

Un ejemplo de espacio cociente

En el artículo con el que introducíamos esta sección (SUMA n° 47), ilustrábamos con los cuadros *Las meninas* de Velázquez (1656) y *Las meninas* de Picasso (1957), el enorme salto conceptual que desde las matemáticas supone el pasar de concebir y describir el espacio como un contenedor único en el que habitan las cosas, a concebir y describir el espacio como una red de relaciones que se establece entre cosas concretas.

Comentábamos que en el lienzo de Velázquez el espacio entre la princesa y María Agustina Sarmiento, la doncella que se arrodilla frente a ella, es un contenedor cúbico externo a ambas niñas, mientras que el espacio entre estas mismas figuras en el cuadro de Picasso es una red: la manera en la que cada niña ve a la otra, y la posición en la que cada una de ellas está colocada respecto a la otra, da lugar a la red de triángulos que como estructura espacial las conecta entre sí y con el resto de las figuras en la habitación. De hecho, la escena entera está compuesta por múltiples relaciones locales que Picasso representa mediante una estructura espacial formada por figuras geométricas básicas como triángulos y rectángulos.

En general en matemáticas, las relaciones entre objetos nos permiten construir entornos formados por elementos relacionados entre sí, y estos entornos, estas redes de relaciones, constituyen lo que en matemáticas contemporáneas y en la ciencia contemporánea se entiende por espacio, o espacio abstracto, como lo llamamos en matemáticas. Picasso era pintor abstrac-

En matemáticas, las relaciones entre objetos nos permiten construir entornos formados por elementos relacionados entre sí, y estos entornos, estas redes de relaciones, constituyen lo que en matemáticas contemporáneas y en la ciencia contemporánea se entiende por espacio.

to en el sentido en que utilizamos la palabra *abstracto* en matemáticas: el abstraer lo esencial de algo, no el abstraerse de la realidad. Vamos a ilustrar con otra versión suya de *Las meninas*, llevada a cabo en 1957, en qué consiste exactamen-

En el n.º 47 de SUMA, se deslizó por error, como título del cuadro de Malevich, el que Capi Corrales ha dado a esta sección: *En un cuadrado*. El verdadero título del cuadro es *Negro sobre blanco*. (Nota del Editor)

Capi Corrales Rodríguez
enuncuadrado.suma@fespm.org

te construir un *espacio cociente* (un tipo de espacio abstracto que es el fruto de ciertas relaciones establecidas entre los objetos de un conjunto), y qué se puede conseguir con este tipo de construcción, qué tipo de información puede dar un espacio cociente que el espacio cúbico de Velázquez no nos dé.



Figura 1. *Las meninas*, Picasso 1957

Este cuadro de Picasso, que lleva por título *Las meninas*, resulta bastante extraño. Reproduce a María Agustina Sarmiento. Picasso pintó varios lienzos con esta doncella, en estilos muy distintos. Y en todos ellos, salvo en este, respeta la postura de la niña tal cual la dibuja Velázquez. Otra diferencia entre las restantes versiones que Picasso hizo de esta figura, y la que hemos elegido, es el título: a todas las otras las llamó *María Agustina Sarmiento*. ¿Por qué llamó a este lienzo *Las meninas*, y por qué representó la figura de manera tan peculiar?

Intentaremos encontrar respuesta a estas preguntas siguiendo la manera de hacer matemática: ante nosotros está un objeto, un cuadro, del que queremos entender algo. Estudiémoslo como estudiaríamos un texto matemático escrito sobre una pizarra.

Comencemos por el principio: el nombre. El cuadro se llama *Las meninas*. Picasso está, pues, describiendo algo sobre otro cuadro: el de Velázquez. ¿El qué, exactamente? Miraremos, pues, el cuadro de Picasso comparándolo con el de Velázquez.



Figura 2. Velázquez, *Las Meninas* (1656),
Museo del Prado, Madrid

Desde que escuché a Natacha Seseña hablando en un programa de la televisión catalana sobre Velázquez, los búcaros y la bucarofagia, el pequeño jarro de barro es lo primero que buscan mis ojos en cualquier representación de esta joven. Es emocionante el enorme talento de Picasso. Un par de líneas oscuras es todo lo que necesita para describirnos el búcaro que reposa sobre la bandeja. Tan solo unas líneas oscuras.

Un momento, hablando de líneas oscuras ... ¿no resultan un poco extrañas las de la bandeja? Aparecen delante del búcaro, no detrás. Al colocarme frente al cuadro de Picasso y me había imaginado a éste delante del lienzo de Velázquez, estudiándolo y viendo algo que luego me intenta contar a mí en su reproducción. Había dado por hecho, por lo tanto,

que el cuadro de Picasso estaba pintado desde el punto de vista de un Picasso espectador situado frente al de Velázquez. Pero eso no es compatible con que las líneas negras que representan el fondo de la bandeja aparezcan colocadas frente al búcaro, no detrás de éste. Aquí hay algo raro, y para intentar entenderlo, procedo según la manera de hacer matemática: con papel y lápiz. Abro mi cuaderno, saco la caja de lapiceros, y reproduzco sobre la hoja primero la bandeja con el búcaro del lienzo de Picasso, y después la bandeja como yo la dibujaría si fuese Picasso espectador mirando la escena de Velázquez.



Figura 3. La bandeja con el búcaro

No cabe la menor duda: las bandejas no casan, y las líneas de Picasso no están dibujadas desde el punto de vista de alguien que, situado frente al cuadro de El Prado, contempla a la doncella. ¿Quién, en la habitación de Velázquez, vería así el fondo de la bandeja? ¿Será, se me ocurre, que están dibujadas según las veía el pintor Velázquez, no el pintor Picasso mirando el cuadro de Velázquez?



Figura 4. La mano que sustenta la bandeja

Vuelvo a mirar ambos cuadros comprándolos. No, esta hipótesis no es correcta: de estar pintadas desde donde está colocado Velázquez, las líneas negras interiores de la bandeja aparecerían del lado de la tripa del búcaro, no del lado del asa. ¿Quién las ve así, entonces? Vuelvo al cuadro de Velázquez con el de Picasso en la cabeza, y recorro los distintos personajes representados en la escena, intentando imaginarme cómo ve cada uno de ellos las líneas de la bandeja. Sólo la propia M.^a Agustina las ve así.

Así pues, enunciemos una segunda hipótesis: este cuadro podría tratarse de M.^a Agustina vista por M.^a Agustina. Un par de segundos bastan para darnos cuenta de lo absurdo de esta sugerencia. La bandeja está descrita tal y cómo la ve M.^a Agustina, pero la doncella no ve sus propios ojos, que además está claro no

casan el uno con el otro, luego ni están vistos por M.^a Agustina, ni están vistos ambos desde el mismo lugar.

Nueva hipótesis de trabajo: Picasso abandona el punto fijo, se mueve físicamente alrededor de la figura de M.^a Agustina, elige unos cuantos lugares desde donde mira a la doncella y luego casa todas estas visiones en una red única. No parece, en principio, una hipótesis disparatada. Al fin y al cabo, de ser correcta, se trataría de una versión siglo XX del mismo juego que juega Velázquez: moverse de sus ojos a los de los reyes y espectadores, y de éstos, a través del espejo, a los del visitante que aparece por la puerta del fondo de la escena. En el cuadro de Velázquez algunos objetos y figuras están vistos desde un lugar, otros desde otros. En el cuadro de Picasso puede que una misma figura esté vista desde varios lugares simultáneamente.

Comprobémoslo, intentando averiguar, de ser así, cuáles son estos lugares en los que se para Picasso para dibujar a M.^a Agustina. Miremos de nuevo el cuadro. Las claves que buscamos habrán de estar en los detalles reproducidos en él: la bandeja sobre la que aparece el búcaro, la mano que sostiene la bandeja, el pelo y rostro y, finalmente, los ojos y la nariz. Ya tenemos el punto de vista desde el que está descrita la bande-

ja. Continuemos con la mano que la sustenta. La dibujamos. La única peculiaridad de esta mano es que en ella aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Esa es la clave que buscamos. ¿Quién está situado en la posición adecuada para poder ver esas almohadillas? Miramos de nuevo el cuadro de Velázquez: sólo el propio pintor, a la izquierda y por detrás de M.^a Agustina, podría percibir las.

Sigamos con la cabeza; la dibujamos. El pelo enmarca perfectamente el rostro, y el contorno de ambos aparece completo, como sólo pueden verlos las figuras de la derecha. La Infanta, por ejemplo, a la que M.^a Agustina mira de frente.

La propia M.^a Agustina, Velázquez, la Infanta. Parece que Picasso se va poniendo en el lugar donde están situados cada uno de ellos, y, entrenado en el proceso de abstracción, selecciona alguna característica de la figura elegida que describir desde ese lugar. La Sarmiento nos describe la bandeja sobre la que reposa el búcaro, Velázquez la mano que sostiene la bandeja, la Infanta el marco del rostro de M.^a Agustina. Estudiemos ahora ahora el ojo derecho.

Al reproducirlo sobre el cuaderno, nos damos cuenta de que hay tres claves esenciales en este ojo: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila. Estas claves indican que el ojo está descrito desde el perfil derecho, esto es, desde el lugar

que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. El mismo lugar, observo, desde donde está visto el búcaro. Tiene sentido, los padres se preocupan. ¿Se dará su niña a esas veleidades de la bucarofagia?

Picasso ya nos ha descrito la figura que componen doncella y

búcaro desde arriba desde la derecha, desde la izquierda y desde delante. ¿Habrá sido capaz de hacerlo también desde atrás? ¿Habrá sido capaz de dar la vuelta completa a la habitación, y llevar a cabo el prodigio de describir a la Sarmiento desde los cuatro costados? El lado conservador de mi razón me responde inmediato: imposible, la figura se disolvería. Pero entonces el lado matemático interviene: ¿por qué no? En matemáticas es posible hacerlo, por ejemplo con las herramientas de geometría algebraica desarrolladas por Grothendieck a mediados del siglo XX, ¿por qué no va a serlo también en pintura?

Repasamos el cuadro de Picasso. Sólo nos queda por analizar el ojo de la izquierda. Lo dibujo sobre mi cuaderno, y al hacerlo caigo en la cuenta de que está mirado desde el mismo lugar desde el que está mirada la nariz.

Vuelvo a estudiar la escena de Velázquez.

¿Desde dónde está visto este perfil? Desde la izquierda de Sarmiento. Es, pues, un ojo descrito como lo ven el visitante que aparece por la puerta el fondo y los reyes a través del espejo. M.^a Agustina vista desde detrás.



Figura 5. El contorno de la cabeza

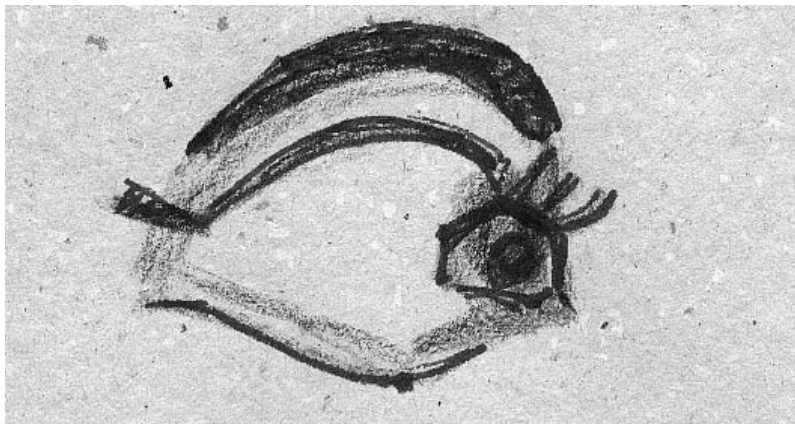


Figura 6. El ojo izquierdo



Figura 7. Ojo derecho y nariz

¡El cuarto costado que nos faltaba!

Como la veían Velázquez, la infanta, los reyes, el visitante; como se veía ella misma. Una persona vista desde delante, desde detrás, desde su izquierda, desde su derecha, e incluso desde sus propios ojos. Encolando todas esas visiones parciales y locales, Picasso nos ofrece una visión global completa, interroga a todos los testigos que estaban allí. “Me gusta su peinado”, comenta la infanta, en plena edad del pavo. Velázquez, pintor, se fija en las manos. “Buen pulso sosteniendo la bandeja”, concluye. “Tenía tanto miedo de que se me cayese el búcaro”, confiesa M.^a Agustina. “El búcaro, el búcaro... eso es lo que me preocupa a mí”, interviene la reina. “Pendiente de la niña sí parece que esté”, opina el rey. Y el visitante suspira mientras comenta, “¡Un magnífico perfil!”

Todos los lugares donde hay personas en el cuadro de Velázquez, aparecen representados, y en cada uno de estos lugares Picasso elige un par de ojos, y lo que ven esos ojos lo representa en un detalle de la figura.

Ya tenemos respuestas a nuestras preguntas. Y en el proceso de encontrar estas respuestas, hemos encontrado también algo más: un ejemplo gráfico de cómo describir el espacio cociente que se obtiene al establecer sobre los elementos de un conjunto, en este caso los personajes de la escena de Velázquez, una partición, una relación de equivalencia. Clasificamos las figuras en función de dónde estén colocadas respecto a la doncella del búcaro. El espacio resultante consta de cinco elementos o clases de equivalencia (ella misma, izquierda, derecha, delante y detrás), cinco puntos de vista, de cada uno de las cuales Picasso ha elegido un representante: la bandeja, la mano, el pelo, el ojo derecho y el perfil izquierdo.

En el proceso de construir este espacio cociente, Picasso nos da una descripción de una misma figura desde sus cuatro costados (delante, detrás, izquierda y derecha). Algo que desde el espacio cúbico y euclídeo de los pintores del siglo XVII y los matemáticos del XVIII (Clairaut, Euler...) no se podría hacer, salvo utilizando, como Velázquez, Euler y los grandes magos, trucos de espejos. ■