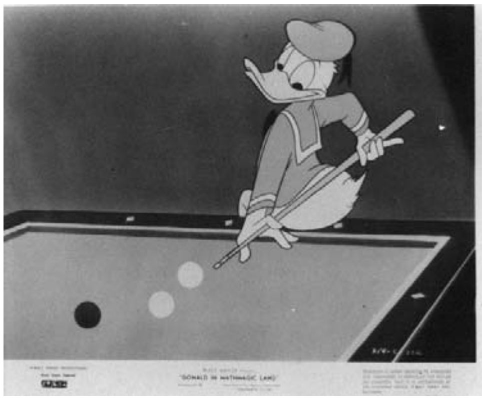
Cualquier compendio de Cine y Matemáticas tiene que incluir este título de dibujos animados que en 1959 fue candidato para el Oscar al Mejor Cortometraje. De forma divertida nos acerca a los Pitagóricos.

ARGUMENTO. El Pato Donald es un explorador en el misterioso País de las Matemáticas (son geniales los árboles con raíces cuadradas), donde el Espíritu de las Matemáticas poco a poco le irá revelando sus secretos. Se abordan estos temas: Pitágoras y la Música. El rectángulo de oro. El número de oro. El pentágono regular en la naturaleza. Las matemáticas en los juegos. Cónicas.

NIVEL. 1º - 2º ESO

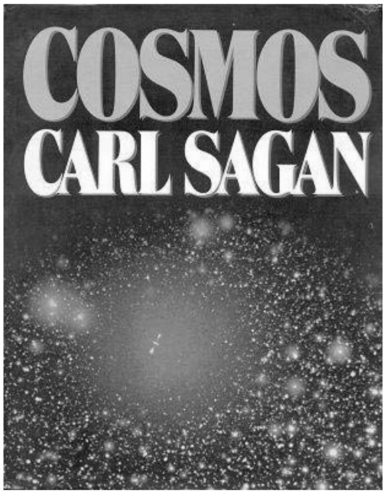
TEMA. Geometría

EN CLASE. Esta película encierra hoy cierta contradicción entre los contenidos y los medios. Su aparente ingenuidad en personajes y situaciones la haría propia de los dos primeros años de la ESO; sin embargo, se citan contenidos (número de oro, cónicas) que no se estudian hasta 1º Bachillerato. Pero esto no llega a ser un inconveniente. En 1º o 2º ESO bastará hacer una introducción somera a esos conceptos. Después, el éxito está asegurado; se viene repitiendo temporada tras temporada. Sin embargo, en Bachillerato sería más dudosa la aceptación de *una de dibujos animados*.



Cuarenta y cinco años después, bastantes aparatos que aparecen en las imágenes de este corto son para nuestros alumnos auténtica *arqueología tecnológica:* tocadiscos de aguja, trenes de vapor, teléfonos de disco, etc. ■

El inmortal Eratóstenes



En la orilla del Océano Cósmico
(The shores of the Cosmic Ocean)
Cosmos (serie de 13 capítulos de 55 min. Episodio 1)

Dirección científica y presentación: **Carl Sagan.**
Director artístico: *Adrian Malone.*
Producción: *Turner Home Entertainment. EEUU 1980.*
Distribución: *Midas Home Video SA 1990 en VHS. Suevia Films 2004 en DVD.*

Carl Sagan (1934–1996) ha sido tal vez el mejor divulgador científico a escala mundial. Conseguía enseñar ciencia al gran público con la seducción de su discurso, transmitiendo pasión por el tema de estudio. Su serie *Cosmos* era vista en los ochenta por las familias españolas después de cenar, en horario de máxima audiencia; nada que ver con lo que ahora se lleva. A pesar del gran avance posterior de los efectos digitales, *Cosmos* conserva su valor y utilidad para la clase.

En el primer episodio hay 8 minutos en que explica cómo Eratóstenes en el siglo III a.C. fue capaz de medir con gran precisión el tamaño de la Tierra. Aparece el propio Sagan en los escenarios de los hechos narrados.

Escenas. Se sitúan entre los minutos 28:10 y 36:10.

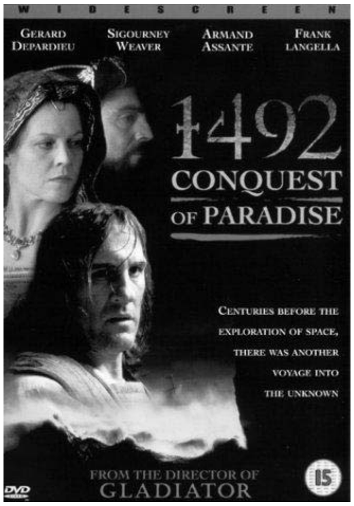
Argumento. Eratóstenes leyó que a mediodía del solsticio de verano el Sol no proyectaba sombras en Sain (cerca de la actual Asuán, al sur de Egipto) y se reflejaba en el fondo de un pozo. Sintió curiosidad por comprobar si en Alejandría, donde vivía, ocurría lo mismo y comprobó que no. De ahí dedujo la esfericidad de la Tierra. Envió a un hombre que midió la distancia en pasos entre Alejandría y Sain. Después, mediante un ingenioso razonamiento calculó las longitudes del radio y del círculo máximo terrestres. Hoy sabemos que su error fue ¡inferior al 1%! Sagan ensalza el gran mérito de este método ingenioso y sencillo, realizado sólo con palos, sombras y afán experimentador. Como dice, “Eratóstenes cambió nuestra visión del mundo y, en cierto modo, cambió el mundo”.

Nivel. 2º , 3º o 4º ESO

Tema. Geometría

En clase. Tras estas escenas, reconstruimos en la pizarra el razonamiento de Eratóstenes, no explicado por completo en el video. Aparecerán: ángulos de lados paralelos, igualdad de triángulos y proporcionalidad geométrica. Después, acudiendo a los datos actuales sobre el tamaño de la Tierra, habrá que calcular los errores absoluto y relativo cometidos por Eratóstenes y valorar la gran precisión que consiguió con medios tan humildes. El siguiente paso puede ser conocer su vigencia a través de los siglos y cómo un hecho de la Historia de las Matemáticas adquirió relevancia en la Historia Universal. Para ello, el cine nos lleva a 1492.

Eratóstenes dejó escrito que ... *a no ser por el obstáculo que representa la extensión del océano, se podría llegar de Iberia a la India*. Muchos siglos después, intentando tal cosa, se produjo de modo fortuito el Descubrimiento de América.



1492 La conquista del Paraíso (1492 The Conquest of Paradise)

Director: **Ridley Scott**.
Actores: *Gerard Depardieu, Sigourney Weaver, Armand Assante, Fernando Rey y Ángela Molina. Guión: Roselyne Bosch.*
Producción: *Lauren Films. Gran Bretaña–EEUU–Francia–España 1992.*
Distribución: *Producciones JRB. Disponible en VHS y DVD.*

Escena 1. Se sitúa entre los minutos 0:00 y 2:10.
Argumento. Se trata simplemente de los títulos de crédito, que terminan en un interesante rótulo inicial que pone en contexto cuanto va a seguir. De fondo, la excelente banda sonora de Vangelis que para muchos es lo mejor de la película.

Escena 2. Se sitúa entre los minutos 2:10 y 4:05.
Argumento. El hijo menor de Colón recuerda esta supuesta frase de su padre: “Nada de lo que redunda en el progreso humano se consigue con acuerdo unánime. Y los que han recibido más instrucción que otros están condenados a dedicarse a esa vida, a pesar de los demás”.

Ambos están frente al mar y viendo un velero que se aleja en el horizonte, Cristóbal Colón explica a su hijo la esfericidad de la Tierra.

Escena 3. Se sitúa entre los minutos 4:05 y 8:05.
Argumento. Colón y su hijo llegan al Monasterio de La Rábida, donde Fray Juan Pérez de Marchena le comunica que ha conseguido que sea escuchado en la Universidad de Salamanca por una junta de geógrafos y teólogos. Necesita visto bueno de esa junta para seguir adelante con su proyecto: buscar una nueva ruta hacia Asia, navegando por Occidente. Colón ensaya sus argumentos ante su mentor y enseguida se pone en evidencia que en ese examen lo religioso puede ser más decisivo que lo científico.

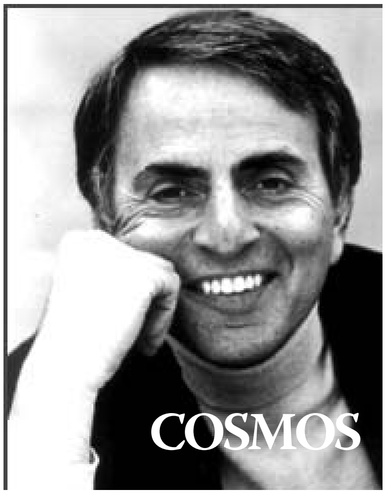
Escena 4. Se sitúa entre los minutos 12:15 a 15:00.
Argumento. Colón se presenta ante la junta de Salamanca. La principal objeción que se le hace tiene que ver con el tamaño de la Tierra calculado por Eratóstenes, un dato del que no se duda, de acuerdo con el cual el viaje hasta Asia duraría un año. Colón defiende con apasionada elocuencia que la distancia es menor y, como se había previsto, enseguida aparecen las razones religiosas.

Nivel. 2º, 3º o 4º ESO
Tema. Geometría

En clase. El gran valor de estas escenas está en que los alumnos vean cómo 18 siglos después, los cálculos de Eratóstenes seguían siendo considerados como algo incontestable; cómo el genio hace que la obra sobreviva al autor, dándole una cierta clase de inmortalidad.

En este caso las medidas que defendía Colón, de forma interesada o no, estaban equivocadas... pero tuvo la gran fortuna de encontrar un nuevo continente en su camino hacia Asia. De la mano del cine, es posible así una actividad interdisciplinar con muchas sugerencias interesantes. ■

La honestidad del científico



La Armonía de los Mundos
(Harmony of the worlds).
Cosmos (serie de 13 capítulos de 55 min. Episodio 3)

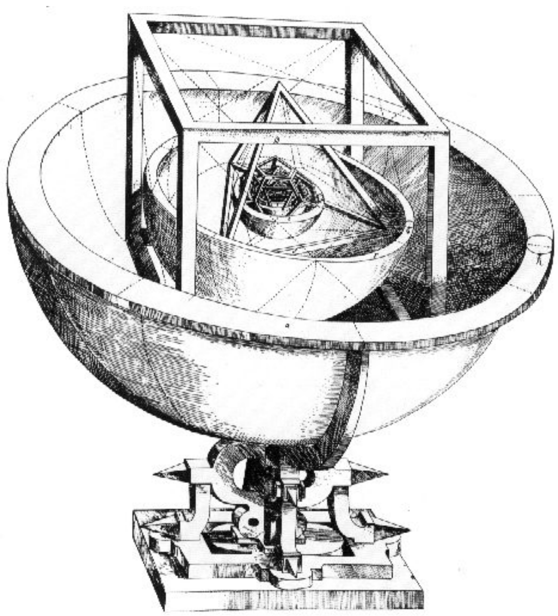
Dirección científica y presentación: **Carl Sagan**.
Director artístico: *Adrian Malone.*
Producción: *Turner Home Entertainment. EEUU 1980.*
Distribución: *Midas Home Video SA 1990 en VHS. Suevia Films 2004 en DVD.*

La vida de Kepler es recreada en la segunda parte de un episodio de *Cosmos*, profundizando con intensidad dramática tanto en la gran autoexigencia y voluntad que caracterizaron al personaje como en las difíciles situaciones que tuvo que afrontar.

Escenas. Se sitúan entre los minutos 15:10 y 44:00.

Argumento. Johaness Kepler (1571 – 1630) de niño fue seminarista y adquirió un misticismo que le llevó a querer descubrir las leyes de armonía con las que Dios habría hecho el mundo. Y las buscó a través de la Geometría.

En 1595, siendo profesor, en clase tuvo una intuición. Se le ocurrió inscribir y circunscribir polígonos regulares entre las órbitas de los planetas y pensó que las órbitas no tenían por qué estar en un mismo plano, podían ser círculos sobre esferas concéntricas. Luego pasó a tres dimensiones y, en vez de polígonos, consideró poliedros. Entonces sólo se conocían seis planetas. Seis planetas y cinco poliedros regulares... todo encajaba: las estructuras invisibles que sostenían las esferas de las órbitas planetarias eran los cinco sólidos platónicos. Escribió: *El placer intenso que he experimentado con este descubrimiento no puede expresarse con palabras....*



Pero los nuevos datos que se fueron conociendo no encajaban bien con ese modelo. Su primera reacción fue pensar que los datos eran erróneos, pero luego admitió que fallaba su teoría. Y llegó a una conclusión: necesitaba poseer más y mejores datos. Esos datos los poseía Tycho Brahe (1546 – 1601) quien durante 20 años había anotado con gran rigor las posiciones de los planetas y de unas 1.000 estrellas. Brahe era un observador y vivía en la opulencia, mientras que Kepler era un teórico de vida austera; eran dos tipos muy diferentes, pero ambos se necesitaban.

> *Mientras que los Pitagóricos habían ocultado los irracionales para poder mantener su misticismo numérico, Kepler, en palabras de Sagan, ...*prefirió la dura verdad a sus ilusiones más queridas. Y ése, ése es el corazón de la Ciencia

Kepler fue el asistente matemático de Brahe, quien le asignó la tarea de calcular la órbita de Marte pudiendo predecir sus posiciones con un error menor que 4''. Kepler dijo que lo conseguiría en 8 días. Buscando unas órbitas circulares apropiadas, tardó cuatro años en encontrar una posible solución. Al comprobarla, detectó un error inadmisible de 8'. Ese grave fallo le costó otros 2 años de lucha, tras los cuales Kepler tomó una atrevida decisión: descartar que las órbitas fuesen circulares. Tras otros 3 años de investigación, comprobó que las órbitas de Marte son elipses y pudo enunciar dos de sus leyes (la tercera ley llegó más tarde). Estas leyes cambiaron nuestro conocimiento del Universo.

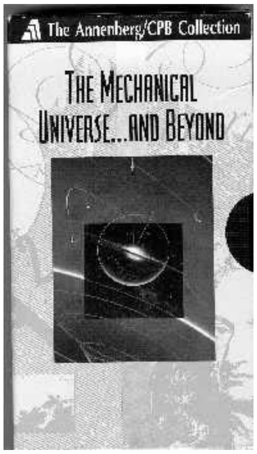
Después de intensos años de estudio, por dos veces había creído tener una teoría satisfactoria y las dos veces reconoció su fracaso. La tercera fue la definitiva. Mientras que los Pitagóricos habían ocultado los irracionales para poder mantener su misticismo numérico, Kepler, en palabras de Sagan, *...prefirió la dura verdad a sus ilusiones más queridas. Y ése, ése es el corazón de la Ciencia.*

Nivel. 1º Bachillerato
Tema. Cónicas

En clase. En torno a la vida de Kepler aparecen conceptos y sugerencias en varios campos, relacionados entre sí:

- Matemáticas: poliedros regulares, control de errores en los cálculos, elipse, las tres leyes de Kepler y su interpretación.
- Historia de la Ciencia: sucesivos modelos del universo; la aventura intelectual de Kepler; el mecenazgo científico; el papel de la casualidad en algunos descubrimientos científicos (la órbita de Marte es la más excéntrica; si Brahe hubiese encargado a Kepler el ajuste de otra órbita planetaria, hubiese sido casi imposible detectar su desviación respecto de la circunferencia); Kepler, autor de la primera obra de ciencia ficción, *Somnium*.
- Historia Universal: Reforma y Contrarreforma; Guerra de los 30 años; persecuciones religiosas; caza de brujas; epidemias de peste; contexto cultural de la época en la que Kepler vivió..,
- Actitudes: la determinación de un científico sobreponiéndose a dificultades de todo tipo (guerras, exilio, desgracias familiares y penurias económicas); su honestidad para rechazar las ideas a las que tantos años dedicó, al tener la certeza experimental de su error; la obsesión final del vividor Brahe: *Que no parezca que he vivido en vano.* ■

Solidaridad vs competencia cruel



EL UNIVERSO MECÁNICO
(THE MECHANICAL UNIVERSE)
serie de 52 capítulos de 30 min.
Episodio 7: **INTEGRACIÓN (INTEGRATION)**

Dirección científica y presentación: **David L. Goodstein**.
Director artístico: *Mark Rotschild.*
Guión: *Set Hill y Tom M. Apostol.*
Producción: *The Annenberg CPB Project. EEUU 1985.*
Distribución: *Arait Multimedia SA 1992. Disponible en VHS.*

Escribe Apostolos Dioxadis en *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach*: “Cualquiera que afirme que los científicos, incluso los más puros de los puros, los más abstractos y brillantes matemáticos, trabajan motivados exclusivamente por la Búsqueda de la Verdad en aras de la Humanidad, o bien no sabe de lo que habla o miente con descaro. Aunque es posible que los miembros con mayores inclinaciones espirituales de la comunidad científica sean indiferentes a las ganancias materiales, no hay uno sólo entre ellos que no esté guiado por la ambición y un fuerte afán competitivo”... “Aunque al embarcarse en una importante investigación el matemático declare que su intención es descubrir la Verdad, la auténtica materia prima de sus sueños es la Gloria”.

Las turbias relaciones entre Newton y Leibnitz, como antes entre Tartaglia y Cardano, pueden apoyar la *Conjetura de Dioxadis*. Afortunadamente, también podemos ofrecer a los alumnos el esperanzador contrapunto de la colaboración solidaria entre Hardy y Ramanujan. Nuevamente, a través de las Matemáticas, llegaremos a la reflexión sobre los Valores.

ESCENA. Las escenas que recrean la historia de Leibnitz y Newton se distribuyen en 3 bloques (de 0:00 a 4:15; de 9:20 a 15:10; y de 21:30 a 26:00) ocupando 14 min. 35 seg. y van intercaladas con otras en las que se repasa el tema de Integrales.

ARGUMENTO. El despecho de Newton (1642 – 1727) por unas críticas desfavorables le llevó a mantener en secreto durante 30 años, sin publicarlos, sus descubrimientos relativos al Cálculo. En la correspondencia con Leibnitz (1646 – 1716) le dio algunos indicios y éste fue capaz por si sólo de desarrollar el Cálculo con una mejor notación. Cuando lo publicó, fue acusado de plagiario. Leibnitz recurrió al dictamen de la British Royal Society, presidida por el propio Newton; lo cual fue su perdición. Desacreditado por la opinión dominante, en este caso nada imparcial, la historia terminó amargamente para él. Newton se jactaba de “haber destrozado el corazón de Leibnitz”.

Leibnitz y Newton aparecen como dos personalidades contrapuestas: mundano y brillante en sociedad el primero, puritano y austero el segundo. Están encarnados por sendos actores en los escenarios exteriores originales y en otros interiores, siempre con ambientación y música de la época. La narración de los hechos se produce mediante voz en off.

NIVEL. 2º Bachillerato

TEMA. Cálculo Diferencial e Integral

EN CLASE. Enseguida queda claro que la altura humana y moral de los protagonistas no estuvo al mismo nivel que su altura intelectual, pese al moralismo de que hacía gala Newton quien, al final de sus días, con 85 años, confesaba que "su mayor éxito era morir virgen"... Sorprende algo a los alumnos que el profesor no esté haciendo propaganda sobre matemáticos ejemplares, sino mostrando sus debilidades. Esto da pié a diferenciar entre la persona y el personaje, entre el individuo y su obra. Y pueden surgir en otros campos numerosos ejemplos de esa dicotomía.

COMPLEMENTOS. Hay otro caso famoso donde el ansia de gloria estuvo por encima de la honradez de los protagonistas. Se trata, en el siglo XVI, de la polémica entre Tartaglia y Cardano sobre la autoría de la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas que, en realidad se debía a su predecesor Scipione Del Ferro. Los hechos están escritos como una novela de aventuras, y a la vez muy bien documentados, en el capítulo 4 del libro de Francisco Martín Casalderrey *Cardano y Tartaglia. Las Matemáticas en el Renacimiento italiano*. (Colección *La matemática en sus personajes*. Ed Nivola 2000). Asistimos a una trama de engaños y duelos matemáticos en la plaza pública. Su lectura es breve (24 páginas) y amena, apta para todos los alumnos en este nivel.

Para que no aparezca sólo la mezquindad en las relaciones entre matemáticos, se hace necesario presentar alguna historia edificante donde brille la solidaridad. Y ésa es, a comienzos del siglo XX, la del británico G.H. Hardy (1877 – 1947) y el hindú Srnivasa Ramanujan (1887 – 1920), donde el genio matemático unió a dos grandes mentes superando las notorias diferencias que entre ambos había: de razas, continentes, culturas y clases sociales. Si se tiene en cuenta la rigidez de la sociedad victoriana, la historia resulta más conmovedora. Está muy bien descrita, incluyendo alguna anécdota, por C.P. Snow en el *Prólogo* que escribiera en 1960 al ensayo *Autojustificación de un matemático* (G.H. Hardy 1940. Ed. Nivola 1999). ■

Engraved by B. Holl.

LEIBNITZ.

From a Picture in the Florence Gallery.

Under the Superintendance of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge.

London, Published by Charles Knight, Ludgate Street.

NEWTON,

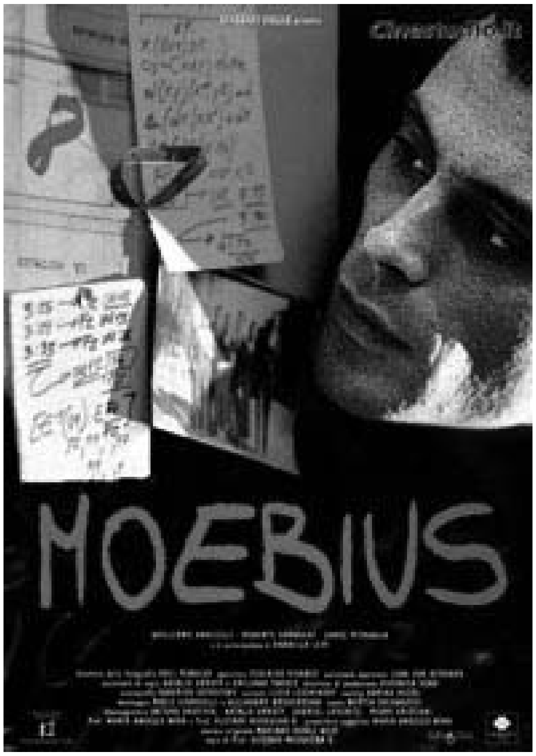
Illustre Philosophe,

né en 1642, mort en 1746.

Galerie Universelle — Publiée par Blaisot — Place Vendôme, N° 24. — N° 365.

Atentos a ellas

Todas las escenas de cine que hemos propuesto en esta serie de artículos corresponden a títulos que se pueden encontrar fácilmente en tiendas y videoclubes; en el caso de las series documentales, en los Centros de Profesores y de Recursos. Pero hay tres películas que, por diferentes motivos, no ofrecen a día de hoy la misma accesibilidad y por eso no serán objeto de nuestras propuestas; sin embargo, parecen especialmente interesantes y no podemos terminar sin hacer referencia a ellas.



MOEBIUS (Gustavo Mosquera. 1996) es una película argentina de bajo presupuesto pero con gran estilo e imaginación. Es el primer largometraje de la Universidad de Cine de Buenos Aires y ha sido realizado por un profesor con sus alumnos. No ha sido estrenada en salas comerciales, pero sí exhibida en festivales y muestras sobre cine y ciencia; además se ha pasado por TV en canales temáticos de cine.

El guión de *Moebius* se basa en una historia de ciencia ficción que nos asoma al infinito (*A subway named Möbius* de A. J. Deutsch): Un vagón de metro desaparece en Buenos Aires. El encargado de resolver el misterio, matemático, descubre que alguien ha construido sobre las vías del metro una banda de Moebius. Es antológica la escena en que las autoridades municipales piden una explicación a la misteriosa desaparición del tren. Escuchan entre perplejos y exasperados el razonamiento del matemático sobre la topología de la red suburbana. Una vez más, el poder urge soluciones y la ciencia desvela complejidades.

PROOF (John Madden. 2004), adaptación de una exitosa obra de teatro de David Auburn, es un film cuyo proyecto se gestó durante largos años hasta que Madden, el director de *Shakespeare in love,* lo ha culminado, con actores de la solvencia de Anthony Hopkins y Gwyneth Paltrow; parece por lo tanto destinada a tener una amplia difusión. Cuando este artículo vea la luz tal vez haya sido estrenada.

Proof gira en torno a los últimos días de un prestigioso matemático de la Universidad de Chicago que consiguió reconocimiento mundial pero ha visto cómo la demencia se apoderaba de él. Su hija, que ha dedicado los últimos años a cuidarlo, piensa cómo va a retomar su vida. Para rendir homenaje a su padre, la joven decide seguir con sus investigaciones.

Lecciones inolvidables (Stand and Deliver). (Ramón Menéndez, 1988) narra la historia real del profesor Jaime Escalante, comprometido con la promoción de jóvenes sin futuro en los barrios hispanos de Los Ángeles. Este profesor consiguió un hito: por vez primera, un instituto de esa extracción social se situaba entre los mejores en las pruebas de Cálculo Superior para acceder a la Universidad. En una escena clave del film, cuando el claustro de profesores lamenta la falta de medios para sacar adelante a esos muchachos conflictivos, Escalante dice: *Ganas, lo que se necesitan son ganas*. Y, tras conseguir motivar a sus alumnos, emprende un intenso programa de preparación, incluyendo fines de semana y vacaciones, hasta lograr su objetivo. Es significativa la desconfianza con que la institución escolar, representada paradójicamente por un inspector también de origen hispano, recibe los éxitos de estos alumnos.

En *Lecciones inolvidables* aparecen las Matemáticas como mecanismo de selección y el compromiso de un docente con la promoción social de unos alumnos condenados a priori. Lamentablemente, no está comercializada en video y en años recientes tan sólo se ha podido ver en algún pase por TV.

El profesor Escalante consigue motivar a sus alumnos con juegos, sorpresas y situaciones que a muchos les parecen poco académicas. A través de su entrega, consigue credibilidad ante los alumnos y la autoridad moral necesaria para liderar un esfuerzo que los demás juzgan condenado al fracaso. Su historia sirve como adecuado colofón a esta serie de artículos e ilustra su intención.

Despedida

Estas propuestas de uso del cine en nuestras clases han estado inspiradas por un aliento común, que al terminar quisiera transmitir de forma explícita: intentemos que los alumnos se liberen de barreras y prejuicios frente a las Matemáticas; que experimenten cómo con ellas es posible vivir interesantes aventuras intelectuales o, al menos, van a estar mejor pertrechados ante los hechos cotidianos. Para ello, con el cine como con tantos otros medios posibles, demos entrada a la sorpresa en la clase de cada día estando nosotros mismos abiertos a ella, explorando todos los recursos a nuestro alcance. Como dice una copla popular:

Jesucristo nació en un pesebre.
Donde menos esperas, salta la liebre.

■

Anexo I. Aportaciones recibidas: El problema de la elección

Amanece que no es poco
Dirección: **José Luis Cuerda.**
Actores: *Antonio Resines, Luis Ciges, José Sazatornil, Gabino Diego, Cassen, Pastora Vega, Ovidi Montllor, Chus Lampreave, Manuel Alexandre, etc.*
Guión: *José Luis Cuerda*
Producción: *Compañía de Aventuras Comerciales-TVE-Paraíso. España 1988*
Distribución: *Video Mercury Films S.A. En VHS y DVD*

Gracias a Carlos Gurpegui, *estudioso del cine, hemos localizado esta divertida escena:*

Escena. Se sitúa entre los minutos 27:07 y 28:10

Argumento. Un profesor universitario en EE.UU, y su padre, de viaje en moto con sidecar, llegan a un pueblo peculiar. Piden alojamiento a un hombre del lugar para quien esta simple situación se convierte en todo un problema. Analiza las desventajas de responder con un Sí o con un No, hasta llegar a decir: *me quedo preocupado por el aspecto teórico del asunto*.

En ese momento el padre reprocha a su hijo que siendo universitario no intervenga. A lo cual el profesor responde que, tras sopesar todas las opciones, él acostumbra a no intervenir. Es más, es famoso en la universidad porque nunca dice nada en las reuniones.

Comentario. En los problemas cotidianos el análisis de casos puede llevarnos a la inacción. Aunque dispongamos de reglas de decisión, toda elección conlleva negación del resto de opciones, algo que no siempre nos es posible afrontar con despreocupación. ¿Quién dijo *Axioma de Elección*? ■

Anexo II. Aportaciones recibidas: Un problema del más allá

EL DÍA DE LA BESTIA
Dirección: **Alex de la Iglesia.**
Actores: *Alex Angulo, Armando de Razza y Santiago Segura.*
Guión: *Jorge Guerricaechevarria y Alex de la Iglesia*
Producción: *Andrés Vicente Gómez-Sogetel-Canal+. España 1995*
Distribución: *Sogepaq. Disponible en VHS y DVD.*

Carlos Gil*, profesor zaragozano de Secundaria, nos puso en la pista de esta escena:*

ESCENA. Se sitúa entre los minutos 57:00 y 59:00.

ARGUMENTO. Tras un rito de invocación al Diablo, entre las cenizas de un libro sólo quedan algunas letras intactas. Descifrar el mensaje que forman es un arduo problema. Se desarrolla el siguiente diálogo entre el Cura protagonista y sus excéntricos compañeros, el Vidente y el Heavy:

Vidente: Hay cientos de combinaciones.

Cura: Miles de millones. Son 15 letras. Es una permutación de 15 elementos en la que se repiten dos tres veces y tres dos veces. Eso nos da un total de cuatro mil quinientos cuarenta millones trescientos treinta y seis mil posibilidades.

Heavy: ¿Hay que usar todas las letras?

Cura : Sí.

Heavy: ¡Ya está!

COMENTARIO. El Cura plantea el problema y calcula bien su complejidad, pero queda abrumado por la enorme cantidad de permutaciones posibles. Sin embargo, el Heavy enseguida lo resuelve directamente. La intuición también cuenta para resolver los problemas.

Que un cálculo de permutaciones con repetición esté bien hecho no debiera extrañarnos, pero en el cine no siempre se hacen bien las cuentas. Recordemos esta frase en un diálogo de la película *Sal Gorda* de Fernando Trueba (1983):

> —Tienes 24 horas para componer 10 canciones. Así que tienes 2 horas y 4 minutos por canción.

¿Se trataba de una "gracia" de la película? El contexto y contenido de la escena, así como la falta de reacción en el público no lo daban a entender. ■

NOTAS

Alfonso Jesús Población, profesor universitario, fue el encargado por parte del Comité Local de Valladolid del Año Mundial de las Matemáticas de organizar un ciclo de Cine y Matemáticas y asimismo organizó unas proyecciones para alumnos de Secundaria. Redactó unas prácticas para estos alumnos, relacionadas con las películas (El indomable Will Hunting, Cube, Pi fé en el caos y Moebius) y las pone a disposición de todos en su página web: *http://gauss.mat.eup.uva.es/~alfonso*

Este mismo profesor recientemente se ha hecho cargo de una sección sobre Cine y Matemáticas en el Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas DivulgaMAT (http://www.divulgamat.net) que podéis visitar dentro del apartado Cultura y Matemáticas.

Otra página web con una sección de "Matemáticas y Cine" es la del autor de esta serie de artículos: *http://es.geocities.com/mundo_matematicas*

Toponimia matemática

Fotos: José María Sorando Muzás

Primer número de la revista *Unión* de la FISEM

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Hace ahora algo más de un año se constituyó la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) en la que se agrupan unos 20.000 profesores. Su Junta de Gobierno decidió poner en marcha esta publicación que ahora presentamos.

Deseamos canalizar y dar a conocer trabajos sobre educación matemática destinados a los profesores de nuestro ámbito cultural, de todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad. En *Unión* se publicarán experiencias didácticas, ideas para el aula, aplicaciones de la investigación. Además, la revista contendrá informaciones sobre acontecimientos de interés, tesis doctorales, libros, congresos.

Dado que disponemos en nuestra comunidad de un amplio conjunto de docentes e investigadores de alta cualificación, pretendemos conseguir una revista de gran calidad y utilidad para todos.

Unión tiene una edición digital a la que tendrá acceso libre cualquiera que lo desee y que se publica dentro de la página web de la FISEM: *www.fisem.org*. Además, pretendemos hacer una edición en papel de corta tirada.

Los autores deben enviar sus originales a *union.fisem@sinewton.org*

EDITORES: *Antonio Martinón y Luis Balbuena.*

COMITÉ EDITORIAL: *Alicia Bruno, Dolores de la Coba, Carlos Duque, Antonio Ramón Martín e Inés Plasencia.*

N.º 1, Abril de 2005 *http://www.fisem.org* ■

III Premio *Galicia* de Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación Matemática

En el marco del objetivo de promoción de la Educación Matemática y de acuerdo a las decisiones del Comité Organizador de las IX Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y la Asociación Galega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA), convocan el *III premio* Galicia *de Tecnologías de la Información y la Comunicación aplicadas a la Educación Matemática* de acuerdo con las siguientes

BASES

1. El objeto del certamen será la presentación de trabajos originales sobre las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) aplicadas a las Matemáticas en la Enseñanza Primaria o Secundaria. Pueden presentarse cuadernillos de trabajo, libros, cdroms, páginas web, programas de simulación o auto-aprendizaje, u otros formatos en soporte informático o papel de materiales didácticos de TIC aplicadas a las Matemáticas.
2. Se valorará que el trabajo haya sido aplicado con éxito durante el curso 2004-2005.
3. El importe del premio para el curso 2004-2005 será de 1800 euros.
4. Podrán concursar en este certamen personas individuales y equipos, pudiendo presentar cada uno de ellos un único proyecto al concurso.
5. Los autores deberán presentar una memoria, redactada en gallego o en castellano, mecanografiada a doble espacio, en tamaño DIN-A4, usando el procesador Word. También deberá entregarse una copia de la memoria en soporte informático, pudiendo acompañarse, así mismo, material informático o audiovisual (programas, vídeos, diapositivas, etc.). En la portada de los trabajos constará claramente el título y el nombre de los autores.
6. Junto con la memoria, los autores deberán remitir un currículum resumido.
7. El plazo de presentación de trabajos comprenderá desde el 1 de marzo hasta el 15 de julio de 2005.
8. Los trabajos deberán remitirse por correo certificado al domicilio social de AGAPEMA o por correo electrónico a:
   AGAPEMA
   Rúa García Abad 3-1º B
   Lugo
   Teléfono: 982240857
   e-mail: agapema@agapema.com
   http://www.agapema.com
9. El Jurado encargado de la resolución del Premio estará compuesto por cinco miembros representantes de los organismos colaboradores: AGAPEMA, FESPM, Universidad de A Coruña,Universidad de Vigo, Consellería de Educación y Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia y Universidad de Santiago de Compostela.
10. El Jurado emitirá el fallo del premio y tendrá la facultad de interpretar las bases de la convocatoria.
11. El fallo del Jurado será inapelable y se hará público en la Escuela Matemática Miguel de Guzmán, el 29 de Julio de 2005.
12. El Jurado podrá declarar desierto el premio.
13. Los ganadores del premio podrán presentar, en el marco de los actos programados con motivo de la celebración de dicha Escuela, (el día 29 de Julio de 2005, en el Pazo de Mariñán (A Coruña)) los trabajos premiados.
14. Los trabajos premiados podrán ser publicados en formato papel, web y/o CD por la FESPM, AGAPEMA, la Consellería de Educación, la Universidad de Santiago, de Vigo y de A Coruña.
15. Los trabajos no premiados podrán ser retirados –o solicitada su devolución– por sus autores en el plazo de seis meses desde la publicación del fallo.
16. La participación en este premio supone la aceptación de estas bases.

Ciencia en Acción
Un nuevo programa

La nueva edición del concurso Física+Matemáticas en Acción se enriquece con una ampliación de sus contenidos. A partir de este año pasará a denominarse Ciencia en Acción y abrirá sus puertas a todos los interesados en la enseñanza de las ciencias y en la difusión de la cultura científica en nuestro país. Este cambio ha sido propiciado por la integración, junto con las instituciones organizadoras –la Real Sociedad Española de Física (RSEF) y la Real Sociedad Matemática Española (RSME)–, de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT), que ha ofrecido sus recursos a este programa que ya lleva cinco años de camino. Con este nuevo enfoque se han introducido nuevas modalidades y se han reconvertido otras anteriores, siempre con el objetivo de conseguir reforzar la estructura haciendo llegar el concurso a un público más amplio.

La final nacional tendrá lugar en el Museo de la Ciencia y del Cosmos de La Laguna, en Tenerife, durante los días 23, 24 y 25 de septiembre. Los trabajos que se presenten al concurso y sean preseleccionados por el jurado nacional competirán por conseguir los premios en esta final y las mejores aportaciones, junto con las mejores de la edición anterior, constituirán la delegación española en la gran final europea. La final de *Science on Stage* se desarrollará en la sede del CERN en Ginebra del 19 al 25 de noviembre, coincidiendo con la Semana Europea de la Ciencia y la Tecnología. El tema de esta cita internacional será *Science and Humanity* y reunirá durante una semana a 350 profesores de 30 países europeos con todos los gastos pagados.

Este año, dentro del Programa Ciencia en Acción, se integran nueve modalidades a concurso y un premio especial del jurado. Además dado que el 2005 es el Año Mundial de la Física y que el concurso se celebra en las Islas Canarias se han establecido dos premios especiales más a añadir a los previamente mencionados. Así pues, hay en total 12 premios dotados con 1500 euros brutos, salvo el premio de *Adopta una estrella* que está dotado con cuatro viajes.

Las nueve modalidades del concurso de este año son:

- Demostraciones de Física (*Premio PHYWE*): actividades prácticas para realizar *in situ*.
- Laboratorio de Matemáticas (*Premio PASCO-PRODEL*): actividades prácticas para realizar *in situ*.
- Ciencia y Tecnología (*Premio UPC*): actividades prácticas para realizar in situ.
- Materiales Didácticos de Ciencias (*Premio UGR*): que pueden ser cuadernillos, libros, CD-ROMs, páginas web, programas de simulación o auto-aprendizaje, u otros. Por este año, adicionalmente, se concederá el premio especial Año Mundial de la Física (*Premio RSEF*) a aquellos trabajos didácticos que presenten de una forma clara conceptos fundamentales desarrollados por la Física durante el siglo XX.
- Trabajos de Divulgación Científica (Pr*emio Museo de la Ciencia y del Cosmos*): artículos de prensa escrita, folletos o catálogos de exposiciones, emisiones de radio, videos o programas de televisión.

Rosa María Ros
RSME

- Astrobiología (*Premio CAB*): trabajos relacionados con el origen, existencia, evolución o influencia de la vida en el universo. Pueden tener carácter interdisciplinar y presentarse en cualquier tipo de formato.
- Medio Ambiente (*Premio Antares*): trabajos relacionados con temas de contaminación, desarrollo sostenible, energías renovables y conservación del medio ambiente. Pueden tener carácter interdisciplinar y presentarse en cualquier tipo de formato.
- Adicionalmente, este año, se concederá el premio especial Apaga una luz y enciende una estrella (*Premio IAC*) a aquellos trabajos relacionados con la protección de la calidad del cielo y el medio ambiente nocturno.
- Puesta en Escena (*Premio RSME*): presentaciones teatrales de contenidos científicos que den lugar a una divulgación de éstos.

En todas estas modalidades podrán participar profesores (de cualquier nivel de enseñanza), investigadores y divulgadores de la ciencia en cualquiera de sus ramas. Todos los participantes deberán ser españoles.

La única modalidad donde está previsto que participen estudiantes es en la siguiente:

- Adopta una estrella (*Premio CSIC*): trabajos realizados por un grupo de tres alumnos de primaria o secundaria, bajo la tutela de su profesor con el objetivo de impulsar un acercamiento de los jóvenes a la Ciencia a través de la astronomía que, como ciencia interdisciplinar, despierta un probado interés entre éstos. Pueden elegir una estrella u otro objeto celeste (planeta, galaxia, cometa, etc.) o bien un fenómeno astronómico (eclipse, tránsito, ocultación, etc.) y, cual detectives, buscar información sobre el mismo. El proyecto conlleva la realización de algún tipo de experimento o experiencia práctica, o la determinación de valores de observación. Al final del trabajo se pretende que el objeto sea un amigo más o una mascota para el grupo.

Por primera vez este concurso estará abierto a todos los países de habla hispana o portuguesa. Los trabajos se pueden escribir en cualquiera de los idiomas oficiales del estado español o en portugués (con un resumen de 15 líneas en inglés y en español). Los equipos españoles que lo deseen podrán participar en el concurso europeo *Catch a Star* organizado por ESO y EAAE.

Asimismo, se concederá el Premio Especial del Jurado (*Premio FECYT*), fuera de concurso, a personas o instituciones por las actividades realizadas en el acercamiento de la ciencia a la sociedad. Los candidatos serán propuestos por los miembros del jurado o las instituciones que patrocinen el programa.

Todos los interesados en participar en esta convocatoria (profesores, investigadores, periodistas etc.) que, a través de sus trabajos, ofrezcan una presentación que aproxime las matemáticas a la sociedad deben inscribirse *on-line* y enviar sus trabajos a la RSEF antes del 30 de julio. El jurado efectuará una selección de los mismos determinando los que serán presentados en la final nacional del concurso en el Museo de la Ciencia y del Cosmos de La Laguna, en Tenerife, el último fin de semana de septiembre. Todos los participantes preseleccionados por el jurado para participar en la final tendrán sus materiales expuestos en el Museo. Los participantes de la modalidad de Laboratorio de Matemáticas dispondrán de una mesa en la "Feria" organizada en el Museo para poder presentar sus trabajos al público en general. Los visitantes del Museo podrán interpelar, participar y usar materiales presentados.

Los concursantes de las otras modalidades participaran en sendas mesas redondas donde podrán exponer sus motivos e intereses, así como intercambiar opiniones con otros asistentes. También podrán responder de forma breve algunas cuestiones que el jurado u otros participantes deseen preguntar. Sus materiales estarán expuestos durante todos los días del evento.

Con el objetivo de dar facilidades a los preseleccionados para asistir a la final, la organización facilitará una bolsa de viaje al concursante designado por cada trabajo. Esta ayuda económica dependerá directamente de la distancia a recorrer. Aunque no se pretende cubrir todos los gastos, porque esto es imposible para la organización, lo que sí se intenta es facilitar al máximo la posibilidad de que todos los preseleccionados puedan presentar su trabajo en el Museo.

Todos las modalidades están dotadas con un premio de 1500 euros y un diploma, pero el mejor premio, es sin duda, la posibilidad de disfrutar durante un fin de semana de la compañía de otros profesores con los mismos intereses.

Los trípticos informativos llegarán a los centros a primeros de marzo del 2005. Asimismo se han distribuido por todo el país 10000 CD-Roms que incluyen un resumen de las cinco ediciones anteriores y un conjunto de actividades de física y matemáticas que los profesores pueden llevar directamente al aula. En la página web de *Matemáticas en Acción* de la RSME se incluirá este documento para aquellos profesores que deseen disponer del mismo. El CD incluye fotografías y videos de las diferentes modalidades que pueden servir de acicate a los más indecisos. Os invitamos a acceder a este material y disfrutar de algunas sorpresas.

Finalmente hay que mencionar que la próxima edición nacional de *Ciencia en Acción 7* tendrá lugar en el Museo Cosmocaixa de Madrid.

Desde estas páginas deseamos animaros a que participeis y expongais vuestros trabajos. Seguro que son de interés para otros compañeros. Esperamos encontraros en Canarias. ■

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	$ 60 USA	$ 22 USA

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: 912 911 879
por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ___________

☐ N.os sueltos ______________________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00049