

Hoy vengo a exponer una queja. Cada día, casi a todas horas, y, prácticamente en todo el mundo, soy maltratado. Y ese maltrato no es fruto del azar. Obedece patrones bien determinados de antemano por las voluntades de mis torturadores. Reconozco que a veces no es un maltrato auténtico y que incluso puede divertirme. Eso me mantiene en forma y me da un dinamismo que mi posición habitual no sugiere.

Lo primero que me hacen, curvarme $[f(x)]$, lo soporto bien siempre que las curvas que me dejen no sean demasiado pronunciadas. Curvado así me consideran muy distinto de lo que era. He adquirido un nuevo rango. No me importa que luego me suban y me bajen $[f(x) + a, a \in \mathbf{R}]$ o que me estiren $[a \cdot f(x), a \in \mathbf{R}]$ aún cuando muchos creen que lo que me están haciendo en realidad es girarme. Me gusta verme en el espejo $[-f(x)]$ y que me paseen arriba y abajo $[f(x) + a, a \in \mathbf{R}]$ o a derecha e izquierda $[f(x + a), a \in \mathbf{R}]$. Toleró bien los estiramientos ($a > 1$) y contracciones ($a < 1$) longitudinales $[f(a \cdot x), a \in \mathbf{R}]$ y transversales $[a \cdot f(x), a \in \mathbf{R}]$ mientras no sean exagerados. Mientras poseo esa nueva identidad me aplican tratamientos más sofisticados que, a veces, me deleitan lo indecible. Por ejemplo, me encanta que se me perfile como los niños se perfilan la mano extendida sobre un folio y me den la compañía de una pareja con la que congenio sobremedida. La llaman curva paralela $(x, f(x))$ a distancia d :

$$(x, f(x)) + \frac{d}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} (-f'(x), 1)$$

Lástima que no lo hagan más a menudo. Imagino que si no lo hacen es porque demasiado a menudo mi paralela no es tan suave como yo e incluso puede dejar de ser una función. ¡Qué le vamos a hacer!

Lo que me sienta fatal es que me doblen mediante un giro especular que me produce codos angulosos $[|f(x) + a|, a \in \mathbf{R}]$. Este es el preámbulo de la peor tortura: la acupuntura. A quienes me la aplican podrá sentarles muy bien, pero a mi eso de hacerme agujeritos no me gusta un pelo. Empiezan haciéndome uno $[(x - a) \cdot f(x) / (x - a)]$ o dos $[(x^2 - a) \cdot f(x) / (x^2 - a)]$. Luego más. Hasta media docena los aguanto bien, pero cuando me dejan como un colador unidimensional me pongo histérico:

$$\frac{f(x) \prod_{k=0}^n (x - k)}{\prod_{k=0}^n (x - k)} n, k \in \mathbf{N}$$

Pero lo más duro de todo son los desmembramientos. La crueldad de los que me someten a ellos no tiene límite. Me siento como un pollo en manos del carnicero. En lugar de dibujarme con finos trazos negros o azules, deberían trazarme con una brocha chorreante de pintura roja. De algunos me recupero con facilidad $[y = f(x)/(x - a)]$. En cambio, otros constituyen un descuartizamiento sin fin del que me cuesta un mundo recuperarme $[x \in \mathbf{Q}: f(x) = 1, x \notin \mathbf{Q}: f(x) = 0]$.

A estas alturas no creo que haga falta presentarme. Soy el eje x , el de abscisas, el horizontal. El que sirve de punto de partida a la representación gráfica de una función dependiente de una variable. Según el valor dado a esa variable, mi colega, el eje y , responde con una cifra que levanta cada uno de mis puntos $[(x, 0)]$ hasta una altura determinada $[(x, f(x))]$. Una vez allí, mi nuevo yo resume el carácter de la función representada. Lo que queda debajo es mi anterior yo, la camisa de una serpiente que acaba de mudar. Acuérdate de esto la próxima vez que...

Hola. ¿Sigues ahí? ¿Me permites un momento antes de girar la página? Soy el eje y , el de ordenadas, el vertical. Quiero que sepas que agradezco tu trato. Raramente me lo paso tan mal como mi colega, aunque hay veces, sobre todo cuando haces inversas de funciones $[x = f^{-1}(y)]$, que me las haces pasar canutas. Pero mientras sigas así, realizando una inversión muy de vez en cuando, no me quejaré. Por suerte, tampoco tienes mucho tiempo para regodearte con florituras de ese tipo, ¿no? El caso es que soy testigo del sufrimiento de mi tocayo y quisiera pedirte que lo trataras un poco mejor. Evita dejarle en manos de ignorantes o, si no es posible, impide que le hagan nada sin prever el resultado de la actuación y que, por favor, vuelvan a dejarlo siempre en su sitio tal y como estaba. ¿De acuerdo? ■

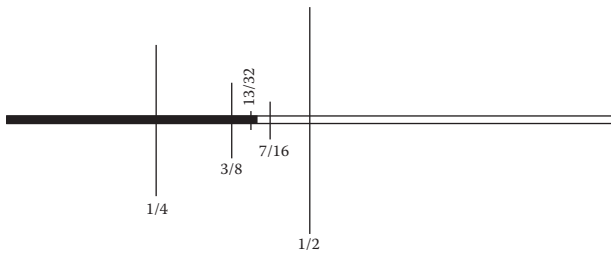
Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

En la iMATgen n.º 13 formulé una pregunta referente a la pre-dilección por el punto medio. Aplicando el algoritmo de sentarse en medio de los huecos que deja la gente, un banco acaba por llenarse. La cuestión planteada entonces era si podía decirse lo mismo de un banco matemático como el intervalo $[0, 1]$. La verdad es que todo $x \in [0, 1]$ es límite de una serie de potencias de $1/2$.

Dado $x \in (0, 1)$, definimos $a_1 = 1/2$. Si $x = a_1 = 1/2$, hemos terminado. De lo contrario, será $x < a_1$ o $x > a_1$. Si $x < a_1$, definimos $a_{21} = a_1 - 1/2^2$. Si $x > a_1$, definimos $a_{22} = a_1 + 1/2^2$. Si $x = a_{12}$ o $x = a_{22}$, también hemos terminado. En caso contrario, será $x < a_{21}$ o $x > a_{21}$. O bien será $x < a_{22}$ o $x > a_{22}$. Definimos entonces: $a_{41} = a_2 - 1/2^3$, $a_{42} = a_{21} + 1/2^3$, $a_{43} = a_{22} - 1/2^3$, $a_{44} = a_{22} + 1/2^3$. Continuando este proceso construimos una serie de potencias de $1/2$ en la que lo único que varía es el signo de cada término. Esta serie de potencias es convergente porque la serie de sus términos en valor absoluto lo es. Su límite es precisamente la unidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Por ejemplo, la serie para $\sqrt{2} - 1 = 0,4142... \in [0, 1]$ es $1/2 - 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 - 1/2^5 + \dots$. Véase su representación en la figura siguiente. La parte negra del segmento $[0, 1]$ corresponde a $\sqrt{2} - 1$:



En general, y siendo $s(n) = \pm 1$, cada $x \in [0, 1]$ puede obtenerse sumando o restando las sucesivas potencias de $1/2$:

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{n>1} \frac{\sigma(n)}{2^n}$$

Esta serie puede ser finita o no, aunque esto no signifique que el número x en cuestión sea o no racional. Para $x = 1/3$, la serie es infinita. Si $\sigma(n) = -1 \forall n$, tenemos $x = 0$. Si $\sigma(n) = +1 \forall n$, se

obtiene $x = 1$. Obsérvese que el valor $x = 1/2$ no se consigue haciendo $\sigma(n) = 0 \forall n$ porque $\sigma(n)$ no puede ser nulo, sino con $\sigma(2) = +1$ y $\sigma(n) = -1 \forall n > 2$. Este detalle permite ver que la descomposición no será única. Ese mismo valor, $x = 0,5$, puede obtenerse de muchas formas:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{m=2}^k \frac{1}{2^m} + \sum_{n>k} \frac{-1}{2^n}$$

La iMATgen n.º 14 surgió del azar. ¿Pero qué es el azar? Un suceso cualquiera se produce o no con relación a un ámbito más amplio al que se somete. Bajo las condiciones de ese ámbito el suceso puede ocurrir o no. Aquel suceso que siempre se produzca en ese ámbito se llama seguro. Análogamente, aquel que bajo las mismas condiciones no puede ocurrir nunca se llama imposible. Entre lo seguro y lo imposible reside lo que puede suceder o no, el quizá, el tal vez, lo probable. Un suceso así es aleatorio. Cuantificar sus posibilidades de realización constituye lo que en Matemáticas se llama probabilidad. Puede concretarse 'a priori' en términos de modelización matemática, como la proporción numérica entre dos áreas. Pero también puede ser 'a posteriori' tras el recuento de una serie de frecuencias.

Jugando con la probabilidad uno adquiere prejuicios sobre los sucesos que le llevan a valorar de forma intuitiva el grado de probable o improbable de un suceso. Por ejemplo, la distribución de guijarros en la fotografía de la iMATgen n.º 14 parece verdaderamente surgida del azar. En cambio, una disposición circular o triangular no habría parecido fruto del azar. Aún así creemos imposible que al lanzar de nuevo las piedras vuelvan a caer exactamente como quedaron en la fotografía. Tan imposible como que queden formando un cuadrado o el perfil de un escorpión como ocurre con algunos grupos de estrellas en el firmamento. Aquella distribución pareció aleatoria y me creíste cuando dije que lo era. Pero si hubiesen quedado en forma de cuadrado, ¿me habrías creído? Tendemos a relacionar el azar con lo caótico y con lo irreconocible. Gracias a ese modelo, lo caótico y lo irreconocible parecen azarosos.

Eso vincula las iMÁTgenes 14 y 15. ¿Quién dejó las curvas de espuma en el parabrisas? ¿Fue realmente un inmigrante? ¿Fue el empleado de un lavacoches? ¿Fui yo mismo? Sólo puedes confiar en mí. La realidad necesita testigos. Yo lo soy de las realidades que ves, lees e iMATginas en esta serie de la revista SUMA. Amo la sinceridad y procuro ser sincero, pero admito que la tentación me acosa de vez en cuando. Cada acoso trae consigo una duda. No me importa, los matemáticos y educadores sabemos que la duda es productiva. ■

Cuando se hizo esta fotografía la mayoría de los alumnos que ahora terminan el cuarto curso de la ESO estaban naciendo. Ha pasado mucho tiempo, pero quizá las cosas no hayan cambiado tanto desde entonces en Xexaouen o Xauen o Chef-chauen o Chauen o Chichauen o como sea que se transcriba el nombre de esa localidad del Rif marroquí. Se sitúa entre dos cumbres que semejan, según la gente local, un par de cuernos de donde procede su nombre. Su característica más destacada es la de tener las casas pintadas con el color de un cielo con nubes. En los ochenta protagonizó una película de éxito, *Bajarse al moro*, pero ese es otro tema.

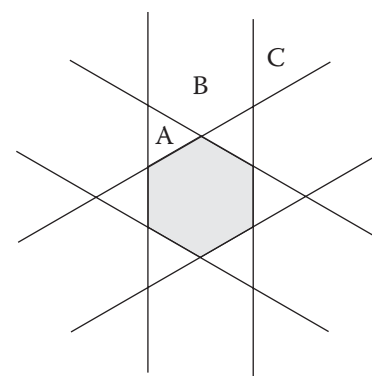


Chef-chauen se encarama monte arriba. Sus calles son cuestas a menudo escalonadas y con rellanos, por lo que escasean las plazas. En su guía sobre Marruecos, Enric Balasch habla de la plaza de Uta el Hammam en Chef-chauen: 'De forma irregular esta plaza está dominada por las cumbres de las montañas que circundan la ciudad. A su lado la Gran Mezquita construida en el s. XV posee un minarete de forma hexagonal finamente decorado.' (Balasch, 1987, p. 51)

La imagen muestra esa mezquita. Se levanta por encima del suelo de la plaza y se accede a ella por tres escaleras. El hombre que entra en la imagen por la izquierda no inclina su cabeza en señal de respeto o porque el muecín llame a la oración. Es una casualidad que da más significado a la fotografía. El minarete se yergue ante un cielo immaculado. Basta contemplarlo un instante mientras recordamos las palabras de Balasch para ver que ahí está la iMATgen. La planta de este minarete, ¿es hexagonal? Comprender la imagen es comprender realmente cómo es la base de esa construcción. La perspectiva matemática nos permitirá ver aquello que en la imagen es invisible.

Teniendo en cuenta que la luz viaja en línea recta, observemos cómo se ven las cosas desde un punto alejado de la base de una construcción en forma de prisma recto de base poligonal. Por ejemplo, en el caso de una torre hexagonal, por cuestiones de

simetría, tenemos tres regiones desde la que veremos diferente número de vértices y lados:



Desde la región A solo vemos 1 lado. Desde B vemos 2. Si estamos en C vemos 3. El número máximo de lados visibles se corresponde con la zona determinada por el punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos del polígono. Como sucede en el vértice de la zona C en la figura anterior.

Cuanto mayor sea el número de lados del prisma poligonal, más habrá que alejarse de su base. Un sencillo análisis de la situación permite conocer cuál es el número máximo de lados visibles, $V(n)$, para los primeros prismas cuyas bases son polígonos regulares:

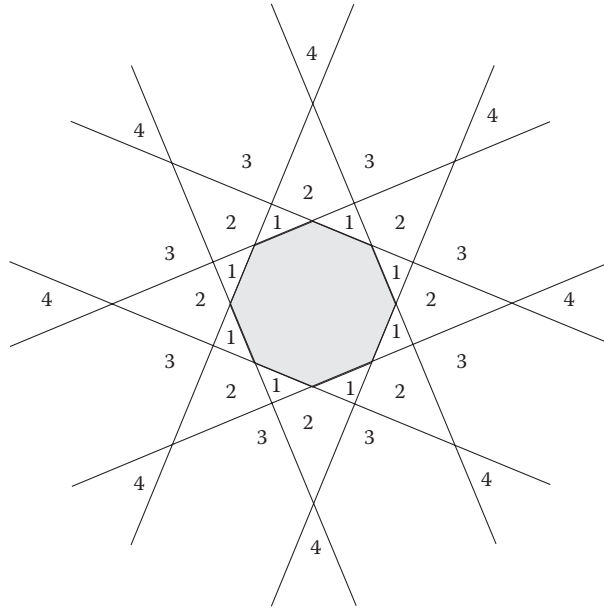
$$V(3)=2, V(4)=2, V(5)=3, V(6)=3, V(7)=4, \\ V(8)=4, V(9)=5, V(10)=5$$

La regularidad de esta serie de valores permite saber cómo es n a partir de $V(n)$. Si n es par, $V(n)=n/2$. Si n es impar, $V(n)=(n+1)/2$. Nunca veremos más de la mitad de los lados de un polígono por la misma razón por la que nunca es visible el diámetro completo de un círculo desde su exterior. La relación también puede leerse en sentido contrario: Si V es el número máximo de lados visibles, entonces o bien $n=2V$ (n par) o bien $n=2V-1$ (n impar).

Como en la imagen se ven cuatro lados del minarete, n puede ser 8 ($n=2\cdot4$) o 7 ($n=2\cdot4-1$). Teniendo en cuenta el ambiente cultural en el que nos encontramos, hay que hacer dos obser-

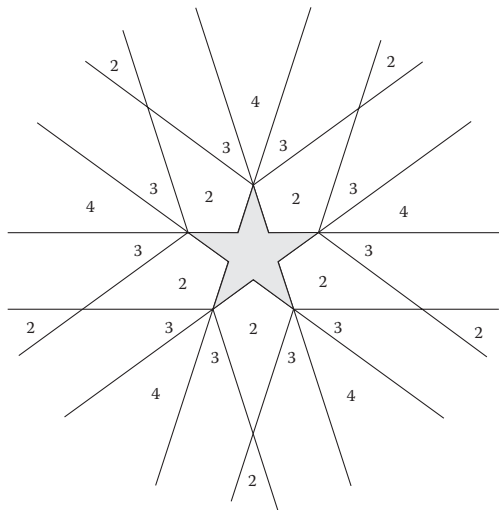
vaciones. La primera, que no solo en la cultura islámica, sino en prácticamente todo el mundo, las construcciones con base poligonal acostumbran a tener un número par de lados. La segunda, que la simetría de octavo grado (simetría de rotación de 45°) posee una importancia capital en la cultura islámica. Uno de sus diseños más característicos es precisamente la estrella de ocho puntas rectangulares configurada mediante la

superposición de dos cuadrados con el mismo centro, pero uno girado 45° con relación al otro. En conclusión, que las posibilidades de que ese minarete tenga planta heptagonal son nulas. Se trata pues de una construcción que tiene por base un polígono regular de ocho lados. La figura siguiente muestra la distribución de zonas para este caso con el número de lados visible en cada una de ellas:



En el caso de un polígono no convexo como una estrella de

cinco puntas, veríamos las cosas así:



En ambos casos, los diseños resultantes recuerdan las decoraciones del arte islámico. Por eso formará parte del título de esta iMATgen una palabra de uso corriente en castellano y que se utilizaba para expresar el deseo de que algo, general-

mente bueno, suceda. Tanto ella como las cifras que protagonizan esta iMATgen forman parte del legado árabe de nuestra cultura: **¡Ojalá lo veas!** ■

REFERENCIA

Balasch, E. (1987): *Marruecos*. Laertes Ediciones SA.Barcelona.

Mientras esperas que te traigan la comida se te acerca un joven, te saluda y te pide permiso para sentarse a tu mesa. Respondes a sus preguntas con amabilidad: ¿Cuándo has llegado? ¿De dónde vienes? ¿Cuánto tiempo llevas aquí? ¿Estás viajando solo? ¿Estas casado? ¿Tienes hijos? ¿Qué vas a hacer mañana? ¿Te gustaría ver un funeral?

Justo entonces. En ese instante de silencio que sucede a la última pregunta es cuando se produce un cambio en ti del que no eres consciente. Los ojos se te han abierto más de lo normal, pero no mucho, sólo un poquito. Un cambio del que no se darían cuenta ni siquiera quienes te conocen en tu país, pero una abertura suficiente para alguien de ojos rasgados como quien te interroga y para quien tus ojos son redondos como platos. Tu, víctima inocente, que hasta ese instante habías contestado de forma automática a todas sus preguntas, confirmas el interés insinuado en esa sutil apertura ocular formulando la pregunta que tu interlocutor esperaba:

- ¿Dónde?
- En mi pueblo.
- ¿Dónde está tu pueblo?
- ¡Oh! Es un pueblo muy pequeño.
- Sí, pero ... ¿Donde está? ¿Cómo se llama?
- Está al norte de la región.
- Ya. ¿Y cómo se llama?
- To' Tallang.
- ¿To qué?
- To' Tallang!

Sacas un mapa de la bolsa y lo escudriñas a conciencia. To' Tallang, To' Tallang, To' Tallang, ... te repites. Tu amigo espera. No dice nada. No siente ningún interés por tu búsqueda porque conoce el resultado. Por fin, se aviene a ahorrarte trabajo:

—No sale en el mapa.

Tu, ni caso. Tu mapa es una joya que compraste por una pasta antes de venir. To' Tallang tiene que aparecer en él. Sin embargo, al cabo de un rato, te rindes:



- No sale en el mapa.
- ¡Ya te lo he dicho! Es un pueblo muy pequeño. No está en el mapa.
- ¿Por qué zona dijiste que estaba?
- Al norte. Es el pueblo donde nació.
- ¿Qué raro! Debería estar por aquí.

Repasas otra vez nombres de caminos, ríos, montañas y localidades minúsculas.

- Pues no sale.
- ¡Claro que no! Ya te lo dije.
- ¿Y no podrías indicarme por donde está?
- Es difícil de encontrar. No hay carretera hasta allí.
- Ya veo. Pero este mapa incluye caminos y pistas sin asfaltar. ¿Por dónde está?

Tu amigo se inclina sobre la sábana de papel coloreado que has desplegado encima de la mesa. Extiende su índice en el aire y lo dirige hacia la zona

norte. Tu ojos abiertos de par en par siguen ese dedo con sumo interés. El extremo del índice describe una curva en el aire y acaba posándose sobre el papel. Pero justo cuando lo toca no se detiene para señalar un punto, sino que se agita frenético describiendo círculos alrededor de un área indeterminada y te grita:

—¡Por aquí!

Tus ojos giran y giran en sus órbitas a toda velocidad reflejando el remolino que describe aquel dedo espasmódico. ¡Si pudieras verte te acordarías de Marujita Díaz! En la vorágine, preguntas:

—¿Dónde, dónde ...?

Pero él ya no te hace caso. Y tu, mareado, vuelves a rendirte. Te das cuenta de que su pueblo nunca saldrá en ningún mapa. Pese a ello, mañana te levantarás temprano para irte con él a ver el modo en que tratan a los muertos en Tana Toraja. De camino, te encontrarás con casas de arquitectura diversa. Algunas, las más sofisticadas, propias de la más alta clase social. Otras, como la de esta imagen, te parecerán tan modestas como son en realidad. Entender la imagen es entender esa casa.

La fotografía muestra algunos ejemplos de la utilidad del bambú en la arquitectura. Sirve de pilar, viga o escalera. Para el tejado se usan hojas de cocotero. El suelo parece hecho de tablas de madera y cañas. Las paredes, en cambio, parecen hechas solamente de cañas. Su verticalidad se conserva gracias a unos travesaños también de bambú. Pero si nos fijamos bien veremos que las cañas verticales de las paredes en la parte inferior de la vivienda presentan unas líneas transversales oscuras. Esas líneas transversales indican cuál es verdaderamente su origen. Las paredes de la casa no están hechas de hatillos de cañas, sino de enormes troncos de bambú abiertos. Con N troncos de bambú de diámetro D y longitud L levantaremos una pared rectangular de dimensiones $N \cdot L \cdot D$. En cambio, cortando longitudinalmente esos troncos, abriéndolos, extendiéndolos en el suelo y luego uniéndolos uno a continuación del otro, obtendremos una pared mucho mayor, de dimensiones $N \cdot L \cdot \pi \cdot D$. Más del triple que antes.

Estamos acostumbrados a recortar y pegar en el ámbito topológico los más diversos objetos geométricos elásticos, desde una banda de Möbius hasta una botella de Klein. El bambú más fino y flexible de esta región de la isla de Sulawesi se llama *Bulo* y es parecido al que abunda en nuestro país. Más rígido y grueso es el llamado *Tallang*. El *Ao'* es amarillo y escaso, bonito y muy apreciado. El mayor de todos es el *Pattung*. Este sobrepasa fácilmente el palmo de diámetro, su pared tiene

más de un dedo de grosor y se yergue hasta los quince metros de altura. Sólo ahí arriba, donde los extremos se afinan, logra vencerle la gravedad y se curva. En las paredes de esa casa tenemos un ejemplo real extraordinario de la puesta en práctica de un homeomorfismo topológico. Y no aplicado a un objeto dócil como tiras de papel o botellas elásticas, sino desarrollado con un objeto duro e inflexible como es un tronco de *Pattung*.

Ese homeomorfismo continuo entre un cilindro desprovisto de una recta longitudinal (tronco de bambú abierto de extremo a extremo) y un rectángulo del plano (tronco abierto extendido sobre el suelo) se realiza en la práctica señalando primero, a golpe de machete, multitud de segmentos longitudinales en el *Pattung*. Estos no deben ser lo suficientemente profundos como para atravesar la madera. Luego sí, se incide en uno de ellos hasta atravesarla y conseguir en el *Pattung* un corte longitudinal, de extremo a extremo. A continuación, se abre la pieza con cuidado hasta dejarla extendida en el suelo. Por último, se cortan las asperezas presentes en una cara del rectángulo resultante, la que antes era interior. Al abrir el bambú todos los fragmentos longitudinales de este lado son cóncavos y, por ello, más cortantes. También en este lado es donde hay las irregularidades de los nudos. Los fragmentos correspondientes al lado exterior no constituyen un problema porque son convexos:



La traducción al castellano de *To' Tallang* podría ser *Villabambú*. Quienes ahí viven lo hacen realmente dentro del bambú, en el interior de un único pero ingente tronco de *Pattung* construido con los de un haz. Un tronco artificial de

sección rectangular que transforma en verdad la broma del nativo. *To' Tallang*, *To' Ao'* y *To' Pattung* no aparecen en el mapa porque están en todas partes. Los hay a centenares. Eso es *To' Tallang: habitar el bambú*. ■

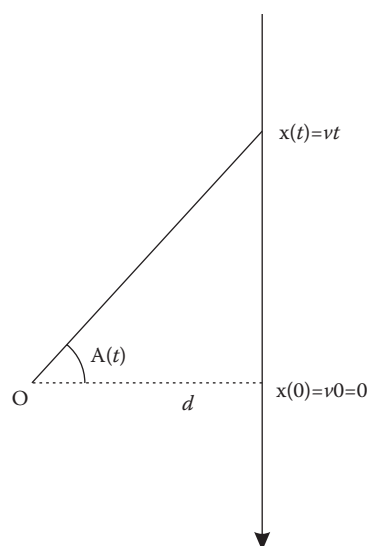
Uno, dos, tres, cuatro, hasta nueve automóviles acercándose hacia el observador por el carril situado a la izquierda de la imagen. En el carril central un único automóvil que acaba de iniciar su marcha desde la línea que señala el paso de peatones. En el carril derecho, una hilera de coches aparcados. Si la foto se viera en color, verías que el semáforo de peatones está en rojo, igual que el de los coches del cruce perpendicular, justo al pie de la fotografía. A diferencia del coche que inicia la marcha, los otros, los del carril izquierdo, no tuvieron que reducir su velocidad para detenerse en el semáforo. Pudieron pasarlo continuando su camino a la misma velocidad que llevaban, la cual, lo recuerdo bien, era la misma para todos. De ahí que la distancia entre ellos sea tan parecida.



simple respuesta pasa por alto. Para entendernos mejor, si en lugar de automóviles lo que apareciera en la fotografía y se acercara al observador fuese un tren, la locomotora y los primeros vagones aparecerían movidos mientras los últimos se verían con nitidez. ¿Pero acaso los vagones de un mismo tren se desplazan a distinta velocidad? No. Aquí es donde esta imagen se convierte en iMATgen.

Supongamos que desde un punto O observamos el paso de un móvil desplazándose a velocidad constante v siguiendo una trayectoria rectilínea (hacia abajo, como en la imagen). Sea $t=0$ el instante en que más cerca, a distancia d , pasa de nosotros el móvil y llamemos $x(0)=0$ a dicha posición. Sea $x(t)=vt$ el espacio recorrido desde que lo vemos hasta llegar a nuestra altura ($t=0$). Sea $A(t)$ el ángulo formado entre la visual dirigida al móvil desde nuestra posición O y la visual dirigida al punto $x(0)=0$:

tra posición O y la visual dirigida al punto $x(0)=0$:



Desde la primera de las iMATgenes de esta sección sabemos cómo disminuye el tamaño de las cosas al aumentar la distancia. Pero aquí, dado que la fotografía se hizo sobre algo en movimiento, cabe señalar algo importante. Las luces de los coches más cercanos dejan un vestigio luminoso más extenso que las de los más alejados. Sólo los últimos automóviles aparecen con luces casi puntuales y redondeadas como sus faros. Cuanto más lejos, menos movidos aparecen. No así los primeros. Los coches más cercanos se ven imprecisos, fantasmagóricos. Sus luces convertidas en líneas tan largas como... He ahí la cuestión. ¿Tan largas como qué? ¿Cómo la velocidad que llevan? En parte sí, pero sólo en parte.

Si las cosas disminuyen con la distancia y una fotografía recoge vestigios luminosos correspondientes a un intervalo de tiempo determinado, las cosas en movimiento más lejanas al punto de observación se captan con menor velocidad puesto que en el mismo tiempo disminuye el espacio aparente que recorren. Los trazos de los faros en la fotografía lo corroboran. Ésta es una explicación, pero el análisis matemático permitirá precisar un poco más un detalle importante que esta

Puestas así las cosas, tenemos:

$$A(t) = \arctg\left(\frac{x(t) - x(0)}{d}\right) = \arctg\left(\frac{vt}{d}\right)$$

La velocidad con la que vemos pasar el coche no es la que lleva él, sino la determinada por la variación del ángulo $A(t)$ con el que lo observamos con relación al tiempo. Es una velocidad angular y su valor viene dado por la derivada de $A(t)$ con respecto al tiempo. Esa es la velocidad aparente con la que el observador percibe el móvil que se le aproxima:

$$A'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{vt}{d}\right)^2} \cdot \frac{v}{d} = \frac{d \cdot v}{d^2 + v^2 t^2}$$

Cuanto más lejos está el coche del observador, a medida que la hipotenusa $D = (d^2 + v^2 t^2)^{1/2}$ del triángulo anterior crece, disminuye la velocidad aparente $A'(t)$. Los coches más alejados no salen borrosos en la foto, siendo su velocidad 'aparente' prácticamente nula:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} w(t) = \frac{d \cdot v}{D^2} = \frac{d \cdot v}{\infty} = 0$$

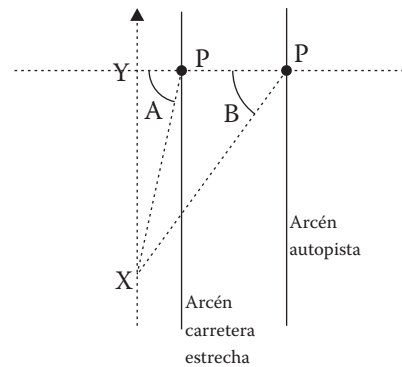
Sin embargo, en el instante $t=0$, cuando el móvil pasa junto al observador, la velocidad 'aparente' es $A'(0) = v/d$ y se hace prácticamente infinita cuando la distancia d es muy pequeña:

$$\lim_{d \rightarrow 0} A'(0) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{v}{d} = \frac{v}{0} = \infty$$

Ocurrirá esto por muy despacio que se desplace el móvil, mientras v no sea cero.

Supón que viajas a velocidad constante siguiendo la dirección y sentido de la flecha según se indica en la figura siguiente.

Pasas por el punto X y te fijas en un punto P del arcén. Hasta llegar a su altura, es decir, hasta llegar al punto Y , el ángulo con el que lo percibes ha variado más si viajas por una carretera estrecha (ángulo A) que si lo haces por autopista (ángulo B). En el mismo tiempo has recorrido el mismo espacio, la distancia XY , pero en el primer caso la variación angular es A y en el segundo, B . La sensación de velocidad en la calle estrecha será mucho mayor que en la autopista o en una calle ancha:



Por eso cuando vamos en el metro y miramos por la ventanilla tenemos la sensación de desplazarnos mucho más rápido de lo que lo hacemos en realidad. Las paredes del túnel y todo lo que cuelga de ellas pasan a todo trapo cuando quizá no vayamos a más de cuarenta o cincuenta kilómetros por hora. En cambio, en una autopista vamos a cien y parece que apenas nos movemos. Las referencias están más lejos, la calzada es más amplia, la distancia d es grande. Si quieres sensación de velocidad, no cojas el coche y lo pongas a doscientos por hora, mejor ponte a correr por un callejón. ¿Será por eso que ahora mucha gente hace *footing* por la ciudad?

Este fenómeno viene a ser la visualización de un efecto físico auditivo conocido como efecto Doppler. Todos lo experimentamos cada día. Una moto se acerca hacia nuestra posición zumbando como un abejorro en celo. Percibimos un ruido intenso y agudo, pero justo al pasar junto a nosotros este ruido baja de tono para diluirse en el confín de nuestra mirada. Esta iMATgen no se centra en el aspecto sonoro, sino en el visual: **Tan cerca, tan fugaz.** ■

