SUMA 48
Febrero 2005, pp. 81-90

Theatrum Machinarum Matemáquinas en el Museo Universitario de Módena

La colección de Máquinas Matemáticas del Laboratorio de Matemáticas del Museo Universitario de Historia Natural e Instrumentos Científicos de la Universidad de Módena (Italia) se construyó, tras haber experimentado acerca de su posible utilidad didáctica, basándose en indicaciones extraídas de la literatura científica y técnica desde la Grecia clásica hasta principios del siglo XX.

La colección está disponible en versión on-line en Internet (*http://www.museo.unimo.it/theatrum*) y se ofrece también en CD. En ambos casos, cada maqueta se presenta con una foto, una animación, una descripción y la demostración de propiedades. Las animaciones han sido realizadas en *Cabri-Géomètre II* (para Windows). Se incluyen asimismo algunas simulaciones en Java.

La colección del Laboratorio de Matemáticas recibe visitas de escolares, profesores e investigadores. Las maquetas han sido presentadas en varios lugares de Italia y en otros países (España, Alemania, Holanda, Francia, Canadá, Brasil, USA, Japón, etc).

Siguiendo a su creador, Marcello Pergola, el objetivo didáctico ha condicionado algunos aspectos de la colección, por lo que se trata, más que nada, de una antología de un conjunto mucho mayor. Hay muchas ventajas en el uso didáctico de estos artefactos: despiertan el interés del visitante, refuerzan su intuición y la imaginación, profundizan en la relación entre los modelos matemáticos y la realidad, fomentan la investigación y la obtención de pruebas, presentan elementos nuevos o poco comunes relativos al movimiento y, por último, llevan de una forma espontánea y natural a los usuarios (principalmente, a profesores y estudiantes, aunque no exclusivamente) a sumergirse en la dimensión histórica y a reflexionar sobre las relaciones entre las matemáticas, la sociedad y la cultura. Así, los usuarios, por un lado, evitan el riesgo de menospreciar la historia y destruir su propio pasado; y por otro, se encuentran con varios problemas que se resumen a continuación.

Modelos reales y virtuales

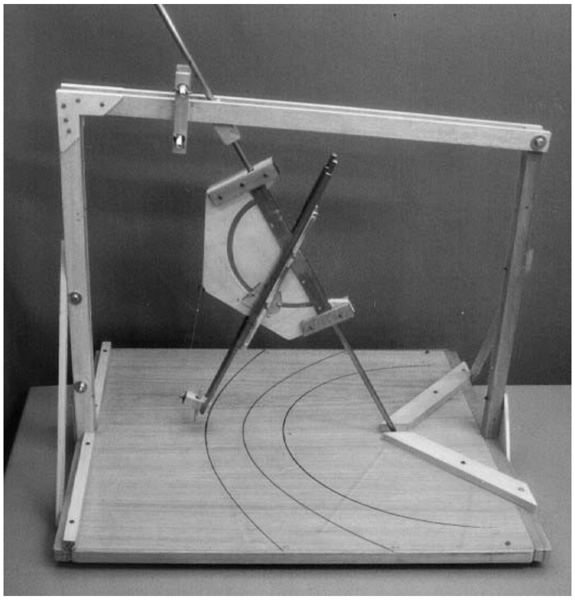
Dada su naturaleza matemática, las máquinas del museo podrían sustituirse por modelos virtuales (simulaciones virtuales, por ejemplo). Pero aquí la situación cambia profundamente. Desde una perspectiva epistemológica, hay una traslación, desde la relación entre dos tipos diferentes de modelos matemáticos, a la relación entre modelos matemáticos y concretos. Además, la manipulación de objetos concretos tridimensionales es mucho más enriquecedora y sugerente que la manipulación de un objeto virtual mediante un ratón: una manipulación física real (o imaginaria) es, casi siempre, en la que se basa una

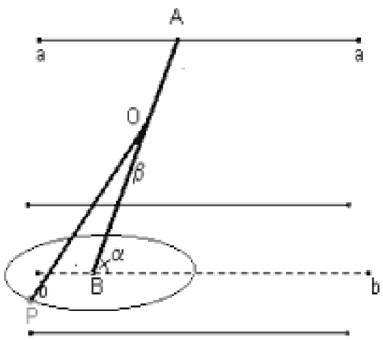
Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

simulación por ordenador. Es mucho mejor, colocar los modelos virtuales y físicos juntos y experimentar con ambos.

Ciencia y Tecnología

Como ocurre con todas las ciencias, la matemática se refiere a un campo accesible de forma precientífica. Y se mantiene en ese campo hasta que, en continua comparación con otras ciencias y actividades, se va diferenciando progresivamente, se expresa, enriquece temas, métodos y lenguajes y da sentido a sus propios programas de investigación.



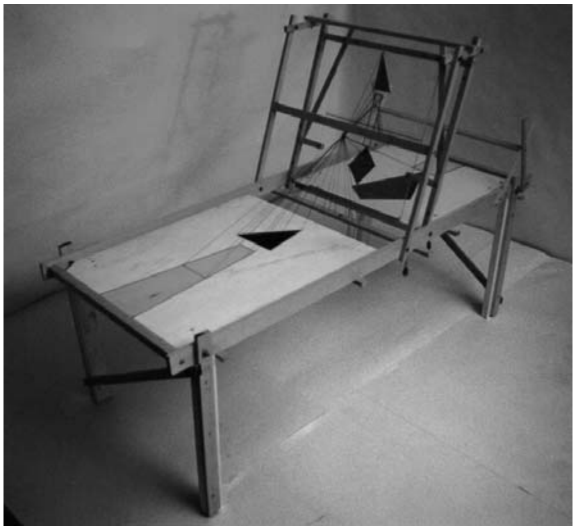


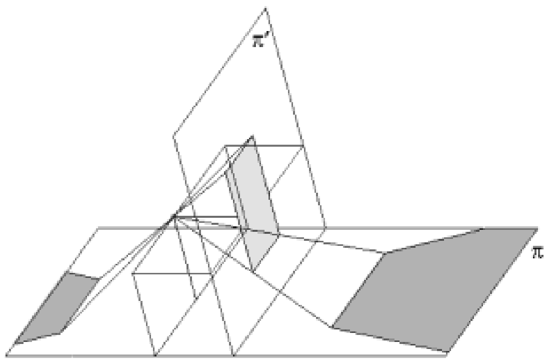
Sección cónica (Compás perfecto)

Los artefactos de esta colección son un ejemplo claro de ello. Ya sea porque hayan sido usados por teóricos o prácticos, o porque hayan tenido relaciones complejas con las formas de conceptualización y contenidos del conocimiento matemático. Aunque son profundamente diferentes (por ser concretos) de los objetos matemáticos, siguen estando próximos entre si y se desarrollan conjuntamente.

De manera simétrica, las comunidades de matemáticos siempre se han distinguido claramente de las comunidades de técnicos (artesanos, ingenieros, artistas, comerciantes, etc.) Sin embargo, ambas están muy unidas por una densa red de comunicaciones e intercambios.

Las máquinas y los instrumentos constituyen uno de los puntos de contacto (o fricción) entre la ciencia y la tecnología: siempre hay una tendencia a encontrar un punto de equilibrio reduciendo cada una a un lenguaje; aunque siempre está la posibilidad de que realidades no científicas influyan en el pensamiento científico formal.

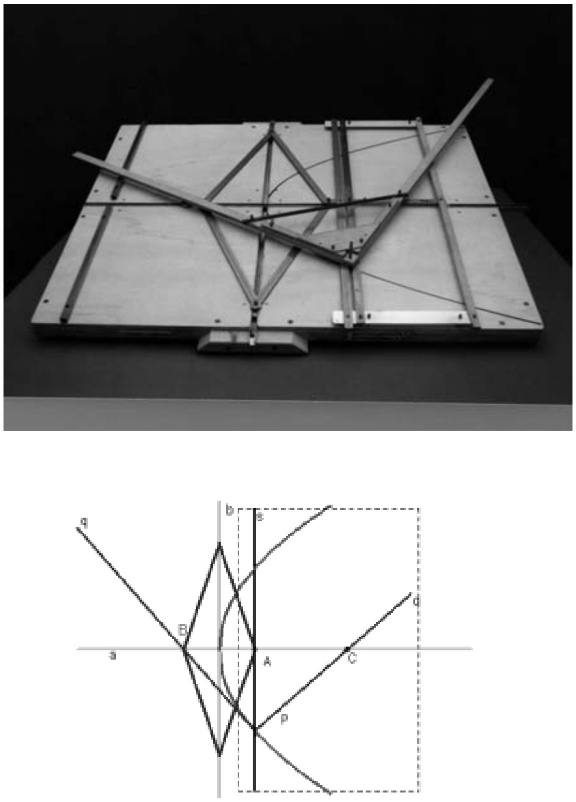




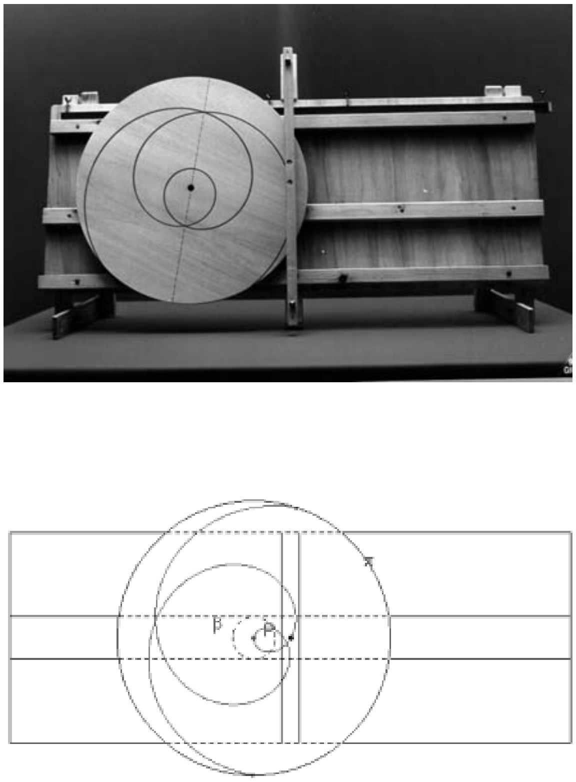
Transformaciones (Génesis tridimensional de la homología)

Clasificación de las matemáquinas

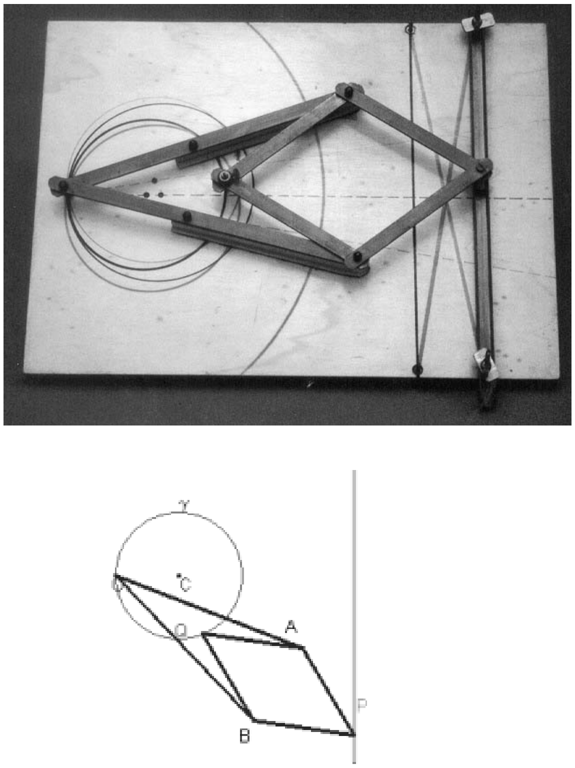
Las máquinas de la colección se dividen en cinco clases (algunas de ellas se solapán):



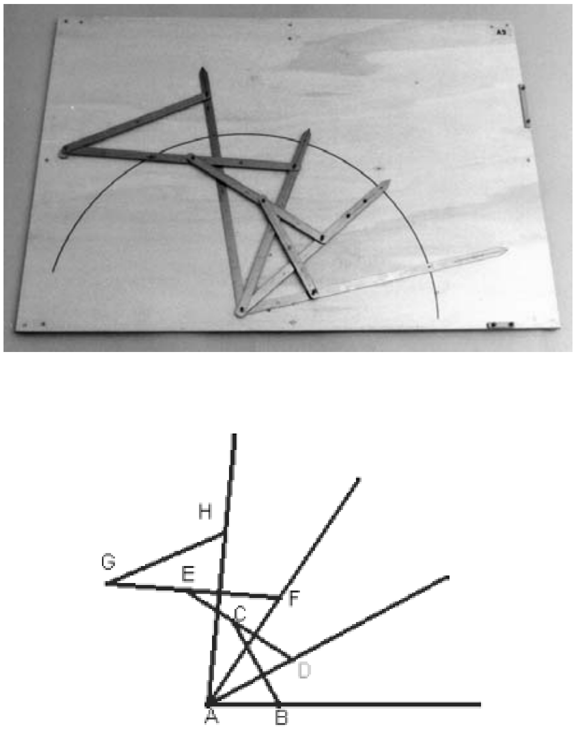
Sección cónica (parabológrafo)



Curvígrafos (Espiral de Arquímedes)



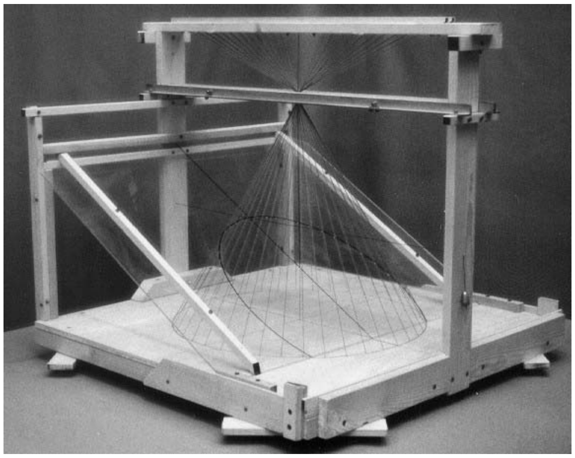
Transformación de una recta en una circunferencia



Instrumento para resolver problemas (Trisector del Kempe)

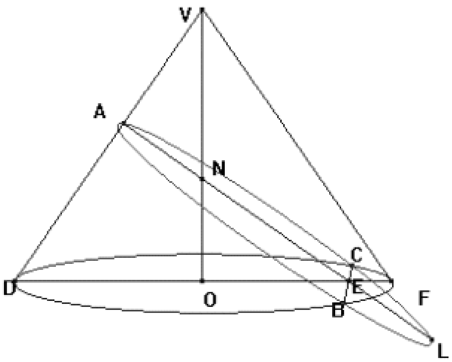
1) Geometría de secciones cónicas;
2) Proyección y Perspectiva;
3) Transformaciones;
4) Trazadores de curvas (curvígrafos);
5) Solución mecánica de problemas.

1. Geometría de las secciones cónicas



Sección cónica (Teoría de Menecmo)

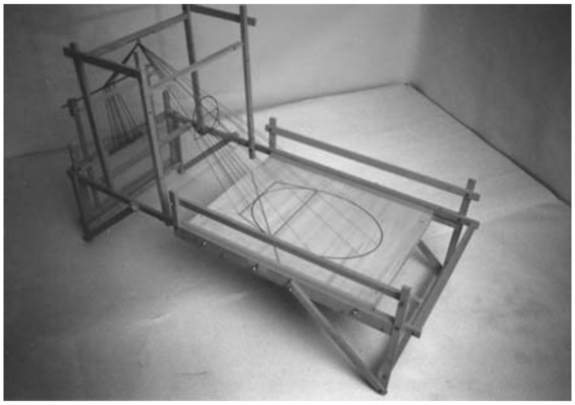
Un primer grupo de maquetas ilustra las teorías clásicas de Apolonio y Menecmo. Difieren en dos aspectos. Menecmo usa solo los conos obtenidos por rotación de triángulos rectángulos adecuados; el corte se realiza perpendicularmente a una de las caras del triángulo axial y de ahí que para obtener todas las cónicas se necesiten diferentes tipos de conos. Apolonio, por el contrario, hace uso de un cono genérico que es cortado por planos de diferente inclinación; de ahí que, del mismo cono, se puedan obtener todos los tipos de cónicas.

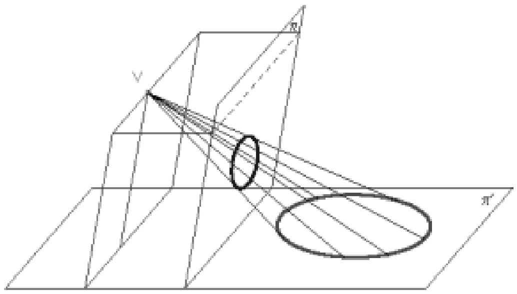


Sección cónica (Teoría de Menecmo)(bis)

Los *síntomas* los obtienen ambos autores razonando en el espacio tridimensional, pero Apolonio los interpreta en el plano mediante la aplicación de las áreas: de esta forma se inventan los nombres estándar (elipse, hipérbola y parábola). Quedan muchos problemas abiertos: la identidad entre las secciones de un cilindro y las de la elipse estaba en cuestión; las dos ramas de la hipérbola no se concebían como partes de la misma curva, etc. Las maquetas de este grupo son estáticas, pero las podemos transformar en máquinas mentales para imprimirles movimiento.

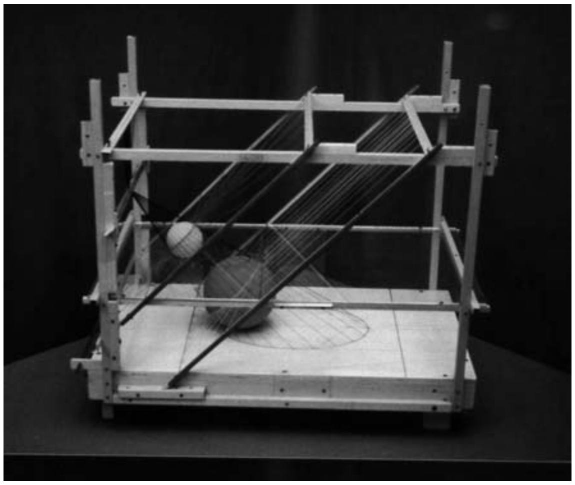
Un segundo grupo lo forman máquinas que dibujan curvas en el plano. Unas son una realización directa en tres dimensiones de la definición clásica. Otras están basadas en el conocimiento del síntoma del que se va a hacer uso. La máquina está construida para obedecer al síntoma. De esta forma el síntoma modifica su estatus: ya no es una verdad estática sino que funciona para construir la cónica.

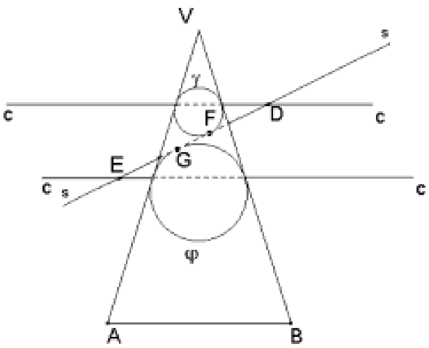




Sección cónica (Teorema de Stevin)

Además, se elimina cualquier relación con el cono subyacente: los puntos de la curva se posicionan en el plano con respecto a la parte fija de los mecanismos que hace las veces de sistema de referencia. En algunos casos (como en la máquina de Paciotti), se puede utilizar la misma máquina para dibujar todo tipo de cónicas mediante pequeños movimientos continuos. De esta manera nos centramos en dos importantes cuestiones: la naturaleza unitaria de las cónicas y la importancia del concepto intuitivo de continuidad que se usó ampliamente en el S. XVII.

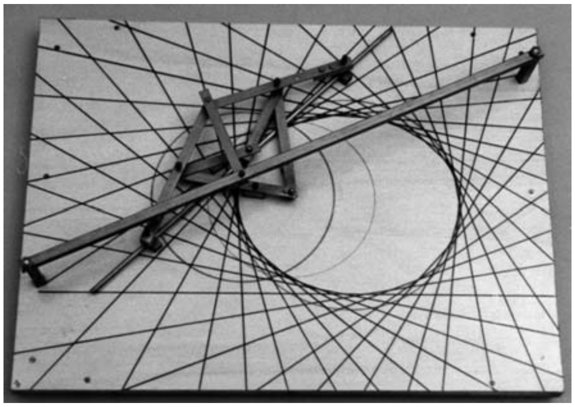


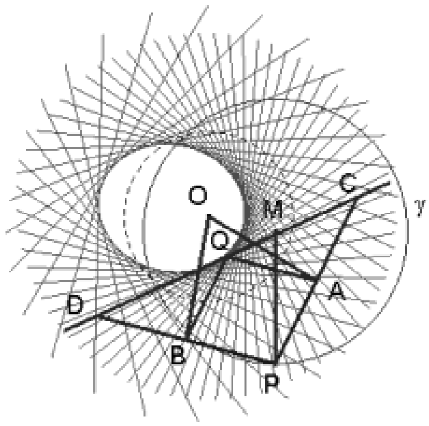


Sección cónica (Teorema de Dandelin)

La teoría de las cónicas se desarrolló en varias direcciones: hacia los nuevos tipos de representación en el plano de objetos tridimensionales; hacia la simplificación del tratado de Apolonio, hacia la aplicación del álgebra a la geometría... En esta última línea, se enunciaron nuevas propiedades que se plasmaron en ecuaciones que se transformaron en leyes que dieron pie a tratados. Los *conicógrafos* se convirtieron en máquinas matemáticas en tres sentidos pues: daban cuerpo a una propiedad geométrica del objeto dibujado, podían ser mentales y además, dependían de la teoría geométrica.

Ocurre bastante a menudo que, para cada nuevo descubrimiento teórico se puede diseñar un nuevo instrumento. Algunos mecanismos que funcionan en una conjugación ortogonal son reconsiderados en conjugación oblicua; las propiedades de los círculos directores sugieren construir mecanismos que utilicen las propiedades del rombo.





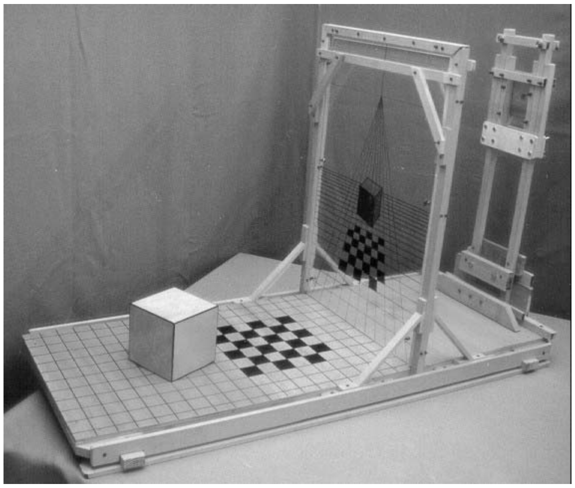
Sección cónica Elipse (Método de la polar)

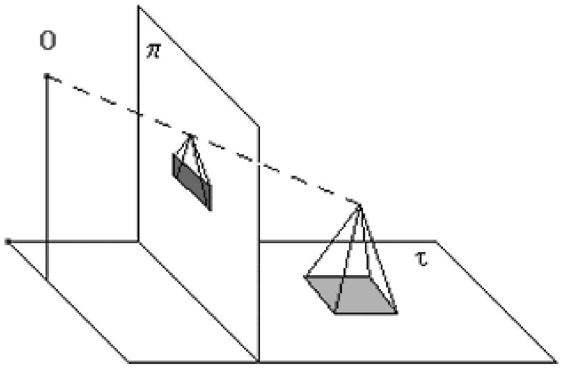
Desde el siglo XVI en adelante, la irrupción del movimiento en las matemáticas ha sido muy considerable: por un lado, las matemáticas y los mecanismos ya no están separados, por otro lado, los matemáticos tienden a especializarse más y a concebir máquinas como modelos mentales, dejando para los técnicos la solución de los problemas prácticos de construcción.

Otro grupo de maquetas ilustran los teoremas de Dandelin sobre las cónicas. Este Autor (en el S. XIX) reconsidera el punto de vista de los antiguos griegos, volviendo a situar las cónicas sobre el cono y obteniendo nuevos resultados. Recurre a la intuición y al principio de continuidad. Además, genera una interesante familia de curvas planas contínuas (las curvas focales, estudiadas, entre otros, por Quetelet). Sus estudios confirman unas observaciones previas: sugieren la construcción de nuevas máquinas y coloca en un marco teórico más amplio a máquinas ya conocidas que generan algunas curvas (el cuadrado de Newton, por ejemplo)

2. Proyecciones y Perspectiva

Cuando Durero visitó Italia en 1506, buscaba una teoría rigurosa de la perspectiva: los resultados de sus estudios y de sus encuentros con otros artistas fueron condensados en unas pocas páginas y en cuatro famosas imágenes de su tratado. Las cuatro máquinas de Durero se reproducen en el primer grupo de maquetas, que contiene instrumentos mecánicos para la imitación de la realidad. Un segundo grupo de maquetas contiene instrumentos que dependen de la teoría geométrica y que no podrían existir sin ella.





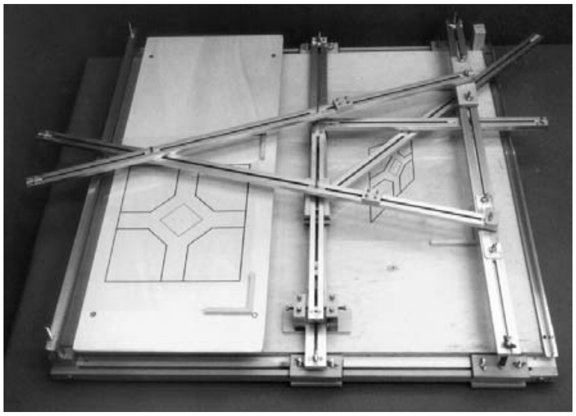
Proyección y perspectiva (Ventana de Durero)

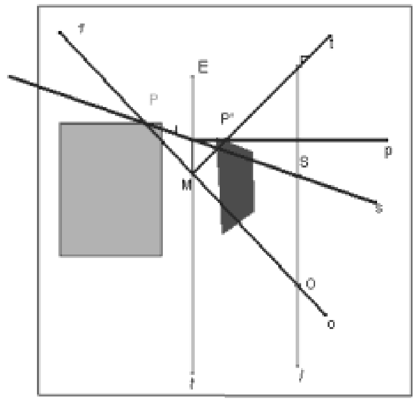
En lo concerniente al primer grupo de maquetas se pueden hacer las siguientes observaciones:

1) Las variaciones técnicas entre los instrumentos tienen como fin superar las dificultades prácticas y alcanzar un mayor nivel de automatismo, sin embargo, a pesar de incrementar su refinamiento mecánico, se sustituyeron, más tarde, por cámaras oscuras y similares, que son más precisas y fáciles de utilizar.
2) Los instrumentos para la perspectiva mantienen un estatus mágico, debido al escaso conocimiento de las leyes matemáticas que describen la degradación de la imagen al pasar del espacio al plano.
3) Los instrumentos para la perspectiva eran utilizados por amateurs más que por pintores profesionales. Como los amateurs requerían saber reglas para usarlos, se escribieron muchos tratados de diferentes niveles, desde muy simples y descriptivos a muy difíciles, incluso abstrusos.

Sobre el segundo grupo podemos decir que:

1) Existe una conexión estricta entre la manipulación de los instrumentos mecánicos y el teorema de Stevin: si el plano de la imagen rota sobre la línea del suelo y si el observador rota sobre sus pies en la misma dirección paralela al plano, la perspectiva no cambia y se mantendrá también cuando el plano de la imagen se extienda sobre el plano horizontal. Este movimiento de Stevin fue utilizado por De La Hire para aplanar un cono (junto con su sección) sobre el plano de su base circular: de ahí que las cónicas son supuestas transformadas de este círculo. La génesis de la transformación geométrica tiene que ver siempre con el conjunto de puntos de figuras particulares y, sólo más tarde, implica al plano completo.
2) Las *máquinas de Lambert* ofrecen una solución al problema de representar la transformada de cualquier figura plana de la forma más fácil y automática. En la práctica no son útiles (por su tamaño y escasa precisión) pero son teóricamente importantes, pues explican la influencia de la teoría mecanicista del siglo XVIII en la expresión de la homología de planos.

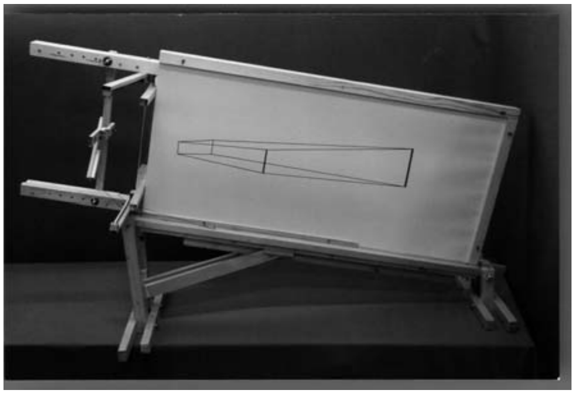


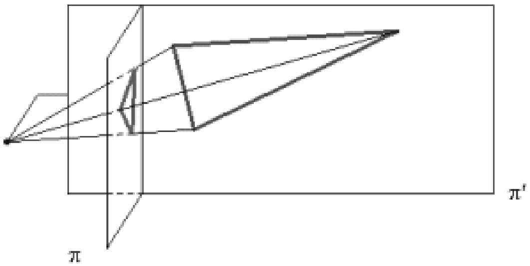


Proyección y perspectiva (Lambert)

Un tercer grupo se ocupa de la *anamorfosis*. Los historiadores han analizado los lazos existentes entre la producción de imágenes anamórficas, el comienzo de las tendencias en la pintura, la pasión por los autómatas y la filosofía cartesiana.

Desde una perspectiva matemática, la anamorfósis del plano no añade nada a la perspectiva estándar; se trata de un uso exacerbado de las mismas leyes. Así y todo, dada la falta de algoritmos formales, es necesario referirse a procedimientos empíricos. La anamorfosis obtenidas con espejos, son muy difíciles de estudiar. En este casoes esencial el uso de modelos.



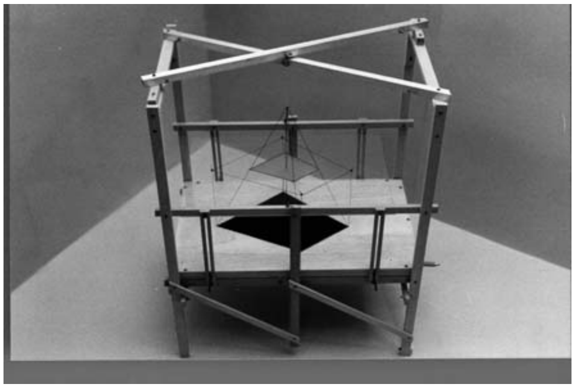


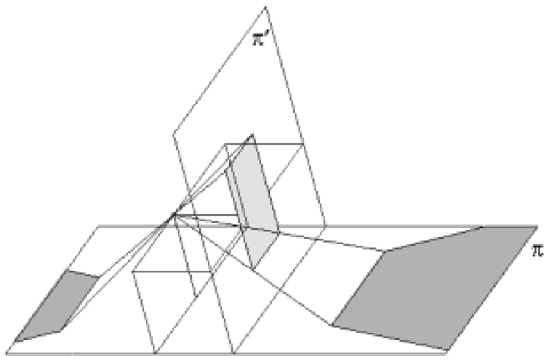
Proyección y perspectiva (Anamorfosis) (bis)

3. Transformaciones

La importancia del concepto de transformación en el S. XIX está relacionada con el desarrollo de la geometría proyectiva como campo de investigación autónomo y orgánico. Desde el primer momento, la invarianza de algunas propiedades de la configuración geométrica bajo proyección está relacionada o bien con problemas prácticos, o bien con el movimiento y la continuidad. Muchas líneas de investigación confluyen en la teoría de las transformaciones, como, por ejemplo, los trabajos de Bravais sobre la estructura cristalina, los de Jordan sobre los grupos de movimiento, el estudio de la relación entre la geometría afín, la mecánica de las deformaciones y el cálculo baricéntrico, los estudios de Helmotz y Lie sobre el movimiento de los cuerpos rígidos.

A un nivel más elemental, las isometrías han desempeñado un papel fundamental en la geometría; a partir de Euclides se utilizó, en la práctica, la estructura de grupo antes de que se hubiese clarificado la abstracta noción de grupo.



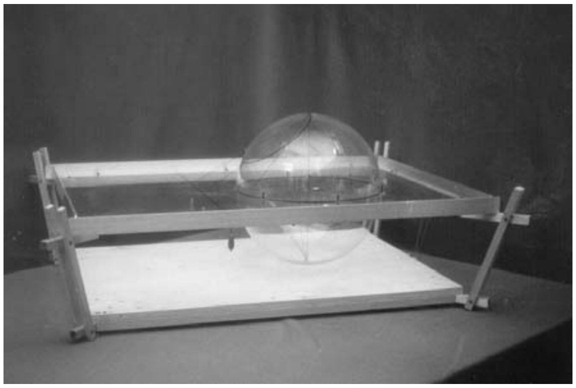


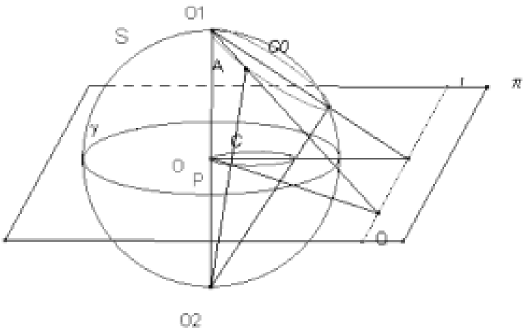
Transformaciones. Homotecia (Pantógrafo de Scheiner)

En el siglo XIX, la ingeniería mecánica se convirtió en una de las tecnologías dominantes: llamaba la atención el estudio de sistemas articulados que hacían realidad la transmisión de movimientos. Realmente, los abstractos aparatos teóricos (que, aunque estén relacionados con lo concreto, no son más que invenciones intelectuales) renuevan la mirada que observa y describe la realidad. De ahí que la teoría de transformaciones e invariantes arrojara nueva luz sobre el análisis y el diseño de máquinas. De esto se muestran ejemplos elementales mediante el pantógrafo de Scheiner y el inversor de Peaucellier.

Una parte de las maquetas muestran las más elementales transformaciones en el plano (isometrías, escalamiento y homotecias). Los puntos correspondientes se representan mediante un punto director y un punto de trazo, cada uno con dos grados de libertad.

Por un lado, estos instrumentos deberían concebirse como piezas que, ensambladas, dan lugar a un mecanismo más complejo; por otro lado, algunas de ellas pueden concebirse como la generalización o la particularización de otra.





Transformaciones (inversión circular)

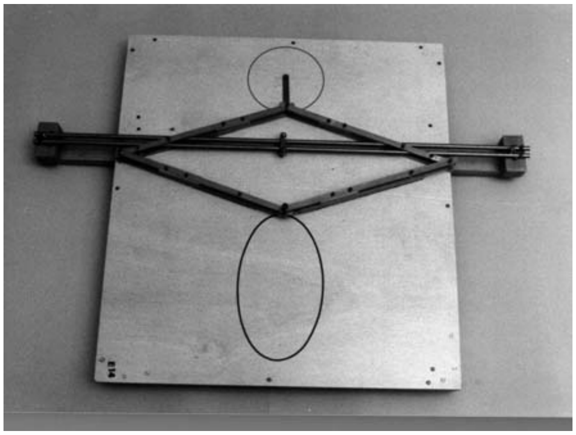
Todos los mecanismos son instrumentos “locales”: determinan una correspondencia entre regiones limitadas del plano, mientras que las transformaciones geométricas se definen, globalmente, para todos los puntos del plano.

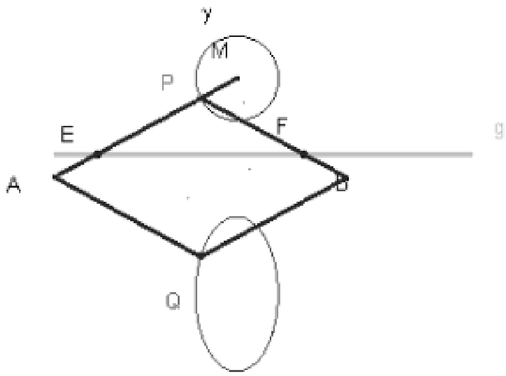
La transformación geométrica determinada por el instrumento no tiene relación directa con el movimiento físico del mecanismo; sin embargo, explorando el mecanismo, se pueden hacer conjeturas acerca del tipo de transformación de que se trata y probarlo luego de forma rigurosa. Estas características hacen de los mecanismos para generar transformaciones un interesante campo de experimentación para los estudiantes de secundaria y superiores.

Otras maquetas llaman la atención sobre los estrictos vínculos entre el espacio tridimensional y el plano. Por ejemplo, hay modelos que ilustran la relación entre la proyección estereográfica y la inversión circular.

4. Trazadores de curvas (curvígrafos)

Ya hemos citado algunas gráficas cónicas. Ahora nos referiremos a las curvas algebraicas de cualquier grado y a las curvas trascendentes. El tema es amplísimo. Las curvas algebraicas suelen tener formas muy agradables, pero lo más importante es que han constituido un campo de ejercicio para la génesis de muchos conceptos básicos (en la geometría y el cálculo) y la invención de algoritmos para resolver problemas difíciles.

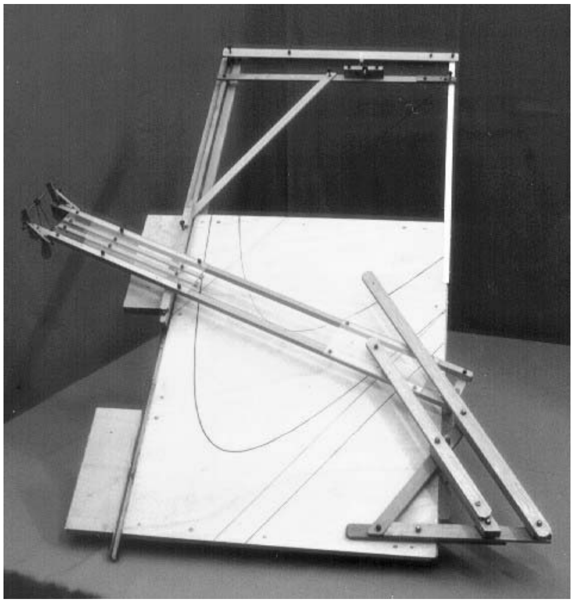


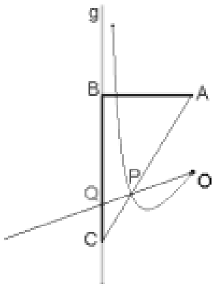


Curvígrafos (Elisógrafo de Delaunay)

Se puede usar alguna propiedad de la curva con el fin de dibujarla mecánicamente, mediante un movimiento continuo. De ahí que los instrumentos que dibujen la misma curva deberían considerarse equivalentes entre sí en algún modo: desde la perspectiva clásica el total de los instrumentos que dibujen una misma curva caracteriza la *naturaleza* de la curva. Esta idea de que cada objeto matemático tiene una naturaleza solo se cuestiona en el siglo XIX. Ahora disponemos de instrumentos, los ordenadores, que pueden dibujar cualquier curva real dejando a un lado todas las propiedades geométricas y centrándose tan sólo en la relación numérica.

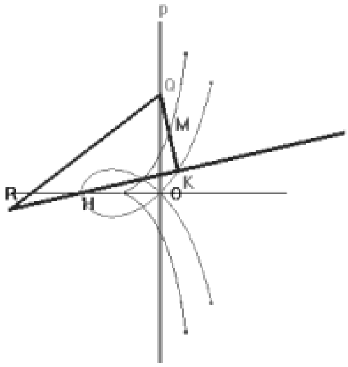
Se podría obtener una curva aplicando una transformación adecuada a una curva conocida. Este es el caso de la solución dada por Peaucellier al problema de diseñar un instrumento que pudiera dibujar una línea recta. La inversa también es cierta: a veces, el estudio de curvas y *curvígráfos* ha llevado a inventar procedimientos para realizar transformaciones.





Curvígrafos (Hiperbológrafo de Descartes)

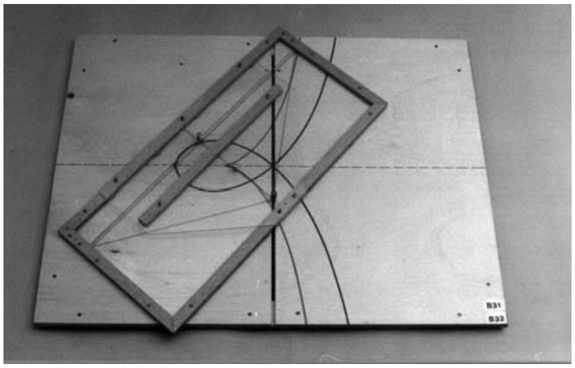
Existen otras técnicas para obtener una nueva curva a partir de otra conocida que pueden ayudar a diseñar mecanismos. Como por ejemplo, entre otros, la curva podaria.



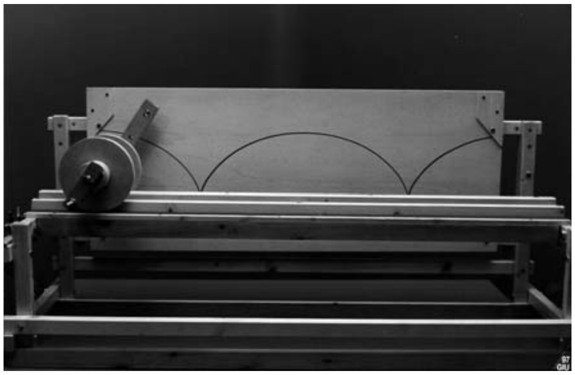
Curvígrafos (Cuadrado de Newton)

Las máquinas mentales han jugado un papel tan fundamental en la geometría que incluso están documentadas en la *Géomètrie* de Descartes. Un famoso teorema que se ocupa de este tipo de instrumentos teóricos fue demostrado por Kempe en el siglo XIX y expone un método general para describrir curvas del plano de grado nueve mediante engranajes.

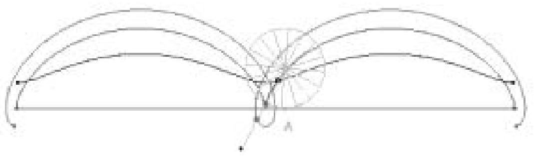
El análisis de este tipo de mecanismos consta de dos actividades complementarias: primero, la comparación de los mecanismos que describen la misma curva para descubrir una equivalencia oculta y para encontrar las propiedades geométricas de algunas figuras elementales que, a través de movimientos, se convierten en elementos versátiles de máquinas complejas. En segundo lugar está el estudio de la “biografía” del mecanismo que, en parte, se solapa con la biografía del objeto matemático relacionado con él. Incluso el cambio en el sistema teórico puede modificar el estatus de ambos. Las curvas trascendentales tienen una *biografía* muy interesante que se remonta a la Grecia clásica y que enseña muchas contribuciones interesantes en el desarrollo del cálculo.



Curvígrafos (Cuadrado de Newton)



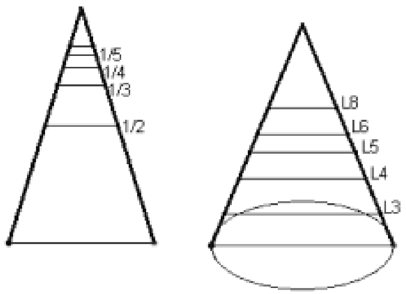
Curvígrafos (Cicloide)



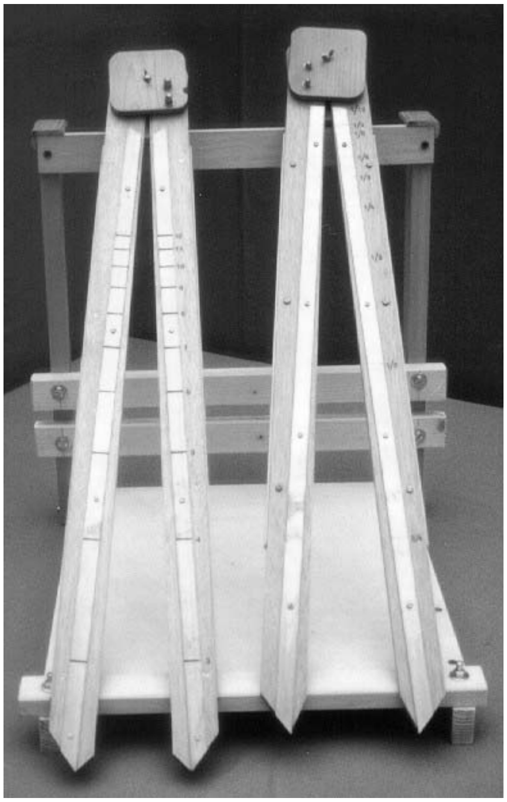
Curvígrafos (Cicloide)(bis)

5. Solución mecánica de problemas

En el último grupo de maquetas se han recopilado instrumentos que fueron diseñados para resolver algún problema importante, que haya sido estudiado durante siglos, y haya jugado un papel importante en el desarrollo de las matemáticas. Nos referimos, por ejemplo, al problema de la trisección del ángulo y a la duplicación del cubo. Algunas maquetas son prototipos de familias enteras de instrumentos que tienen el mismo fin. Otras están más relacionadas con juegos intelectuales y pueden, muy bien, representar la atmósfera cultural de cierta época.



Instrumentos para resolver problemas (Compás de proporción)



Instrumentos para resolver problemas (Compás de proporción)

■

REFERENCIA WEB

http://www.museo.unimo.it/theatrum