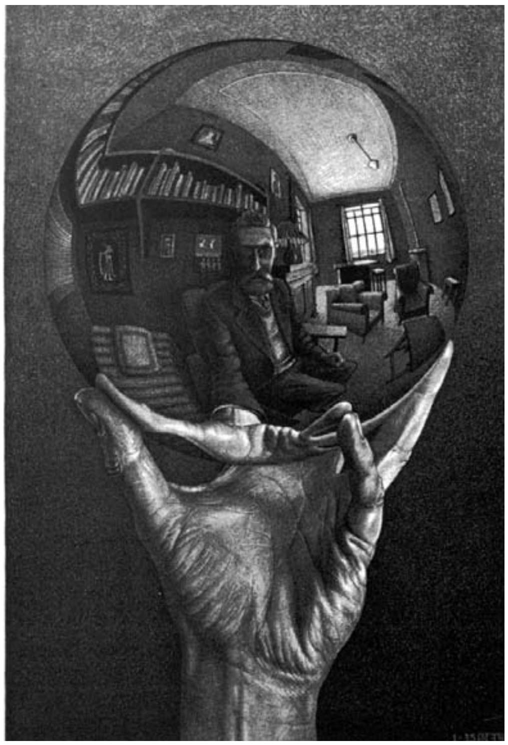
SUMA 49
Junio 2005, pp. 101-108

Escher I: Las matemáticas para construir

Una de las características de las matemáticas que hacen difícil el enseñarlas, es su doble naturaleza de herramienta para *construir cosas* y herramienta para *pensar sobre las cosas.* A lo largo de este número y el siguiente, reflexionaremos sobre la manera en que la obra del grabador holandés Escher ilustra esta doble naturaleza de las matemáticas.

Maurits Cornelius Escher nació en 1898 y murió en 1972. Es contemporáneo, por ejemplo a Marcel Duchamp (1887-1968) y Pablo Picasso (1881-1973) y, aunque la obra de estos tres artistas no puede ser más distinta, un aspecto une a los tres creadores: todos se inspiraron en algún momento en ideas matemáticas, y en los tres casos las matemáticas pueden, a su vez, ayudarnos a entender su obra (Cipra, 1999). Curiosamente, además, se da una aparente paradoja: por un lado, mucho del trabajo de Escher tiene un aspecto clásico, mientras que Duchamp y Picasso son, sin ninguna duda, artistas del siglo XX; por otro, las matemáticas que inspiraron a Duchamp y Picasso datan del siglo XIX, mientras que Escher se metió de lleno en algunas de las creaciones geométricas más hermosas del siglo XX. Trabajó fundamentalmente en grabados sobre madera y litografías, y muchas de las imágenes que produjo están inspiradas directamente por las distintas nociones matemáticas de *simetría.*

Clásicamente, en matemáticas se distinguen tres superficies "muy" simétricas (Mazur, s.a): el plano euclídeo, el plano hiperbólico y la esfera. Estas tres superficies (ó geometrías)



Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

satisfacen todas ellas todos los postulados de la geometría euclídea salvo uno: el postulado quinto, un postulado muy sutil que nos habla de la existencia y unicidad de las rectas que pasan por un punto y son paralelas a otra recta dada. Curiosamente, estas tres geometrías se caracterizan (y, muy elegantemente, se distinguen entre sí) precisamente por cómo se comportan respecto a este postulado de las paralelas. La geometría euclídea nos garantiza la existencia de una única recta que pasa por un punto y es paralela a una recta dada (que no pase por el punto, claro), en la geometría esférica no hay tal recta, y en la geometría hiperbólica podemos construir cuantas rectas queramos que sean paralelas a una recta dada y se corten en un punto exterior a ella. La obra de Escher nos ayuda a comprender mejor las propiedades de estas tres geometrías y, a su vez, las matemáticas nos permiten entender mejor la obra de Escher, y apreciarla como un catálogo bastante completo de imágenes que ilustran cómo fueron cambiando las nociones de geometría y simetría en matemáticas desde finales del siglo XVIII (en que sólo se concebía como tal la geometría euclídea), hasta principios del siglo XX. Y es sobre este cambio sobre lo que reflexionaremos, de la mano de la obra de Escher, en este primer artículo.

Escher y el plano euclídeo

Muchos de los grabados más conocidos de Escher están basados en la división regular del plano: recubrir de forma regular el plano mediante *losetas.* Este tipo de construcciones se conocen como *enlosetados*, y consisten en figuras en forma de pájaros, peces, ángeles y otras formas animadas con las que, utilizadas como los *zelig* árabes que las inspiraron, se recubre todo el plano. El interés de Escher por los enlosetados aparece ya en sus primeros trabajos; sin embargo, fue precisamente tras un viaje a Granada en 1936 que se convirtieron en el tema central de su obra.

No es de extrañar que su visita a la Alhambra despertase en Escher una pasión por el estudio de la simetría que le duró toda su vida, pues la Alhambra nos ofrece un catálogo *completo* de todos los enlosetados posibles (Costa, 1995). La Alhambra demuestra, pues, que los árabes habían encontrado todos los posibles enlosetados antes del siglo XIII. Sin embargo, se ha necesitado muchísimo tiempo, muchas matemáticas, y un profundísimo proceso de abstracción para demostrar que estas diecisiete maneras son, de hecho, las únicas posibles. Ha sido necesario definir con precisión nociones como grupo, grupo de simetrías o el paralelogramo básico de un enlosetado y, dando un paso más en el proceso de abstracción, identificar este paralelogramo con un *toro* (una rosquilla), un paso con el que el problema original (encontrar de cuántas maneras distintas se puede recubrir un plano con losetas), referido a un plano, se convierte en un problema espacial, el estudio de ciertas transformaciones de un toro. Herramientas todas ellas desarrolladas en el siglo XIX y utilizadas por primera vez simultáneamente en el XX.

En 1937, de vuelta en Holanda y buscando en bibliotecas cómo entender y cómo *construir* él mismo lo que había visto en Granada, Escher descubrió el artículo del matemático húngaro George Pólya, "Sobre la analogía de las simetrías del cristal en el plano" (Pólya, 1924). En este artículo Pólya explica, entre otras cosas, por qué pese a la infinidad de diseños planos con los que aparentemente se puede cubrir un plano, hay tan sólo diecisiete tipos esencialmente distintos que pueden ser clasificados con toda precisión según sus simetrías, y da un ejemplo para ilustrar cada uno de estos diecisiete diseños. Escher no entendió el artículo de Pólya, carecía de los conocimientos matemáticos necesarios, pero sí que entendió, después de haber copiado en su cuaderno muchos de los arabescos de la Alhambra, la ilustración con la que Pólya acompañaba su trabajo.

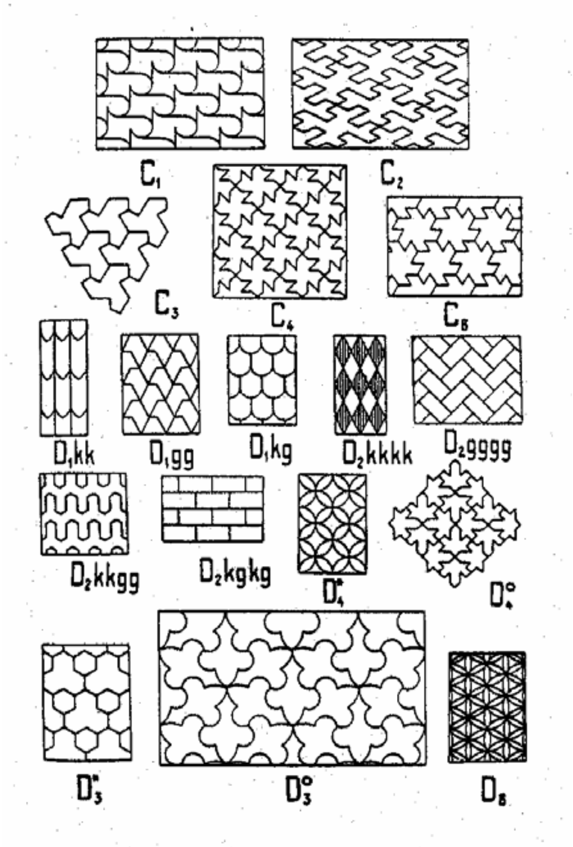


Figura 1. Ilustraciones de Pólya de los 17 grupos de simetrías, 1924

Basándose en los dibujos del artículo de Pólya, Escher desarrolló a lo largo de cuatro años sus propias teorías y explicaciones ("populares", no técnicas) sobre cómo construir las diecisiete simetrías planas, y las recogió en un cuaderno al que tituló "División regular de un plano con polinomios congruentes asimétricos". Este cuaderno fue la fuente en que basó mucho de su trabajo posterior.

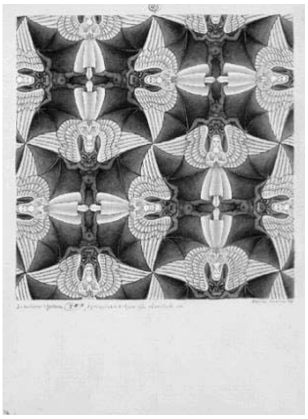


Figura 2. *Ángeles y demonios*, Escher

Pronto Escher, dominando ya las construcciones usuales de enlosetados (esto es, las que recubren el plano euclídeo), se preguntó si sería posible ir un paso más allá y recubrir el plano con figuras que, manteniendo su forma y engarzadas unas en otras, fuesen cambiando de manera regular de tamaño. El problema de cómo llevar a cabo estas construcciones se lo resolvió, una vez más, una ilustración en un artículo matemático.

Escher y el plano hiperbólico

En efecto, en 1958 la matemática volvió a inspirar a Escher cuando, en el artículo "Cristal Symmetry and Its Generalizations" de H.S.M. Coxeter (1957), encontró un enlosetado del modelo que Henri Poincaré construyó del plano hiperbólico, una superficie no euclídea en la que, como ya se ha comentado, por cada punto pasan una infinidad de rectas paralelas a una dada.

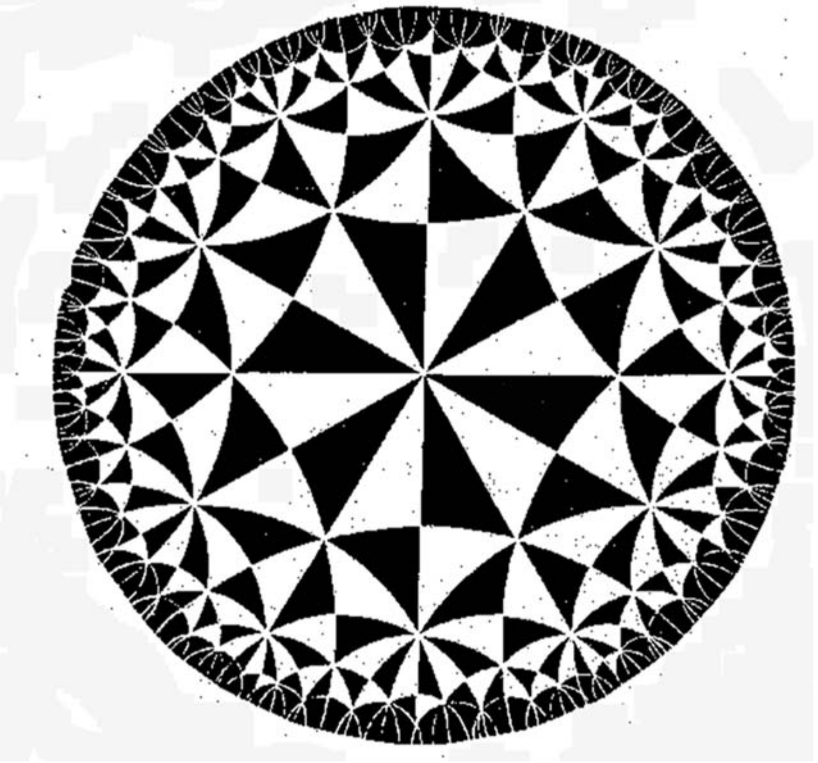


Figura 3. Ilustración de Coxeter de un enlosetado del modelo de Poincaré del plano hiperbólico

El diagrama de Coxeter le resolvía a Escher el problema ya mencionado con el que andaba peleándose: cómo conseguir una sucesión de imágenes entrelazadas que, manteniendo su forma, fuesen disminuyendo en tamaño. De nuevo, para llevar a cabo sus construcciones no necesitaba entender las matemáticas, le bastaba con que le indicasen *cómo medir*, esto es, *cómo son las rectas* en la nueva situación, que es precisamente lo que ilustra la gráfica de Coxeter. La propiedad métrica que caracteriza al mundo de Poincaré es que todo va disminuyendo de tamaño al aproximarse al borde del mundo, y haciéndose cada vez más grande al ir alejándose de él. Como consecuencia de esta propiedad, una persona que viva en el mundo de Poincaré nunca podrá alcanzar el borde de éste, porque si comienza a caminar cuando está, por ejemplo, a un kilómetro y con un cierto tamaño, para cuando se encuentre a medio kilómetro de distancia habrá reducido su tamaño a la mitad, y luego a la mitad de la mitad, y así ininterrumpidamente, haciéndose cada vez más pequeña, por lo que nunca llegará al borde. La métrica y aspecto de las rectas en este modelo de geometría hiperbólica es precisamente lo que intenta explicar la ilustración de Coxeter que encontró Escher en 1958, con la que aprendió a construir enlosetados hiperbólicos.

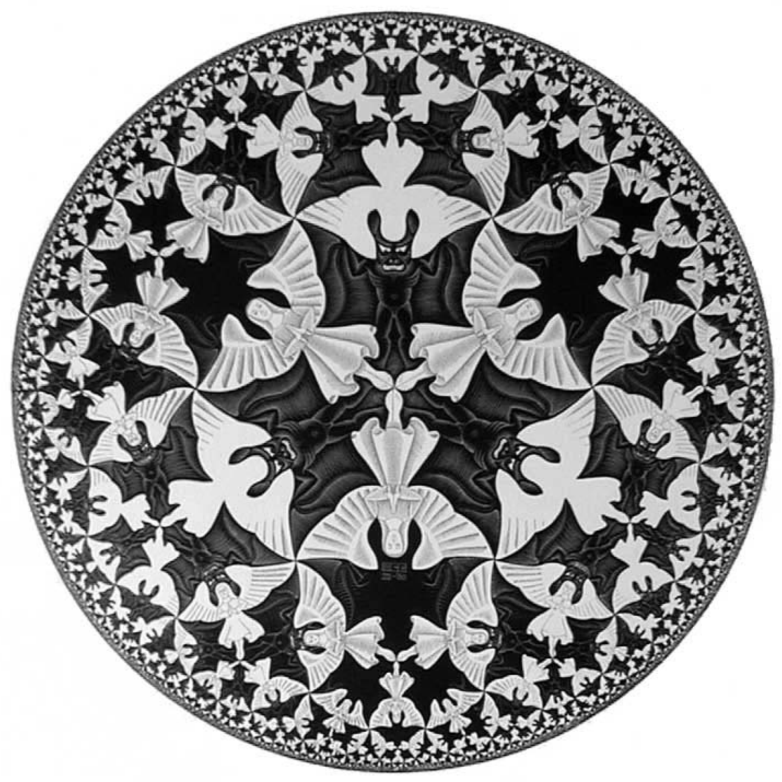


Figura 4. *Ángeles y demonios hiperbólicos*, Escher, 1960

Escher y las curvas elípticas

Si miramos con atención la última imagen de Escher, nos damos cuenta de que podríamos, sin ningún problema, interpretar que Escher ha cubierto con sus ángeles y demonios una esfera, una pelota, y luego ha dibujado ésta desde arriba. No es la primera vez que Escher se enfrenta a la esfera: en 1945, en el grabado “Balcón”, nos ilustra qué ocurre cuando a una superficie le “sale un grano” esférico.

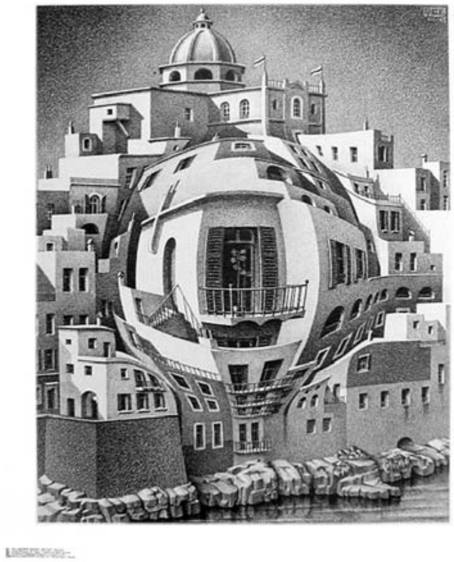


Figura 5. *Balcón*, Escher, 1945

Tampoco es la esfera la única superficie "no plana" sobre la que Escher trabajó. Hace unos años, el matemático holandés Hendrick Lenstra viajaba de San Francisco a Amsterdam en avión, y en la revista de la compañía aérea encontró reproducida una litografía bastante inusual que Escher hizo en 1956.

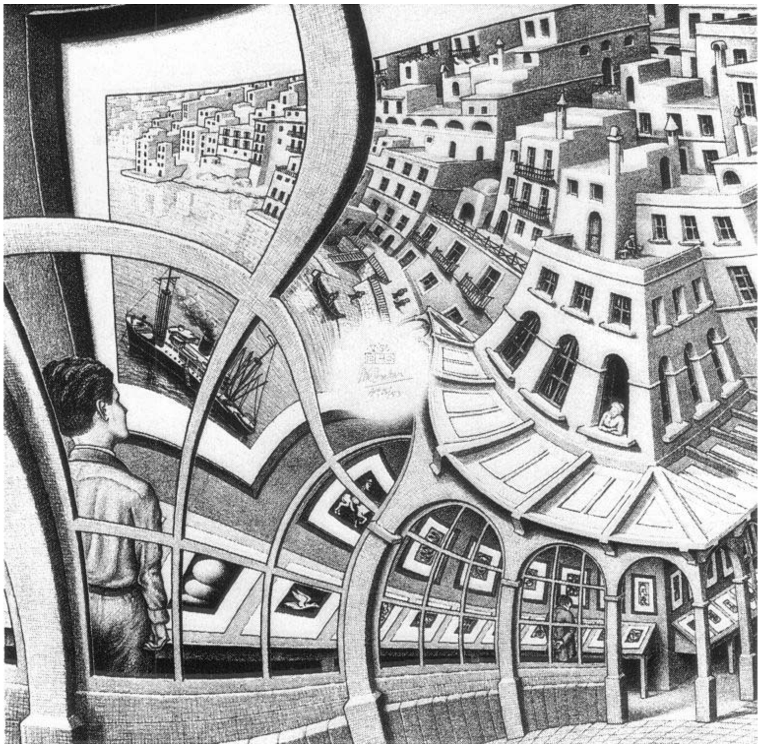


Figura 6. *La galería de grabados*, Escher 1956

Prententententoonstelling (*La Galería de Grabados*), la tituló Escher, y muestra un hombre en una galería de arte contemplando una imagen del puerto marítimo de Malta. Cuando los ojos del hombre recorren los edificios que, junto al malecón, aparecen en el grabado, descubre entre ellos la propia galería en la que él se encuentra. Una mancha circular blanca aparece en mitad de la litografía, y sobre ella el monograma de Escher con su firma.

Buscando entretenerse durante el viaje, Lenstra se preguntó por qué aparece el agujero blanco en el centro y si habría alguna manera satisfactoria de rellenarlo utilizando las matemáticas. Para poder contestar a estas preguntas necesitaba entender qué había hecho Escher en el cuadro, la estructura interna tras *La Galería de Grabados.* Lo primero que le llamó la atención es que, como ya hemos mencionado, la galería donde está el joven vuelve a reproducirse en el interior del cuadro, sugiriendo que lo mismo debería ocurrir tras el borrón blanco; dicho con otras palabras, que estamos ante lo que Lenstra, en homenaje al famoso chocolate holandés, llama *efecto Droste.*

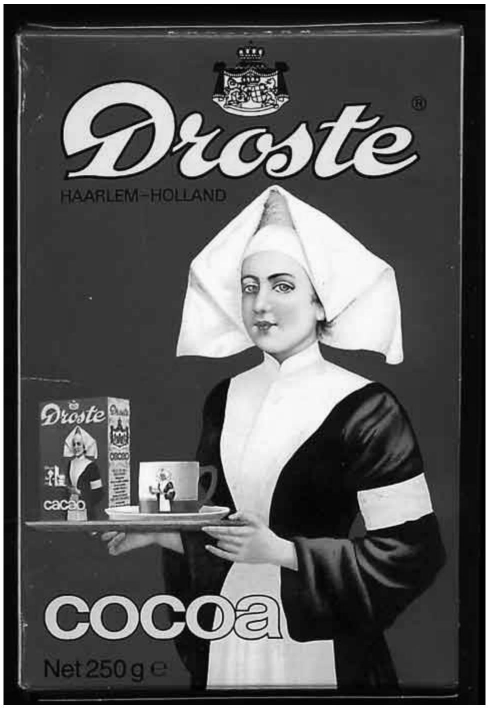


Figura 7. El papel de chocolate holandés *Droste*

La diferencia esencial entre el papel del chocolate y el grabado, es que en el primero la figura está dibujada sobre un plano, mientras que la escena de *La Galería de Grabados* está dibujada sobre una superficie claramente no plana. Qué superficie, y cómo acabar el dibujo son las dos preguntas que se hizo Lenstra y que las matemáticas le ayudaron a contestar.

Si Escher, artista, había encontrado las instrucciones para utilizar las matemáticas en las ilustraciones de matemáticos, es lógico que Lenstra, matemático, buscase las pistas de cómo utilizar las matemáticas en las ilustraciones de los artistas. Al llegar a Holanda, consultó el libro *El espejo mágico de M.C. Escher*, escrito por el amigo del artista Hans de Rijk bajo el seudónimo de Bruno Ernst. Rijk visitó con frecuencia a Escher en su estudio mientras éste trabajaba en *La Galería de Grabados* y su libro, revisado y autorizado por el propio artista, describe con detalle el método que éste utilizó, y explica que lo que Escher intentaba es una expansión circular continua, una protuberancia o abultamiento en una formación de anillo cerrado, sin principio ni fin. Buscando esta construcción —para la que no encontró ayuda en las ilustraciones de los textos matemáticos que consultó, lo que no es de sorprender, pues las curvas elípticas estaban todavía poco estudiadas a mediados del siglo XX—, Escher creó primero esta expansión o abultamiento en una trama de líneas rectas, distorsionándola y haciendo que el tamaño de los cuadrados de la trama creciesen un factor de 256 según se movía a lo largo de un bucle cuadrado desde el centro hacia afuera.

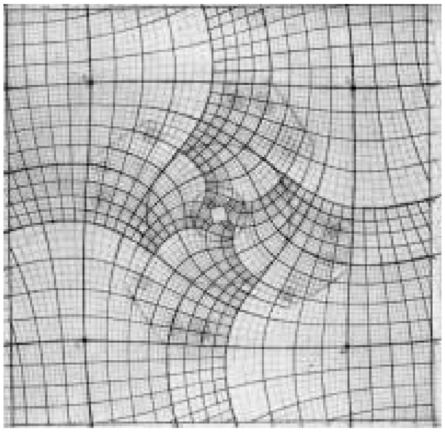


Figura 8. La trama de Escher

Una vez tenía esta trama distorsionada dibujada, Escher dibujó la escena de la galería —en la que uno de los cuadros reproduce el puerto de Malta, entre cuyos edificios vuelve a aparecer la galería con el cuadro en el que aparece el puerto de Malta, etc.—, colocó sobre él la trama rectilínea sin distorsionar y, dibujando una a una cada una de las celdillas cuadradas, fue trasladando la imagen a una trama distorsionada. No es de extrañar que acabase con un borrón blanco en el centro, pues además de la dificultad para llevar a cabo los cálculos matemáticos de las medidas en la nueva situación, Escher tenía un verdadero problema material: no hay pincel lo suficientemente fino para pintar tan chiquito.

Pero ni el tamaño ni los cálculos supusieron un problema para Lenstra, matemático en el siglo XXI, ¿para qué, si no, están los ordenadores? Mirando la imagen de la trama distorsionada de Escher en el libro de Rijk, se preguntó, ¿Hay alguna transformación matemática que nos permita reproducir el proceso llevado a cabo por Escher? La respuesta es sí. No tenemos más que combinar rotaciones, funciones exponenciales y logarítmicas, y reducción de tamaño o escala, transformaciones todas ellas muy conocidas y estudiadas en el Bachillerato. Combinando estas cuatro funciones para valores apropiados de las constantes (que encontraron por el método de ir probando hasta acertar) Lenstra y su equipo de la Universidad de Leiden lograron entender la imagen de Escher; el grabado contiene una copia de sí mismo rotada 157,6255960832... y reducida en escala por un factor de 22,5836845286... (Lenstra y Smit, 2003).

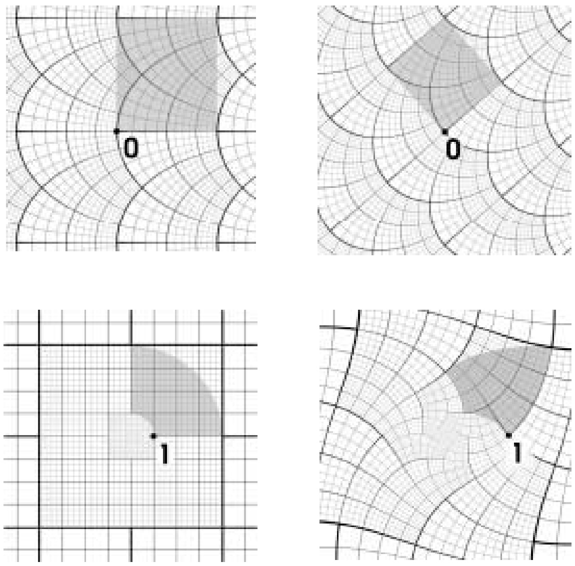


Figura 9. Reproduccion de la trama de Escher por Lenstra y su equipo

Identificadas las transformaciones, reconocer la superficie que estas transformaciones producen cuando se las hace actuar de manera continuada sobre una trama no es difícil: se trata de un toro, una superficie con un agujero —técnicamente, una curva elíptica definida sobre el cuerpo de los números complejos—. Para verlo, basta pensar en una situación física donde aparezca un *bucl*e producido por un giro, quitar el tapón de un lavabo lleno de agua, por ejemplo. Enseguida aparecerá nuestro bucle, que antes o después se convertirá en un agujero. Ya tenía Lenstra respuesta a la primera de sus preguntas: Escher había intentado proyectar su escena sobre una rosquilla. De hecho, tenía mucho más, tenía las transformaciones exactas con las que producir dicha rosquilla.

Con esta información, y utilizando ordenadores, el equipo holandés de matemáticos pudo “rellenar el agujero”. Los pasos sucesivos que recorrieron al hacerlo (y que aparecen explicados e ilustrados con todo detalle, tanto con imágenes fijas como por películas, en el trabajo publicado en la página de Internet http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/) son los siguientes.

- **Paso 1**. Haciendo actuar sobre el grabado de Escher las inversas de las transformaciones que se han identificado, *plancharlo*, llevarlo de nuevo a una cuadrícula plana.
- **Paso 2**. Rellenar el agujero en el modelo plano y completar la escena.

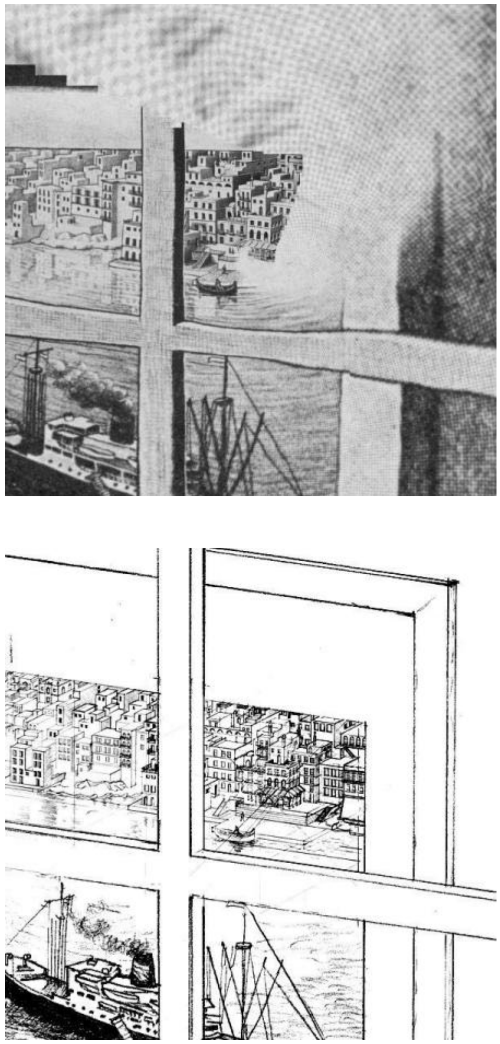


Figura 10. Ejemplo de *aplanado* y relleno de una parte del agujero

(Nótese que el ordenador dibuja marcos de aluminio, no de madera cómo Escher, un detalle siempre a tener en cuenta cuando se trabaja con máquinas.)

- **Paso 3**. Devolverle su forma original haciendo actuar sobre ella las transformaciones que conocemos.

Y, así, una vez más y casi cincuenta años después de su muerte, las matemáticas ayudan a Escher a llevar a cabo sus construcciones. ■

Figura 11. El agujero rellenado

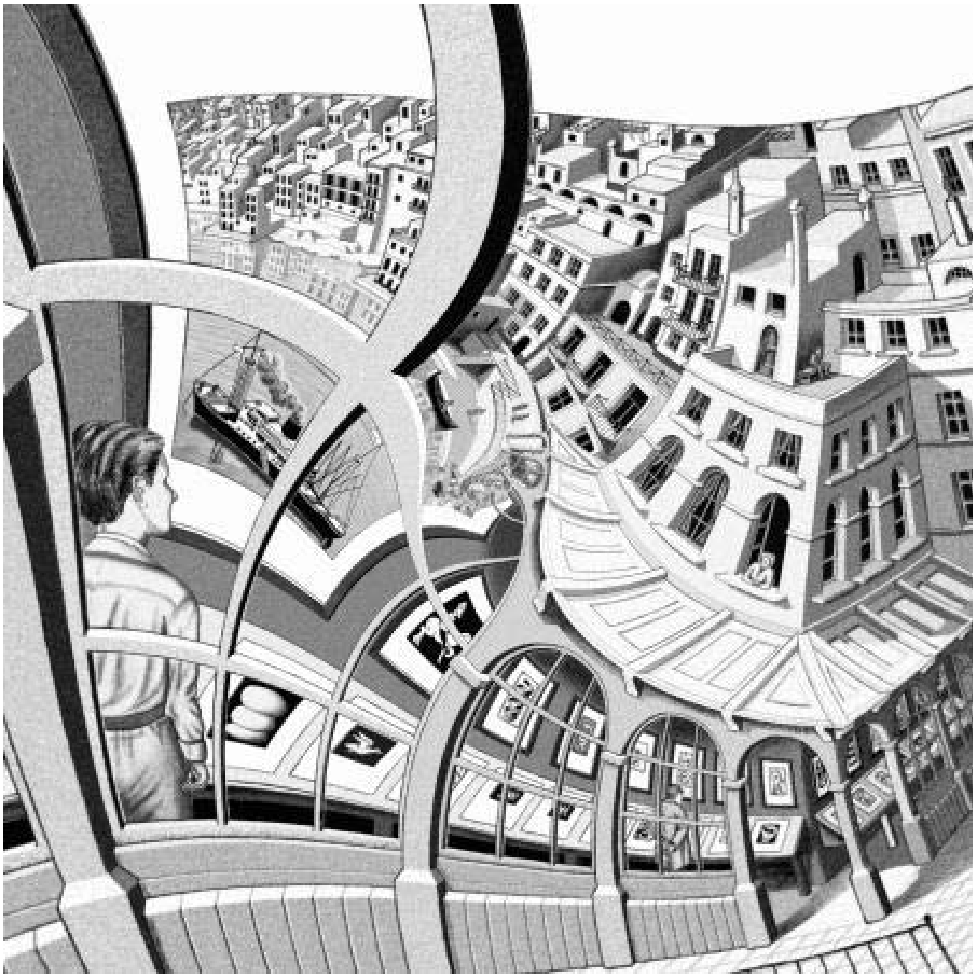


Figura 12. El grabado terminado

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CIPRA, Barry, 1999, "But Is It Math?", en *What´s Happening in the Mathematicas Sciences* 4 (1998-999), AMS.

COSTA GONZÁLEZ, A., 1995, *Arabescos y Geometría*, Videos UNED.

COXETER, H.S.M., 1957, "Cristal symmetry and its generalizations", *Royal Soc. Canada* (3) 51.

ESCHER, 2004, Escher, la vida de las formas, catálogo de la exposición, Fundació La Caixa.

ERNST, B., 1976, *The magic mirror of M.C. Escher*, Ballantine Books.

LENSTRA, H. W. y de SMIT, B., 2003, "The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery", *Notices of the AMS* (4) 50.

MAZUR, Barry (s.a.) "Plus symétrique que la sphère", *Per la science* 41.

PÓLYA, George, 1924, "Sobre la analogía de las simetrías del cristal en el plano", *Zeitschrift für Kristallographie*.