

Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II)

La primera parte se dedicó al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales (determinista lineales y sistemas de funciones iteradas) y se hizo un estudio exhaustivo del triángulo de Sierpinski. Continuamos aquí con otras formas de generar fractales.

The first part of this article was devoted to the concept of fractal, its dimension and the generation of some kinds of them (deterministic, linear and systems of iterative functions) as well as to an exhaustive study of Sierpinski's triangle. The article goes on with other ways of fractal generation.

La primera parte de este artículo se dedicó al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales (determinista lineales y sistemas de funciones iteradas) y se hizo un estudio exhaustivo del triángulo de Sierpinski.

Continuamos aquí con otras formas de generar fractales.

Sistemas L

Además de los sistemas de funciones iteradas, hay otras de obtener objetos fractales. Una de ellas es mediante el uso de sistemas L. Fueron ideados en 1968 por el biólogo Aristid Lindenmayer y, mediante ellos, se podían describir diferentes tipos de plantas.

Un sistema L está formado por un elemento inicial, un conjunto de símbolos, (letras y caracteres especiales), y unas reglas de transformación de esos símbolos.

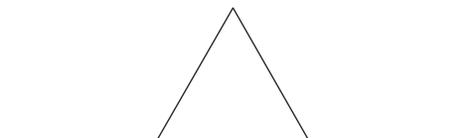
En los sistemas L cada símbolo puede ser sustituido por todo un conjunto de símbolos. Por ejemplo:

$$F \rightarrow F-F++F-F \quad + \rightarrow + \quad - \rightarrow -$$

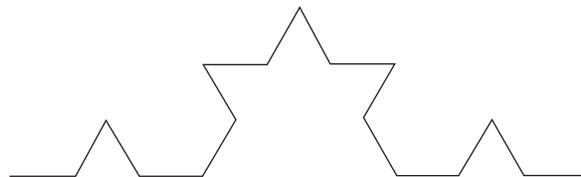
El elemento inicial es un segmento representado por la letra F, + significa giro de 60° en el sentido de las agujas del reloj y - en sentido contrario.

Comenzamos con F _____

F-F++F-F



F-F++F-F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F



Antonia Redondo Buitrago
 IES Diego de Siloé. Albacete.
M^a José Haro Delicado
 IES Al-Basit. Albacete.

Si continuamos se obtiene la curva de Koch. El triángulo de Sierpinski se obtendría con el sistema

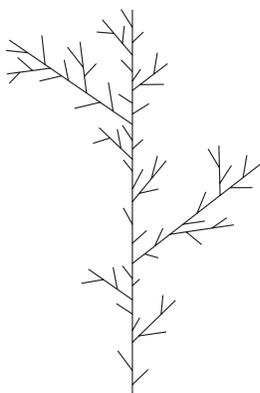
$$F \rightarrow F-F-F-f \quad f \rightarrow ff \quad + \rightarrow + \quad - \rightarrow -$$

La interpretación es la misma, sólo que f supone el mismo avance sin dejar huella.

La aplicación más importante de los sistemas L está en el diseño de modelos que permiten simular diversos tipos de plantas y árboles donde se da un proceso de ramificación. Un modelo sería

$$F \rightarrow F(+F)F(-F)F \quad + \rightarrow + \quad - \rightarrow - \quad (\rightarrow (\quad) \rightarrow)$$

Los giros a la izquierda “-” y los giros a la derecha “+” son de 28.58° , (“ significa el comienzo de una nueva rama que termina cuando aparece “”).



Actividad 16: Sobre cuadrículas o tramas de puntos y utilizando sistemas L genera diferentes tipos de árboles, como el que se muestra arriba.

Objetivos: Practicar con otra forma de generar objetos fractales y modelizar formas que se dan en la naturaleza.

Observaciones: Se vuelve a trabajar en esta actividad con la iteración y autosimilaridad. Se hace necesario el uso de la imaginación y se unen las matemáticas con la realidad intentando recrear modelos naturales con modelos matemáticos.

Una de las cosas más interesantes de esta actividad es que, después de haber dibujado en la cuadrícula el objeto, tienen que traducirlo a un sistema L, lo que implica razonar sobre conceptos geométricos y sobre conceptos relacionados con la geometría fractal.

Fractales deterministas no lineales

Se inicia aquí la introducción de un nuevo tipo de sistemas dinámicos que permiten ver la relación que se establece entre matemáticas y entorno que nos rodea.

El biólogo Robert May en 1976 publicó un modelo para el estudio de la evolución de ciertas poblaciones de insectos en el que daba la siguiente relación entre las poblaciones de dos años consecutivos $p(n+1) = k p(n) (L-p(n))$, donde $p(n)$ es el índice de la población en el año n , L es la población máxima estimada y k es una constante que depende únicamente del tipo de población (especie y estado) y de su ubicación, pero no depende de n .

Si en la ecuación anterior dividimos por L y llamamos x_n a $P(n)/L$, resulta:

$$\frac{p(n+1)}{L} = \frac{k p(n)(L-p(n))}{L} \quad \frac{p(n+1)}{L} = k x_n(1-x_n)L$$

Si $kL = r$, se tiene $x_{n+1} = r x_n (1-x_n)$ siendo x_n mayor o igual que cero y menor o igual que uno y x_n el cociente entre la población del año n y la población máxima estimada. Dicha fórmula nos permite hallar la población en un determinado año conociendo la población en el año anterior. Como x_{n+1} ha de estar entre 0 y 1, la constante r ha de estar entre 0 y 4.

La ecuación anterior se puede representar mediante la función $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f(x) = rx(1-x)$ con k perteneciente al intervalo abierto $(0, 4)$. El par $([0, 1], f)$ constituye un sistema dinámico discreto. Este sistema dinámico tiene una sencilla función de transición (cuadrática) y, sin embargo, explica de forma precisa cómo se pasa del determinismo al caos.

Actividad 17: Para la función $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f(x)=rx(1-x)$, ¿por qué ha de estar r entre 0 y 4, si se quiere que $f(x)$ esté entre 0 y 1?

Si $r=0$ averigua los puntos fijos y la órbita de cualquier punto del espacio de fases. Toma como punto inicial, por ejemplo, $x_0=0,4$.

Si $0 < r \leq 1$ ¿cuáles son los puntos fijos? Si $r \in (1, 3]$ ¿Cuál es el punto fijo existente?

Comprueba lo que sucede con las órbitas de los puntos del espacio de fases, si r está entre 1 y 3. Comprueba lo que sucede con las órbitas de los puntos del espacio de fases si $r \in (3, 3.5]$ y si $r \in (3.5, 4]$.

Si tienes en cuenta que estás analizando la evolución de una población, ¿qué significan los resultados obtenidos?

Objetivos: Profundizar en los conceptos de sistema dinámico discreto, órbita y punto fijo. Aplicar dichos conceptos a un caso real como es la evolución de poblaciones. Trabajar con la función cuadrática y razonar sobre ella y la importancia de sus elementos. Iniciar al alumno en la teoría del caos.

Observaciones: Con esta actividad se hace al alumno reflexionar sobre la importancia de la función cuadrática y el efecto

de sus elementos: coeficiente principal, cortes con el eje horizontal y vértice.

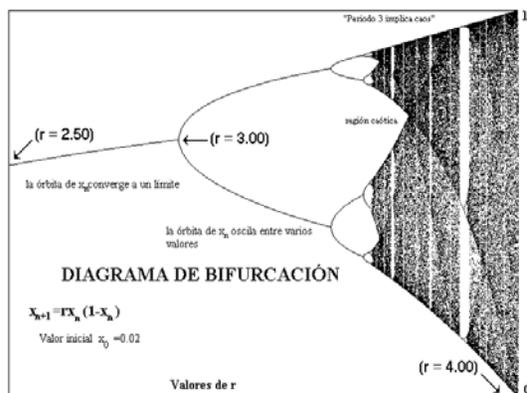
Al ir dando diferentes valores a r , se puede ir observando la evolución de las órbitas y en qué valores (puntos fijos) se establecen. Al ir aumentando el valor de r el periodo se va duplicando hasta llegar a un valor donde las órbitas van pasando de unos valores a otros sin ningún patrón de conducta fijo, lo que indica el salto al caos. Esta actividad ha de realizarse con diferentes valores iniciales para cada valor de r y tomar más de 50 iteraciones porque al principio no se manifiesta la evolución de las órbitas.

*La geometría fractal
cambiará a fondo su visión
de las cosas. Jamás volverá a
pensar lo mismo de todos
estos objetos.*

Es importante interpretar los resultados, para que se vea lo que significa la actividad, aplicada a evolución de poblaciones. El alumno debe tener claro lo que significa r y x_n , y a la vista de los resultados analizar la evolución de las poblaciones en función de los diferentes valores iniciales de x y de los diversos valores de r .

Tratamiento informático: Calculadora gráfica para obtener los valores de las órbitas y poder representarlas gráficamente. Este último aspecto es muy importante para que se aprecien los valores en torno a los cuales se estabilizan las órbitas.

Observemos el siguiente diagrama:



En este diagrama aparecen los puntos límite a los que convergen las órbitas de casi todos los puntos x_0 del intervalo $(0, 1)$,

según los diferentes valores de r . Este diagrama tiene estructura fractal. Se pone de manifiesto el concepto de autosemejanza porque dentro de él existen copias de sí mismo.

Si se observa el dibujo, denominado también diagrama de Vershultz o Feigenbaum, se aprecia que si $r = 3$ y hasta $r = 1 + \sqrt{6}$ aparece una órbita periódica de periodo 2. A partir de ahí la órbita se duplica en otra de periodo 4 y así sucesivamente. Se busca el punto en el que se da el salto de la duplicación de las órbitas al caos.

Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Vamos a ver otros dos objetos fractales deterministas no lineales pero de variable compleja. Nos centraremos en el estudio del sistema dinámico (C, f_c) donde $f_c(z) = z^2 + c$, donde c y z son números complejos. Para determinados valores de c , hay puntos z_0 cuyas órbitas divergen hacia infinito y hay otros puntos z_0 cuyas órbitas convergen a un punto fijo o a un ciclo periódico. En medio de estos dos conjuntos de puntos queda una región infinitamente delgada que es la frontera del segundo conjunto, el formado por los puntos que convergen a un punto fijo o a un ciclo periódico. Dicha frontera es el llamado conjunto de Julia.

Actividad 18: Si $c=0$ ¿Qué conjunto de Julia se obtiene?

Objetivos: Trabajar con sistemas dinámicos complejos; recordar y manipular conceptos pertenecientes a la teoría de números complejos.

Observaciones: En este caso, el conjunto de Julia es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. Si consideramos los puntos cuya distancia al centro es 1, se puede ver que muy próximos a ellos hay puntos, situados a una distancia del origen menor que uno, cuyas órbitas convergen a cero y puntos, situados a una distancia del origen mayor que uno, cuyas órbitas divergen a infinito. Las órbitas de los puntos de la circunferencia o bien convergen a un punto fijo o son periódicas, pero siempre permanecen acotadas.

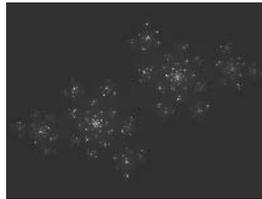
Al variar el parámetro c , la variedad de conjuntos de Julia que puede aparecer es infinita y hay una diferencia entre ellos que es la siguiente: algunos aparecen como una pieza unida, mientras que otros parecen estar compuestos de infinitos fragmentos. Esto es debido a la autosimilitud, ya que si un conjunto está dividido en dos partes cada una de estas partes lo está en otras dos semejantes, etc. hasta quedar convertido en una especie de polvo fractal.

Para saber si el conjunto de Julia es o no conexo se puede utilizar la órbita de cero. Si ésta escapa al infinito, el conjunto

aparece como polvo fractal. Si no escapa al infinito el conjunto es conexo.



Conjunto de Julia conexo

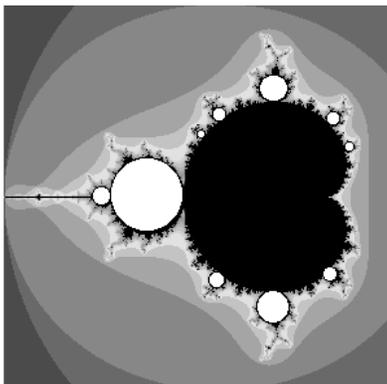


Polvo fractal

El conjunto de Mandelbrot es uno de los más conocidos y a la vez, uno de los más complejos. Su nombre se debe a su descubridor Benoit Mandelbrot.

Si clasificamos los conjuntos de Julia en dos grupos, conexos o no conexos, como se ha indicado más arriba, y consideráramos el conjunto de números complejos c , para los que el conjunto de Julia es conexo, es decir, el conjunto de puntos c , para los que la órbita de cero no tiende a infinito, nos encontraríamos con un objeto de extremada complejidad cuya frontera es un fractal. Dicho objeto no es autosemejante, pero existen en dicha frontera infinitas *casi* copias del mismo. La razón de hablar de *casi* copias es la de que no son exactamente iguales al original, ni hay dos copias iguales entre sí. El conjunto de Mandelbrot, además, es conexo, lo que quiere decir que todos sus puntos permanecen unidos al conjunto principal como por una especie de finos hilos.

El conjunto de Mandelbrot contiene en su interior a todos los de Julia, lo que lo convierte en una enorme enciclopedia donde cada conjunto de Julia es una página.

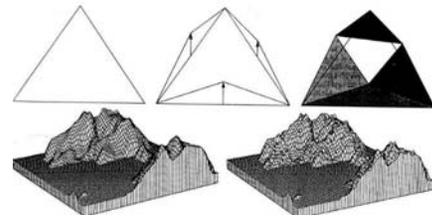


Fractales aleatorios

Los fractales de los que se ha hablado hasta ahora son todos deterministas porque el azar no interviene en su formación. Incluso aquellos formados por sistemas de funciones iteradas (IFS), en los que se asigna una probabilidad a cada aplicación contractiva, son independientes de dicha probabilidad. Cuando nos referimos a fractales aleatorios el azar interviene en su obtención completamente. Veamos un ejemplo.

Se comienza con un triángulo y tomamos los puntos medios de sus lados. Por dichos puntos medios, se trazan rectas perpendiculares al plano en el que está contenido el triángulo y sobre cada una de dichas rectas se trazan puntos por encima o por debajo del plano en el que está el triángulo. Se unen dichos puntos con los dos vértices del lado correspondiente y se obtienen otros tres triángulos. Sobre cada uno de los triángulos obtenidos se procede como en el inicial y se continúa indefinidamente.

Con este método se obtienen modelos que pretenden aproximarse y simular superficies reales con el fin de estudiar la erosión de las montañas, las fallas tectónicas, los movimientos de las placas oceánicas y continentales y su relación con la aparición de volcanes o con la producción de movimientos sísmicos.



Jürgens, 1989

Aplicaciones de la geometría fractal

No podemos terminar sin hablar de las aplicaciones de los fractales como respuesta a la eterna pregunta de nuestros alumnos ¿y para qué sirve?

Turbulencias atmosféricas y corrientes marinas

Atractor de Lorenz: En 1963, Edward N. Lorenz del MIT descubrió un sistema de pocas variables que presentaba un comportamiento muy complejo. Estaba metido de lleno en el estudio de la predicción del tiempo y había observado que el clima sigue un modelo de comportamiento que es periódico, sin embargo nunca esos comportamientos se repetían con total exactitud. Tenía un ordenador y doce ecuaciones para poder simular el proceso del tiempo. Un día quiso ver de nuevo una secuencia en particular. Para simplificar, comenzó en medio de la secuencia y después de una hora la secuencia había evolucionado de forma diferente. Lo que ocurría es que el ordenador utilizaba seis decimales y Lorenz sólo había introducido tres.

Este fenómeno común en la teoría del caos, es también conocido como sensibilidad a las condiciones iniciales. Un pequeño cambio en ellas puede cambiar drásticamente a largo plazo el comportamiento de un sistema. Es sencillamente imposible alcanzar un nivel de precisión de millonésimas. De esta idea partió Lorenz para afirmar que es imposible predecir el tiempo atmosférico con precisión.

Lorenz empezó buscando un sistema dinámico más sencillo con una notable dependencia de las condiciones iniciales. Su primer descubrimiento tenía doce ecuaciones y quiso una versión más simple que mantuviera esa condición. Simuló en el ordenador un sistema de tres ecuaciones diferenciales con parámetros a , b y c :

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x) \quad \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \quad \frac{dz}{dt} = xy - cz$$

Este modelo simula un fenómeno que se da en la atmósfera y en las corrientes marinas y en general en cualquier fluido donde las capas bajas ascienden al calentarse y las altas descienden al enfriarse. Ese fenómeno puede producir turbulencias cuando se produce el movimiento de ambos.

Para Lorenz fue sorprendente el hecho de que cualquier pequeña variación en las condiciones iniciales hacía obtener unos valores totalmente diferentes y, sin embargo, tras un número suficientemente grande de iteraciones se obtenía la misma figura (una doble espiral). Lorenz publicó sus resultados en 1963 y la imagen así obtenida se conoce como *atractor de Lorenz*. Desgraciadamente, sus resultados sólo aparecieron en un periódico meteorológico y sus descubrimientos no fueron conocidos hasta años más tarde cuando fueron redescubiertos por otro.



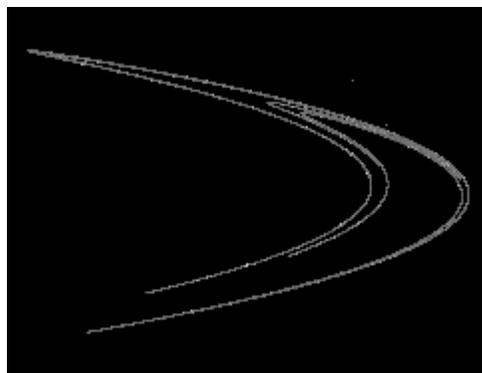
Atractor de Lorenz para $a=10$, $b=17$, $c=1$ y $dt=0,001$

El atractor de Lorenz conserva cierto orden y parece constituirse en dos superficies unidas entre sí, cada una de ellas consta de infinitas trayectorias que nunca llegan a cortarse.

Éste fue el primer ejemplo de atractor caótico o extraño. Un atractor caótico es un fractal que revela más y más detalles según se va ampliando. Veamos otros ejemplos de atractores extraños o caóticos.

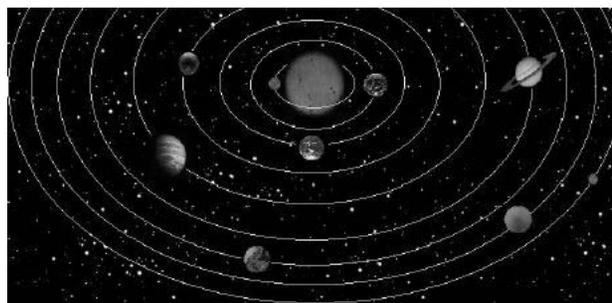
Atractor de Henon: Cinco años después del descubrimiento de Lorenz, un investigador del Instituto de Astrofísica de París diseñó un sistema dinámico para explicar las pequeñas modificaciones que aparecían en las órbitas de algunos cuerpos celestes y que los hacían seguir trayectorias no del todo elípticas. Su sistema dinámico fue el siguiente:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n \quad \text{donde } a = 1,4 \text{ y } b = 0,3$$



Este atractor desafía el análisis matemático. Genera valores aparentemente aleatorios y que al ser dibujados en la pantalla aparecen dispersos como una niebla, pero cuando el número de iteraciones es suficientemente alto configuran el atractor, siendo imposible saber si dos puntos sucesivos están cerca o lejos (Barrallo, 1993).

Estabilidad del sistema solar



Como la masa de los planetas es 1000 veces menor que la del sol, se podría pensar en despreciar el movimiento de éste y las fuerzas entre aquellos. Se obtiene un sistema con todos sus movimientos regulares, en los que cada planeta describe una órbita elíptica. Si se tienen en cuenta las interacciones entre los planetas, las órbitas se modifican, y puede darse la posibi-

lidad de que alguno de ellos comience a alejarse del sol y siga una órbita caótica que lo expulse al espacio exterior.

En el siglo XIX, muchos astrónomos quisieron probar que esto no podía pasar y que el sistema solar era estable, pero no se consiguió. Incluso el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio a quien aportara luz a la cuestión. El premio se lo llevó Henri Poincaré que no resolvió el problema pero sí contribuyó a esclarecerlo. Más tarde Kolmogorov, Arnold y Moser en su teorema (teorema de Kam) afirmaron que las perturbaciones pequeñas en un sistema introducen turbulencia y caos, pero respetan parte del orden, dependiendo proporcionalmente de la intensidad perturbadora. (Rañada, 1986). Las fuerzas que existen entre los planetas producen perturbaciones en las órbitas de los mismos, tanto mayores cuanto mayores sean las fuerzas de atracción. Aunque la mayoría de ellos siguen caminos parecidos a órbitas elípticas, no se puede afirmar que alguna vez algún planeta no pueda ser expulsado.

Estos atractores caóticos como ya se ha visto en anteriores ejemplos están presentes en la dinámica de los más insospechados procesos de la naturaleza. Siempre son procesos que en su evolución *gastan energía*, son sistemas disipativos y las leyes que los gobiernan son no lineales.

Fronteras

La formación de una costa o de la orilla de un río son procesos físicos similares y pueden ser simulados mediante modelos matemáticos que dan lugar a objetos fractales. Se establece el contacto y la interacción entre el agua y la tierra y se producen grandes modificaciones en los perfiles de las mismas. Por ejemplo, la formación de una costa se puede simular mediante la curva de Koch. La formación de la curva de Koch sigue un patrón rígido, sin embargo su dimensión fractal es de 1,26128... parecido al 1,3 que obtuvo Richardson como dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña.

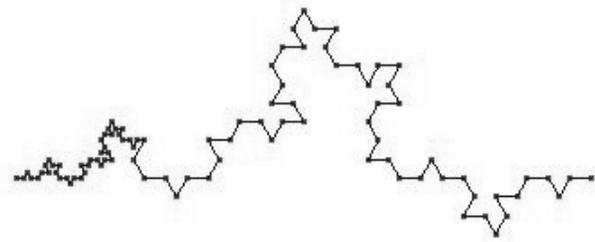
Actividad 19: El proceso determinista para obtener la curva de Koch puede modificarse para que se adapte mejor al proceso aleatorio de formación de una costa. ¿Cómo modificarías el proceso de construcción de dicha curva para lograrlo?

Objetivos: Permitir que el alumno use la imaginación y manipule un modelo determinista para simular un objeto real.

Observaciones: Utilizando tramas triangulares de puntos o bien el programa Cabri Géomètre, se pueden establecer manipulaciones sobre la curva de Koch para simular cabos y golfos más o menos pronunciados.

Tratamiento informático: Programa Cabri Géomètre. Se puede crear una macro que se aplique a los puntos que forman el segmento en vez de al segmento. De esta forma se pro-

voca el hundimiento o la protuberancia que daría lugar a golfos o cabos.



Sistemas arteriales y venosos

Según Goldberger y cols. (1990), en el cuerpo humano nos encontramos con muchas estructuras llamadas fractaliformes, que se pueden ver, por ejemplo, en las redes nerviosas, las redes de vasos sanguíneos y el sistema de tubos pulmonares encargados del transporte y evacuación de oxígeno y anhídrido carbónico. Muchos otros órganos pueden, también, ser fractales, pero sus dimensiones no están todavía cuantificadas. Las estructuras fractaliformes son fundamentales en el funcionamiento del corazón humano. Por ejemplo, hay una red fractaliforme de arterias y venas coronarias que aportan sangre a los músculos del corazón y la extraen de ellos. Dos investigadores de la Universidad de Washintong (Van Beek y Bassingthwaighte) utilizaron la geometría fractal para explicar anomalías en el flujo sanguíneo que penetra en un corazón sano. Si se interrumpe este flujo arterial se produce el infarto de miocardio. La estructura fractal también se manifiesta en la forma de ramificarse ciertos músculos del corazón y en el sistema que conduce impulsos eléctricos a los músculos cardíacos.

Las fuerzas que existen entre los planetas producen perturbaciones en las órbitas de los mismos, tanto mayores cuanto mayores sean las fuerzas de atracción.

Las ramificaciones y repliegues fractales amplían mucho la superficie de las áreas de absorción, como el intestino, de distribución o recolección (vasos sanguíneos, conductos biliares o tubos bronquiales) y de proceso de información (nervios). Las estructuras fractales son robustas y resistentes a las lesiones, y surgen como resultado del lento desarrollo y evolución del embrión humano.

Se ha observado que en personas sanas y sin ningún tipo de alteración el número de glóbulos blancos varía de un día para otro. Sin embargo, en algunos casos de leucemia dicho número se mantiene estable o varía periódicamente. Lo mismo ocurre con el ritmo cardíaco y otros aspectos relacionados y controlados por el sistema nervioso. No obstante, la regularidad y el comportamiento caótico no siempre están relacionados con la enfermedad y la salud, respectivamente.

Un pequeño cambio en las condiciones iniciales de un sistema puede cambiar drásticamente a largo plazo el comportamiento de éste.

Una de las aplicaciones más recientes de la geometría fractal, ha sido utilizar la dimensión fractal de la superficie celular para caracterizar células de diferentes tipos. Es posible distin-

guir células cancerosas de células sanas con la ayuda de esta característica. La primera aplicación ha sido para distinguir células de pacientes con leucemia de células normales (Wolfgang Bauer, Michigan State University).

Actividad 20: Busca información donde se pongan de manifiesto los recientes descubrimientos relativos al uso de la geometría fractal en medicina y más concretamente en su posible influencia en el tratamiento de algunas enfermedades como el cáncer.

Objetivos: Mostrar al alumno aplicaciones de la geometría fractal en campos relacionados con su entorno.

Observaciones: Para desarrollar esta actividad se puede sugerir a los alumnos que busquen información en todo tipo de lugares: bibliotecas, consultando sobre todo revistas científicas y de divulgación, y bases de datos de Universidades. También se puede encontrar muchísima información fiable en Internet.

Tratamiento informático: Ordenador con conexión a Internet para buscar información. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADDISON, P. S. (1997): *Fractal and Chaos. An illustrated course*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- BAI-LIN, H. (1990): *Chaos II*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- BARRALLO, J. (1993): *Geometría fractal: Algorítmica y representación*, Anaya Multimedia, Madrid.
- BERGÉ, P., POMEAU, Y and VIDAL, CH. (1984): *Order within chaos. Towards a deterministic approach to turbulence*, Hermann, París (France).
- ÇAMBEL, A.B. (1993): *Applied chaos theory. A Paradigm for complexity*, Academic Press, INC. San Diego.
- CRUTCHFIELD, J.P. (1987): "Caos", *Investigación y Ciencia*, Febrero de 1987, 78-90.
- DEVANEY, R.L. (1995): "Chaos in the Classroom", disponible en <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game>.
- ESCOHOTADO, A (1999): *Caos y Orden*, Espasa Calpe, Madrid.
- FALCONER, K. (1990): FRACTAL GEOMETRY. *Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & sons Ltd., Chichester (England).
- FIGUEIRAS, L. y cols. (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de los fractales", *Suma*, n.º 35, 45-54.
- FROYLAND, J. (1992): *Introduction to Chaos and Coherence*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- GOLBERGER, A. L.; RIGNEY, D.R. y WEST, B.J. (1990): "Caos y fractales en la fisiología humana", *Investigación y Ciencia*, n.º 163, 31-39.
- GUZMÁN, M. y cols. (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, Barcelona.
- JÜRGENS, H. ; PEITGEN, H. ; SAUPE, D. (1989): "El lenguaje de los fractales", *Investigación y Ciencia*, n.º 169, 46-57.
- MANDELBROT, B. (1975): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.
- MANDELBROT, B. (1987): *Los objetos fractales. Forma , azar y dimensión*, Tusquets, Barcelona.
- MANKIEWICZ, R (2000): *Historia de las matemáticas: del cálculo al caos*, Paidós, Barcelona.
- MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M. (1998): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.
- RAÑADA, A. (1986): "Movimiento caótico", *Investigación y Ciencia*, Marzo de 1986, 66-67.
- SANDER, L.M. (1987): "Crecimiento fractal", *Investigación y Ciencia*, Marzo de 1987, 91-98.
- SCHUSTER, H.G. (1989): *Deterministic Chaos An Introduction*, VCH Verlags-gesellschaft mbH, D-6940, Weinheim (Federal Republic of Germany).
- TAKAYASU, H. (1992): *Fractals in the physical Sciences*, John Wiley & sons Ltd., Chichester (England).