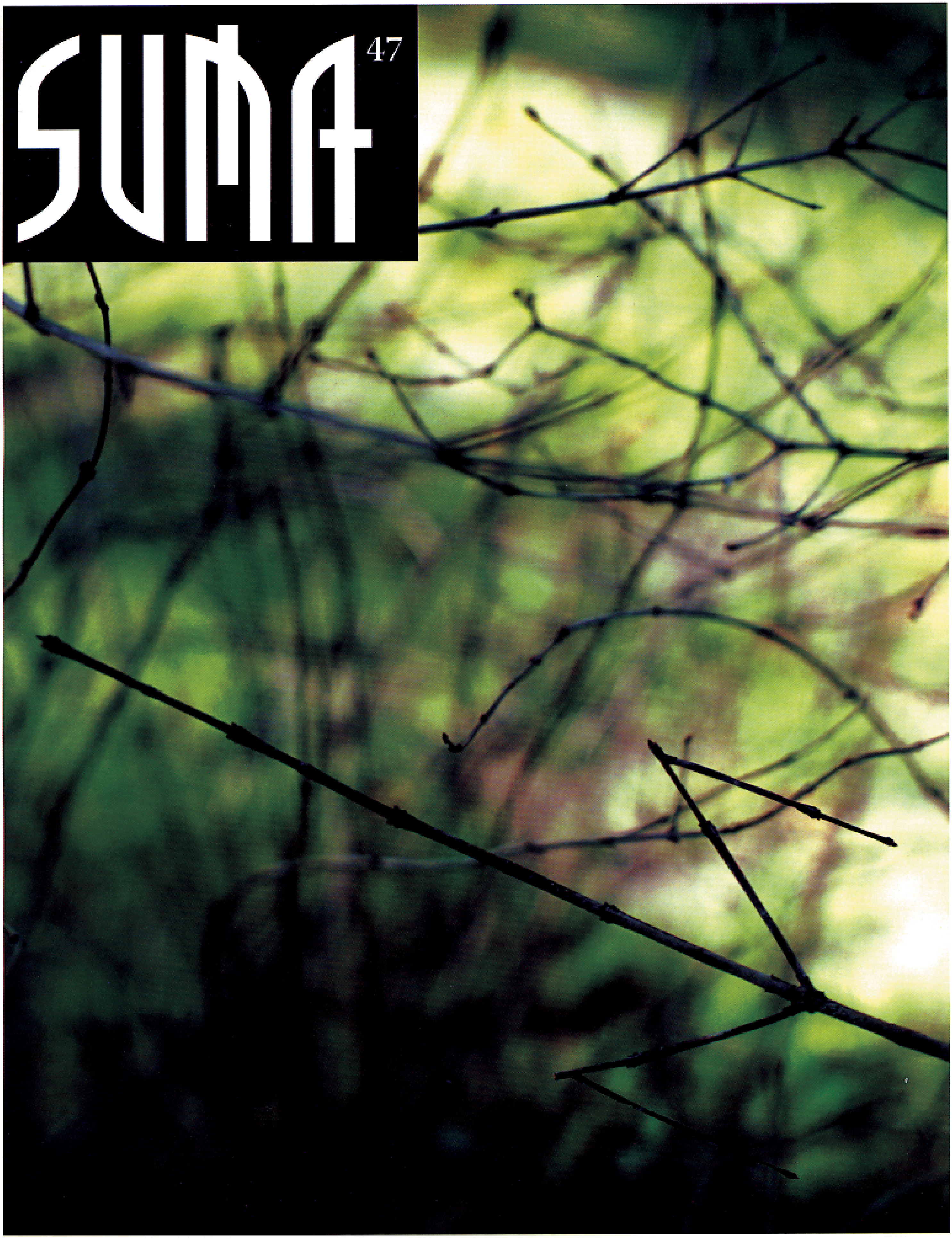
SUMA 47



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS MADRID · NOVIEMBRE 2004 · Nº. 47 · ISSN 1130-488X

SUMA 47
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Noviembre 2004

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Foto: Jorge Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada*: 6400 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN*: 1130-488X*

SUMA 47
Noviembre 2004

Comienza un nuevo curso y con él llega un nuevo número de SUMA. Como todos los años el comienzo de curso trae novedades y a la vez un cierto aire de 'ya visto', de repetición cíclica.

La reforma de la educación y los cambios legislativos que la acompañan parecen haberse convertido en un compañero permanente de este viaje siempre nuevo y siempre repetido que realizamos cada año de septiembre a junio, acompañando a nuevos alumnos en su aprendizaje matemático. Esperemos que esta vez esa reforma venga para quedarse. Que, por la vía del consenso, se diseñe un traje en el que todos nos podamos sentir cómodos para trabajar, que sea más duradero y que logre adaptarse a las necesidades de aprendizaje de una sociedad cambiante, en la que la calidad se mida, como señala la UNESCO, por la compensación de las desigualdades de partida y no exclusivamente por el nivel de aprendizaje de la élite. Una reforma que sobreviva a los gobiernos que la diseñan, en la que las matemáticas recuperen su papel axial, junto con la lengua, en la educación básica y en la postobligatoria y dispongan del tiempo necesario para poder ser enseñadas y aprendidas.

Es este número de SUMA se inician dos nuevas secciones. La primera de ellas, CineMATeca*, a cargo de José María Sorando Muzás, nos presentará unidas por un hilo conductor, que cambiará de artículo en artículo, secuencias de cine, muchas veces de películas comerciales, que pueden ser usadas en el contexto de la clase. Capi Corrales se hace cargo de la sección que ha titulado* En un cuadrado*, título de un cuadro de Kasimir Malevich. Y de arte y matemáticas tratará precisamente su sección, que inicia* *hablándonos de Salvador Dalí en el año en que se celebra el centenario de su nacimiento. Ambos, José María y Capi, pasan así a engrosar las filas de Ángel Ramírez y Carlos Usón* —Desde la historia—*, el Grupo Alquerque* —Juegos matemáticos—*, Fernando Corbalán* —Presencia mediática—*, Ana Millán* —Hace...—*, Jacinto Quevedo* —Informales e Interactivas—*, Julio Sancho* —Hemeroteca—*, Claudi Alsina* —El clip— *y Miquel Albertí* —iMÁTgenes—*. A todos ellos, los que ya estaban y los que se incorporan nuevos, les damos las gracias por su tiempo y su trabajo.*

El mes pasado presentó su dimisión como presidente de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Florencio Villaroya, cesando también por tanto como presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), editora de esta revista. Le sustituye Serapio García Cuesta, presidente de la Sociedad Castellano Manchega, que era el actual vicepresidente. Desde SUMA le deseamos los mayores éxitos al frente de su nueva tarea.

Seguimos animando a todos a enviar a SUMA artículos breves, que describan experiencias de clase y reflexionen sobre la práctica, que pongan a disposición de los lectores, compañeros al fin de cuentas, ideas útiles para la práctica diaria, con referencias a cómo y por qué resultaron adecuadas con los alumnos con los que se probó. Creemos que eso enriquecerá la revista y la hará más de todos.

Queremos también leer vuestras opiniones, las que sean críticas y las que nos indiquen que algo ha ido bien. Queremos saber qué ha gustado y qué no. Para enviar esas opiniones podéis escribirnos a la dirección de SUMA, sumadireccion@fespm.org *Con esa retroalimentación podremos mejorar esta revista que es la SUMA de muchos esfuerzos de mucha gente.* ■

SUMA 47
Noviembre 2004

Dimisión del presidente de la FESPM

Al comienzo de este curso académico he presentado mi dimisión como presidente de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas y, como consecuencia de ello, ceso también como presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, cargo que ocupaba desde principios de 2002.

La decisión ha sido meditada largo tiempo. La razón principal que me ha llevado a hacerlo es la imposibilidad de cumplir los compromisos que me exigen tales cargos, especialmente la necesidad de realizar algunas de esas actividades en días lectivos, con la consiguiente pérdida de clases para mis alumnos.

Otra razón quizá más oculta es que desde 1989, en que de manera provisional ocupé la Secretaría General y la Tesorería de esta Federación, he estado en su Comisión Ejecutiva y en su Junta de Gobierno. Fui primero durante dos años secretario y tesorero; desde 1991 hasta 1999 fui sólo tesorero y de 1999 a 2001 simultaneé este cargo con el de vocal de Relaciones con Europa. En mi Sociedad he sido vicepresidente desde 1983 y presidente desde 1997 hasta ahora. Creo que me merezco un descanso.

La Federación tiene importantes retos y compromisos de futuro: mantener nuestras principales actividades:

Organización de las Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas JAEM (por cierto nombre que fijamos una noche de larga discusión, allá por 1982, entre Francisco Martín Casalderrey —uno de los *actuales directores de SUMA— y yo, cuando él era el vicepresidente de la Sociedad Aragonesa y yo su 'chófer'), la revista SUMA, las Olimpiadas, el Servicio de Publicaciones, el Día Escolar de las Matemáticas. A lo que hay que añadir nuestra participación en las Federaciones Iberoamericana y Europea de Sociedades de Educación Matemática, y en el Comité Español de Matemáticas, especialmente en su Comisión de Educación.*

Actividades todas ellas que sólo se pueden llevar adelante con muchas ganas de trabajar y siempre poniendo nuestro tiempo a su servicio. Hora será de que las autoridades educativas de nuestro país —centrales y autonómicas— reconozcan nuestra desinteresada labor al servicio de la enseñanza de las matemáticas y nos ofrezcan algunas compensaciones, por ejemplo a través de reducciones de nuestros horarios de trabajo.

También se abre ante nosotros, en los próximos meses un nuevo debate sobre el sistema educativo. Tenemos una vez más la oportunidad de defender nuestras ideas sobre qué matemáticas enseñar y cómo hacerlo, para los ciudadanos del siglo XXI y no del XIX.

Tarea no falta. Lo que necesitamos es que cada vez más personas, especialmente jóvenes profesionales, se unan a nosotros en nuestro trabajo para hacer camino al andar*.*

Y como dice en una de sus canciones mi querido Joan Manuel Serrat:

Es hermoso partir sin decir adiós, serena la mirada, firme la voz. ■

Florencio Villarroya

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 7-10

Cómo jugársela a la incertidumbre

Si tienes que elegir entre dos alternativas, sin saber cuál es la más favorable, no pierdes nada por tomar la decisión lanzando una moneda al aire. ¿Es así? No, hay métodos mejores.

If you have to decide between two alternatives without knowing which one is more favourable, then you may quite as well flip a coin - Right? No, you can do better.

Quieres vender tu casa. Tu anuncio "Se vende a quien haga la mejor oferta por encima de 800.000 euros" lleva ya varias semanas apareciendo en el periódico. Y, por fin, el próximo domingo vence el plazo.

Dos potenciales compradores han anunciado su firme interés. El Sr. X, de París, llamó y dijo que ofrecerá más de 800.000 euros, pero que le gustaría ver la casa otra vez el próximo sábado antes de concretar su oferta. Y luego está la Sra. Y, que llamó desde Londres para decir esencialmente lo mismo, salvo que sólo puede venir el próximo domingo. Tanto el Sr. X como la Sra. Y insistieron en que necesitan que les des el Sí o No definitivo el mismo día de su visita.

¡Te habría gustado tanto conocer más detalles! ¡Si al menos hubieses conseguido alguna indicación de cuál es el límite que el Sr. X y la Sra. Y están dispuestos a pagar!

Pero todo lo que lograste por teléfono fue una breve risa y algo del estilo de "Por favor, permita que vea la casa otra vez". ¡Autenticas personas de negocios los dos! Por tu parte, ya has hecho también tus averiguaciones: ambos son serios y de fiar y los dos cuentan con los fondos necesarios. En consecuencia, parece difícil adivinar cuál de ellos podría esperarse que esté más interesado.

Ha llegado el momento de analizar las circunstancias exactas de tu situación. Claramente, volverás a tener ocasión de señalar las espléndidas características de tu casa. Pero esto no va a altera tu dilema: si aceptas la oferta del Sr. X perderás la de la Sra. Y y si quieres esperar a la oferta de la Sra. Y pierdes la del Sr. X. ¡Parece un juego de azar! Perderás la mejor de las dos ofertas con probabilidad 1/2, ¿o no?.

Se te ocurre otra idea. París... Londres... no es probable que el Sr. X y la Sra. Y se conozcan. ¿Deberías quizá tratar de que el precio suba diciéndole a cada uno de ellos lo muy interesado que está el otro? ¿A lo mejor probando primero con el Sr. X? —Pero no, deshechas esta idea, un hombre como el Sr. X difícilmente se dejaría impresionar así— más bien al contrario. ¿Intentándolo quizá con la Sra. Y? Pero, en ese caso, el día que ella venga el Sr. X estará ya fuera del juego y no podrá seguir sirviendo como instrumento de presión.

F. Thomas Bruss
Université Libre de Bruxelles (Bélgica)
Taducido al castellano por
Adolfo Quirós Gracián,
Universidad Autónoma de Madrid

Y vuelves a llegar a la misma conclusión que antes: daría igual que lanzases una moneda al aire para decidir. ¡Quizá deberías simplemente cerrar el trato con el Sr. X para al menos tener el domingo libre!

Un juego con dos tarjetas

En la vida real se dan muy diversas variantes de situaciones como ésta. Un descuento especial en el supermercado, un bonito apartamento, una atractiva oferta de trabajo, o incluso la mujer o el hombre de nuestra vida: debemos con frecuencia elegir sin saber si todavía nos espera algo mejor.

Para aclarar el panorama del problema, resumimos su esencia en un pequeño juego: pides a tu hijo y a tu hija que cada uno escriba, en secreto y sin consultar entre ellos, un número arbitrario en una tarjeta. Les haces notar que "arbitrario" quiere realmente decir el que quieran: grande, pequeño, negativo, decimal, cualquiera está permitido. Luego colocan las tarjetas, boca abajo, sobre la mesa. Ahora debes volver la tarjeta de tu hijo, mirar el número y decidir si lo aceptas. Si lo rechazas, optas automáticamente la tarjeta de tu hija. Entonces se comparan los dos números. Si has elegido el número mayor ganas, si no, pierdes.

> *Pides a tu hijo y a tu hija que cada uno escriba, en secreto y sin consultarse , un número arbitrario: grande, pequeño, negativo, decimal, cualquiera está permitido. Luego colocan las tarjetas, boca abajo, sobre la mesa. Miras la tarjeta de tu hijo, lees el número y decides si lo aceptas. Si lo rechazas, optas automáticamente la tarjeta de tu hija.Si has elegido el número mayor ganas, si no, pierdes.*

La diferencia entre los dos números no tiene en este momento ninguna importancia, sólo quieres ganar. Si los dos números coincidiesen, habría que repetir el juego, aunque este caso es muy poco probable. Además, si crees que quizá juegues con ventaja porque conoces bien a tus hijos, puedes pensar que en lugar de ellos son unos extraños. Como alternativa, también puede ser la misma persona quien rellene ambas tarjetas. Ciertamente, esto tiene ya el aspecto de un puro juego de azar con probabilidad de ganar 1/2.

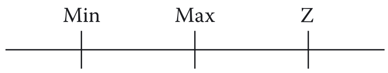
Pero ahora viene la sorpresa: hay una estrategia que te permite conseguir que tu probabilidad de ganar sea mayor que 1/2. Se basa en una idea del Profesor Thomas Cover (de la Universidad de Stanford). Sean X e Y los dos números diferentes que aparecen en las cartas.

Estrategia: Piensa un número cualquiera Z. Descubre ahora el primer número X, y elígelo si es estrictamente mayor que Z, si no, elige Y.

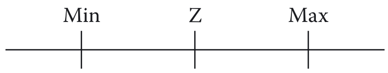
¿Por qué motivo debería esta estrategia ser mejor que elegir X o Y aleatoriamente? Aquí tienes la demostración:

Recuerda que X es el primer número, Y el segundo. Sea Min=mín$\{X,Y\}$ el menor de ellos y Max=máx$\{X,Y\}$ el mayor. Hay exactamente tres posibilidades:

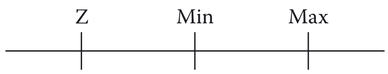
(A) Ni X ni Y son mayores que Z,



(B) Z está entre X e Y (quizá coincida con el menor de ellos),



(C) Tanto X como Y superan a Z.



Con arreglo a la estrategia, eliges el número Y en el caso (A) y el número X en el caso (C). En estos dos casos terminas eligiendo al azar entre el número mayor y el menor, y por tanto ganas con probabilidad 1/2. En el caso (B), sin embargo, ganas seguro, porque si X es el mayor de los dos números lo aceptas, mientras que si es el menor lo rechazas. Por tanto tu probabilidad total de ganar es ahora

$$g = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + b$$

donde a, b y c denotan respectivamente las probabilidades de los sucesos (A), (B) y (C). Por supuesto, uno de estos sucesos debe darse, es decir $a+b+c=1$, de modo que

$$g = \frac{(a+b+c)}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2}$$

Así pues, la probabilidad de ganar excede lo equiprobable en $b/2>0$, ya que (B) puede ocurrir.

[Observación: para hacer esto preciso basta elegir Z de acuerdo con una densidad cualquiera que sea estrictamente positiva en toda la recta real.]

¿Como puedes aplicar esta estrategia con la máxima destreza? Evidentemente deberías intentar que (B) fuese tan probable como se pueda. Esto significa que deberías elegir un Z que tenga la máxima probabilidad de estar entre X e Y. Puesto que estos dos números son desconocidos, no se puede dar una receta que sea valida en general. Ante un caso concreto, sin embargo, bien podrían ocurrírsenos algunas ideas.

Elección óptima de un umbral

Nuestro problema de la venta de la casa es uno de estos casos concretos. En la primera tarjeta está la oferta del Sr. X, y no conocerás el número de la otra tarjeta, la oferta de la Sra. Y, cuando tengas que decir Sí o No al Sr. X. Una primera diferencia con el juego de las tarjetas con números arbitrarios es que sabes que tanto X como Y están por encima de 800.000. La segunda diferencia es que ahora te interesa, y mucho, la cantidad $|X-Y|$.

Una oferta de 900.000 euros o más estaría bien, pero no es muy probable. Por otra parte, si aceptases la oferta del Sr. X de, digamos, 801.000 euros, no sentirías demasiado que la Sra. *Y* te fuese a ofrecer 802.000 euros. No tiene sentido intentar blindarse contra una perdida muy modesta. Por tanto puede que lo mejor sea elegir Z claramente por encima de 800.000 euros, pero tampoco demasiado grande. Si me preguntases qué haría yo: lanzaría un dado y, por cada punto que mostrase, añadiría 5.000 euros a la cantidad de 800.500 euros. Así, por ejemplo, si saliese un 3, elegiría Z=815.500 euros. Pero en absoluto hay nada especial en esta sugerencia y tú puedes sentirte mucho más cómodo con tus propias ideas.

¿Por qué lanzar un dado? ¿Por qué no fijar simplemente Z=820.000 euros, por ejemplo, si tenemos la sensación de que éste sería más o menos el orden correcto de magnitud? Aparte de nuestro argumento probabilístico hay otra razón: en una situación de teoría de juegos como ésta, es preferible habitualmente ser impredecible. Si actuamos de un modo predecible, el otro jugador puede adaptar su comportamiento. De ahí la introducción de una componente de azar.

¿Cuánto vale nuestra estrategia? Ciertamente más que la elección aleatoria, como hemos visto. No podemos realmente cuantificar la ventaja con respecto a la elección aleatoria, pero bien podría suponer (en media) alrededor de 10.000 euros adicionales.

Demos un paso más y volvamos a considerar nuestro juego con las dos tarjetas. Ahora vamos a jugar tú y yo. Supongamos que tú eres quien escribe los dos números en las dos tarjetas y yo soy el que elige uno. Como antes, gano yo si elijo el mayor. Supongamos que te gustaría reducir mi probabilidad de ganar. ¿Qué deberías hacer?

La respuesta es sencilla. Basta con que elijas dos números que estén muy próximos. Digamos 6,123455 y 6,123456. No vale la pena debatir sobre las ventajas de que yo emplee la estrategia-Z porque el Z que elija tiene muy pocas posibilidades de estar entre estos dos números.

Demos un paso más y volvamos a considerar nuestro juego con las dos tarjetas. Ahora vamos a jugar tú y yo. Supongamos que tú eres quien escribe los dos números en las dos tarjetas y yo soy el que elige uno. Como antes, gano yo si elijo el mayor. Supongamos que te gustaría reducir mi probabilidad de ganar. ¿Qué deberías hacer?

Pero en los problemas del mundo real las cosas son a menudo diferentes. Las estrategias del mundo real las desarrolla una de las partes interesadas y normalmente no se las comunica a la otra parte. ¿Supone esto alguna diferencia?

Para averiguarlo hice, hace varios años, una prueba con estudiantes de empresariales de Vesalius College. Entregué a cada uno de los presentes dos tarjetas para que escribiesen sus números y luego me paseé entre ellos y fui eligiendo. No había mencionado anteriormente las estrategias-Z.

Logré ganar 32 veces con 41 o 42 participantes. Eligiendo al azar esperaríamos unos 21 triunfos, y quizá tres o cuatro más con un poco de suerte. Pero 32 no deberían atribuirse sólo a la suerte, como ellos sabían. Incluso los mejores estudiantes estaban desconcertados. Es difícil ver lo que uno no se espera. Pero tú, querido lector, tú probablemente has acertado: había aplicado una estrategia-Z, de hecho una especialmente inocente. Había elegido Z=0.

¿Por qué tuve tanto éxito? Creo que fue porque pude abonar el terreno para la estrategia: parece que había conseguido que mi observación “los números también pueden ser negativos” sonase lo bastante intranscendente. Resultó que muchos estudiantes echaron mano de los números negativos, y todos aquellos que escribieron solo un número negativo me hicieron ganar automáticamente.

Este experimento muestra que el pensamiento estratégico no sigue reglas sencillas. Hay quienes predican que la clave del éxito en los comportamientos estratégicos es siempre estrechar el campo de juego del adversario. Pero no es así. Si creemos que nuestro adversario no ha anticipado nuestra estrategia, puede ser una mala idea reducir su conjunto de posibles opciones. Cuantas menos alternativas se tienen, más se piensa cada paso. De hecho, en nuestro experimento, al admitir números negativos no redujimos sino que más bien aumentamos el conjunto de opciones de los estudiantes. Probablemente esto ayudó a que no prestasen demasiada atención a lo que hacían.

Unas palabras sobre las matemáticas

Acabas de aprender a entender un pequeño problema en un campo de las matemáticas que, comparado con otros campos, está todavía en su infancia: el pensamiento estratégico, como parte de la teoría de la probabilidad. Incluso en este nivel inicial hay todavía varias preguntas abiertas. Por ejemplo, ¿existe una estrategia para el juego de las dos tarjetas que sea en general más eficaz que una estrategia-Z? Demostrar la existencia o la no existencia sería ya un avance significativo. Pero, con lo que sabemos actualmente, no veo ninguna base suficientemente firme desde la que atacar dicha demostración, ni siquiera para plantear la pregunta con la necesaria precisión. ¿No es verdaderamente sorprendente que alguien pueda optimizar, en un sentido estrictamente matemático, la venta de una casa con dos potenciales compradores? A la vista de tantas cosas impresionantes como las matemáticas han logrado en nuestro mundo, creo que deberíamos estar de acuerdo en que realmente es sorprendente. Piensa en otros problemas de optimización que surgen, por ejemplo, de la ingeniería aeronáutica. Comparado con ellos nuestro pequeño problema parece ridículamente simple. Sin embargo, no es así. Los ingenieros aeronáuticos cuentan con una enorme ventaja histórica: pueden trabajar, de manera rutinaria, con muchos métodos cuyos cimientos matemáticos fueron solidamente establecidos hace dos o tres siglos. No es éste el caso de nuestro pequeño problema.

¿No es verdaderamente sorprendente que alguien pueda optimizar, en un sentido estrictamente matemático, la venta de una casa? A la vista de tantas cosas impresionantes como las matemáticas han logrado en nuestro mundo, creo que deberíamos estar de acuerdo en que realmente es sorprendente.

Estos contrastes se dan en muchos campos de las matemáticas.

¿Es esto un síntoma de la eterna juventud de nuestra disciplina?

Sí, yo así lo creo. ■

NOTA DEL TRADUCTOR

Este artículo es una traducción de "Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen", publicado en *Spektrum der Wissenschaft* (la edición alemana de *Investigación y Ciencia*). Está basado en "Unerwartete Strategien", trabajo del mismo autor que apareció en *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung* (Sociedad Matemática Alemana). La idea está inspirada en el Problema de Cover (ver Referencias).

"Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen" obtuvo el segundo premio en el concurso organizado por la European Mathematical Society (EMS) para mejorar la percepción popular de las matemáticas. Apareció traducido al inglés en *Newsletter of the EMS*, y es dicha versión inglesa la que hemos utilizado para hacer nuestra traducción.

Agradecemos al Profesor Bruss, a *Spektrum der Wissenschaft*, a la Deutschen Mathematikervereinigung y a la Europan Mathematical Society su amabilidad al autorizarnos a publicar este notable artículo en castellano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRUSS, F. T. (1998): "Unerwartete Strategien", *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung*, Heft 3, 6-8.

BRUSS, F. T. (2000): "Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen", *Spektrum der Wissenschaft*, Juni Heft, 106-107.

BRUSS, F. T. (2003): "Playing a trick on uncertainty", *Newsletter of the EMS*, Issue 50, 7-8.

COVER, T. M. (1987): "Problem 2.5 : Pick the largest number", en *Open Prob. in Communication and Comp.*, Springer Verlag, New York.

47
Noviembre 2004, pp.11-18

Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional

El proyecto CUBE es una propuesta de trabajo en el aula de Matemáticas donde a partir de la película CUBE (Vincenzo Natali, 1997) se desarrollan una serie de actividades introductorias a la Geometría Analítica tridimensional y a la visualización espacial geométrica. Consta de dos partes, una relativa al guión de la película y otra derivada hacia el desarrollo del currículo de 4º de ESO en el bloque de Geometría. Las características de la propuesta hacen que se presente como un proyecto abierto a la interdisciplinariedad e idóneo para la práctica del aprendizaje significativo en un contexto de prácticas procedimentales.

CUBE is a proposal for a project for the math class issuing from the film cult CUBE (Vincenzo Natali, 1997), it develops a series of activities introducing both analytical three-dimensional geometry and special geometrical visualization. The project consist of two parts: one relating directly to the film script and another one focusing on the development of 4th year ESO geometry curriculum. The characteristics of the proposal allows scope for cross curricular involvement, is also open to multi-level approaches and very apt to the practice of meaningful learning in a context of procedural tasks.

La dificultad de motivar al alumno en los cursos de ESO es un grave problema del que todos los docentes de Secundaria nos hacemos eco. En la asignatura de Matemáticas, donde los contenidos se perciben por tradición como aburridos y desconectados de la realidad, la situación se agrava. De ahí el interés en buscar nuevos recursos motivadores que interesen al alumno y muevan su curiosidad. Uno de ellos, ampliamente utilizado en otras áreas, es el vídeo. Precisamente debido al escaso material en el área de matemáticas (series de TVE, Universo matemático y Más por menos de Antonio Pérez) resulta curioso encontrar una película de ficción donde el tema central y motor de la historia sea un tema matemático tratado con el rigor suficiente como para trabajar con ella en el aula de Matemáticas. El título referido es CUBE del director Vincenzo Natali, año 1997 (Ciberpaís 7/6/2001, Cartelera Turia nº 1.822 (4/10 enero 1999)) (Fig 1).

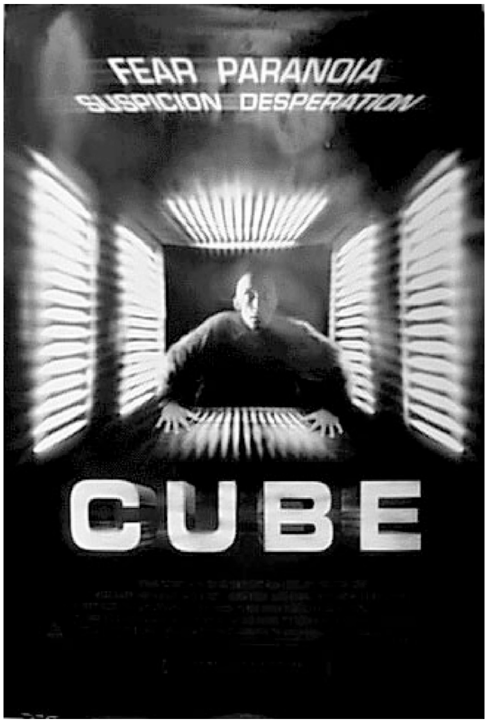


Figura 1. Imagen promocional de la película

Un primer punto de interés radica en poder introducir al alumno en el universo tridimensional. Como dice Floreal Gracia (1994)

> ...la intuición espacial permite un desarrollo más equilibrado del estudiante, en especial por que se posibilita a una parte de los alumnos y alumnas a conseguir las capacidades establecidas para la Secundaria Obligatoria, sin pasar necesaria y únicamente por el eje de la lógica y el razonamiento.

Una actividad interesante para mejorar la intuición espacial es precisamente pasar del plano al espacio. Desde este punto

Elena Thibaut Tadeo
IES Tierno Galván. Moncada.

de vista, la visualización de una estructura cúbica, como la que se da en los ejercicios con policubos (Alsina, 1988, 1997) es un inicio acertado para trabajar en geometría espacial.

En matemáticas es muy dificil motivar al alumno, por lo que se buscan nuevos recursos que le interesen y muevan su curiosidad. Uno de ellos es el cine.

El siguiente paso a seguir sería intentar representar algebraicamente los puntos del espacio. El rompecabezas propuesto en la película resulta una introducción perfecta a los sistemas cartesianos de representación y permite un juego de coordenadas muy adecuado para la práctica de simbolización numérica de desplazamientos y posiciones.

Por último, las posibilidades que ofrece la película para la reflexión sobre ciertas características de algunos poliedros y el llenado del espacio en estructuras similares al cúbico (Guillén, 1991), hace que resulte idónea para el 4º curso de ESO en la opción B.

Planteamiento de la actividad: Material del aula

Para poder comenzar a trabajar después de haber visto la película conviene que el alumno tenga las claves para descifrar matemáticamente lo que ocurre. Este es el texto del que dispondrán en clase:

CUBE

En esta película nos encontramos con una prisión de características muy particulares. La finalidad de su existencia y el porqué los protagonistas han sido encerrados en ella no es asunto de esta asignatura.

Pero lo que sí nos interesa es su funcionamiento.

El recinto es un espacio cúbico compuesto por otros cubos más pequeños, todos ellos de igual tamaño (14 pies de lado). Por Worth sabemos que está contenido en una carcasa exterior de dimensión 1432 pies cuadrados. Leaven hace cálculos y deduce, haciendo la hipótesis de que entre la carcasa exterior y el cubo gigante hay un espacio igual al lado de un cubo pequeño, que hay un total de 26 cubos en cada arista. Calcula después el total de cubos: 17576.

Cada cubo pequeño tiene una compuerta en cada una de sus caras, en total seis, que conducen a otro cubo. En el interior de esas compuertas se puede leer un número de nueve cifras, agrupadas de tres en tres, que identifican al cubo. Leaven descubre que si suma las cifras, obtiene las coordenadas de ese cubo en un sistema de ejes cartesianos. Pero se encuentra con un cubo con una coordenada igual a 27. Eso no es posible porque habíamos dicho que por el volumen de la carcasa exterior el máximo de cubos eran 26. Se dan cuenta en ese momento que probablemente los cubos con esas coordenadas hacen de puerta de salida, ya que estarían en contacto con la carcasa exterior. Pero para que eso sea posible, los cubos deben cambiar su posición, ya que el cubo con la coordenada 27 se encuentra en ese momento en contacto con otros cubos y no con la carcasa exterior.

¿Cómo se mueven los cubos? Leaven dice que si la suma da unas coordenadas, deberían ser las del punto inicial, y por lo tanto la resta debería dar los cambios de posición. Veámoslo con un ejemplo:

320 176 223 — Éstas son las cifras del cubo.

320: 3+2+0=5=x
176: 1+7+6=14=y — Éstas son las coordenadas.
223: 2+2+3=7=z

320: 3-2=1; 2-0=2; 0-3=-3 — Desplazamientos en x.
176: 1-7=-6; 7-6=1; 6-1=5 — Desplazamientos en y.
223: 2-2=0; 2-3=-1; 3-2=1 — Desplazamientos en z.

Obtenemos el primer desplazamiento sumando las restas a las coordenadas de la posición anterior:

(5+1, 14+(-6), 7+0)=(6, 8, 7) llegará a esta posición.

En el segundo desplazamiento:
(6+2, 8+1, 7+(-1))=(8, 9, 6) llegará a esta posición.

En su tercer desplazamiento:
(8+(-3), 9+5, 6+1)=(5, 14, 7) vuelve a la posición inicial.

Para saber en qué desplazamiento se encuentra el cubo tenemos que conocer las cifras de los cubos que le son adyacentes y calcular, con estas, las coordenadas iniciales y las que corresponden a sus desplazamientos. Comparando unas y otras podemos concluir que sólo en una de las tres se puede encontrar en contacto con los cubos que le rodean. Lo vemos con un ejemplo.

Supongamos que las tres posiciones posibles del cubo son:

(14, 8, 6) (7, 7, 5) (6, 4, 3)

y que las posiciones posibles de tres de los cubos que le rodean son:

arriba	(5, 3, 2)	<u>(7, 7, 6)</u>	(14, 5, 3)
derecha	(11, 12, 10)	<u>(7, 8, 5)</u>	(12, 1, 5)
izquierda	(13, 14, 7)	(7, 14, 6)	<u>(7, 6, 5)</u>

Si miramos las coordenadas de la segunda posición encontramos que si le sumamos 1 a la coordenada z, nos da (7, 7, 6) que coincide con una de las posiciones del cubo de arriba. Si le sumamos 1 a la coordenada 1, nos da (7, 8, 5), que coincide con una de las posiciones del cubo de la derecha. Y si le restamos 1 a la coordenada, nos da (7, 6, 5), que también es una de las posiciones del cubo de la izquierda. Por tanto el cubo en el que nos encontramos está en su segunda posición y le faltan dos movimientos para volver al inicio. Además, el de arriba y el de la derecha también se encuentran en su segunda posición; y el de la izquierda en su tercera.

El recinto de CUBE es un espacio cúbico compuesto por otros cubos de igual tamaño. Cada cubo pequeño tiene una compuerta en cada una de sus caras. en la que se puede leer un número de nueve cifras, agrupadas de tres en tres.

De lo dicho antes deducimos que todos los cubos no se mueven a la vez. Cada uno de ellos ha comenzado a cambiar su ubicación en momentos diferentes, lo que hace extremadamente complejo el mecanismo del cubo gigante.

Así es como Leaven puede encontrar cuántos movimientos faltan para que el cubo puerta vuelva a su punto de inicio, es decir, a la salida.

Además de toda esta complejidad en el diseño de CUBE, se añaden, para hacerlo más difícil todavía, trampas mortales en algunos cubos.

Al principio Leaven piensa que contenían trampa cuando cualquiera de los tres números de tres cifras era primo. Después se da cuenta de que en realidad eran aquellos que se descomponían en una potencia de un único número primo. Ser primo sólo era un caso particular en el que el exponente es 1. Ejemplo:

Al principio:

563 es primo, entonces tiene trampa
128 no es primo, entonces no tiene trampa

Luego:

$563=563^1$, entonces tiene trampa
$128=2^7$, entonces tiene trampa!!!

Es conveniente realizar un debate para aclarar todas las posibles dudas antes de plantear la primera serie de actividades (1ª parte). Éstas son las siguientes:

Peligroso
¿Cuál es el mayor número de tres cifras con trampa y cuál es su descomposición factorial? ¿Cuál es el menor?

Lo que hace Kazan no es tan difícil como adivinar los números que son primos. ¿Por qué?

Probablemente debido a un error en la traducción, Kazan hace cálculos incorrectos. Comprueba los siguientes:

567 (2)	*898 (2)*	*545 (2)*	*Seguro*
656 (2)	*779 (2)*	*462 (3)*	*Seguro*
563 (2)			*Seguro*
384 (1)			*Trampa*
805 (2)			*Seguro*

Se trabajan los números primos y se familiariza al alumno con las ternas de números. El heurístico que interesa trabajar es la práctica de ensayo-error para buscar el resultado correcto.

Faraónico
¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?

Viendo las coordenadas de cada cubo, ¿hay otra manera de deducir que habrá 26 cubos?

Calcula el volumen total de cube sin contar la carcasa exterior (debes tener en cuenta que hay tres cubos más: los que hacen de salida, una por cada coordenada).

Para hacernos una idea, busca cosas que tengan el mismo volumen que cube.

Hay dos formas de deducir el número de cubos de la prisión: en una de ellas hay que explicar el razonamiento que se hace en la película (a partir de un dato empírico, ir de lo conocido a lo desconocido), y en la otra se ha de interpretar la numeración de los cubículos (se hace una hipótesis). El cálculo de volúmenes, la comparación y la estimación, es el objetivo de la última parte de la actividad.

E pur si mouve
Explica qué es un sistema cartesiano de puntos. Dibuja en la proyección de los tres planos definidos por los ejes (XY, XZ, YZ) el movimiento de los siguientes cubos:

566 778 462
626 999 347

Hay cubículos que no se mueven por todo el cubo. ¿Cuáles son? Describe como será su movimiento y razónalo.

Se puede guiar una búsqueda bibliográfica para explicar un sistema cartesiano de puntos. Las proyecciones sobre planos pueden resultar complicadas por eso conviene, según los grupos, trabajar únicamente el cálculo de las coordenadas de movimientos y su representación en perspectiva tridimensional. Los cubículos que no se mueven por todo el cubo tienen las numeraciones:

xxx yyy zzz, no cambian su posición;
xxx yyy, ..., se mueven en una recta;
xxx, ..., ..., se mueven en un plano.

La generalización es el objetivo de esta parte de la actividad.

Claustrofóbico
En el plano de la figura siguiente (Fig 2) tienes representado el dibujo de un laberinto bidimensional. Cada cuadrado está determinado por un par de números de dos cifras.

Si ya sabes cómo se mueven los cubos tridimensionalmente, no te será difícil explicar como funcionan los cuadrados en dos dimensiones. Para hacerlo más sencillo, piensa que todos los cuadrados cambian de posición al mismo tiempo.

16	11-79	13-88	24-88	35-88	46-88	57-88	86-79	88-88
14	11-68	31-77	42-77	62-86	73-59	75-68	77-77	79-86
12	11-57	22-75	60-39	62-48	64-57	66-66	68-75	79-39
10	11-46	22-64	51-37	53-46	55-55	57-64	59-73	88-64
8	11-35	40-26	42-35	44-44	46-53	48-62	86-35	88-53
6	20-51	31-24	33-33	35-42	37-51	39-60	77-42	88-42
4	20-13	22-22	24-31	26-40	37-13	57-22	68-22	79-22
2	11-11	13-20	42-11	53-11	64-11	75-11	86-11	88-20
	2	4	6	8	10	12	14	16

Figura 2. Laberinto bidimensional con la numeración de cada cubículo cuadrangular

Haz un diagrama de las posiciones que adoptarán después de cada desplazamiento.

¿Por qué no aparecen las coordenadas impares?

La necesidad de generalizar y la representación simbólica de resultados son los objetivos principales de esta actividad. De hecho, la contestación a la última pregunta es sencilla si se generaliza:

AB; $A + B$ = coordenada; $A - B$ = desplazamiento; $A+B+A-B=2A$=coordenada de la segunda posición que ha de ser necesariamente par. Otra posible propuesta es el desarrollo de un sistema similar ortogonal en cuatro dimensiones, haciendo una breve referencia al hipercubo.

Otra serie de actividades (2ª parte) que complementan las anteriores y cubren una parte del currículo de Matemáticas en 4º ESO-B, serían las relacionadas con la geometría de poliedros. Las propuestas son las siguientes.

Prismoide: *Con prismas. ¿Qué condición deben cumplir los polígonos de las bases para que sea posible hacerlo? ¿Cuántos polígonos regulares cumplen este requisito? Ayúdate con dibujos en tus explicaciones.*

Doderom: *Otro poliedro que tiene todas sus aristas del mismo tamaño como el cubo y que también puede cubrir todo el espacio sin dejar huecos es el dodecaedro rómbico (Fig 3).*

¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Dibuja su desarrollo en el plano.

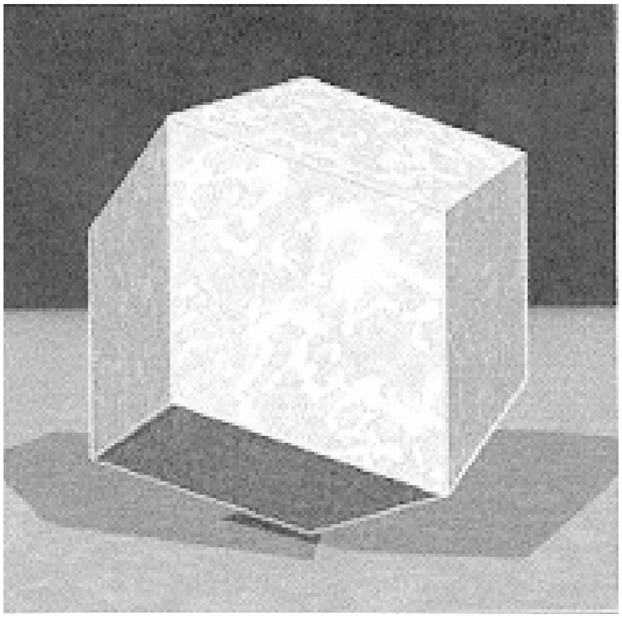


Figura 3. Dodecaedro rómbico (rhombic dodecahedron)

Decuforme: *Deformando un cubo para que sus caras acaben siendo rombos. ¿Cómo ha de ser la deformación para que encajen y se pueda hacer una construcción compacta como CUBE que llenen todo el espacio sin dejar huecos? Ayúdate con dibujos en tus explicaciones.*

Octatruncum: *Otro poliedro que tiene todas sus aristas del mismo tamaño como el cubo y que también puede cubrir todo el espacio sin dejar huecos es el octaedro truncado (Fig 4).*

¿ Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Dibuja su desarrollo en el plano.

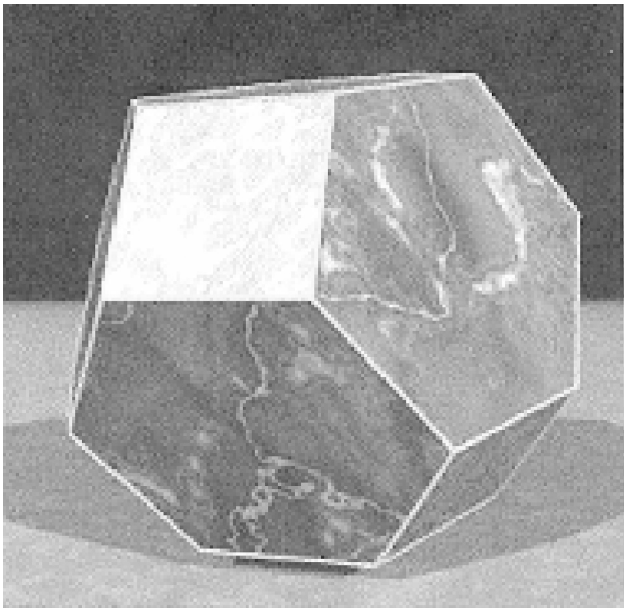


Figura 4. Octaedro truncado (truncated octahedron)

Resultados en el aula de 4º de la ESO

Currículo

La experiencia didáctica se concibió inicialmente para aplicarse según el Decreto 47/1992. Aunque se trabajan en general todos los objetivos generales de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, es en especial el apartado 7, en el que se insiste más directamente: *Identificar las formas y relaciones espaciales que se presenten en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.* Los contenidos se encontraban recogidos en el Bloque 3: Geometría, en concreto dentro del apartado 1. Elementos básicos: Elementos de los polígonos, poliedros y cuerpos de revolución; Simetrías y regularidades en las construcciones y configuraciones geométricas; Propiedades elementales de las figuras y de los cuerpos. También se trabajan los contenidos del bloque 7: Resolución de problemas. Algoritmos y 8: Matemáticas y actitudes.

Actualmente el Decreto 39/2002, que modifica al de 1992, regula el currículo de Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. En este caso, además de tener como objetivos todos los generales de etapa especificados, es el apartado 5 el que se trabaja de forma directa: *Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea. Identificando las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.* Los contenidos que se han desarrollado en las actividades expuestas se encuentran recogidos en el bloque 3: Geometría: *Se trata de estudiar en el plano y en el espacio figuras y cuerpos geométricos y algunas de sus relaciones y de sus propiedades. Además de la relación plano-espacio, también se abordará el paso del plano al espacio (mediante el plegado de desarrollos de diferentes cuerpos regulares o no, de distintas vistas planas) y el paso del espacio al plano, con visiones desde distintos lugares de cuerpos o configuraciones geométricas, desarrollos... Se propone también el estudio de algunas figuras y cuerpos importantes. Asimismo es fundamental la adquisición de un vocabulario que les permita hablar de su entorno geométrico.* Y concluye: *Por otra parte se abordará el inicio del estudio de la geometría analítica plana resaltando la relación existente entre ésta y los métodos del álgebra.*

Las actividades propuestas también comprenden los contenidos relacionados con la resolución de problemas y los actitudinales del Decreto 39/2002 como comunes a todos los bloques.

Metodología

La metodología empleada en el tratamiento de aula de las actividades ha sido la propuesta por Feuerstein, mediated learning experience o experiencia de aprendizaje mediado. En la lista siguiente (Serrano y Tormo, 2002) se resumen los criterios o categorías que propone Feuerstein en su metodología de la mediación.

Intencionalidad y reciprocidad: Consiste en implicar al mediado en el aprendizaje, haciéndole asumir los estímulos: ésa es la intención del mediador.

Trascendencia: Se trata de que el mediado llegue al convencimiento de que la resolución de una determinada actividad no se acaba en sí misma, sino que le ha de servir para otras ocasiones de aprendizaje.

Significado: Se presentan las situaciones de aprendizaje de forma interesante y relevante para el alumno, *que signifiquen algo para él*, que penetren en su propio sistema de significados, posibilitando las relaciones entre los aprendizajes adquiridos.

Sentimiento de capacidad: Está estrechamente relacionado con la motivación y la autoestima. Se trata de provocar en el mediado el *sentimiento de ser capaz de*.

Control del comportamiento: Equivale, tanto a *dominio de la impulsividad*, controlada por sí y en sí misma, como a *inicio y a aceleración* de la actividad.

Comportamiento de compartir: Compartir y desarrollar actitudes de cooperación, solidaridad y ayuda mutua, respondiendo a un deseo primario del individuo, que puede o no estar desarrollado, si se ha mediado o no.

Individualización y diferenciación psicológica: Implica *aceptar al alumno como individuo único y diferente*, considerándolo participante activo del aprendizaje, capaz de pensar de forma independiente y *diferente respecto a los demás alumnos e, incluso, al propio profesor*.

Búsqueda, planificación y logro de objetivos: Se trata de crear en el mediado la *necesidad de trabajar según unos objetivos*, para conseguir los cuales se han de poner unos medios.

> "La Individualización y diferenciación psicológica implica aceptar al alumno como individuo único y diferente, considerándolo participante activo del aprendizaje, capaz de pensar de forma independiente y diferente respecto a los demás alumnos e, incluso, al propio profesor."
> Feuerstein

Búsqueda de novedad y complejidad: Se fomenta la curiosidad intelectual, la originalidad y el pensamiento divergente. *Se pretende hacer al alumno flexible, tanto en la aceptación como en la creación de lo nuevo en sus respuestas*.

Conocimiento del ser humano como ser cambiante: Se trata de hacer que el alumno-mediado llegue a autopercibirse como sujeto activo, *capaz de generar y procesar información*. El cambio ha de ir acompañado de la *conciencia de que se cambia*; que el mediado conozca su *potencial para el cambio*.

Optimismo: *Si el mediador es optimista, la situación de mediación lo será; y el mediado, lógicamente, también. En la misma base de la mediación está el optimismo*. El mediador ha de creer en la capacidad de cambio de las personas con las que trabaja; esto ya significa y requiere un espíritu optimista.

Sentimiento de pertenencia: Pero, no sólo pertenencia a un pequeño grupo, sino además *pertenencia a una determinada cultura*, a una sociedad concreta. *El mediado está dentro de unas determinadas coordenadas socioculturales*. El mediador ha de interponerse entre esa realidad sociocultural y la realidad personal del mediado.

Grupos y dinámica de trabajo

La experiencia se ha puesto en práctica en dos grupos de 4º ESO. El primero de ellos en el IES Roc Chabàs de Dènia, Alicante (curso 1999-2000). Se repartieron las actividades (una actividad de la primera parte y una de la segunda) en grupos de cinco o seis alumnos. Cada grupo desarrolló las respuestas (tres sesiones) y las expuso a toda la clase (dos sesiones). Además realizaron las construcciones en maquetas de cartulina.

El segundo grupo pertenece al IES Ramón Muntaner de Xirivella, Valencia (curso 2001-2002). Se suprimieron la elaboración de maquetas y el reparto por grupos. Todos los alumnos realizaron todas las actividades, una por sesión de la primera parte y dos por sesión de la segunda, dispuestos por grupos de cuatro o cinco personas y al final elaboraron una memoria con los resultados obtenidos.

En ambos grupos se reservaron dos sesiones en el aula de video para ver la película y establecer un debate posterior. En el debate se aclararon las diversas dudas, los alumnos dieron su opinión respecto al contenido de la película y se repartió todo el material dando las instrucciones precisas sobre el método de trabajo que se iba a desarrollar en el aula.

Evaluación

La evaluación se realizó en ambos cursos mediante la observación directa en el desarrollo de las actividades.

En el IES Roc Chabàs de Dènia se realizó, además, una exposición de cada grupo de trabajo en la que el resto de alumnos podía interactuar y hacer preguntas a sus propios compañeros. De esta manera, ellos mismos pudieron hacer una autoevaluación de los contenidos y procedimientos que sirvió al profesor para identificar cuáles habían sido los dificultades con las que se habían encontrado y constatar si el aprendizaje había sido significativo o no. Las dificultades surgieron principalmente en la organización de tareas dentro del grupo, sobre todo a la hora de elaborar las maquetas por lo minucioso y repetitivo del proceso, a pesar de contar con las piezas troqueladas en cartulina para facilitar la construcción. El grupo que realizó la actividad *E pur si muove*, no acabó de entender como realizar las proyecciones y optaron por un dibujo en perspectiva de las tres posiciones. Se evaluó positivamente el paso del plano al espacio y la introducción de métodos algebraicos para trabajar la geometría, así como los contenidos actitudinales y los relacionados con la resolución de problemas.

En segundo curso, en el IES Ramón Muntaner de Xirivella, elaboraron una memoria para la evaluación en lugar de realizar la exposición que se realizó en el anterior instituto. En un principio, un grupo daba con la solución y corría la voz entre

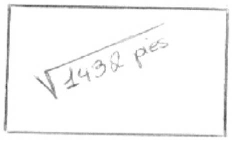
A) ¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?
Porque Worth sabe que la carcasa exterior mide 142884 pies^2, por lo tanto con la raíz cuadrada de 142884 que es 378 sale lo que miden las aristas, y dividiendo esto entre 14 pies que mide cada cubo pequeño se obtiene el número de cubos de cada arita que es 27. pero como entre la carcasa exterior y la interior hay el espacio correspondiente a un cubo, por lo tanto hay que restarle uno al número total de cubos lo que quiere decir que hay 26 cubos.

-¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?¿Hay otra manera de de deducir que habran 26 26 cubos?. Calcula el volumen total de cubesin contar la carcasa exterior. Busca cosas del mismo volumen.

14^3= 2744 pies^3 tienen los cubos pequeños
14^2= 196 pies^2 tienen los cubos pequeños

27 27 14 14= 142884 mide la carcasa exterior
26 26 26 14 14 14= 48228544 mide la carcasa interior
48228544 : 14^3= 17576 cubos hay en el interior

•¿Como es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?



$A = l^2$ $\quad$ $1432 \cdot 10^2 = 143200$

$\sqrt{1432} = 37'8$ $\quad$ $\sqrt{143200} = 378$

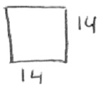
378 · 27 – 14

¿Como es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?
Porque saben que la carcasa exterior mide 1432 pies cuadrados y el espacio entre la carcasa y el cubo es igual al lado de un cubo pequeño con estos calculos averiguan que hay 26 cubos en cada arista.

27 · 27 · 14 · 14 = 142884
carcasa exterior

26 · 26 · 26 · 14 · 14 · 14 = 48228544 – carcasa interior

14 : 14 : 14 = 17576 = 26^3



2 - ¿Hay otra manera de deducir que habrán 26 cubos?
– Con la medida de la carcasa, la divides entre los pies que mide el cuadrado, ya esta

Figura 5. respuestas de diferentes grupos de aloumnos a una misma pregunta los otros grupos. Lo positivo es que, aunque la solución no fuese la propia, el esfuerzo de explicársela a sí mismos o a otros miembros de su grupo incrementaba la comprensión y el sentimiento de capacidad del alumno, hasta el punto de que al final la sensación de reto hizo que algunos de los grupos no quisiesen saber las respuestas sin encontrarlas ellos mismos. El criterio de compartir, indicado en el aprendizaje mediado de Feuerstein, se daba igualmente y a la vez también la diferenciación psicológica necesaria. Los desarrollos sobre el plano de los poliedros constituyeron la mayor dificultad (sólo dos grupos de seis intentaron el octaedro truncado), quizás debido a la complejidad de visualizar en tres dimensiones de una fotografía. De todas formas aprendieron a utilizar métodos de resolución de problemas (ensayo-error, hacer hipótesis, deducir de lo conocido a lo desconocido, inferir, generalizar...) y a verbalizar los resultados obtenidos de manera original y autónoma, no sólo numéricamente. En la figura 5 (ver página anterior) se ven tres ejemplos en la contestación de una misma respuesta.

Conclusiones y comentarios

En las dos ocasiones que ha sido puesto en marcha, el balance del proyecto ha sido muy positivo. No sólo por el desarrollo de los contenidos conceptuales y procedimentales propiamente matemáticos que subyacen y por el grado de motivación obtenido, sino también porque los alumnos han aprendido a trabajar en equipo repartiendo las tareas y debatiendo entre ellos las soluciones a los problemas; y a pensar por si mismos buscando la estrategia más interesante para lograr sus objetivos. Estas han sido las dificultades más relevantes que se han presentado durante las sesiones de clase y donde mayores logros se han obtenido.

El proyecto dispone, además, de posibilidades de utilización: se pueden desechar preguntas no adecuadas para el grupo concreto o adaptarlas. De esta forma se puede utilizar en 3º ESO, siempre que no sean menores de 13 años (no recomendada la película para menores de esa edad). La ampliación a cursos posteriores, bachiller, es otra posibilidad, dependiendo del currículo.

La actividades se pueden organizar y plantear en dinámicas diferentes como son las exposiciones, debates y memorias; los ritmos de realización individuales o en grupo; la secuenciación; el trabajo de síntesis o de introducción; en casa o en el aula... De esta forma la metodología es flexible y permite adaptarse a grupos diferentes.

Por último, los temas desarrollados en la película la hacen interesante para compartir la experiencia con otras áreas, tales como ética o tecnología, y establecer un debate más amplio que el meramente matemático. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. BURGUÉS y C. FORTUNY, J. M. (1988): *Materiales para Construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C. FORTUNY y J. M. PÉREZ, R. (1997): *¿Por qué geometría?*, Síntesis, Madrid.

DECRETO 47 /1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana, DOGV 6/4/1992.

DECRETO 39 /2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana, DOGV 8/3/2002.

GRACIA, F. (1994): Percepción e intuición espacial, *Revista UNO*, n.º 2, 120-130.

GRUPO CERO (1990): *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria*, Edelvives, Valencia.

GUILLÉN SOLER, G. (1991): *Poliedros*, Síntesis, Madrid.

MARTÍN IZARD, J. F. (2001): *Enseñanza de procesos de pensamiento: metodología, metacognición y transferencias*, Relieve, vol. 7, n.º 2, http://www.uv.es/RELIEVE/v7n2/RELIEVEv7n2_2.htm

PRAVICA, D. y W. RIES, H. L. (2002) CUBE: The Math Paper, *Matematica, arte, tecnologia, cinema*, Springer, Milán.

SERRANO, M. y TORMO, R. (2000): *Revisión de programas de desarrollo cognitivo. El Programa de Enriquecimiento Instrumental* (PEI), RELIEVE, vol. 6, n.º 1, http://www.uv.es/RELIEVE/v6n1/RELIEVEv6n1_1.htm

Otras referencias:

(7-6-2001): No busques una razón, busca una salida, *Ciberpaís*, El Pais, Madrid.

(4/10 enero 1999): CUBE "Parábola existencialista", *Cartelera Turia*, n.º 1.822 , Valencia.

En la web:

http://www.cubethemovie.com/VOX/

http://www.metrofilms.com/cube/

http://www.cubederfilm.de/

http://www.scifi.com/cube/

http://www.math.ecu.edu/~pravica/index.html

http://www.math.ecu.edu/%7Epravica/cube_pra.html

Páginas de Matemáticas y Geometría:

http://www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/index.html

http://www.korthalsaltes.com/

http://www.georgehart.com/pavilion.html

http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor/RhombicPolyhedra/Visual/SFVisual.html

http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html

SUMA 47
Noviembre 2004, pp.19-28

Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I)

En este trabajo se ofrece una visión general de la geometría fractal y sus aplicaciones. Se hace un análisis de sus posibilidades didácticas mediante una recopilación, síntesis y adaptación de sus principales conceptos, de forma que sean asequibles a los alumnos de Secundaria. Consta de dos partes, este primer artículo se dedica fundamentalmente al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales, a través de actividades pensadas especialmente para los alumnos de esa etapa.

This paper offers an overview of fractal geometry along with its applications. Through compilation, synthesis and adaptation of its main concepts, the fractal teaching possibilities are analysed at Secondary level. In two parts, this first article looks at the concept of fractal, its dimension and generation of some sorts of them through activities specially devised for Secondary students.

La teoría del caos y, dentro de ella, la geometría fractal constituyen un campo de investigación reciente que surgió de la aparición de una especie de conjuntos llamados *monstruos geométricos* que amenazaban con hacer tambalearse los pilares sobre los que se habían construido muchas propiedades matemáticas, y que por ello, merecían ser condenados al olvido. Sin embargo, hoy en día constituyen una de las partes más fascinantes de las matemáticas, de las ciencias y de las artes.

Michael Barsley, conocido matemático y uno de los investigadores punteros en el terreno de la geometría fractal caracterizó este campo de investigación de la siguiente forma:

> La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Se arriesga uno a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos.

Puesto que los fractales están revolucionando la ciencia actual y concretamente las matemáticas, parece interesante introducir a nuestros alumnos en ellos, de manera que sean fuente de motivación y les ayuden a descubrir diferentes conceptos y procedimientos matemáticos, situándolos en contextos reales que muestren su necesidad y justifiquen su uso. En este trabajo se realiza una recopilación y síntesis de los complicados conceptos recogidos en la teoría de fractales, comprensible para nuestros estudiantes y una propuesta didáctica susceptible de ser llevada al aula de Secundaria.

La metodología llevada a cabo es la de presentar diferentes conceptos de la geometría fractal y de la teoría del caos de manera breve y sencilla, introduciendo unas actividades que ha de resolver el alumno trabajando en grupo, con otros compañeros, y guiado por el profesor. De esta manera se posibilita el aprendizaje por descubrimiento y el desarrollo de habilidades y destrezas en un ambiente colaborativo y se motiva y estimula al alumno a utilizar y desarrollar su capacidad para aprender por sí mismo.

> *La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos.*

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete.
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete.

Algunas actividades son originales. Otras han sido recopiladas de diferentes libros y artículos que aparecen en la bibliografía y adaptadas al nivel de los estudiantes de Bachillerato. En todas sirve de gran ayuda, el uso de la calculadora gráfica o de algún programa de cálculo simbólico, como Derive o Maple, con los que poder representar gráficamente funciones y realizar cálculos. También ayuda poder utilizar el programa de geometría Cabri Géomètre, con el que se pueden representar algunos objetos.

El primer apartado, se dedica fundamentalmente al concepto de fractal y de dimensión fractal y es la más idónea para ser desarrollada en el aula como primer contacto. En los apartados siguientes profundizamos en las distintas formas de generar objetos fractales y en sus aplicaciones, muestra de su gran utilidad en el contexto de la sociedad actual.

La secuencia de las actividades no es cerrada pues lo que se pretende es presentar una propuesta que el profesor pueda adaptar según su criterio didáctico y las posibilidades de su alumnado.

¿Qué es un objeto fractal? Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior.

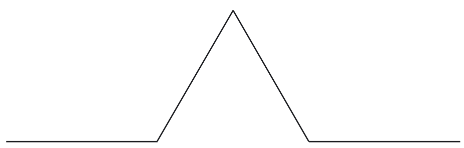
Concepto de fractal y de dimensión fractal

En este apartado se dan breves nociones sobre los objetos fractales, y algo, tan importante como complicado, que los caracteriza: el concepto de dimensión no entera.

La geometría fractal estudia y clasifica los objetos fractales. Pero, ¿qué es un objeto fractal? Su definición exacta está aún por establecer. Una manera de conocerlos y tratarlos es, quizás, analizando lo que tienen en común los procesos matemáticos mediante los que se generan. Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior. En muchas ocasiones, la forma de construirlos es muy sencilla. Se necesita muy poca información para obtenerlos y, sin embargo, el resultado final puede ser de una gran complejidad. El interés de estos objetos es que proporcionan modelos que simulan estructuras presentes en la naturaleza y posibilitan la realización de manipulaciones matemáticas que podrán ser aplicadas a la realidad. Una característica común a todos ellos, y que puede servir para definirlos, es su dimensión. Se admite que un fractal es *un objeto geométrico que puede ser descrito en términos de dimensiones que pueden no ser enteras*. La mayoría de las veces la dimensión de un fractal será un número no entero, pero existen algunos casos particulares de fractales, como la curva de Peano y todos los objetos propios de la geometría euclídea, que tienen dimensión entera. Aclaremos un poco este concepto.

> La gran mayoría de las formas geométricas referidas a objetos creados por el hombre han sido pensados, desarrollados y descritos dentro de la geometría euclídea (líneas, planos, arcos, cilindros...). Estos elementos tienen dimensión entera 1, 2 o 3. Nuestra costumbre de observar y representar objetos, definidos por medidas de largo, ancho y alto, constituye la principal dificultad para aceptar las dimensiones no enteras (fractales).

Consideremos la llamada *curva de Koch*. El proceso para crear esta forma es reemplazar repetidamente cada segmento por los cuatro segmentos siguientes:



El proceso empieza con un solo segmento y continua así sucesivamente sobre cada uno de los segmentos obtenidos en la fase anterior.

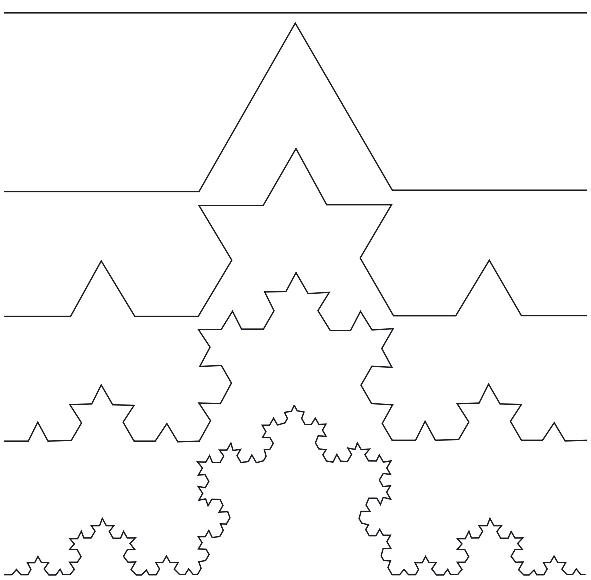
Actividad 1: Sobre una trama triangular construye las cinco primeras iteraciones de esta curva.

Objetivos: Introducir el concepto de iteración y de autosimilaridad mediante la presentación de uno de los llamados *monstruos geométricos*: La curva de Koch.

Observaciones: Al desarrollar esta actividad se trabaja el concepto de medida.

Tratamiento informático: Como el proceso es repetitivo, mediante el programa Cabri Géomètre y utilizando el teorema de Thales, se puede construir una macro que con solo hacer clic sobre cada segmento lo divida en tres partes, elimine el central y construya un triángulo equilátero sobre él (Figueiras y cols., 2000).

Hay que hacer notar que la longitud de la curva que ocupa el espacio inicial va aumentando en cada paso.



Actividad 2: En cada iteración por qué valor se multiplica la longitud de la curva? ¿Qué longitud tendrá la curva límite, cuando hacemos un número infinito de iteraciones? ¿Cuál es la longitud entre dos puntos cualesquiera de la curva? ¿Se podría encerrar esta curva dentro de una superficie acotada? ¿Se podría establecer la posición de uno cualquiera de sus puntos con un solo número?

Objetivos: Aclarar el concepto de dimensión euclídea e introducir la duda sobre la existencia de esa dimensión.

Observaciones: Se trabaja con la función exponencial, el límite de una sucesión y con longitudes infinitas en superficies finitas. Se aclaran ideas como el de longitud de una curva y el de posición de los puntos de la misma y su relación con el instrumento de medida (cuanto más preciso sea más detalles se descubrirán y la longitud aumentará).

A cada paso que se da la longitud se incrementa, de modo que en la k-ésima iteración la longitud es $(4/3)^k$. El alumno debería construir una tabla en la que se relacione el número de la iteración con la longitud de la curva correspondiente. Es importante que el alumno descubra que, en la curva límite, la longitud entre dos puntos cualesquiera es infinita, y, sin embargo, esta curva no se sale de un recinto acotado. La última pregunta permite reflexionar sobre la idea de que no es posible establecer la posición de sus puntos con un solo número (distancia al punto origen), como sucede al trabajar con dimensión euclídea 1. ¿Podrá ser la dimensión de la curva superior a 1?

Tratamiento informático: Calculadora gráfica para obtener las longitudes de la curva en cada iteración y representar gráficamente los puntos obtenidos.

Se puede concluir que el método para crear esta curva es sencillo pero no hay fórmula algebraica que describa sus puntos. La longitud de la línea fractal depende de la precisión del instrumento con el que midamos, o de la unidad de medida que tomemos. Cuando se intenta medir la línea con una regla, siempre se escaparán algunos detalles que no se pueden medir. Por tanto, el concepto de longitud carece de sentido.

Presentamos ahora el concepto de dimensión fractal, que en el caso de las líneas fractales va a indicar de qué forma o en qué medida la línea fractal llena una porción del plano. Además, dicha dimensión debe ser una generalización de la dimensión euclídea.

Consideremos un segmento de longitud *L*, se divide por la mitad y se obtienen dos segmentos de longitud *L/2*. Si se hace lo mismo para un cuadrado de lado *L*, se obtienen 4 cuadrados de lado *L/2* y si se aplica a un cubo se obtienen 8 de lado *L/2*. En cualquiera de los tres casos, el número por el que hemos de multiplicar el lado para que cada parte se convierta en el todo es 2, que es el llamado factor de escala. Se plantea una relación entre el número de elementos *a* y el factor de escala *s*, del tipo $s^d=a$, donde d es la dimensión del objeto.

$$L = 2\cdot\frac{L}{2} \qquad 1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 \qquad 2^1 = 2$$

Dimensión
N.º de objetos
Factor de escala

$$L^2 = 4\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad 1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad 2^2 = 4$$

Dimensión
N.º de objetos
Factor de escala

$$L^3 = 8\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^3 \qquad 1 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad 2^3 = 8$$

Dimensión
N.º de objetos
Factor de escala

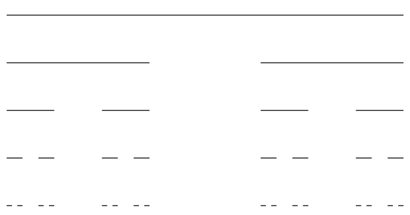
Actividad 3: ¿Si en la expresión $s^d=a$ despejamos *d* que se obtiene?

Objetivos: Obtener una expresión para la dimensión de un objeto.

Observaciones: Con esta actividad se repasa el concepto de logaritmo y su utilidad a la hora de resolver ecuaciones exponenciales.

Después de esta actividad, y puesto que el alumno ha obtenido una expresión para la dimensión de un objeto, se puede dar una definición de objeto fractal y un ejemplo de aplicación de la misma. Como hemos dicho, se suele aceptar e incluso definir que un objeto es fractal cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclídea.

Veamos otro ejemplo. Partimos del intervalo cerrado [0,1], lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central, volvemos a dividir en tres partes cada uno de ellos y eliminamos de nuevo el intervalo central y así sucesivamente.



Actividad 4: ¿Al continuar en la etapa k-ésima indefinidamente, cuántos intervalos cerrados habremos obtenido? ¿Qué longitud tendrá cada uno de esos intervalos? ¿Cuál es la longitud de todos los segmentos obtenidos en cada etapa? ¿Qué ocurrirá con el número de segmentos y la longitud de todos ellos cuando el número de iteraciones sea infinito?

Objetivos: Mostrar otro conjunto (de *Cantor*) que presenta extrañas propiedades y hacer reflexionar al alumno sobre las mismas y la posible dimensión del conjunto.

Observaciones: Se repasan conceptos como el de contar, cardinal de un conjunto y conjunto numerable. Al trabajar con esta actividad, el alumno se encuentra en la k-ésima etapa con 2^k intervalos de longitud $(1/3)^k$. La unión de todos ellos tiene longitud $(2/3)^k$ que tiende a cero cuando el número de iteraciones es infinito.

Tratamiento informático: Como antes, Cabri Géomètre y el teorema de Thales.

La dimensión fractal, en el caso de las líneas fractales, indica de qué forma o en qué medida la línea fractal llena una porción del plano.

Después de estas reflexiones, se puede dar esta definición de conjunto de Cantor: Si en cada etapa hallamos la unión de todos los intervalos obtenidos y después calculamos la intersección de todas estas uniones obtenemos un conjunto al que se le llama conjunto ternario de Cantor. Este conjunto es no vacío, pues al menos contiene los extremos de los intervalos, pero no solamente a ellos. Además es cerrado por ser intersección de intervalos cerrados. Nos encontramos con un conjunto de infinitos puntos no numerable pero de longitud nula.

Actividad 5: Calcula las dimensiones fractales de la curva de Koch y del conjunto de Cantor. ¿Se pueden considerar los dos como conjuntos fractales?

Objetivos: Afianzar la idea de dimensión fractal como índice de la medida en que un objeto llena el espacio. Distinguir entre dimensión fractal (forma de llenar el espacio) y euclídea (forma de ocuparlo).

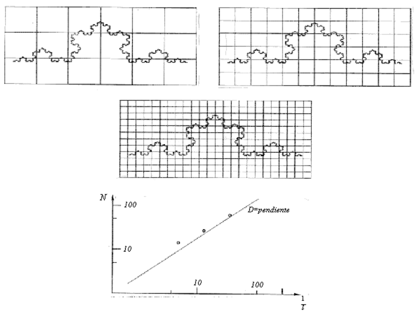
Observaciones: El alumno confirma con el cálculo de la dimensión de la curva de Koch, $(\ln 4/\ln 3) = 1{,}26$, que llena más el espacio que otras curvas de la misma dimensión euclídea que ella. Al ser su dimensión fractal mayor que su dimensión euclídea, sí es un objeto fractal. En el caso del conjunto de Cantor, ocurre lo contrario, su dimensión fractal es $(\ln 2/\ln 3) = 0{,}63$, menor que su dimensión euclídea, luego no es un fractal.

La dimensión es una característica que define a un objeto fractal, pero hay otras características que se dan en muchos de ellos, aunque no en todos:

- Autosimilitud: El conjunto fractal puede dividirse en partes tan pequeñas como se desee y estas partes representan una copia del total.
- Infinito detalle: Al ampliar un fractal aparecen muchos más detalles.
- Iteración: Los objetos se obtienen mediante un proceso repetitivo aplicado a los resultados obtenidos en cada fase.

Otra forma de asociar una dimensión es la de recuento por cajas. Consiste en intentar obtener una medida de la longitud de una curva mediante la medida de las longitudes l, de los lados de los cuadrados que forman un retículo que la recubra. Se cuenta el número de cuadrados N y se establece la relación entre N y l, $N = (1/l)^D$, donde D es, aproximadamente, la dimensión fractal. Se repite el proceso con retículos de cuadrados de lado cada vez menor y se representan las parejas $(1/l, N)$ en papel doblemente logarítmico. Se observa que dichos puntos se concentran en torno a una recta de pendiente D. Tomando logaritmos en la expresión de N se obtiene $lnN = D\ ln(1/l)$, función lineal de variable independiente $ln(1/l)$ y variable dependiente $ln\ N$. Se puede llegar a la conclusión que una buena forma de definir D es como

$$\lim_{l \to 0} \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{l}\right)}$$



Jürgens y cols., 1989.

La siguiente actividad se basa en uno de los primeros objetos fractales de dimensión superior a 1 aparecidos en la literatura sobre fractales (Mandelbrot, 1975).

Actividad 6: Utilizando tramas cuadradas, calcula la dimensión de recuento por cajas de la curva de Koch y la de una línea costera como la de Gran Bretaña.

Objetivos: Hacer ver al alumno otra definición de dimensión diferente a la fractal pero coincidente con ella en los objetos más característicos, de manera que se ponga de manifiesto el desarrollo de los conceptos matemáticos al intentar adaptarse y dar respuesta a los problemas surgidos en determinados momentos.

Observaciones: Se relacionan los conceptos de regresión lineal y dimensión.

Tratamiento informático: Calculadora gráfica, para introducir parejas de puntos, representarlas gráficamente y, calcular y dibujar la recta de regresión.

Sistemas dinámicos discretos

Se pretende ahora, dar una breve introducción a los sistemas dinámicos discretos, para poder iniciar la teoría del caos, introduciendo el concepto de atractor y determinados tipos de objetos fractales importantes que se generan de esta forma.

Los sistemas dinámicos se ocupan del movimiento, de las transiciones de un estado a otro. Un sistema dinámico discreto es un par de la forma (X, f), donde f es una aplicación de X en X que representa la ley de evolución del sistema dinámico. El conjunto X recibe el nombre de espacio de fases o de estados. La palabra discreto significa que el sistema evoluciona para valores discretos del tiempo. Las variables que describen el sistema dinámico discreto reciben el nombre de variables de estado y forman un vector llamado vector de estado.

Si se parte de una solución inicial x_0, denotaremos $x_k = f^k(x_0)$, en donde f^k representa la composición k veces de la función f. Se llama solución general a la expresión $F_x(k) = f^k(x)$. Al conjunto de valores $\{x_0, x_1, x_2, x_3...\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x)...\}$se le llama órbita de $x = x_0$. La obtención de expresiones analíticas para esta solución suele ser muy difícil o imposible, en estos casos se recurre a la representación gráfica.

Dado un sistema dinámico (X, f), se dice que $\varepsilon \in X$ es un punto fijo si $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Los puntos fijos merecen especial atención, son estados de equilibrio, una vez que se entra en ellos no se abandonan. Se clasifican en atractivos, repulsivos e indiferentes. Un punto fijo se dice que es atractivo si $|f'(\varepsilon)| < 1$. Esto quiere decir que existe un intervalo abierto que contiene a cuyos puntos tienen órbitas que mueren en ε. Se dice que es repulsivo si $|f'(\varepsilon)| > 1$. Viene a decirnos que todos los puntos próximos a ε, que estén dentro del mismo intervalo abierto al que pertenece, tienen órbitas que se alejan de ε. El punto fijo es indiferente si $|f'(\varepsilon)| = 1$. En este caso puede haber puntos próximos a ε cuyas órbitas se alejan de ε y otros cuyas órbitas caen en ε.

Se dice que el punto fijo ε es periódico o cíclico de periodo n del sistema (X, f), si existe un n tal que $|f^n(\varepsilon)| = \varepsilon$ y $|f^i(\varepsilon)| \neq \varepsilon$ Su órbita sería de la forma:

$$(\varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon), \varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon), \varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon)...)$$

El siguiente bloque de actividades permite introducir los sistemas dinámicos discretos y los conceptos asociados a él, como: órbita, punto fijo y sus diferentes clases y solución general. En ellas se trabajan conceptos ya conocidos por los alumnos, entre ellos la composición y el límite de funciones, ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, la función lineal, la cuadrática, y las progresiones aritméticas.

Actividad 7: Itera con la calculadora gráfica las funciones $f(x)=x^2$; $f(x)=\cos x$; $f(x)=1/x$, partiendo de diferentes valores iniciales. Investiga sus órbitas gráficamente y su estabilidad. (Una órbita es estable si, aunque cambiemos ligeramente el valor inicial, la órbita sigue siendo más o menos la misma).

Actividad 8: Calcula la solución general de la ecuación de Malthus $x_{k+1} = a \cdot x_k$ y el límite de dicha expresión. (Martín y otros, 1998).

Actividad 9: Calcula la solución general de un sistema dinámico con dos variables de estado como el siguiente:

$$x_{k+1}=x_k+y_k \qquad y_{k+1}=x_k$$

Actividad 10: Prueba que si a $\neq 1$, la ecuación $x_{k+1}=a \cdot x_k +b$ tiene un punto fijo y calcúlalo. Si ε es el punto fijo anterior. Prueba que si $x_k = z_k + \varepsilon$, entonces z_k satisface la ecuación $z_{k+1}=a{\cdot}z_k$. Comprueba que si a=1, las soluciones de la ecuación $x_{k+1}= x_k + b$ son progresiones aritméticas. (Martín y otros, 1998).

La actividad 7 presenta a los estudiantes tres funciones diferentes. En el primer caso, van a trabajar con una función muy sensible a las condiciones iniciales. Si tomamos valores muy próximos a 1, para los valores situados a la izquierda, las órbitas convergen a cero, para valores a la derecha de 1, las órbitas van a +∞. Lo mismo sucede en un entorno de –1. En el segundo, sea cual sea el punto inicial, todas las órbitas convergen a un mismo punto fijo. En el tercero hay dos puntos periódicos de periodo 2.

Con la actividad 8 se practica la composición de funciones asociada al proceso de iteración de manera algebraica y se discuten los valores del límite en función de los valores de a. En la 9, el alumno se enfrenta a la composición de dos funciones, una de ellas es, a su vez, función de la otra. Como era de esperar, aparecen como coeficientes los números de Fibonacci por ello, antes de resolverla algebraicamente, se puede pedir a los alumnos que mediten sobre el posible resultado. La actividad 10 está pensada para ser resuelta algebraicamente. Los alumnos deben aplicar en ella relaciones de recursividad y es interesante que observen la relevancia del valor del parámetro a.

La calculadora gráfica permite obtener y representar las órbitas. Con las sucesiones se pueden generar valores y representarlos gráficamente, permitiéndonos analizar las órbitas, determinar o aproximarse a los puntos fijos y analizar la estabilidad de las órbitas, recalculando las mismas para pequeñas modificaciones del valor inicial.

Tipos de fractales

Se presentan aquí diferentes formas de obtener objetos fractales y ejemplos de algunos objetos que simulan formas de la naturaleza.

Fractales deterministas lineales

Los fractales lineales son descritos mediante sistemas dinámicos lineales. La función aplicada sobre el espacio de fases es una función lineal. Partiendo de un objeto inicial se aplica una función lineal repetidas veces sobre cada uno de los resultados obtenidos en el proceso anterior. Todos ellos se caracterizan por ser autosimilares. Cualquier parte del objeto contiene una copia reducida del original. La manera habitual de obtener estos objetos es mediante un sistema de funciones iteradas (IFS). Una transformación lineal actúa sobre el plano euclídeo y permite girar, desplazar y cambiar la escala de cualquier conjunto del plano. La transformación W, se denomina contractiva si hace que dos puntos cualesquiera estén más próximos después de haber sido transformados. Esta transformación modifica los puntos de un objeto hasta convertirlo en un punto fijo al que se denomina atractor.

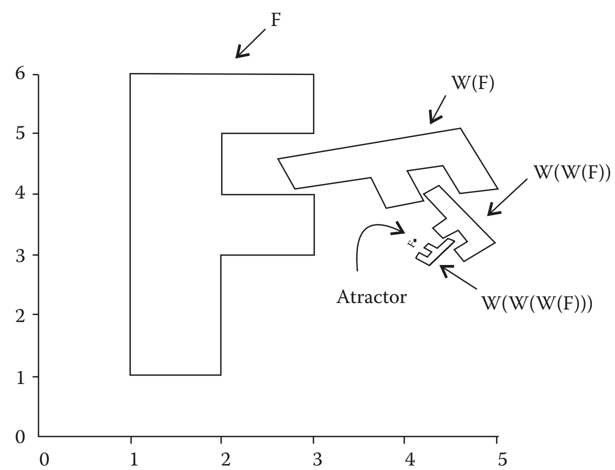
Se puede expresar como $W(x, y) = (ax+by+e, cx+dy+f)$ o bien

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

También se puede expresar

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha & -s\,sen\beta \\ r\,sen\alpha & s\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

donde r y s representan la escala, α y β la rotación y m y n la traslación

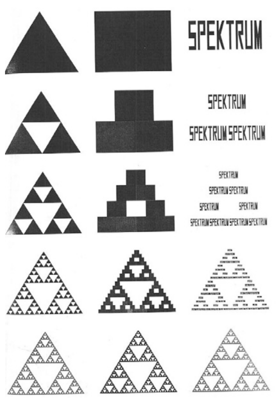


Si observamos la imagen anterior, la transformación *W* converge a un punto fijo. Este fenómeno se da con todas las aplicaciones contractivas. Lo curioso es que el atractor, independientemente de la imagen de origen, es siempre el mismo.

Un sistema de funciones iteradas es un conjunto de transformaciones lineales contractivas. Los sistemas de funciones iteradas están formados por transformaciones y probabilidades.

El helecho es un fractal generado por un sistema de funciones iteradas que consta de cuatro matrices de transformaciones 2x2, cuatro matrices 2x1 de traslaciones y cuatro probabilidades.

Cada transformación lineal tiene asociada una probabilidad que influye en su aplicación. Un conjunto fractal se puede representar en forma de matriz mediante un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). Consideremos, por ejemplo, un sistema de funciones iteradas formado por tres aplicaciones contractivas, W_1, W_2 y W_3, y sus correspondientes probabilidades. A un conjunto inicial se le aplica una de las transformaciones, al objeto obtenido se le aplica otra de las transformaciones o la misma incluso, al objeto obtenido se le aplica, de nuevo, alguna de las tres transformaciones y así sucesivamente hasta caer en un objeto final, el atractor del sistema de funciones iteradas. Dentro del conjunto de fractales que se obtiene de esta forma están los de la geometría euclídea y los autosemejantes. Al margen de las probabilidades asociadas a cada transformación y del conjunto inicial de partida al que se aplican las mismas, el resultado es siempre el mismo objeto fractal, el atractor del IFS. Esto quiere decir que los IFS son independientes del conjunto inicial, como se muestra en el siguiente dibujo (Jürgens, 1989):



El uso de IFS ofrece la posibilidad de encontrar, para un objeto natural, un fractal que se aproxime a él lo que se desee. Dado un ente real, como una planta, una montaña, o el corazón humano se puede obtener un conjunto de aplicaciones lineales contractivas que determinarán un fractal que se aproximará a la realidad tanto como se quiera.

Esto es un helecho. Es un fractal generado por un sistema de funciones iteradas que consta de cuatro matrices de transformaciones 2x2, cuatro matrices 2x1 de traslaciones y cuatro probabilidades. La autosimilaridad es evidente en él.

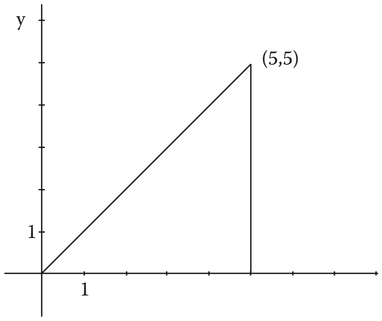
El triángulo de Sierpinski: Sin duda es uno de los objetos más simples e interesantes que existen. Uno de los aspectos más sorprendentes de dicho triángulo es que hay muy diferentes y fáciles formas para generarlo. El camino más fácil es empezar con un triángulo, (no es imprescindible que sea equilátero). Se unen los puntos medios de cada lado para formar cuatro triángulos separados y se elimina el central. Se repite el proceso indefinidamente con cada uno de los tres restantes.

Actividad 11: Con la ayuda de una malla triangular de puntos, dibuja unas cuantas iteraciones de dicho triángulo. ¿Qué figura obtienes? Calcula en cada iteración el perímetro y el área de la figura obtenida. Calcula el perímetro y el área para la figura que resultaría si se realizaran infinitas iteraciones. ¿Cuál podría ser la dimensión de este objeto? Calcúlala con la fórmula que ya conoces.

Objetivos: Presentar un objeto de los llamados extraños, de gran importancia, el triángulo de Sierpinski, afianzar los conceptos de iteración y autosimilaridad.

Observaciones: Se vuelve a trabajar el concepto de medida, en este caso referida al perímetro y al área del objeto. El alumno se ve obligado a razonar y reflexionar sobre el número de elementos obtenidos en cada iteración y sobre el factor de escala. Es conveniente que en cada iteración se calcule el perímetro y el área a la vez, de esta forma se puede comparar y ver que mientras que el perímetro aumenta el área disminuye, y este hecho puede ayudar a llegar a la conclusión de que, a pesar de ser un objeto contenido en el plano, la manera en que lo llena es un tanto peculiar y que, mientras que su dimensión euclídea sería 2, su dimensión fractal sería un valor comprendido entre 1 y 2. Al calcular la dimensión del mismo se comprueba este hecho y el proceso de razonamiento permitirá al alumno afianzar la idea de dimensión fractal.

Actividad 12: Aplica el siguiente sistema de funciones iteradas al triángulo que se muestra a continuación. ¿Qué obtienes?



$$W_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$W_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

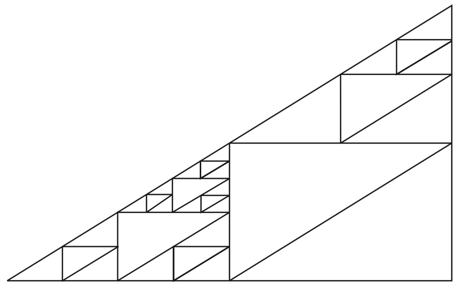
$$W_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Objetivos: Manipular el concepto de sistema de funciones iteradas.

> "El caos observa que realmente existen movimientos sin orden. Gracias a la teoría del caos, hemos comprendido que puede haber movimientos erráticos que no son aleatorios, sino que responden a reglas fijas."
> Feigenbaum

Observaciones: Se efectúan operaciones con matrices mediante las que se van reduciendo las medidas del objeto a la mitad y se trasladan. Con la primera transformación el triángulo se sitúa en la zona inferior de la izquierda, con la segunda en la zona inferior de la derecha y con la tercera se sitúa en la parte superior. La zona central quedaría vacía. En la k-ésima iteración tendríamos 3^k triángulos donde cada lado mide $(½)^k$ de la longitud del lado correspondiente en el primer triángulo. Se debe reflexionar sobre el objeto resultante (Sierpinski) y lo que implica cada transformación.

Utilizando las posibilidades de la calculadora gráfica, se introducen las matrices de escalado y de traslación, y se aplican a los vértices de los triángulos obtenidos en cada iteración. Introduciendo los valores en listas se pueden representar los puntos que se van obteniendo. Con Cabri Géomètre II se puede construir una macro que reduzca cada triángulo a la mitad y saque tres copias que traslade a los lugares correspondientes, para ver el efecto final. Se afianzarán los conceptos de iteración y recursividad.



El triángulo de Pascal (Tartaglia) y el triángulo de Sierpinski: El triángulo de Pascal es una creación fascinante que ha sido colocada en todo tipo de sitios: teoría de números, teoría de la probabilidad... Ahora cabe también en la geometría fractal.

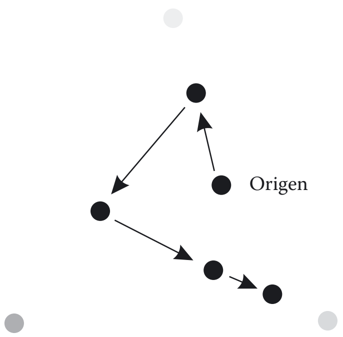
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 465 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Actividad 13: Colorea de negro en el triángulo anterior las casillas ocupadas por números impares y deja en blanco las casillas ocupadas por pares. ¿Qué obtienes? Haz lo mismo con los múltiplos de 4, dejando en blanco las casillas ocupadas por ellos. Igual con los múltiplos de 5 ¿Qué obtienes? Vamos a repetir el experimento trabajando en una base distinta a la habitual. Escojamos, por ejemplo, base cinco. Convierte el triángulo de Tartaglia a esta base, toma las 15 primeras filas y colorea de diferentes formas los grupos formados por ceros, por una parte, y por unos, doses y treses, por otra. ¿Qué obtienes? ¿Cuál es el patrón de formación de este triángulo de Sierpinski? Repite el proceso en otra base distinta. Usa otra regla para obtener dicho triángulo, como restar los dos números anteriores en vez de sumarlos y colorea de diferentes formas los positivos y los negativos. ¿Qué obtienes ahora? Inventa tú otras reglas y colorea de diferentes formas. ¿Observas algo común en todo lo obtenido a lo largo de la actividad?

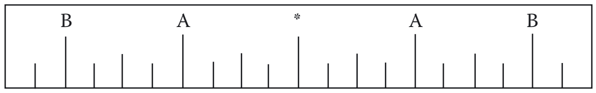
Objetivos: Presentar al alumno la curiosa relación que se establece entre el triángulo de Sierpinski y el de Tartaglia a través de juegos con los números.

Observaciones: Se trabaja con múltiplos, números combinatorios y bases diferentes a la decimal, y se permite al alumno usar la imaginación para experimentar con diferentes posibilidades. Esta actividad se puede utilizar para despertar la capacidad de asombro de los alumnos y mostrarles como lo aprendido en diferentes bloques de contenidos se relaciona de las más insospechadas formas. Sería interesante hacerles reflexionar sobre el porqué se establece esa relación entre ambos triángulos, analizando cómo se distribuyen en el triángulo de Tartaglia los pares y los impares, o los múltiplos de cuatro y los de 5, etc. y la formación de los huecos en dicho triángulo. Es posible, además, trabajar en diferentes bases y establecer relaciones entre las mismas, afirmando los procedimientos de formación de números en sistemas de numeración posicionales.

El juego del caos: Consiste en lo siguiente: Se marcan tres puntos como los vértices de un triángulo equilátero. Se colorea el vértice de arriba de rojo, el de abajo de la izquierda de verde y el de abajo de la derecha de azul. Se toma un dado que tenga dos caras rojas, dos verdes y dos azules. Para iniciar el juego, se necesita, un origen, que puede ser cualquier punto arbitrario del plano. Se procede del siguiente modo: Se lanza el dado, y dependiendo del color obtenido se mueve el punto origen la mitad de la distancia hacia el apropiado vértice coloreado. Después se repite el proceso, utilizando el punto obtenido en el anterior movimiento como origen del siguiente movimiento. No conviene marcar los primeros puntos obtenidos.



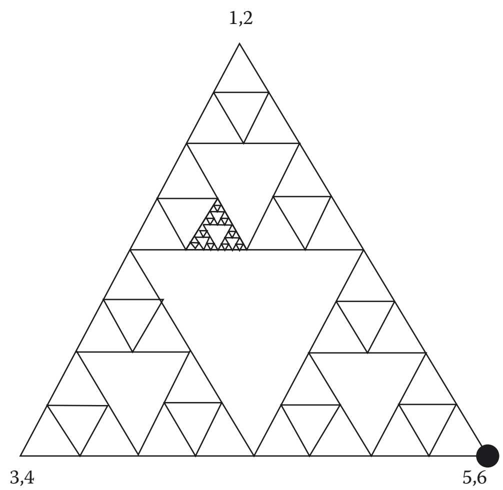
Actividad 14: ¿Qué crees que sucederá? Juega con un compañero y observa lo que pasa. Para efectuar las medidas te puedes ayudar de una regla como ésta:



Objetivos: Obtener el triángulo de Sierpinski a través del juego.

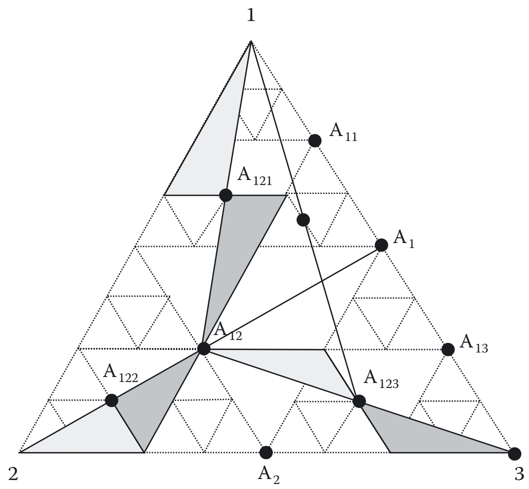
Observaciones: El alumno puede ver la riqueza de procedimientos que nos conducen a este interesante objeto, y, del mismo modo que en la actividad anterior, sería interesante que, después de jugar y de haber dibujado los puntos que se van obteniendo, intentaran dar una explicación del porqué de la formación del triángulo. Si se parte de uno de los vértices de alguno de los triángulos de alguna iteración, las siguientes posiciones se encuentran también en vértices de triángulos de alguna iteración. ¿Qué ocurriría si el punto de inicio se encuentra dentro de alguno de los triángulos eliminados? Igual que antes, los sucesivos puntos que se van obteniendo están contenidos en triángulos eliminados, ¿Cómo aparece, por tanto, el triángulo de Sierpinski? Se puede hacer, de nuevo, hincapié en el concepto de infinito, y hacer ver que al tomar un número muy grande de iteraciones los triángulos eliminados se vuelven tan pequeños que es muy difícil precisar qué puntos están en él y qué puntos no lo están. Con el uso de la regla del punto medio, los alumnos descubren un método sencillo y original de calcular el punto medio de un segmento de una determinada longitud.

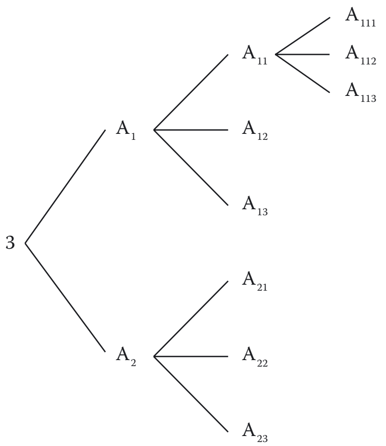
Actividad 15: Sitúate en un vértice del triángulo de Sierpinski y en un triángulo de una determinada iteración. Intenta estimar el número mínimo de tiradas necesarias para llegar a dicho triángulo desde dicho vértice.

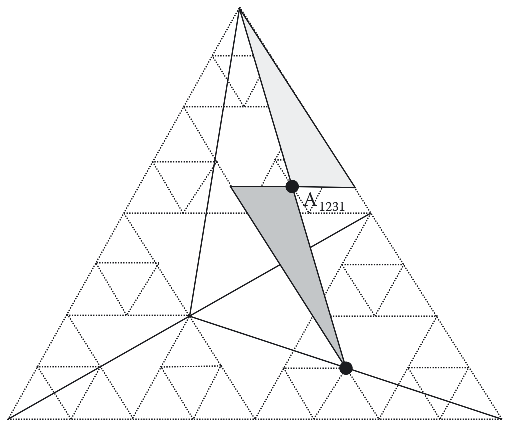


Objetivos: Profundizar en el algoritmo de formación del triángulo.

Observaciones: Al igual que en la actividad anterior se comprobaba experimentalmente que al caer en uno de los vértices de alguno de los triángulos que forman parte del triángulo de Sierpinski, los siguientes movimientos nos situaban en vértices de otros triángulos del objeto final, en esta otra actividad se puede comprobar también el mismo efecto. Se parte del vértice marcado y se consideran los puntos a los que se podría saltar. Dibujando la distancia a cada uno de los vértices, se podría calcular, en cada caso, el punto medio, aproximándolo primero y después conformando su posición exacta mediante simetrías y giros. De esta forma se puede trabajar con los movimientos. ■







REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIRAS, L. y cols. (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de los fractales", *Suma*, n.º 35, 45-54.

JÜRGENS, H.; PEITGEN, H.; SAUPE, D. (1989): "El lenguaje de los fractales", *Investigación y Ciencia*, n.º 169, 46-57.

MANDELBROT, B. (1975): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.

MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M. (1998): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.

SUMA 47

Noviembre 2004, pp.29-36

Tres problemas clásicos y complejidad

En este trabajo se muestra como algunos de los problemas de más interés de las ciencias de la computación pueden encontrarse en la historia de las Matemáticas. En concreto, se comentan los tres problemas clásicos como un ejemplo de búsqueda de la solución de un problema dentro de un modelo de computación, esto es, con una restricción sobre las operaciones que se pueden efectuar. Se comenta someramente la historia de estos problemas. El concepto de complejidad en el peor de los casos se presenta como una manera adecuada de medir la efectividad de un algoritmo que resuelve un problema.

This paper shows how some of the most interesting problems within the computer sciences can be found in the history of Mathematics. In fact, the three classic problems are mentioned as an example of the quest for problem solution within a computer pattern; that is to say, with some restriction over the operations to be carried out. The concept of complexity in the worst of cases is put forward as a suitable way of measuring how effective a problem-solving algorithm is.

Cuando una persona adquiere un nuevo instrumento, digamos por ejemplo un vídeo diferente o un robot doméstico nuevo, su primer interés es conocer todo lo que dicho instrumento es capaz de hacer. En el manual de instrucciones de cada aparato se describen todas las operaciones que éste puede realizar. Así, con el nuevo vídeo puede ver películas, grabar programas de televisión... o con el robot puede preparar tal o cual guiso, exprimir, triturar... Por otro lado el usuario también está interesado en saber con qué tipo de objetos funciona su electrodoméstico. Se pregunta si su vídeo admite cintas del tipo VHS o puede usar un CDROM o un DVD, o si su robot doméstico admite todo tipo de alimentos o debe tener precauciones con algunos de ellos. Este sencillo ejemplo ilustra las dos preguntas generales sobre las que se va a construir el concepto abstracto de modelo computacional.

Pregunta 1: ¿Qué tipo de datos admite el sistema?
Pregunta 2: ¿Qué operaciones es capaz de realizar dicho sistema con estos datos?

Entendiendo el término *datos* en su sentido etimológico como *lo que se da*, esto es, lo dado.

Por tanto, si queremos construir un modelo abstracto que represente las potencialidades de una máquina, un conjunto de máquinas, un ordenador o ciertos instrumentos, se debe basar sobre la respuesta a esas dos preguntas anteriores: datos y operaciones.

Un *modelo computacional* se describe entonces dando:

Los datos de entrada que va admitir.
Las operaciones básicas que va a poder efectuar con dichos datos.

Ejemplo: Un modelo computacional muy habitual en el contexto de las ciencias de la computación es el conocido como *Real RAM* (*Random access machine*) donde los datos de entrada están formados por números reales y las operaciones básicas son:

- Asignación a una variable de una unidad de memoria.
- Operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.
- Comparaciones: dados dos números reales a y b determina si a es menor, igual o mayor que b.

Observación: No vamos a entrar en estas notas en dos interesantes cuestiones que aparecen relacionadas con este ejemplo pero que tienen carácter general. La primera acerca de cómo representar los números reales (en general cómo representar

Roberto Muñoz
ESCET, Universidad Rey Juan Carlos. Madrid.

adecuadamente los datos de entrada de un modelo computacional, sean números, letras, palabras, o datos de alguna otra naturaleza). La segunda sobre los tipos de datos que se pueden construir (y qué características y ventajas tienen) con los números reales (o en general con los elementos que se hayan elegido como datos de entrada en el modelo computacional) digamos por ejemplo, listas, árboles, arrays...

Una vez que tenemos este ente abstracto que es el modelo computacional, y dado un problema P, nos gustaría saber si podemos encontrar una combinación de las operaciones básicas del modelo que resuelva el problema P, esto es, un algoritmo que resuelve P. Para ser precisos, demos una definición del término algoritmo.

Definición: Dado un modelo computacional y un problema P, definimos un algoritmo que resuelve P (en dicho modelo) como una lista ordenada y finita de operaciones básicas del modelo que, aplicadas a unos datos de entrada precisamente definidos, y tras realizar un número finito de operaciones, construyen una solución del problema P.

Por ejemplo en el modelo computacional *Real RAM* podemos resolver ecuaciones del tipo siguiente: $Ax + B = C$, donde A, B, C son números reales y, en particular, A es no nulo. En efecto, la solución es el cociente $(C-B)/A$ y se ha construido mediante una diferencia y un cociente, que son operaciones básicas para el modelo considerado *Real RAM*.

Entonces podemos hablar de *problemas resolubles* (respectivamente *irresolubles*) en un modelo computacional, como aquellos para los que se puede construir (respectivamente no se puede construir) un algoritmo que los resuelva.

Desde el siglo V AC, distintos matemáticos han trabajado tratando de resolver algunos problemas como la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo mediante la geometría con regla y compás.

Tomemos ahora un problema P resoluble en un modelo computacional. Supongamos que tenemos una máquina que efectúa las operaciones básicas de nuestro modelo computacional y que necesita, por ejemplo, una décima de segundo para efectuar cada una de dichas operaciones básicas. Si el algoritmo que resuelve P necesita realizar demasiadas operaciones, por ejemplo, 3.1536 por la décima potencia de 10, entonces tendremos que esperar 100 largos años para que el algoritmo nos ofrezca una solución del problema en cuestión, lo que parece un tiempo demasiado largo. En este sentido podremos hablar de *problemas resolubles efectivamente* en un modelo computacional como aquellos problemas para los que puede construir un algoritmo que realice una cantidad de operaciones que precisen de un tiempo *razonable* para su solución. El término razonable es, en este contexto, un término relativo que no será igual para una empresa con balance anual, que para un proyecto quinquenal, que en otros contextos.

Por tanto, resumiendo, dado un modelo computacional nos estamos preguntando:

Sobre la resolubilidad. ¿Qué problemas son resolubles dentro del modelo, es decir, para qué problemas se puede construir un algoritmo que aporte una solución del problema.

Sobre la resolubilidad efectiva ¿Qué problemas, dentro de los que son resolubles en el modelo, se pueden resolver efectivamente, esto es, el algoritmo que los resuelve precisa de un tiempo razonable (en un sentido que precisaremos más adelante) para construir la solución del problema?

Pongamos un ejemplo del alcance de estas preguntas. La seguridad informática está en muchos casos basada sobre métodos criptográficos que se fundamentan en que el problema de la factorización de números naturales es, por ahora, un problema no efectivamente resoluble. Esto quiere decir que los algoritmos que se conocen necesitan un tiempo demasiado largo para decodificar mensajes, por lo que el sistema es seguro. Pero el hecho de que no se conozcan algoritmos efectivos no significa (salvo que haya una demostración que lo indique y no es el caso) que no puedan existir.

Los ejemplos que vienen a continuación ilustran situaciones en las que ciertos problemas son no resolubles en un modelo computacional. La infructuosa búsqueda de soluciones durante siglos parecía indicar que esto era así. Pero conviene señalar que el mero paso del tiempo no es un argumento en sí mismo. Por ejemplo, el problema de la construcción con regla y compás de un polígono regular de 17 lados pareció durante cientos de años (de la Grecia clásica a los tiempos de Gauss) irresoluble, hasta que Gauss realizó dicha construcción, de la que se sintió tan orgulloso que la mandó tallar sobre su tumba.

Construcciones con regla y compás

Situados tras la introducción en los conceptos básicos, podemos pensar que las cuestiones planteadas han aparecido con la tecnología, que antes de los ordenadores este tipo de preguntas sobre la resolubilidad de un problema carecían de interés. La historia de las matemáticas muestra que esta curiosidad está presente en el trabajo de diferentes personas, aun antes de que fuera un problema la evaluación de las potencialidades de un instrumento. Como ejemplo podemos mencionar que desde el siglo V antes de Cristo hasta el siglo XIX distintos matemáticos han trabajado duramente para tratar de resolver algunos problemas, a saber: *la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo* dentro del modelo computacional conocido como *la geometría con regla y compás.*

Definamos el modelo computacional: *Geometría con regla y compás.*

Los *datos de entrada* están formados por tres tipos de objetos:

- Los puntos.
- Las circunferencias.
- Las rectas.

Las *operaciones básicas* que vamos a poder realizar son las siguientes:

- Apoyar una pata del compás en un punto.
- Producir una circunferencia.
- Apoyar la regla en un punto.
- Producir una recta.
- Intersecar rectas, circunferencias y rectas con circunferencias.

Y nos estamos rigiendo por los axiomas habituales de la geometría euclídea, que son, citando textualmente (Boyer, 1987):

Postulados

- Trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.
- Prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.
- Describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
- Que todos los ángulos rectos son iguales.
- Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes

- Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
- Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
- Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
- Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
- El todo es mayor que la parte.

Pongamos dos ejemplos de problemas resolubles en este modelo computacional:

Ejemplo: Construcción de ángulos rectos. Para construir un ángulo recto se traza un segmento *AB*. Se pincha el compás en *A* y se apoya la otra pata en *B*. Se traza una circunferencia *C*1 con el compás así situado. Se repite el proceso pinchando el compás en *B* y apoyando la otra pata en *A*, construyendo la circunferencia *C*2. Se traza el segmento *PQ* que une los dos puntos de intersección de *C*1 y *C*2. Este segmento es perpendicular al segmento *AB* y además divide el segmento *AB* en dos partes iguales, es decir, si *M* es el punto de intersección de los segmentos *PQ* y *AB* se tiene que la longitud de *AM* es igual a la longitud de *MB*.

En la Figura 1 el segmento *AB* es el segmento horizontal. De este modo haciendo la construcción que se detalla en el párrafo anterior, si llamamos *P* al punto de la intersección de *C*1 y *C*2 que está en el semiplano superior definido por la recta *AB*, se forman dos triángulos equiláteros: *APB* y *BQA* (pues su lado es el radio común de *C*1 y *C*2, esto es, la longitud del segmento *AB*). Al ser triángulos equiláteros se tiene que *AP* y *BQ* (respectivamente *PB* y *AQ*) son rectas paralelas. Esto permite concluir que los triángulos *APM* y *MBQ* son iguales y por tanto que la longitud del segmento *AM* es igual a la de *MB*. Esto justifica el hecho de que *AMP* es un ángulo recto, pues finalmente se tiene la igualdad de los cuatro triángulos *AMP=BMP=AMQ=BMQ*.

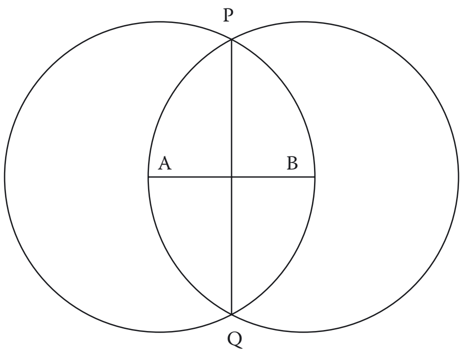


Figura 1. Construcción de ángulos rectos

Ejemplo: Construcción de hexágonos regulares. Para construir un hexágono regular se tiene el siguiente algoritmo:

- Dibujar un círculo *C* de radio *r*.

- Elegir un punto *p1* en *C* y pintar un círculo *C1* con centro en *p1* y radio *r*. Se tiene que la intersección de *C* y *C1* es el conjunto *{p2, p3}*.

- Dibujar un círculo *C2* con centro *p2* y radio *r*. Entonces la intersección de *C2* y *C* es *{p1, p4}*.

- Dibujar un círculo *C3* con centro *p4* y radio *r*. Entonces la intersección de *C3* y *C* es *{p2, p5}*.

- Dibujar un círculo *C4* con centro *p5* y radio *r*. Entonces la intersección de *C4* y *C* es *{p6, p4}*.

El hexágono es, dando sus vértices: *p1, p2, p4, p5, p6, p3, p1.*

El lector puede reproducir esta construcción y verificar por sí mismo que, en efecto, se ha formado un hexágono regular.

Este modelo computacional de la geometría con regla y compás es conocido desde la Grecia clásica donde comenzaron a preguntarse acerca de qué construcciones eran posibles dentro de él. En la colección de libros *Los Elementos* de Euclides (un compendio del conocimiento de la geometría en la Grecia clásica) se pueden encontrar múltiples construcciones con regla y compás para resolver problemas de índole geométrica (e incluso aritmética). Entre los problemas para los que no se obtuvo una construcción con regla y compás se plantearon los siguientes, que por su interés para la comunidad matemática griega y para la de los siglos venideros hasta la actualidad, se han venido a denominar *Problemas clásicos*.

1. Problema de la duplicación de un cubo: Dado un cubo *C* de arista *a*, dar una manera de construir (con regla y compás) un cubo *C'* de volumen el doble. Esto es, el volumen de *C* es el cubo de *a* y el volumen de *C'* debe ser el doble del cubo de *a*.

2. Problema de la cuadratura de un círculo: Dado un círculo *T* de radio *r*, construir con regla y compás un cuadrado *T'* de lado *l* de modo que el área de *T* y el área de *T'* sean iguales.

3. Problema de la trisección de un ángulo: Dado un ángulo, digamos *a*, construir con regla y compás el ángulo *a/3*.

Después de dar algunas soluciones a estos problemas en modelos computacionales que no son la geometría con regla y compás (esto es, esencialmente, permitiendo alguna operación más), muchos siglos después (en el siglo XIX) se demostró que no son resolubles en ese modelo computacional, en algunos casos mediante el uso de teorías que, en principio, no presentaban relación con el problema inicial. Recorramos someramente la historia de estos problemas.

El problema de la duplicación del cubo

El enunciado del problema es el siguiente, expresado en los términos que hemos ido definiendo en párrafos anteriores:

Problema: ¿Es el problema de la duplicación de un cubo un problema resoluble en el modelo computacional *Geometría con regla y compás*?

Hay dos explicaciones sobre la génesis del problema, que, en cualquier caso, nos permiten datarlo en el siglo V AC. Por un lado una de las afirmaciones sostiene que el oráculo de los dioses informó a los Delianos de que para librarse de una plaga deberían construir un altar de volumen el doble del altar cúbico existente. Por otro, un episodio mitológico en el que el poeta describe que Minos encuentra la tumba de Glauco (cúbica de arista 100 pies) demasiado pequeña para su categoría y para duplicar su volumen propone simplemente duplicar su arista. Claramente, lo que propone el poeta no es una solución del problema porque si la arista *a* se duplica entonces el nuevo volumen es ocho veces el volumen inicial.

Como señalamos antes estas dos fuentes (véase la página *web* [SA]) permiten datar el problema (porque la plaga más importante que asoló Atenas fue alrededor del 430 AC) y nos hace comprender que este problema de duplicar un sólido igual a sí mismo estaba en el interés matemático de la época.

El problema en dos dimensiones, esto es, duplicar el cuadrado, es una construcción muy simple, consecuencia del teorema de Pitágoras. Si el cuadrado *C* tiene arista *a*, entonces la diagonal mide exactamente el producto de *a* por la raíz cuadrada de 2. Por tanto un cuadrado *C'* con esa diagonal como arista tiene área exactamente el doble de la de *C.*

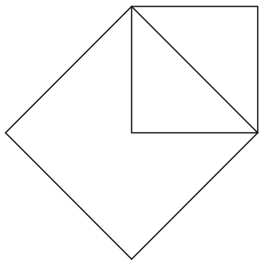


Figura 2. Duplicación de un cuadrado

Volviendo al problema del cubo, la primera idea interesante, posiblemente debida a Hipócrates, acerca del problema es la equivalencia con el siguiente problema:

Problema equivalente: Dados dos números *a* y *b* encontrar dos medias proporcionales entre ellos, esto es, dos números *x* e *y* de modo que $a/x = x/y = y/b$. Así, tomando $b = 2a$, se tiene que *x* es justamente la arista del cubo de volumen el doble.

Se han ido construyendo dichas medias *x* e *y* de distintas maneras a lo largo de la historia, presentamos por ejemplo cómo lo hizo Menecmo, con la ayuda de secciones cónicas. Nuestras medias buscadas forman un punto *p* del plano, digamos $p = (x, y)$. De la igualdad $a/x = x/y$ se obtiene que *p* yace en la parábola *P* definida por la igualdad entre el cuadrado de *x* y el producto *ay*. Por otro lado de la igualdad $a/x = y/b$ se obtiene que *p* yace en la hipérbola *H* definida por la ecuación

$xy = ab$. De este modo p es el único punto de intersección de P y H que yace en el primer cuadrante.

Esta solución del problema no pertenece a nuestro modelo computacional pues necesita de la construcción de dos secciones cónicas, en concreto, una parábola y una hipérbola, objetos geométricos que no se pueden construir con regla y compás. A lo largo de la historia otros matemáticos fueron dando soluciones al problema pero siempre usando más instrumentos que meramente la regla y el compás.

Hasta el siglo XIX, concretamente en el año 1837, no se demostró que el problema de la duplicación de un cubo *no era resoluble en el modelo computacional de la geometría con regla y compás*. Fue el matemático francés P. Wantzel (ver [Wantzel, 1837]) quien publicó en el *Journal of Liouville* una demostración de que no se podía duplicar el cubo con regla y compás. En los detalles de la demostración no entraremos en estas notas.

Hasta el año 1837, no se demostró que el problema de la duplicación de un cubo no era resoluble en el modelo computacional de la geometría con regla y compás.

El problema de la cuadratura de un círculo

Problema: ¿Es el problema de la cuadratura de un círculo un problema resoluble en el modelo computacional *Geometría con regla y compás*?

Este es un problema cuyo origen también puede situarse en la Grecia clásica y que ha interesado a muchos matemáticos a lo largo de la historia. De hecho, la pregunta central gira en torno al número π, ese número real no racional que describe la proporción entre el radio y la longitud de la circunferencia, de carácter atractivo y misterioso.

Si anteriormente, en el problema de la duplicación del cubo, y después, en el problema de la trisección de un ángulo, hemos aportado unas construcciones geométricas que resuelven el problema (aunque no dentro de nuestro modelo computacional), en este problema vamos a ver cómo la historia ha ido traduciendo el problema de la cuadratura del círculo en un problema algebraico. Y también cómo la solución a este problema algebraico equivalente resolvió el problema original, dando además una mirada más general sobre muchos otros problemas relacionados.

Evidentemente se trata de saber si π es una longitud que se puede construir con regla y compás pues ésta debe ser la arista de nuestro cuadrado (fijando por ejemplo el radio unidad). Si miramos cuidadosamente las ecuaciones de los objetos que podemos construir con regla y compás se trata de: ecuaciones lineales, del tipo $Ax + By = C$, y ecuaciones cuadráticas, del tipo de la ecuación de la circunferencia. Como no podemos medir, (nuestra regla no tiene marcas) debemos suponer que los puntos que podemos escoger de partida tienen coordenadas enteras, de este modo las ecuaciones tienen coeficientes racionales. Un estudio sistemático de las posibles soluciones de estas ecuaciones nos llevan a la siguiente conclusión fundamental.

Teorema: Si un número real c puede construirse con regla y compás entonces debe ser solución de una ecuación polinomial de grado una potencia de 2 con coeficientes racionales.

Este teorema entonces transforma la pregunta sobre la constructibilidad de π en una pregunta sobre si π es *algebraico*, es decir, raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Obsérvese que por ejemplo la raíz cuadrada de 2 no es racional y sí es algebraico pues es raíz de un polinomio mónico de grado 2 y además es constructible (como no podía ser de otra manera según el teorema) pues es la diagonal del cuadrado unidad.

Cuando un número real no es algebraico se dice que ese número es *trascendente.*

Fue Lindemann en 1880 quien probó que π es trascendente, esto es, que no es solución de ninguna ecuación polinomial con coeficientes racionales, demostrando con ello que la cuadratura del círculo es un problema no resoluble en el modelo computacional *Geometría con regla y compás.*

El problema de la trisección de un ángulo

Problema: ¿Es el problema de la trisección de un ángulo un problema resoluble en el modelo computacional *Geometría con regla y compás*?

En 1837, Wantzel, en el mismo artículo señalado anteriormente, demostró también que el problema de la trisección del ángulo no se puede resolver con regla y compás. Veamos, sin embargo, algunas construcciones geométricas (no con regla y compás) que permiten resolver esta cuestión.

Comencemos con un problema más simple: construir la *bisección de un ángulo*, esto es, dividir un ángulo escogido en dos partes iguales. Esta construcción se puede efectuar con regla y compás. Para esto, tomando el ángulo BAC, basta completar el paralelogramo $ABDC$ y trazar la diagonal.

Veamos una manera de trisecar un ángulo, que ya conocía Hipócrates, y que no es una construcción con regla y compás. Es lo que vamos a llamar una solución *mecánica*; después de describirla, veremos qué significa esto.

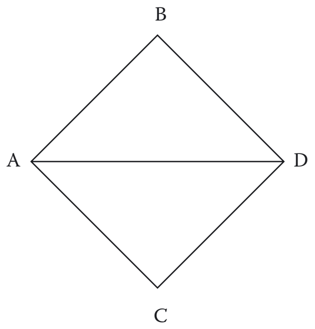


Figura 3. Bisección de un ángulo

Partimos del ángulo *CAB* y trazamos la perpendicular a *AB* pasando por *C*. Esta perpendicular corta al segmento *AB* en un punto que denominamos *D*. Construimos ahora el punto *F* que completa el rectángulo *ADCF*. Elegimos un punto *E* en la recta *FC* de modo que la intersección *H* de las rectas *AE* y *DC* verifique que la longitud de *HE* sea el doble de la longitud *AC*. Se tiene que el ángulo *EAB* es la tercera parte del ángulo *CAB*. En efecto, situamos el punto *G* en la mitad del segmento *HE*. Como la longitud de *HE* es el doble de la longitud de *AC* (así se ha construido *E*) entonces *HG* = *GE* = *AC*. Ahora bien, el ángulo *ECH* es un ángulo recto y por tanto *CG* = *HG* = *GE* (para ver esto basta situar los catetos del triángulo *CEH* sobre los ejes coordenados y razonar analíticamente). El ángulo *EAB* es igual al ángulo *CEA* (puesto que las rectas *AB* y *EF* son paralelas) e igual al ángulo *ECG* (ya que *ECG* es un triángulo isósceles). También el ángulo *CAG* es igual al *CGA* debido a que *AC* = *CG*. Finalmente el ángulo *CGA* es igual a la suma de los ángulos *GEC* y *ECG*, por lo que el ángulo *CGA* es dos veces el ángulo *EAB*, como queríamos demostrar.

Fue Lindemann en 1880 quien probó que π es trascendente, esto es, que no es solución de ninguna ecuación polinomial con coeficientes racionales.

La solución que hemos presentado, como decíamos en párrafos anteriores, no es una solución con regla y compás. El problema radica en la construcción de *E* con la condición de que *HE* = *2AC*. Esta construcción se puede realizar de forma *mecánica*. Simplemente se marca una distancia *2AC* en la regla y se apoya un extremo de la marca sobre la recta *CD* y el otro sobre *FC* hasta hacerla pasar por *A*.

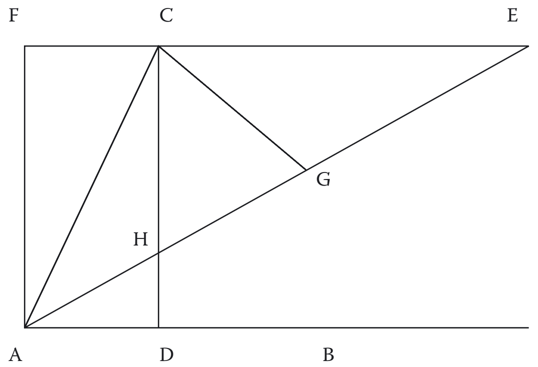


Figura 4. Trisección mecánica de un ángulo

Complejidad

Si las preguntas acerca de la resolubilidad de problemas dentro de un modelo computacional son cuestiones presentes en la historia de la matemática, la aparición de los ordenadores ha modificado parcialmente estas preguntas. Este cambio que sugerimos proviene del hecho de tener una máquina que permite hacer con total exactitud y bastante rapidez una cantidad ingente de operaciones, para las que un hombre necesitaría demasiado tiempo y además la probabilidad de que las hiciera mal sería muy elevada. Existen en la actualidad algoritmos que resuelven problemas que no serían considerados como tales por un matemático, digamos, del siglo XIX, puesto que no existía el instrumento (ni la mente) que los llevara a la práctica. Luego una pregunta muy interesante en la actualidad es acerca de los problemas *efectivamente resolubles*, esto es, aquellos problemas resolubles en nuestro modelo computacional para los que el algoritmo que los resuelve precisa de un tiempo *razonable* para obtener su solución.

En esta sección definiremos la *complejidad de un algoritmo* como una manera de medir el tiempo que necesita un algoritmo para resolver un problema. La complejidad será entonces una manera de medir la bondad temporal de un algoritmo. Este concepto nos permitirá también definir la *complejidad de un problema* como el orden de complejidad del mejor algoritmo que lo resuelve.

Definición: Sea un algoritmo *A* en un modelo computacional. Se define la función *T(n) número de operaciones en el peor de los casos* como el máximo del número de operaciones que realiza el algoritmo *A* para todas las entradas que tienen tamaño *n*.

De esta manera hay que definir precisamente lo que entendemos por tamaño de la entrada. Si, por ejemplo, estamos en el modelo computacional *Real RAM* y el algoritmo consiste en encontrar un número *a* en una lista de números podemos definir el tamaño de la entrada como la longitud *n* de la lista en cuestión.

Tomemos como ejemplo de algoritmo de búsqueda el algoritmo denominado de *búsqueda secuencial* que consiste simplemente en recorrer la lista dada y comparar si el término *a* es igual a algún elemento de la lista. Si lo encuentra el algoritmo se detiene y la salida es *Sí.* Si recorre la lista sin encontrarlo la salida es *No.* Podemos escribirlo en pseudocódigo de la siguiente manera:

```
Entrada: a1, ..., an; a
    i:=1
    while i<n+1
    if a=ai then i:=n+2 else i:=i+1
    if i=n+2 then r:=Sí else r:=No
Salida: r
```

El tamaño de la entrada es n y el peor de los casos es aquél en que a no está en la lista, porque ésta ha de recorrerse entera. Podemos computar entonces $T(n)$.

- Se comienza con una asignación para el contador i.
- Entramos en el bucle que se repite n veces. Dentro del bucle se hacen:
- una comparación de entrada (i se compara con $n+1$) que involucra también una suma ($n+1$),
- una comparación de a con ai y una asignación al contador i de $i+1$ (por tanto también una suma),
- una comparación que nos saca del bucle ($i=n+1$ con $n+1$).
- Finalmente se realiza una comparación de la i de salida y una asignación a r.

Por tanto $T(n) = 1 + n(2 + 2) + 2 + 3 = 4n + 6$.

Podemos hacer dos precisiones sobre la función $T(n)$. En primer lugar resulta en ocasiones ser una función difícil de calcular exactamente. En el ejemplo que hemos presentado el cálculo es simple pero puede haber situaciones en las que no sea sencillo decir con exactitud el número de operaciones (por ejemplo en el algoritmo conocido como *búsqueda binaria* [Rosen, 1999]). Por otro lado no es necesaria una total precisión: si la operación básica necesita una unidad de tiempo muy pequeña (pongamos una milésima de segundo) para ser ejecutada entonces un error por ejemplo de una unidad no es significativo.

Teniendo en cuenta estas precisiones necesitamos un instrumento que permita describir la naturaleza de $T(n)$, en concreto, en su comportamiento asintótico, esto es, para valores muy grandes de la n. Este concepto lo tomamos del Análisis Matemático.

Definición: Sean T y S dos funciones de los números naturales en los reales positivos; se dice que *T domina a S* o que *$S(n)$ pertenece a $O(T(n))$* si existen dos números reales $n0$ y $k > 0$ de modo que para cada $n > n0$ se verifique la desigualdad (no necesariamente estricta) $S(n) < kT(n)$. Si S domina a T y T domina a S, diremos que S y T son *del mismo orden de complejidad*.

Definición: Se llama *complejidad de un algoritmo* al orden de complejidad de su función $T(n)$, número de operaciones en el peor de los casos.

La complejidad de un algoritmo es entonces una medida del número de operaciones que éste realiza en el peor de los casos para tamaños muy grandes de la entrada n y establece una jerarquía que permite determinar si un algoritmo es mejor que otro (siempre en este sentido). Si el algoritmo $A1$ tiene como función número de operaciones en el peor de los casos a $T1$ y respectivamente el algoritmo $A2$ tiene como función a $T2$ y $T2$ domina a $T1$ entonces (según esta forma de comparar) el algoritmo $A1$ es mejor (o al menos igual) que el algoritmo $A2$.

Por ejemplo, el algoritmo de búsqueda secuencial es un algoritmo de complejidad $O(T(n)) = O(4n+6)$. Se puede demostrar que todos los polinomios de grado uno son del mismo orden de complejidad y por tanto $O(T(n)) = O(n)$. Esto es lo que se suele conocer como un algoritmo de *complejidad lineal*.

Así podemos hablar de complejidad lineal (si $T(n)$ es un polinomio de grado 1) o de *complejidad cuadrática* (si $T(n)$ es un polinomio de grado 2), o de *complejidad cúbica*... o en general de *complejidad polinomial* si $T(n)$ es un polinomio. Todas estas definiciones están sustentadas en el siguiente lema, que dejamos como ejercicio al lector.

> *Wantzel, en 1837, demostró que el problema de la trisección del ángulo no se puede resolver con regla y compás.*

Lema: Si $T(n)$ es un polinomio de grado d entonces es del orden de complejidad del polinomio potencia d-ésima de n.

Y una muestra de la jerarquía que establece este concepto es la siguiente cadena de dominancias: la exponencial domina a cualquier polinomio, un polinomio de grado mayor domina a otro de grado menor, el logaritmo es dominado por cualquier polinomio de grado positivo. Basta representar las gráficas de las funciones señaladas para comprobar la veracidad de las dominancias.

Por tanto un algoritmo de complejidad lineal es mejor que uno de complejidad cuadrática, la complejidad logarítmica es mejor que la complejidad polinomial y la complejidad polinomial es mejor que la exponencial.

Un límite teórico para los problemas efectivamente resolubles es la complejidad polinomial. El crecimiento exponencial es demasiado rápido y rápidamente toma valores excesivamente grandes para ser considerado efectivo. Por ejemplo, si $T(n)$ es la potencia enésima de 2 y la operación básica se realiza en una décima de segundo se tiene que si $n = 42$ entonces en el peor de los casos se realizan 2 elevado a la 42 operaciones básicas, que son muchos años esperando la solución. Entradas de tamaño no demasiado grande necesitan de un tiempo exagerado para ser manipuladas.

El matemático S. Smale viene observando que el estudio de la búsqueda efectiva de soluciones de ecuaciones (mediante algoritmos de tiempo polinomial, si es posible) va a ser el problema central de las matemáticas del siglo XXI, a diferencia del siglo XX en el cual el problema central ha sido el estudio de las propiedades de dichas soluciones, sin buscarlas explícitamente. En la nota del autor de este trabajo (Muñoz) y en las propias reflexiones de Smale (Smale, 1998) se puede ampliar la información sobre este tema.

El matemático S. Smale viene observando que el estudio de la búsqueda efectiva de soluciones de ecuaciones va a ser el problema central de las matemáticas del siglo XXI.

Conclusión

La teoría de los modelos computacionales, las definiciones precisas de algoritmo, problema resoluble, complejidad, problema efectivamente resoluble y complejidad de un problema y el estudio de todos estos conceptos son cuestiones fundamentales para la ciencia de la computación y, citando al propio Smale, un regalo de dicha ciencia a las matemáticas.

La historia de las matemáticas no ha sido ajena a este tipo de cuestiones: ya en la Grecia clásica se preocuparon de si ciertas construcciones se podían efectuar con regla y compás, que no es más que el problema de la resolubilidad de dichos problemas en un modelo computacional concreto, la *Geometría con regla y compás*.

La historia de los problemas de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo nos enseñan que este tipo de cuestiones han desarrollado importantes teorías matemáticas y son fascinantes, tanto desde el punto de vista matemático, como ahora desde el tecnológico. La historia de los problemas de construcciones de polígonos regulares nos hace ser prudentes, en el sentido de que el hecho de que ahora no sepamos como resolver un problema en un cierto modelo computacional (y carentes de una demostración que pruebe que no es posible) no significa que con el tiempo no seamos capaces. Como fue Gauss, muchos siglos después de los primeros intentos griegos, capaz de construir el polígono de 17 lados con regla y compás (Boyer, 1987).

Las matemáticas actuales y la ciencia de la computación han de trabajar conjuntamente en el desarrollo de teorías cada vez más potentes y en la construcción de algoritmos nuevos o de modelos de computación distintos que resuelvan las limitaciones actuales.

La arquitectura de ordenadores, la tecnología de la programación y las estructuras de datos deben tener un papel importante en la concreción de los entes abstractos que son los modelos computacionales. La computación cuántica, los lenguajes de programación más potentes y la representación más oportuna de la información son novedades que pudieran ser fundamentales para que los modelos computacionales y su capacidad para resolver problemas se conviertan en una tecnología poderosa y a la vez disponible para el ciudadano. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C.B. (1987): *Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad.

MUÑOZ, R.: *Matemáticas para el nuevo siglo*. http://www.escet.urjc.es/~rmunoz

ROSEN, K. H. (1995, 1999): *Discrete Mathematics and its applications*, McGraw-Hil.

Smale, S. (1998): *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligenzer 20, 7-15.

WANTZEL, P. (1837): *J. of Liouville Volume II*, pp. 366-372.

http://www-groups.dcs.sst-andrews.ac.uk/~history/HistTopics

SUMA 47
Noviembre 2004, pp.37-40

Estadística espacial en clase

En el siguiente artículo se presentan unas sencillas herramientas para analizar la distribución de los alumnos en una clase. Ésta puede ser objeto de análisis desde diferentes perspectivas. Se proponen medidas para: el estudio de la cercanía del alumno al profesor, el análisis de la concentración del grupo de alumnos y el estudio cuantitativo de la diferenciación espacial de los sexos en el aula. Las herramientas utilizadas pueden ser de interés tanto para una investigación de estas características espaciales por parte del profesor como, dada su simplicidad, recurso para el aprendizaje de herramientas estadísticas en clase.

The next article deals with some elementary tools used for analysing student distribution within the classroom, which can be looked into from various perspectives. Different measures are put forward for the study of teacher-student nearness and for the analysis of student concentration, as well as for the quantitative study of spatial location of sexes in the classroom. The teacher can find these tools interesting both for research on these spatial features and as an elementary resource for the teaching of statistical tools in class.

Se van a plantear tres propuestas de variables para su análisis: primero, la medida de la cercanía de los alumnos en cada clase al profesor; segundo, la medida de la compacidad o concentración de los alumnos dentro del aula y tercero, y finalmente, se analizará la diferenciación espacial de sexos dentro del aula.

Medida de la cercanía del alumnado

En este caso la complejidad de la variable es evidente: la cercanía del alumnado resultará de la agregación del nivel de cercanía de cada individuo.

¿Cómo medimos la cercanía de cada individuo al profesor? La distancia euclídea parece ser la medida más exacta pero puede no ser la mejor, si tenemos en cuenta consideraciones de carácter práctico y es que resulta poco eficiente empezar a medir con una cinta métrica la distancia de cada alumno al profesor. Una aproximación puede venir dada por el número de filas que le separan del profesor, o dicho de otro modo, el orden de la fila en la que se encuentra el individuo, aproximación que además coincide con la percepción que tenemos de la cercanía en clase.

La agregación de las medidas individuales puede realizarse directamente a través de una suma, ya que debemos ponderar a todos y cada uno de los alumnos de la misma forma.

Queda como etapa final, normalizar el agregado obtenido, de modo que podamos relativizar la medida, para que sea comparable para medidas en otras aulas. Por ejemplo, si el agregado ha resultado 86, ¿hasta qué punto podemos decir que los alumnos están cerca del profesor? Debemos percatarnos de que el agregado depende del número de individuos pero también del número de filas en clase. Por ejemplo, no es lo mismo un resultado de 86 con 10 alumnos que con 20 alumnos; por otro lado, no es lo mismo un agregado de 86 con 20 alumnos en una clase con 6 filas que en una clase de 15 filas. Una propuesta de normalización viene dada por establecer los valores del agregado en las situaciones de cercanía y lejanía absolutas, que situaremos en una escala 0-1, y situar por interpolación nuestro agregado en dicha escala.

Por ejemplo, supongamos el aula siguiente con su correspondiente disposición de alumnado (cada celda es un asiento y en negro aparecen los individuos):

José María Sarasola Ledesma
Escuela Universitaria de Estudios Empresariales. San Sebastián.

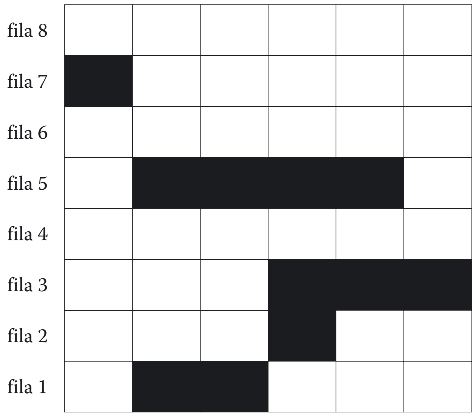


Figura 1

El agregado de los niveles de cercanía de cada individuo lo calculamos del siguiente modo:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7 = 40$$

Para normalizarlo veamos qué valor tomaría el agregado de los 11 alumnos en las situaciones de cercanía y lejanía absolutas siguientes:

- en la situación de máxima cercanía tendríamos a 6 alumnos en la fila 1 y a 5 alumnos en la fila 2, de modo que el agregado resultaría: $1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 16$.

- en la situación de máxima lejanía tendríamos a 6 alumnos en la fila 8 y a 5 alumnos en la fila 7, así que el agregado resultaría: $8 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 83$.

El índice de cercanía que hemos construido resultaría:

$$C = (40 - 16)/(83 - 16) = 0{,}36$$

Cuanto menor sea el índice calculado, que toma valores comprendidos entre 0 y 1, mayor será la cercanía del conjunto de alumnos al profesor.

Concentración de un conjunto de alumnos

Los alumnos pueden sentarse de forma más o menos dispersa, más o menos concentrada, en el aula. La medición de esta característica se puede realizar, como, en general, toda medición compleja, de múltiples formas. Una de ellas, quizás la más ortodoxa y precisa, consiste en asignar a cada alumno unas coordenadas según ejes cartesianos, y a partir de esos datos bidimensionales, calcular la varianza generalizada (Peña Sánchez de Rivera, 1991). El inconveniente es que esta medida resulta compleja para el alumno, tanto por la compresión como por el cálculo.

Una propuesta más simple consiste en determinar la proporción de lados de celdas compartidos con otro alumno.

Veámoslo a través del anterior ejemplo. Si el número de alumnos es 11, teniendo cada uno 4 lados (izquierda, derecha, delante, detrás), en total tendremos 44 lados. Podemos ver, tras un simple conteo, que de estos 44 lados, $7 \cdot 2 = 14$ son compartidos (cada lado compartido se cuenta por 2, al pertenecer a dos personas diferentes). El índice de concentración propuesto resultaría de este modo $14/44 = 0{,}31$. Pero este índice no está exento de crítica.

En primer lugar, en la situación de concentración absoluta, el número de lados compartidos no llega generalmente al máximo (en este caso, 44). Si definimos la concentración absoluta como la situación en la que los alumnos se van sentando por filas completas, en nuestro ejemplo resultarían 6 alumnos en la primera fila y 5 alumnos en la segunda fila, de modo que los lados compartidos serían $14 \cdot 2 = 28$ (ver figura 2). El índice de concentración daría como resultado $14/28 = 0{,}5$.

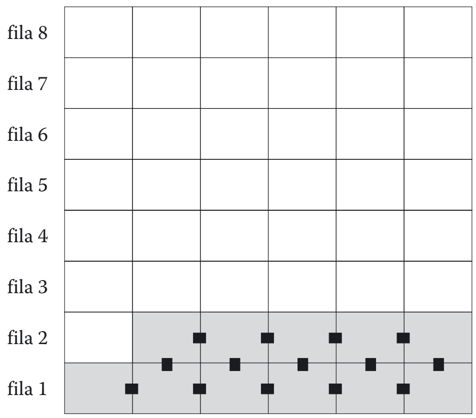


Figura 2. Situación de máxima concentración. Con puntos negros aparecen los lados compartidos.

Un segundo inconveniente proviene del hecho de que en el índice se considera que los lados compartidos a izquierda o derecha y los compartidos hacia delante o detrás se valoran de la misma forma, cuando según la percepción común se considera mayor concentración en el caso de que dos alumnos se sienten juntos en la misma fila que en el caso de que uno se siente delante del otro. Una corrección en este sentido, supondría ponderar los lados de izquierda o derecha en mayor medida (por ejemplo, el doble). Por otro lado, los lados que dan al pasillo deberían ser dejados de lado, ya que nadie se sienta en el suelo. Veamos un ejemplo. Para ello, tomaremos la distribución de alumnos de la figura 1 y supondremos que el pasillo divide en dos partes iguales el aula (ver figura 3).

Podemos ver en la figura, que existen 5 lados compartidos del tipo izquierda-derecha y un lado compartido del tipo delante-detrás. Si ponderamos el doble la unión izquierda-derecha, la puntuación absoluta de concentración será 5 · 2 + 1 · 1 = 11.

Ahora debemos calcular la puntuación máxima que será la que corresponde a la figura 2, pero poniendo un pasillo de por medio, de modo que en total quedarían 7 lados compartidos izquierda-derecha y 5 lados compartidos delante-detrás y de esta forma la puntuación absoluta de máxima concentración resulta 7 · 2 + 5 · 1 = 19. Tomando como referencia este máximo, el índice de concentración alternativo es 11/19 = 0,57.

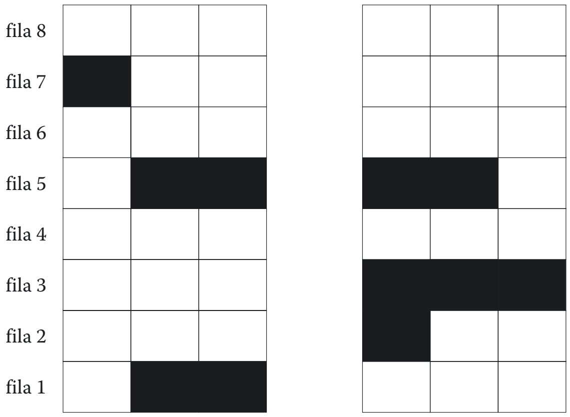


Figura 3

Puede realizarse asimismo un estudio de la concentración diferenciado por sexos, es decir, tomando como base únicamente los chicos o las chicas, pudiéndose realizar así comparaciones por sexo respecto del carácter gregario.

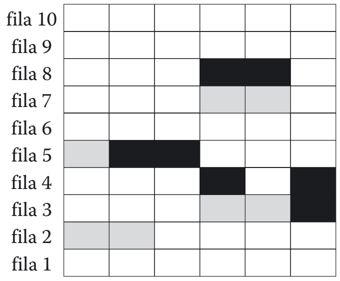
Dispersión de sexos

Es un hecho notorio que existe un agrupamiento por sexos en nuestras clases (como suele decirse, los chicos con los chicos, las chicas con las chicas). ¿Cómo podemos medir la intensidad de dicho agrupamiento? De las múltiples opciones, elegimos aquella que, tras asignar a cada alumno unas coordenadas cartesianas (por ejemplo, un alumno de la segunda fila y quinta columna tendría por coordenadas (5,2)), calcula el centro de gravedad de cada sexo, a través del vector de medias de coordenadas, y la distancia, no necesariamente euclídea, entre estos. A mayor distancia entre centros de gravedad, mayor será la diferenciación espacial entre sexos.

El tamaño del aula, además del número de alumnos, influye en el valor de este índice, de modo que se hace necesaria una normalización. El valor máximo del índice, para aulas rectangulares, será la longitud de la diagonal (si tomamos como base la distancia euclídea), y dejamos a un lado como factor perturbador el número de alumnos en el aula (ya que no todos los alumnos pueden sentarse en el asiento de la esquina). Por ejemplo, para un aula de 10 filas y 6 columnas, puede aproximarse el valor máximo del índice de esta forma:

$$d_{\max}\left(\vec{\bar{x}}_{chicos},\vec{\bar{x}}_{chicas}\right)=\sqrt{(10-1)^2+(6-1)^2}=10{,}29$$

Veamos un ejemplo (chicas en gris, chicos en negro):



Chicas	x	y
1	1	2
2	1	5
3	2	2
4	3	2
5	4	3
6	4	7
7	5	3
8	5	7
Medias	3,13	3,88

Chicos	x	y
1	2	5
2	3	5
3	4	4
4	4	8
5	5	8
6	6	3
7	6	4
Medias	4,29	5,29

Calculemos la distancia entre los centros de gravedad:

$$d_{\max}\left(\vec{\bar{x}}_{chicos},\vec{\bar{x}}_{chicas}\right)=\sqrt{(4{,}29-3{,}13)^2+(5{,}29-3{,}88)^2}=1{,}82$$

Normalizando lo anterior nos resulta el índice de agrupamiento que hemos construido en nuestro problema: 1,82/10,29 = 0,18.

Comparándolo con la situación extrema no parece que exista una gran diferenciación (un 18% de la diferenciación absoluta). Pero para este índice también caben críticas. Una gran diferenciación se puede compensar por el hecho de que existan *cuadrillas de alumnos* del mismo sexo pero separadas en el espacio de modo que esta separación hace bascular el centro de gravedad para cada sexo hacia un punto intermedio.
Una alternativa consiste en registrar para cada alumno el sexo de sus vecinos más cercanos a izquierda, derecha, delante y detrás. Recogidos estos datos para el conjunto de alumnos, se trataría de establecer la proporción de vecinos del mismo sexo. Este procedimiento solventaría el obstáculo que presentaba el índice anterior, pero surgirían otros, como el de la ponderación diferencial de los vecinos de izquierda-derecha y delante-detrás.

Comentarios finales

El análisis espacial de la distribución de alumnos en clase se propuso como trabajo voluntario y complementario a 3 grupos de estudiantes en primer curso de la Escuela Universitaria de Estudios Empresariales de la UPV, dentro de la asignatura Estadística Descriptiva en el año académico 2002 - 03. El hecho de que los estudiantes hicieran el trabajo por voluntad propia ya denota una motivación especial, que se vió acrecentada al desarrollar el trabajo.

La cotidianeidad del aula hizo posible que los alumnos se sintieran mucho más cercanos a los conceptos manejados y por esto mismo se mostraron también mucho más propensos a realizar propuestas alternativas de análisis. Ellos mismos fueron los que, tras recoger datos, encontraban dificultades y obstáculos, que intentaban solucionar remodelando y afinando el índice que proponían en cada caso. Debo subrayar, además, que intentaban dar una explicación a los resultados obtenidos, sin limitarse al cálculo de las diferentes medidas. Algunas de estas explicaciones eran realmente originales. Por ejemplo, algún grupo explicó la mayor o menor cercanía al profesor en base a sí el profesor *preguntaba* en clase. Asimismo, las chicas resultaron ser en general algo más gregarias (¿o quizá con menor tendencia que los chicos a buscar el sexo opuesto?), es decir, mostraban una mayor concentración espacial que los chicos.

¿Se sientan los chicos más cerca que las chicas? ¿Influye el profesor en la cercanía de los alumnos? ¿Y el número de alumnos o el curso? Las correlaciones a analizar son muchas a partir de los índices que hemos planteado en este artículo. Ello permite la asignación a cada uno de los grupos de alumnos de trabajos diferentes, evitando de esta forma el *contagio* al que estamos tan acostumbrados, aunque no hasta el punto de imposibilitar la comunicación entre grupos, hecho que resultaría también desfavorable.

Los recursos presentados ayudan a superar la perspectiva simple que se suele poseer sobre el término *variable*, que se suele entender como algo de medición inmediata y directa, como la altura de una persona, el peso o la calificación. Por ejemplo, ¿cómo debemos medir el status socioeconómico de una persona? Es evidente que esta variable no es de medición directa y que requiere una ponderación de múltiples factores. Es importante, pues, que el alumno sea consciente de que el campo de variables no se limita a lo que se puede medir directamente y que es susceptible de manipulación y acomodo a los objetivos y perspectivas de cada trabajo de investigación.

Finalmente, este tipo de análisis permite al alumno ser consciente de la multiplicidad de perspectivas desde las que puede medirse un determinado concepto abstracto. Tal como hemos podido comprobar en los puntos anteriormente tratados, en general los índices plantean limitaciones en su acercamiento a la realidad; pero es que la estadística no trata de la mera reproducción de la realidad, sino de la simplificación de su complejidad, siendo a veces inevitable, e incluso deseable, una pérdida de precisión. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EBDON, D.(1982): *Estadística para geógrafos*, Oikos Tau, Barcelona.

PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D. (1991): *Estadística. Modelos y métodos. I: Fundamento*, Alianza, Madrid, 86-87.

SUMA 47

Noviembre 2004, pp.41-46

El método de Descartes para trazar normales a curvas

El trabajo que hemos desarrollado en este artículo es un estudio de un método histórico desarrollado por Descartes para calcular la recta normal a una curva, y que puede ser aprovechado para calcular derivadas puntuales y generales de funciones. El método, requiere de la resolución de ecuaciones algebraicas y transcendentes, que en principio pueden ser complicadas (por eso ha caído en el olvido), pero que permite introducir en el aula una gran cantidad de aspectos docentes. Además, la idea en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para calcular la distancia de un punto a una recta o un plano.

This article deals with a study of Descartes's method to determinate the tangent line to a curve. This procedure can be used for calculate the derivative of a function. The method is very rich from a geometrical point of view and it requires the resolution of algebraic and trascendent equations, may be very complicates to solve (this is the reason why the method has been forget), but it provides us to introduce in the classroom a huge among of docent aspects. Moreover, the main idea in which Descartes's method is based can be used to calculate the distance from a point to a line or a plane.

La histórica controversia Leibniz-Newton sobre la invención del Cálculo Diferencial en el siglo XVII ha eclipsado otras contribuciones que se hicieron en ese campo con anterioridad, y que fueron en su momento un testigo que recogieron tanto Leibniz como Newton para avanzar en la carrera del conocimiento matemático. Por otra parte, las aportaciones (independientes) tanto del alemán como el sajón fueron tan geniales que todavía contribuyeron más a que el trabajo de sus antecesores quedase aún más relegado a un segundo plano. Como consecuencia de todo ello, algunos métodos históricos para el cálculo de normales (o equivalentemente de tangentes) a curvas son, hoy día, muy poco conocidos. Tal es el caso del método que ideó René Descartes (1596-1675), y que estudiaremos en el próximo apartado.

Haciendo un poco de historia, parece ser que los primeros estudios sobre tangencias a curvas y superficies se deben a Arquímedes de Siracusa (298-212) AC y a Apolonio de Perga (262-?) AC, aunque sus aportaciones se limitan a algunas cónicas, tal y como sabemos por la obra de Pappus de Alejandría (290-350) AC que recoge comentarios sobre el tratado *Tangencias* de Apolonio, y en particular del famoso problema de las circunferencias tangentes. Después de la fértil era helénica en el estudio de problemas geométricos, hay que esperar hasta el siglo XVII para que se vuelvan a producir importantes avances en el problema del trazado de tangentes a curvas. El progreso lo realizaron, con métodos independientes, tanto Descartes como Pierre Fermat (1601-1665).

Leyendo los textos (Boyer, 1987), (Gaukroger, 1995) y (Chica, 2001), resulta revelador el hecho de que parece ser que con su potente Méthode, Descartes era consciente de que todas las propiedades de una curva estaban completamente determinadas si se es capaz de dar su ecuación en dos variables y trazar su normal, y escribe (véase, Boyer pág. 435):

> Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que este no es sólo el problema más útil y más general que conozco, sino de los que hubiera deseado conocer.

Sin embargo, Descartes no fue capaz de realizar grandes avances en su método para el trazado de normales, ya que como veremos después, conduce a ecuaciones difíciles de resolver en la época en que lo desarrolló. No obstante, la propuesta de Descartes resulta, a nivel didáctico muy sugerente hoy porque requiere conjugar aspectos geométricos (sobre todo relativos a las propiedades de la circunferencia) con otros de naturaleza algebraica, que pueden ser abordados, bien analíticamente o bien mediante el uso del ordenador, potenciando un aprendizaje más global de las matemáticas.

Juan Carlos Cortés López
Universidad Politécnica de Valencia.
Gema Calvo Sanjuán
IES Els Évols, L'Alcúdia. Valencia.

El método de descartes: descripción

En este apartado, y siguiendo el magnífico libro de C.B. Boyer sobre Historia de las Matemáticas (Boyer, 1986), en primer lugar, describiremos el método de Descartes para el trazado de rectas normales a curvas y posteriormente lo traduciremos a lenguaje algebraico. Textualmente, Boyer (pg. 435) explica de la siguiente forma:

El método de Descartes:

> Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje, el de abscisas) y que pase por los puntos y . Igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que coincide con y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto.

Posteriormente, en la página 462, C.B. Boyer propone en el ejercicio 12 hallar la normal a la curva $y^2 = 4x$ en el punto (1,2), utilizando la técnica de Descartes.

En lenguaje algebraico, el método de Descartes puede expresarse como sigue (véase figura 1): dada una curva $y = f(x)$ un punto $P(a, f(a))$ de la misma ($a \in Dom(f(x))$), para calcular la pendiente n de la recta normal r_n: $y - f(a) = n(x - a)$ a $y = f(x)$ en P debemos considerar la circunferencia Γ de centro $C(c, 0)$ (sobre el eje de abscisas) y radio $r = \overline{CP}$

$$\Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + f^2(a)$$

y exigir que Γ e $y = f(x)$ se corten en un único punto (el de tangencia) que debe ser P, para lo cual se debe imponer que el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} (x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + f^2(a) \\ y = f(x) \end{array} \qquad (1)$$

tenga una única solución real: $x = a$, sin contar su multiplicidad algebraica (que a partir de ahora denotaremos por m.a.). Esto permitirá calcular c y en consecuencia n, ya que

$$n = \frac{f(a)}{a - c} \qquad (2)$$

Ahora, utilizando la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares, el cálculo de la pendiente t de la recta tangente r_t: $y - f(a) = t(x - a)$ buscada es muy sencillo

$$t = \frac{c - a}{f(a)} = f'(a) \qquad (3)$$

Como podemos intuir desde la descripción que Boyer hace del método, uno de los inconvenientes del mismo radicará en la dificultad de encontrar condiciones que garanticen que la ecuación que se deducirá de (1) tenga solución real única (salvo m.a.), porque más allá del caso en que se obtiene una ecuación polinómica de grado dos (como veremos luego, este es el caso del ejercicio que propone Boyer) cuya respuesta es muy sencilla en términos del discriminante, en general, esta no es una cuestión sencilla, ni siquiera en el caso particular polinómico (de grado tres o mayor); y desde luego el problema es mucho más sofisticado cuando la ecuación que se deriva de (1) involucra funciones trascendentes.

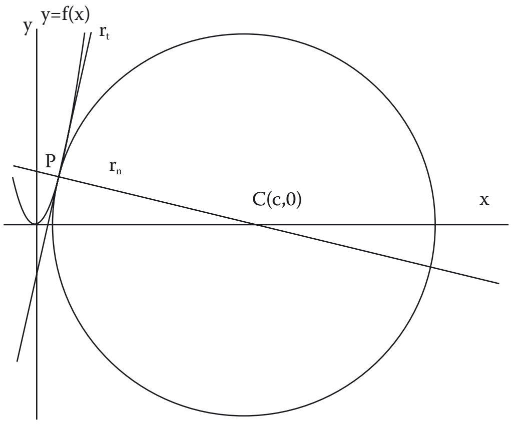


Figura 1. El método de Descartes

Aplicaciones

A continuación mostraremos varias aplicaciones del método de Descartes. Empezaremos resolviendo el problema propuesto por Boyer, que es el más sencillo. El resto de las aplicaciones las hemos seleccionado, de entre las generadas nosotros mismos, para ilustrar aquí los diversos aspectos que nos interesa subrayar a propósito de este método.

Aplicación 1

Determinar, por el método de Descartes, las rectas normal y tangente a la curva $y^2 = 4x$ *en el punto* P(1, 2).

Según hemos visto anteriormente, debemos encontrar el centro $C(c, 0)$ de una circunferencia tangente a la gráfica G de $y^2=4x$ en el punto $P(1, 2)$ (obsérvese, según la figura 2, que la intuición geométrica nos indica que $c > 1$). Para ello exigimos que el sistema

$$\begin{array}{c} \Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (1 - c)^2 + 2^2 \\ G: y^2 = 4x \end{array} \qquad (4)$$

tenga como única solución real (sin contar la m.a.) $x = 1$. Esto nos conduce a que la ecuación polinómica de grado dos en x

$$x^2 - 2cx + c^2 + 4x = 1 - 2c + c^2 + 4 \Rightarrow x^2 + (4 - 2c)x + 2c - 5 = 0$$

debe tener a $x = 1$ como raíz real doble. Garantizar esto es equivalente a exigir que el discriminante sea nulo:

$$\Delta = (4 - 2c)2 - 4(2c - 5) = 0 \qquad (5)$$

de donde, resolviendo esta ecuación cuadrática en c obtenemos $c = 3 > 1$ (obsérvese que como es intuitivamente plausible, esta ecuación también debe tener solución real doble, al ser el centro *C(c, 0)* único). En consecuencia, aplicando (2) y (3)

$$r_n : y - 2 = \frac{2}{1-3}(x-1) \quad (n = -1)$$
$$r_t : y - 2 = \frac{3-1}{2}(x-1) \quad (t = 1)$$

por lo que $f'(1) = 1$, tal y como puede comprobarse utilizando las reglas de derivación.

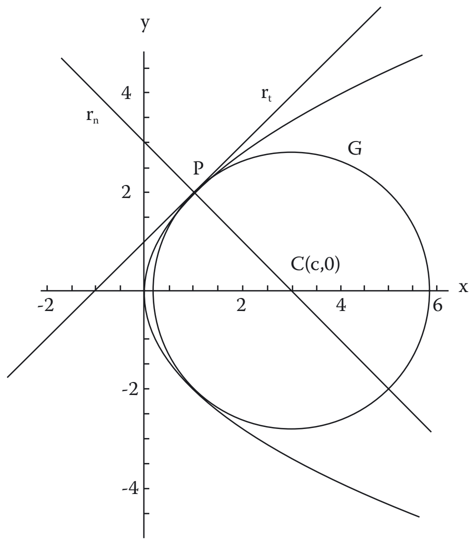


Figura 2. Aplicación 1 del método de Descartes

Exploraremos ahora otras aplicaciones del método para calcular derivadas, donde los escenarios que aparecen son notablemente más sofisticados.

Aplicación 2
Utilizando el método de Descartes, calcular f'(2) *siendo* f(x)=x².

En esta ocasión debemos resolver el sistema

$$\Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (2 - c)^2 + 4^2$$
$$G: y^2 = x^2$$

que conduce a

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = 20 \qquad (6)$$

La interpretación geométrica nos indica que $c > 2$ y que esta ecuación debe tener como única solución real (salvo m.a.) x=2. Ahora no disponemos de un criterio tan sencillo como el del discriminante para las ecuaciones polinómicas cuadráticas, pero podemos determinar c razonando como sigue. Como (6) es una ecuación polinómica de grado cuatro y x=2 debe ser su única raíz real (salvo m.a.) debe satisfacerse alguno de los siguientes casos:

Caso 1: $x = 2$ tiene m.a. cuatro.
Caso 2: $x = 2$ tiene m.a. dos y las otras dos raíces son complejas (conjugadas).

Sin embargo, la primera posibilidad no puede darse, ya que, en ese caso se tendría

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

lo cual es imposible, como se deduce comparando los coeficientes que acompañan a x^2. Por lo tanto,

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^2 \cdot [x - (\alpha + i\beta)] \cdot [x - (\alpha - i\beta)]$$
$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^2 \cdot (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

desarrollando el término de la derecha y comparando coeficientes formamos el sistema

$$\begin{array}{ll} x^4: & 1 = 1 \\ x^3: & 0 = -2\alpha - 4 \\ x^2: & 0 = \alpha^2 + \beta^2 + 4 + 8\alpha \\ x^1: & -2c = -4(\alpha^2 + \beta^2) - 8\alpha \\ x^0: & 4c - 20 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \end{array}$$

del cual sólo nos interesa calcular c. Esto es sencillo, pues de las ecuaciones x^0: $4c - 20 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$ y x^3: $0 = -2\alpha - 4$, es decir, $-8\alpha = 16$, sustituyendo en la ecuación de x^1 tenemos:

$$-2c = 20 - 4c + 16 \Rightarrow c = 18 > 2$$

Ahora basta sustituir en (3) los datos y obtenemos

$$f'(2) = (18 - 2)/4 = 4$$

tal y como es sencillo comprobar utilizando las reglas de derivación.

A través de la aplicación 2 hemos podido observar que el método de Descartes aplicado al cálculo de la derivada de una función sencilla puede conducir a un problema de naturaleza algebraica complicado de resolver. El siguiente ejemplo profundiza más en este sentido, y aporta una forma atractiva de tratarlo en el aula utilizando para ello algún asistente matemático, tipo Mathematica®.

Aplicación 3

Calcular, por el método de Descartes, f'(1) *siendo* f(x) = x³.

Razonando como en las aplicaciones anteriores, llegaremos a que la ecuación polinómica

$$p_c(x) = x^6 + x^2 - 2cx + 2c - 2 = 0 \qquad (7)$$

debe tener como única raíz real (salvo m.a.) $x = 1$ por lo que sólo caben las siguientes posibilidades:

Caso 1: $p_c(x) = (x - 1)^6$
Caso 2: $p_c(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$
Caso 3: $p_c(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \cdot (x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2)$

Prosiguiendo como en la aplicación 2, es sencillo ver que el único caso que puede darse es el tercero. La resolución del sistema de ecuaciones nos ha llevado a que $c = 4$ y por lo tanto tenemos $f'(1) = 3$. Sin embargo, como los cálculos que se requieren para llegar a estas conclusiones son bastante laboriosos, podemos mostrar un camino alternativo representando la familia uniparamétrica $\{p_c(x)\}$ dada por (7) y seleccionando de dicho haz, la función que corte al eje de abscisas una única vez en $x = 1$. Como puede verse en la figura 3, esto corresponde a $c = 4$ (para llegar a este valor o una aproximación del mismo deben realizarse diversas pruebas, utilizando estrategias del tipo: ensayo y error, la función zoom de aproximación local en la visualización de gráficas y en general toda la información que esté a nuestro alcance, como por ejemplo ahora, que la interpretación geométrica del problema nos indica que $c > 1$).

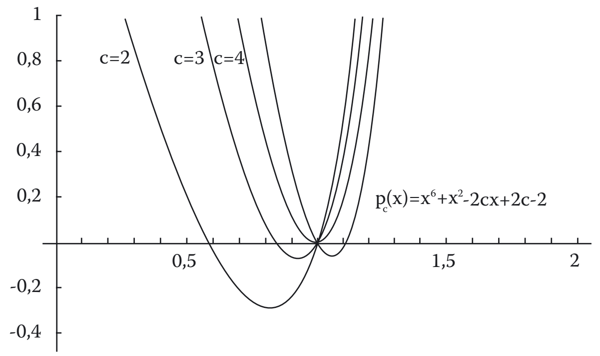


Figura 3. Aplicación 3: resolución gráfica

El problema polinómico general consistente en determinar $f'(a)$ siendo $f(x) = x^n$, lleva vía el método de Descartes, a la ecuación

$$p_c(x) = x^{2n} + x^2 - 2cx - a^2 + 2ax - a^{2n} = 0 \qquad (8)$$

Para el cálculo de c debe considerarse que (8) tiene como única raíz real $x = a$, sin contar la m.a., (es inmediato sustituyendo en (8) ver que $p_c(a) = 0$). Más aún podemos asegurar que su multiplicidad algebraica será dos, pues la interpretación geométrica del problema de tangencia nos indica que la ecuación (8) tiene a $x = a$ como única raíz real, y además como $p_c(x)$ es un polinomio de grado par, la m.a. de $x = a \in$ R debe ser también un número par de entre $\{2, 4, ..., 2n\}$, por lo que al menos podemos garantizar que

$$p_c'(a) = 0 \Rightarrow 2na^{2n-1} + 2a - 2c = 0 \quad (9)$$

(ya que, un número es un cero de m.a. dos de un polinomio sí y sólo sí también es cero del polinomio derivado), pero como tenemos,

$$p_c''(a) = (2n)(2n-1)a^{2n-2} + 2 \neq 0 \quad \forall a$$

podemos afirmar que la m.a. de $x = a$ es exactamente dos.

Hasta ahora en las aplicaciones hemos calculado derivadas puntuales, sin embargo, el método puede utilizarse para obtener la función derivada. Veamos un ejemplo con una función diferente a las tratadas hasta ahora, la función canónica de proporcionalidad inversa.

Aplicación 4

Utilizando el método de Descartes, deducir la regla de derivación de la función f(x) = 1/x.

Consideremos $r \in$ R - {0} y calculemos $f'(r)$. La aplicación del método nos conduce a la ecuación

$$(x-c)^2 + \frac{1}{x^2} = (r-c)^2 + \frac{1}{r^2}$$

$$p_c(x) = x^4 - 2cx^3 - \left(r^2 - 2cr + \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

que debe tener como única raíz real $x = r$ (sin contar su m.a.), por lo que se debe satisfacer alguno de los siguientes casos:

Caso 1: $p_c(x) = (x - r)^4$
Caso 2: $p_c(x) = (x - r)^2 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$

El primer caso no puede darse, ya que

$$x^4-2cx^3-\left(r^2-2cr+\frac{1}{r^2}\right)x^2+1=(x-r)^4=$$
$$=x^4-4rx^3+6r^2x^2-4r^3x+r^4$$

y comparando los coeficientes que acompañan a x, se deduce que $r = 0$, lo cual es imposible. El segundo caso nos conduce al sistema

$$\begin{array}{ll} x^4: & 1 = 1 \\ x^3: & -2c = -2(r+\alpha) \\ x^2: & -\left(r^2-2cr+\frac{1}{r^2}\right)=r^2+4r\alpha+\alpha^2+\beta^2 \\ x^1: & 0 = -2r(r\alpha+\alpha^2+\beta^2) \\ x^0: & 1 = r^2(\alpha^2+\beta^2) \end{array}$$

desde el cual podemos calcular c directamente. En efecto, como $r \neq 0$ de la ecuación x^0: $1/r^2 = (\alpha^2 + \beta^2)$ y de la relación x^1 se deduce: $4r\alpha = -4(\alpha^2 + \beta^2) = -4/r^2$. Sustituyendo todo esto en la ecuación de x^2 y despejando c obtenemos:

$$-\left(r^2-2cr+\frac{1}{r^2}\right)=r^2-\frac{4}{r^2}+\frac{1}{r^2}\Rightarrow c=r-\frac{1}{r^3}$$

Llevando esto a (3) obtenemos

$$f'(r)=t=\frac{c-r}{\frac{1}{r}}=\frac{\left(r-\frac{1}{r^3}\right)-r}{\frac{1}{r}}=-\frac{1}{r^2}$$

con lo cual hemos deducido la regla de derivación de la función $f(x) = 1/x$.

Más allá del método de descartes

La idea que en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para resolver otros problemas de naturaleza completamente distinta. Por ejemplo, el cálculo de la distancia de un punto a una recta en el plano, o el cálculo de la distancia de un punto a un plano en el espacio. Como el razonamiento es análogo, y hasta ahora las aplicaciones mostradas se han hecho en dos dimensiones, abordaremos este problema en el caso tridimensional.

Supongamos que deseamos calcular la distancia de un punto P a un plano π que denotaremos por $d(P, \pi)$. Para ello, y basándonos en la idea del método de Descartes consideraremos la esfera Γ de centro P (véase figura 4) y impondremos que el sistema de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.) formado por la ecuación de la esfera y del plano tenga solución única, lo cual significa que la esfera y el plano se cortan en un único punto, esto es, que son tangentes, y como el vector radio de la esfera es normal al plano tangente, el radio R de la esfera será precisamente la distancia $d(P, \pi)$ buscada. Para calcular R impondremos que la ecuación de segundo grado que se deriva de resolver el mencionado S.E.L.N. por el método de sustitución tenga solución única, esto es, que el discriminante sea nulo.

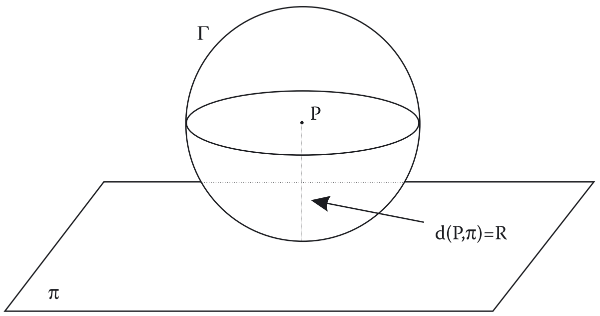


Figura 4. Aplicación de la idea de Descartes a cálculo de la distancia de un punto a un plano

Veamos un ejemplo para mayor claridad.

Aplicación 5
Calcular la distancia del punto p(1, 2, 5) *al plano*

$$\pi: 2x + 2y - z = 5$$

utilizando la filosofía del método de Descartes.

En primer lugar consideraremos la esfera de centro el punto P y radio R,

$$\Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = R^2$$

y calculamos su intersección con el plano π, resolviendo el S.E.L.N.:

$$\Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = R^2$$
$$\pi: 2x + 2y - z = 5$$

que nos conduce a

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (2x + 2y - 10)^2 = R^2$$

$$5x^2 + (8y - 42)x + (5y^2 - 44y + 105 - R^2) = 0$$

Fijada la variable y, la ecuación anterior es una ecuación de segundo grado en x, como el S.E.L.N. debe tener una única solución, el discriminante Δ_x debe ser cero:

$$\Delta_x = (8y - 42)^2 - 20(5y^2 - 44y + 105 - R^2) = 0$$

$$-36y^2 + 208y - 336 + 20R^2 = 0$$

Al igual que el S.E.L.N., esta ecuación de segundo grado en debe tener solución única, luego

$$\Delta_y = 208^2 - 4(-36)(-336 + 20R^2) = 0$$

que nos da una ecuación en R, de donde

$$R = d(P,\pi) = \sqrt{\frac{5120}{2880}} = \frac{4}{3}$$

tal y como puede comprobarse por los métodos estándar.

Conclusiones

El trabajo que hemos desarrollado en este artículo es un estudio de un método histórico desarrollado por Descartes para calcular la recta normal a una curva, y que puede ser aprovechado para calcular derivadas puntuales y generales de funciones. El enfoque, muy rico desde el punto de vista geométrico, requiere de la resolución de ecuaciones algebraicas y transcendentes, que en principio pueden ser notablemente complicadas (por eso ha caído en el olvido), pero que permite introducir en el aula una gran variedad de aspectos docentes: Historia de las Matemáticas, geometría de la circunferencia, propiedades de las soluciones de ecuaciones polinómicas (relaciones de Cardano-Viète, factorización de polinomios, caracterización de la multiplicidad algebraica de las raíces de un polinomio a través de los polinomios derivados...), resolución numérica y gráfica de ecuaciones algebraicas y trascendentes... Además, de que la idea en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para calcular la distancia de un punto a una recta o un plano. Por todo ello pensamos que esta propuesta puede ser interesante, porque permite realizar un itinerario interdisciplinar dentro de la enseñanza de las Matemáticas en un segundo curso de bachillerato o un primer curso científico-técnico universitario. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza Universidad, Madrid.

CHICA BLAS A. (2001): *Descartes: Geometría y Método*, Ed. Nivola. N.º 8 Colección La Matemática en sus Personajes, Madrid.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y CALBO SANJUAN, G. (2001): "Reflexiones sobre geometría métrica en el espacio: un enfoque distinto para tres problemas clásicos", *Puig Adam*, n.º 59, 48-61.

GAUKROGER S. (1995): *Descartes, an Intellectual Biography*, Ed. Oxford University Press, Oxford.

WOLFRAM S. (1999): *The Mathematica book*, 4th edition Cambrigde University Press, Cambridge.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp.47-58

Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas

Inicialmente, se tratará de delimitar el campo de acción al que se refiere la palabra juego y qué tipo de juegos se propone utilizar. A continuación se considerarán las razones culturales, matemáticas, educacionales, sociológicas y psicológicas que aconsejan su incorporación en la enseñanza de las Matemáticas y algunas sugerencias que ayuden a determinar su forma de utilización en el aula. Posteriormente se realizará el análisis de algunos juegos y, para finalizar, el artículo se centrará en la experimentación en el aula y las conclusiones.

At the beginning, a definition of the field to which the word play is applied will be attempted, and it will be stated what kind of games are proposed to be used. Then, the cultural mathematical, educational, sociological and psychological reasons that advise its incorporation into the teaching of Maths will be considered, along with some suggestions that will help to determine the way they should be used in the classroom. Subsequently, some games will be analysed and to finish with, the article will focus on the experimentation in the classroom and the conclusions.

Educación como formación integral de la persona

Entendemos la educación como formación integral de la persona. Consideramos que la labor de los docentes consiste en preparar a los estudiantes en las clases de hoy para vivir y trabajar en el mundo de mañana, en una sociedad cada vez más compleja que exige personas capaces de resolver problemas y de adaptarse a las distintas situaciones (Burrill, 1998; Chamoso y Rawson, 2003).

Hasta ahora se ha enseñado a los alumnos a hacer, no a pensar. Pero las Matemáticas no son simplemente una colección de hechos y destrezas sino, sobre todo, una forma de pensamiento (Kehle, 1999). El N.C.T.M. (1991, 2000) recomendó que los estudiantes, esencialmente, trabajaran las mismas Matemáticas que se estaban enseñando pero con un enfoque distinto, de forma que los fines que deberían conseguir todos los alumnos con relación a la importancia de la instrucción matemática deberían ser: Aprender a valorar la Matemática, sentirse seguros en su capacidad de hacer Matemáticas, llegar a resolver problemas matemáticos, aprender a comunicarse mediante las Matemáticas y aprender a razonar matemáticamente.

Por ello, las recomendaciones más recientes para reformar la Educación Matemática enfatizan la necesidad de un cambio en la forma en que se enseñan y aprenden las Matemáticas en los centros de enseñanza (N.C.T.M., 1991, 2000). Ya en ese sentido se decía en el Colloquium de Utrech, en 1967:

> El problema no es qué tipo de matemáticas sino cómo deben enseñarse las matemáticas

(citado por Rico, 1990, pág. 33).

> El arte de enseñanza tiene poco que ver con un comercio de conocimiento; su propósito fundamental debe ser fomentar el arte del aprendizaje

(von Glasersfeld, 1995, pág. 192). Sin embargo, no se puede olvidar el hecho de que es el área de Matemáticas en la que se obtienen rendimientos más bajos (I.N.C.E., 1997) y se percibe como la más difícil (por ejemplo Alcalá, 1997), aunque a la vez sea considerada importante y con un alto valor predictivo sobre las capacidades del individuo (Guerrero Ojeda, 1989). Lo cierto es que despierta la antipatía de mucha gente que la ve como algo ajeno.

José María Chamoso Sánchez
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.
Jesús Durán Palmero
IES Vía de la Plata. Guijuelo. Salamanca.
Juan Francisco García Sánchez
Javier Martín Lalanda
Mercedes Rodríguez Sánchez
Escuela de Magisterio de Zamora. Universidad de Salamanca.

Los cambios están afectando a todos los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo:

- Se abandonan las Matemáticas entendidas como un conjunto de contenidos acabado que hay que dominar y en el que no se puede intervenir, y se da paso a otras Matemáticas en las que se resalta el proceso de construcción del conocimiento matemático, y se considera su formalización y estructuración como el punto de llegada en lugar del de partida.

- El objetivo de esta materia ya no es tanto que el alumno conozca unas reglas como que explore, experimente, haga preguntas y conjeturas... En definitiva, que razone.

- A los contenidos tradicionales de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y funciones se añaden el análisis de datos y la estadística, la teoría de probabilidad y de estimación y lo relativo a las matemáticas discretas. Además, se destacan las interrelaciones de todas estas ramas de las Matemáticas para que se consideren un todo integrado y no una agregación de conocimientos aislados. De esa forma se proporciona una idea más clara y certera del objetivo de las mismas.

- El dominio del cálculo pierde protagonismo y la atención se centra en la resolución de problemas. Esto facilita que el alumno relacione las Matemáticas que estudia en la escuela con sus propias experiencias y con situaciones que le son familiares, utilice diferentes métodos y materiales, maneje los conceptos matemáticos, escuche a los demás, ponga sus ideas en común y tenga la posibilidad de aplicar las Matemáticas y descubrir su utilidad.

- Cambia el ambiente de las clases: los alumnos dejan de ser receptores pasivos, meros espectadores y se convierten en participantes activos, capaces de trabajar en equipo, investigar, discutir, crear, conjeturar y validar. En definitiva, de hacer Matemáticas.

- El profesor abandona su papel de autoridad, que proporciona información, para ser alguien que facilita el aprendizaje. Se le pide que estimule a los alumnos y alimente su curiosidad, fomente la interacción entre los mismos, diversifique los medios que utiliza (materiales manipulativos, calculadoras, ordenadores...) y la forma de organizar el trabajo (pequeños grupos, actuaciones individuales, exposición ante toda la clase...). El objetivo es conseguir que los estudiantes tengan confianza en sí mismos, desarrollen su capacidad matemática y valoren esta ciencia.

Los Estándares del N.C.T.M. (1991, 2000) presentaron una visión de los estudiantes como seres que piensan y razonan activamente en Matemáticas.

> ¡La buena enseñanza no es hacer el aprendizaje fácil! Tampoco es hacerlo duro. Estudiantes, profesores, padres y administración deberían entender que la buena enseñanza significa que los estudiantes tomen parte activamente en el proceso de aprendizaje

(Burrill, 1997). Para conseguir esos objetivos se va a presentar la introducción de juegos en el aula como una forma de modificar la metodología de enseñanza. Posteriormente se verán los resultados de su experimentación y las conclusiones.

Los juegos en la enseñanza de las Matemáticas

El juego es una actividad universal que no conoce fronteras. A lo largo del tiempo, todas las personas han practicado alguno de una forma seria. Como se puede descubrir a través de las referencias que proporciona la literatura, el arte, la arqueología o la antropología, las culturas más diversas los han utilizado en sus ritos religiosos, para adivinar el futuro, ejercitar la agilidad, la puntería, la perspicacia o, sencillamente, para entretenerse. De hecho, las comunidades humanas siempre han expresado con juegos su interpretación de la vida y del mundo. Incluso es más antiguo que la misma cultura pues (Huizinga, 1951, pp. 84)

> la cultura, en sus fases primitivas, tiene apariencia de juego y se desarrolla en un ambiente similar a un juego.

También ha estado presente de forma activa en el nacimiento de las importantes formas de expresión colectiva del hombre: religión, guerra, poesía, música.... También en la ciencia y, en concreto, en las Matemáticas (Bell y Cornelius, 1990; Huizinga, 1951). El desarrollo de diversas disciplinas matemáticas (Combinatoria, Teoría de juegos, Teoría de probabilidades, Teoría de grafos, Teoría de números, Topología...) comenzó como algo puramente recreativo. De hecho, cada campo de la Matemática tiene aspectos recreativos (Gardner, 1998). Así, los problemas matemáticos poseen dos posibles orígenes: por un lado están los problemas surgidos de problemas técnicos y que se le plantean al matemático; por otro lado tenemos los problemas de pura curiosidad, los acertijos.

En la vida ordinaria de muchos ciudadanos están presentes juegos electrónicos y de ordenador, de azar y malabares, concursos y deportivos, al aire libre y de mesa. Socialmente, el término juego se utiliza para referirse a multitud de actividades cotidianas con las que muchas personas se entretienen y ocupan su tiempo libre, ya sea practicándolas directamente o presenciando cómo lo hacen otros. Sin embargo no es fácil dar una definición que abarque los múltiples significados enlazados que conlleva esta palabra. El diccionario de la Real Academia Española (2001) lo define como *ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde*. Por tanto, le asocia tres características fundamentales:

- *Carácter lúdico*: Se utiliza como divertimento y deleite sin esperar que proporcione una utilidad inmediata ni que ejerza una función moral. Por ello se organizan adaptados a un interés propio, lo que permite encerrarse en un pequeño mundo alejado de la difícil y complicada realidad.

> Cuando jugamos, e incluso cuando presenciamos cómo lo hacen otros, abandonamos el incomprensible universo de la realidad dada para encerrarnos en el reducido mundo de factura humana donde todo es claro, intencional y fácil de comprender

(Huxley, citado por Gardner, 1992, pág. 87).

• *Con reglas propias*: Está sometido a reglas propias que han de ser claras, sencillas y fáciles de entender, aceptadas libremente por los participantes y de cumplimiento obligatorio para todos. No obstante, los juegos no son rígidos y las reglas se pueden variar por mutuo acuerdo entre los competidores.

> “La cultura, en sus fases primitivas, tiene apariencia de juego y se desarrolla en un ambiente similar a un juego.”
> Huizinga, 1951

• *Carácter competitivo*: Aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes.

Más completa es la definición de Johan Huizinga (1951, pp. 57-58), que considera que

> es una acción u ocupación voluntaria que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias aunque libremente aceptadas; es una acción que tiene un fin en sí misma y está acompañada de un sentimiento de tensión y alegría.

Es decir, además de lúdico, reglado y competitivo, considera que el juego es:

• *Libre*: Los jugadores lo practican voluntariamente.

• *Limitado espacial y temporalmente*: Se separa de la realidad y del mundo por el espacio y tiempo que previamente se ha fijado para su práctica. En general, después de un número finito de movimientos o acciones, tienen un final que se corresponde con la consecución o no del objetivo propuesto.

• *Improductivo*: Ni genera riqueza ni pretende conseguir otro fin que el propio juego. Los jugadores sólo aspiran al placer de ganar al contrincante.

• *Se acompaña de tensión y alegría*: Tensión por ganar y alegría por jugar.

Bright, Harvey y Wheeler (1985) y Corbalán (1994), además, añaden otros aspectos importantes:

• *Son inciertos*: Al empezar cualquier juego no se conocen ni su resultado ni la situación en un momento determinado de su desarrollo. Esta característica hace a estos más atractivos pues libera la imaginación de los jugadores y les invita a hacer predicciones.

• *Tienen un mínimo reconocimiento social*: No se les suele dar importancia, a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes.

En resumen, el juego se caracteriza por ser una actividad humana lúdica, libre, reglada, limitada espacial y temporalmente, competitiva, improductiva y de resultado incierto.

Una metodología de trabajo en ese sentido, ¿se pueden utilizar en el aula?

Razones que aconsejan usar los juegos en el aula

Aun siendo variadas y profundas las relaciones entre juegos y Matemáticas, las razones principales para utilizar los juegos en el aula son las que enumeramos a continuación (Chamoso y Durán, 2003):

1. Son unas actividades atractivas y aceptadas con facilidad por los estudiantes que las encuentran variadas, las reconocen como elementos de su realidad y les permiten desarrollar su espíritu competitivo. Pueden crear un ambiente lúdico que contribuya a despertar la curiosidad de los alumnos y les ayude a disfrutar de la alegría del descubrimiento y el placer del conocimiento. La utilización habitual de juegos y otras actividades recreativas en el aula hará más fácil esquivar el rechazo de algunos estudiantes hacia esta materia y superar bloqueos de otros. Con ello se espera que la clase sea más participativa, práctica, receptiva y amena. Los juegos matemáticos constituyen un material de valor excepcional para la enseñanza de la Matemática. La atracción y el interés que despiertan garantizan el esfuerzo que requiere la investigación matemática. En cada época, hay docentes que saben aprovechar en sus clases la motivación excepcional que suscitan las actividades recreativas. Éstas son generadoras de placer espontáneo y por esa vía la Matemática deja de parecer una disciplina triste y los matemáticos unos aguafiestas (Guzmán, 1996).

2. Cualquier situación de juego que se plantee en el aula favorecerá el desarrollo social de los estudiantes pues estimulará el trato con otras personas, la colaboración entre iguales y el trabajo en equipo, la aceptación de normas, la comunicación y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos. El juego introduce elementos como la novedad, la suerte o la variabilidad. Ello favorece la igualación entre todos, incluido el profesor. Ese ambiente nuevo ayuda a que cambie el papel de los alumnos en el aula, con lo que se favorece una instrucción más cooperativa: cualquier cosa puede afirmarse y todos manipulan, aprenden y enseñan.

3. No se pretende considerar el estudio de juegos porque sí, sino como un tipo de problemas o como una fuente de problemas dentro del movimiento general de resolución de problemas. Los matemáticos valoran los juegos porque se comportan siguiendo unas reglas de forma similar a como las Matemáticas lo hacen en sí mismas (Corbalán, 1998). De hecho, se puede estudiar un paralelismo entre los procesos seguidos al tratar de resolver problemas de la vida real aplicando las Matemáticas y la búsqueda de una estrategia ganadora en los juegos de estrategia. Ambos tienen las mismas fases y permiten ejercitar los mismos hábitos y habilidades por lo que no parece descabellado utilizar los juegos de estrategia para proporcionar herramientas al alumno que serán útiles para la tarea matemática (Gallagher, 1980).

4. Requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, estimulan la imaginación, favorecen la creatividad y enseñan a pensar con espíritu crítico. Fomentan la independencia, desarrollan la capacidad para seguir unas instrucciones, permiten manejar conceptos, procedimientos matemáticos y destrezas de conocimiento en general, y favorecen la discusión sobre Matemáticas y un rico uso de formas de expresión.

En la sociedad no se suele dar importancia a los juegos a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes.

5. Se recomiendan como generadores de aprendizajes duraderos. Las habilidades adquiridas en condiciones de aprendizaje agradables se retienen normalmente durante periodos de tiempo más largos que las que se adquieren por imposición o en condiciones adversas y no se olvidan después de superar metas a corto plazo como los exámenes (Gallagher, 1980).

6. Pueden ser comprendidos y apreciados sin necesidad de tener muchos conocimientos previos de Matemáticas y provocan situaciones en las que es posible realizar alguna investigación al alcance de todos. Además, permiten una corrección inmediata de la solución pues si no es la apropiada no se llega al resultado deseado (Corbalán, 1998).

El objetivo no es jugar sino utilizar los juegos como instrumentos para conseguir los objetivos que se pretenden. Precisamente por ello no puede esperarse que los documentos oficiales indiquen cómo y cuándo utilizarlos dentro del proceso educativo, pues corresponde a los centros tomar decisiones para establecer el modelo de educación por el que se haya optado en el Proyecto Educativo de Centro (P.E.). Posteriormente los departamentos, en el Proyecto Curricular de Área, deben adecuarse a ello, lo que influirá en la concepción más formativa o más instrumental de cada disciplina, en particular de las Matemáticas.

No obstante, en las orientaciones didácticas generales se mencionan expresamente los juegos lógicos y matemáticos entre los materiales que se recomienda utilizar. Por ejemplo, concretamente, cuando se refieren al bloque de tratamiento del azar, recomiendan utilizar juegos para desarrollar conceptos, procedimientos y actitudes referidos a él (MEC, 1992). Además, entendidos los juegos como generadores de problemas, las directrices oficiales de Matemáticas del MEC (1992) hacen referencia a ello en sus objetivos, criterios de evaluación y como un aspecto transversal de la secuencia por ciclos.

Los juegos se utilizan a cualquier edad pues las ventajas de aprender en un ambiente agradable son independientes de ésta. Son un recurso habitual en las aulas con estudiantes menores de 7 u 8 años pero, a partir de ese momento, empiezan a desaparecer de las mismas ante la idea de que las cosas importantes deben excluir cualquier componente lúdico. Conviene no olvidar que divertido es lo contrario de aburrido, no de serio. Además, para obtener provecho de ellos hay que practicarlos con absoluta seriedad.

Gardner (1987) consideró que, seguramente, el mejor método para mantener despierto a un estudiante es proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco matemático, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades.

> Un buen pasatiempo matemático vale más, y aporta más a la matemática que una docena de artículos mediocres

(Littlewood, citado por Gardner, 1992, pp. 9). Por ello deben utilizarse de un modo habitual en la clase de Matemáticas y no limitarse a su utilización en circunstancias excepcionales, pues se corre el riesgo de que se consideren actividades especiales y raras.

En la sociedad no se suele dar importancia a los juegos a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes. Si los padres se enteran de que sus hijos juegan en las clases de Matemáticas, sin saber más, es indudable que esto despertará en ellos todo tipo de suspicacias. También existe una resistencia general del profesorado a introducirlos en ellas. En parte es entendible porque sus efectos no son rápidos ni fácilmente cuantificables.

Características que deben tener los juegos para llevarlos al aula

Cuando los juegos se incorporan a las aulas, si se pretende que no se desvirtúen, hay que cuidar las características que los definen:

- *Lúdica e improductiva*: En el momento de su presentación, mientras los alumnos se familiarizan con ellos, tienen que considerarlos un divertimento y utilizarlos exclusivamente para jugar. La utilidad didáctica que hizo que el profesor los eligiese surgirá en el desarrollo posterior si se trabajan de forma adecuada.

- *Libre*: Si no se consigue despertar en los estudiantes el deseo de juego, éste perderá su sentido y se convertirá en un simple ejercicio rutinario.

Los juegos son un recurso didáctico más y, como cualquier otro instrumento, debe incorporarse al aula de un modo meditado y planificado y con una programación previa que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Con reglas propias, limitados espacial y temporalmente*: Las sesiones de clase están limitadas temporalmente por lo que, si queremos sacar provecho de un juego, conviene que éste sea de pocas reglas y de fácil comprensión. Muchas normas y confusas no invitan a jugar y pueden suponer un bloqueo inicial. Además sería deseable que el desarrollo de sus partidas fuera rápido pues, si duran mucho, harán que el alumno se aburra. Por eso no son aconsejables juegos como el ajedrez (aunque conocido, es complejo y obligaría a dejar partidas sin terminar) o el go (su dinámica de funcionamiento tardaría en aprenderse más de una sesión).

- *De resultado incierto*: Si son muy previsibles los estudiantes se cansarán enseguida.

Los juegos son un recurso didáctico más y, como cualquier otro instrumento, debe incorporarse al aula de un modo meditado y planificado (ver fases de utilización del material en Chamoso y Rawson, 2003) y con una programación previa que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza-aprendizaje como, por ejemplo, los conocimientos previos de los alumnos. En cada caso hay que valorar si es el instrumento más adecuado para conseguir los objetivos propuestos. Pero sea cual fuere el nivel de conocimiento de los estudiantes, el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y juegos matemáticos puede contribuir a clarificar el conocimiento y a desarrollar el pensamiento lógico.

Tipos de juegos

Es obvio que no se trata de jugar a las canicas. En general, tampoco se considerará la práctica de juegos en que prevalezca alguna característica física o habilidad manual, aunque algún aspecto puede ser motivo de interés como los recintos o tableros que se utilizan para tales juegos o incluso sus clasificaciones. El objetivo fundamental será centrarse en aquellos que obligan al jugador a pensar, a discurrir ante las diversas posibilidades de actuación, a desarrollar razonamientos lógicos para investigar la mejor manera de actuar, a establecer conjeturas y justificarlas para tratar de convencer a los demás. Es decir, aquellos en que prima el desarrollo de capacidades mentales ya sean deductivas, inductivas, experimentadoras, de análisis, síntesis, etc. Pero que se busque el impulso del pensamiento no significa que sea una actividad únicamente mental pues la manipulación de objetos va a ser fundamental para jugar y desarrollar esas cualidades intelectivas.

Existe un amplio abanico de posibilidades que cumplen ese objetivo. Por ejemplo, multitud de enigmas, paradojas y antinomias, curiosidades, adivinanzas y otros divertimentos matemáticos tienen un indudable carácter lúdico y, en muchos casos, un gran poder formativo. Pero difícilmente se pueden considerar como juegos propiamente dichos, quizás por la falta de reglas.

Para clasificar los juegos se va a considerar el trabajo de Corbalán (1994) en ese sentido, aunque en trabajos de otros autores o del mismo Corbalán se realizan otras clasificaciones diferentes. Por ello se abarcan tres grandes grupos: juegos de conocimiento, juegos de estrategia y juegos de azar, o aquellos en que intervengan dos o más de dichas características.

Se denominan *juegos de conocimiento* aquellos que utilizan, en su desarrollo, uno o varios de los tópicos habituales existentes en los currícula de Matemáticas y su utilización persigue desarrollar una enseñanza más activa, creativa y participativa. Por tanto su objetivo es alcanzar, afianzar o repasar determinados conceptos o procedimientos matemáticos de un modo más atractivo.

Por *juegos de estrategia* se entienden aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático (Gallagher, 1980). El modo en que se procede cuando se quiere encontrar una estrategia ganadora en un juego es similar al proceso de resolución de un problema: una primera etapa de comprensión, otra de exploración y planificación, una tercera de ejecución y una última de revisión (Fases de resolución de un problema de Polya, 1984). Tienen la gran ventaja de que, al requerir escasos o nulos conocimientos matemáticos previos, permite centrar la atención en las habilidades que se quieren desarrollar. No todos los juegos tienen estrategia ganadora pero, descubrir esto, también es importante.

Los *juegos de azar* se caracterizan por tener un desarrollo completamente aleatorio. Depende del resultado que se consiga al lanzar un dado o extraer cartas de una baraja. Son juegos que resultan familiares a los alumnos y proporcionan oportunidades para buscar regularidades, realizar recuentos sistemáticos y asignar probabilidades.

Análisis de algunos juegos

Vamos a analizar algunos juegos con el objetivo de mostrar que, al hacerlo, se trabajan contenidos matemáticos que se incluyen en el currículum oficial. Un ejemplo de juego de conocimiento puede ser Números y operaciones, muy conocido por ser la sección matemática del popular concurso *Cifras y letras* de Televisión Española, *Des chiffres et des lettres* de la televisión francesa y *Countdown* del Channel 4 británico (Corbalán 1994, 149-150; Crawford 1997, 31-32 y Ferrero 1991, 103-104). Intercambio de fichas es un juego de estrategia que recibe diversos nombres según los autores: Todas cambian (Bolt, 1988, 35, 101-102), Las seis fichas (Ferrero, 1991, 263) y Jugando a cambiar (Sánchez Pesquero y Casas García, 1998, 47-48, 61). Lu-Lu, un juego tradicional de Hawai, es un buen ejemplo de juego de azar al jugarse con dados de dos caras (monedas) diferentes entre sí (Bell y Cornelius, 1990, 77, 86, 102-103 y 123). A continuación se estudia cada uno de ellos.

Números y operaciones
Las reglas son las siguientes:

Número de jugadores: Tantos como se quiera (es posible utilizarlo tanto para gran grupo como de forma individual).

Materiales:

Quince tarjetas numeradas en una de sus caras: diez con los números del 1 al 10 y cinco con los números 10, 25, 50, 75 y 100.

Un sistema para generar números de tres cifras de forma aleatoria (por ejemplo, tirar tres dados de diez caras o extraer cartulinas de una bolsa, con devolución, cada una de las cuales tiene escrito un número del 0 al 9).

Un cronómetro.

Lápiz y papel para cada jugador para realizar cálculos.

Reglas:

1. Se eligen seis tarjetas numeradas entre las quince disponibles y se genera un número de tres cifras aleatorio.

2. El objetivo es conseguir dicho número de tres cifras o la mejor aproximación posible con los números de las seis tarjetas y las cuatro operaciones aritméticas elementales. Para ello se dispone de treinta segundos (o el tiempo que se acuerde). Las operaciones se pueden repetir mientras que los números sólo se pueden utilizar una vez. No es obligatorio utilizar ni todas las operaciones ni todos los números.

3. Los cálculos se indicarán en el papel, jerarquizando las operaciones mediante el uso de paréntesis. Por ejemplo, el número 856 se puede obtener con las tarjetas 4, 7, 50, 10, 9 y 75, al menos, de dos formas distintas: (75+50) * 7 - (10+9), 75 * (4+7) + 50 - (10+9).

4. Gana el jugador que consigue, en primer lugar, el número de tres cifras propuesto o, una vez finalizado el tiempo, su mejor aproximación.

Para un análisis del mismo ver Chamoso y Durán (2003).

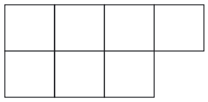
Intercambio de fichas
Veamos inicialmente la descripción del juego para, posteriormente, pasar a analizarlo.

Número de jugadores: Uno.

Materiales:

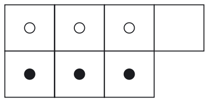
Seis fichas (tres blancas y tres negras).

Un tablero con siete celdillas cuadradas dispuestas en dos filas adosadas, una de cuatro casillas (por ejemplo, la superior) y la otra de tres. Es decir, un tablero formado por un rectángulo de 2x3 casillas al que se agrega una casilla en una de las filas.



Reglas:

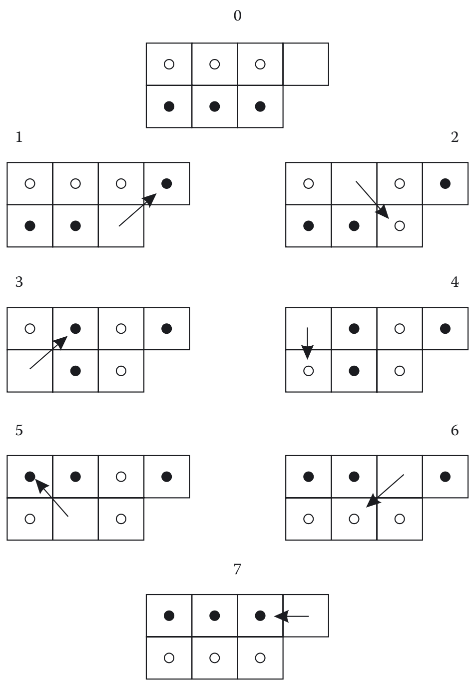
Para comenzar a jugar se colocan las tres fichas blancas en una fila y las tres negras en la otra, enfrentadas a las blancas como se ve en la figura. La casilla que sobresale en la fila superior queda vacía.



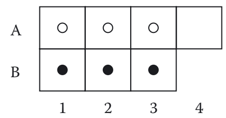
Las fichas se mueven como el rey del ajedrez: una casilla en horizontal, vertical o diagonal, en cada momento, para ocupar un lugar vacío. No pueden coincidir dos en la misma casilla.

El juego termina cuando las fichas blancas y negras han intercambiado sus posiciones. Es decir, si en un principio están colocadas como en la figura anterior, al finalizar las negras deben ocupar la fila superior, las blancas la inferior y la casilla que sobresale en la fila superior debe quedar vacía. El objetivo es conseguir esa posición final con el menor número de movimientos posible.

Encontrar una secuencia de jugadas con las que se intercambien las fichas es inmediato. Algo más laborioso es conseguirla con un número mínimo de movimientos. Una forma puede ser la siguiente:



Siete movimientos son suficientes para completar el intercambio. No es posible hacerlo con menos movimientos pues, al menos, es necesario uno por ficha además de otro para abrir la posición. Si se designa a las filas con letras y a las columnas con números se puede escribir la solución como sigue:

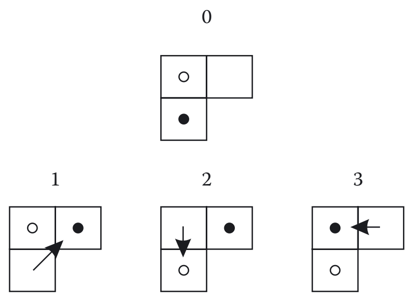


B3 → A4; A2 → B3; B1 → A2; A1 → B1;

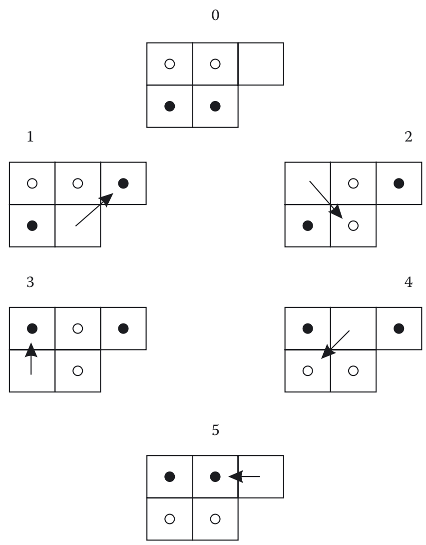
B2 → A1; A3 → B2; A4 → A3.

Lo interesante de este juego es investigar qué sucede cuando se modifica el número de fichas de cada color, *n*, y el correspondiente número de casillas del tablero, $2n+1$.

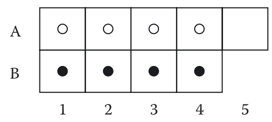
Así, si $n = 1$, el tablero tiene 3 casillas y son necesarios 3 movimientos para realizar el cambio.



Si $n = 2$ el tablero está compuesto por 5 casillas y con 5 movimientos se completa el intercambio.



Para $n = 4$ el tablero está constituido por 9 casillas y se necesitan, al menos, 9 movimientos para que las fichas cambien de posición.



B4 ⟶ A5; A3 ⟶ B4; B2 ⟶ A3; A1 ⟶ B2;B1 ⟶

A1; A2 ⟶ B1; B3 ⟶ A2; A4 ⟶ B3; A5 ⟶ A4.

Así, para cada valor de *n* se calcula el número mínimo de movimientos necesarios para realizar el intercambio. De esa forma se obtienen pares ordenados que representan la relación entre el número de fichas de cada color y el número mínimo de movimientos necesarios para realizar el intercambio de fichas propuesto. Los resultados se recogen en la siguiente tabla (se observa que $f(n) = 2n + 1$):

N.º de fichas de un color, *n*	1	2	3	4	5	6	...
N.º mínimo de movimientos, *f(n)*	3	5	7	9	11	13	...

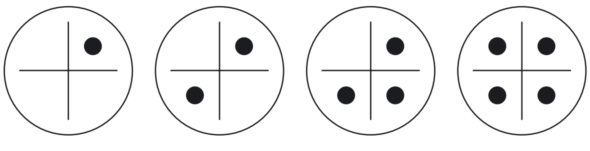
Lu-Lu

Se presenta primeramente su descripción.

Número de jugadores: Todos los que quieran.

Materiales:

Cuatro pequeños discos de unos 2,5 cm. de diámetro que, por una cara, no tienen ninguna señal y, por la otra, están divididos en cuadrantes con diferentes marcas: Uno tiene un punto en un cuadrante, otro tiene un punto en dos cuadrantes opuestos, el tercero tiene un punto en tres cuadrantes y el cuarto tiene uno en cada cuadrante (ver figura).



Se pueden adaptar unas monedas en cuyas caras se pongan pegatinas marcadas como las de la figura anterior.

Reglas:

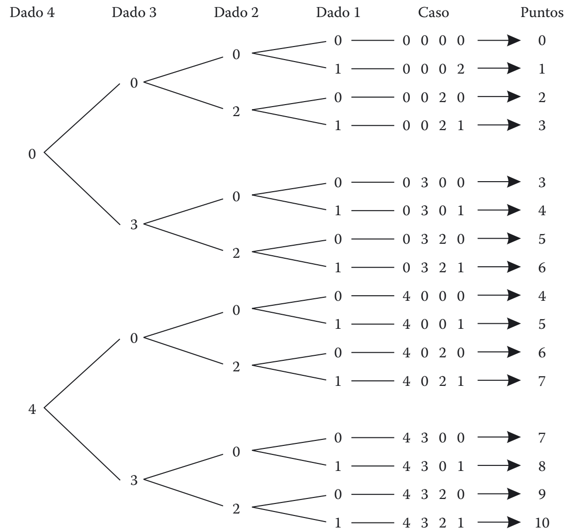
Los jugadores, según un orden previamente establecido, lanzan los cuatro discos y cuentan los puntos que obtienen.

Si un jugador alcanza la máxima puntuación, 10 puntos, puede realizar otro lanzamiento suplementario una sola vez.

Los discos que caen por el lado que no tiene nada marcado cuentan cero puntos para el jugador que los ha tirado y quedan a disposición del jugador siguiente para que los lance y añada los puntos que saque a su puntuación total. Este lanzamiento se añade al que le corresponde por turno.

Gana el primer jugador que alcanza o supera la puntuación que inicialmente se haya acordado (por ejemplo, 100 puntos).

Si se considera el experimento aleatorio *sumar los puntos obtenidos al lanzar cuatro discos diferentes de dos caras, una sin marcar mientras que la otra, en cada caso, es una de las de la figura anterior*, los resultados posibles son:



Los cuatro discos son diferentes y los lanzamientos independientes, por lo que hay 16 posibles resultados distintos. Como se supone que las dos caras de cada disco tienen la misma posibilidad de aparición, es decir, esos 16 lanzamientos son equiprobables, la probabilidad de cada uno de ellos es 1/16. El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y las probabilidades de los sucesos elementales son (se puede comprobar que la suma de estas probabilidades es 1 por lo que la función de probabilidad p está bien definida):

$p(0) = p(1) = p(2) = p(8) = p(9) = p(10) = 1/16.$
$p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 2/16.$

Pero este experimento se modifica en el juego de Lu-lu. Al introducir que sacar un 10 permite realizar otro lanzamiento suplementario se amplían las puntuaciones posibles y varían las probabilidades de algunos sucesos. De esta forma se pueden conseguir de 0 a 20 puntos.

Aunque las posibilidades de obtener 0, 1, 2, ..., 8 ó 9 puntos no varían de las señaladas anteriormente, para sacar 10 puntos hay que realizar un lanzamiento ordinario de 10 (L10) y uno suplementario de 0 (S0), donde L = lanzamiento ordinario y S = lanzamiento suplementario; se consiguen 11 puntos con un lanzamiento por turno de 10 puntos (L10) y uno suplementario de 1 punto (S1), etc. Aunque la realización del lanzamiento suplementario está condicionada por haber conseguido un lanzamiento ordinario de 10 puntos, la puntuación que se obtiene en este segundo lanzamiento es independiente de la del primero. Por tanto, las probabilidades de las puntuaciones de 10 a 20 se calculan como sigue:

$p(10) = p(L10 \cap S0) = p(L10) \cdot p(S0) = 1/16 \cdot 1/16 = 1/16^2$ (análogos los demás casos).

Por tanto, el nuevo espacio muestral será:

$\Omega' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

y la función de probabilidad p' toma los valores (fácilmente se comprueba que la suma de todas ellas es 1):

$p'(0) = p'(1) = p'(2) = p'(8) = p'(9) = 1/16$.
$p'(3) = p'(4) = p'(5) = p'(6) = p'(7) = 2/16$.
$p'(10) = p'(11) = p'(12) = p'(18) = p'(19) = p'(20) = 1/16^2$.
$p'(13) = p'(14) = p'(15) = p'(16) = p'(17) = 2/162$.

Finalmente se incorpora la regla de que los discos que han quedado por la cara que no tiene puntos después del lanzamiento de un jugador, se lanzan de nuevo por el jugador con el siguiente turno. Esta condición es la que hace que el juego se complique. La puntuación de un jugador, en cada uno de sus turnos, queda condicionada por el resultado del lanzamiento del anterior salvo en la primera jugada de cada partida. En este caso los resultados pueden llegar hasta 30. Ante tan elevado número de posibilidades sólo estudiaremos algunos casos.

Si el jugador anterior sacó 10 en su tirada (A10), el que tiene el turno realiza directamente el lanzamiento que le corresponde y puede conseguir entre 0 y 20 puntos según los resultados de la tirada ordinaria y, si se realiza, de la suplementaria. Se reproduce el espacio probabilístico anterior por lo que $\Omega/A10 = \Omega'$ y $p(\ /A10) = p'$.

Si el jugador anterior sacó un 9 en su lanzamiento (A9), necesariamente quedó en blanco el disco con un punto. Según las reglas del juego, el jugador en turno lo lanzará y podrá conseguir 0 (D0) ó 1 (D1), con D = lanzamiento de los dados del anterior, ambos con probabilidad de ½. A ello hay que añadir el lanzamiento que le corresponde. Las posibilidades globales en este caso son:

D L S	Ptos.	D L S	Ptos.	D L S	Ptos.	D L S	Ptos.
0 0 -	0	0 10 0	10	1 0 -	0	1 10 0	10
0 1 -	1	0 10 1	11	1 1 -	1	1 10 1	11
0 2 -	2	0 10 2	12	1 2 -	2	1 10 2	12
0 3 -	3	0 10 3	13	1 3 -	3	1 10 3	13
0 4 -	4	0 10 4	14	1 4 -	4	1 10 4	14
0 5 -	5	0 10 5	15	1 5 -	5	1 10 5	15
0 6 -	6	0 10 6	16	1 6 -	6	1 10 6	16
0 7 -	7	0 10 7	17	1 7 -	7	1 10 7	17
0 8 -	8	0 10 8	18	1 8 -	8	1 10 8	18
0 9 -	9	0 10 9	19	1 9 -	9	1 10 9	19
		0 10 10	20			1 10 10	20

Por tanto, el espacio muestral es:

$\Omega/A9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$

y la distribución de probabilidades queda como sigue:

$p(0/A9) = p(D0 \cap L0) = p(D0)p(L0) = 1/2 \cdot 1/16$.
$p(1/A9) = p((D0 \cap L1) \cup (D1 \cap L0)) = p(D0 \cap L1) + p(D1 \cap L0) = 2 \cdot 1/2 \cdot 1/16 = 1/16$.
$p(2/A9) = p((D0 \cap L2) \cup (D1 \cap L1)) = p(D0 \cap L2) + p(D1 \cap L1) = 2 \cdot 1/2 \cdot 1/16 = 1/16$.
$p(3/A9) = p((D0 \cap L3) \cup (D1 \cap L2)) = p(D0 \cap L3) + p(D1 \cap L2) = 1/2 \cdot 2/16 + 1/2 \cdot 1/16 = 3/2 \cdot 1/16$.
$p(4/A9) = p((D0 \cap L4) \cup (D1 \cap L3)) = p(D0 \cap L4) + p(D1 \cap L3) = 2 \cdot 1/2 \cdot 2/16 = 2/16$.
$p(5/A9) = p(6/A9) = p(7/A9) = 2/16$.
$p(8/A9) = 3/2 \cdot 1/16$.
$p(9/A9) = 1/16$.
$p(10/A9) = p((D0 \cap L10 \cap S0) \cup (D1 \cap L9)) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 + 1/2 \cdot 1/16 = 1/2 \cdot 1/16 + 1/2 \cdot 1/16^2$.
$p(11/A9) = p((D0 \cap L10 \cap S1) \cup (D1 \cap L10 \cap S0)) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 + 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 = 1/16^2$.
$p(12/A9) = p((D0 \cap L10 \cap S2) \cup (D1 \cap L10 \cap S1)) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 + 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 = 1/16^2$.
$p(13/A9) = p((D0 \cap L10 \cap S3) \cup (D1 \cap L10 \cap S2)) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 2/16 + 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 = 3/2 \cdot 1/16^2$.
$p(14/A9) = p((D0 \cap L10 \cap S4) \cup (D1 \cap L10 \cap S3)) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 2/16 + 1/2 \cdot 1/16 \cdot 2/16 = 2/16^2$.
$p(15/A9) = p(16/A9) = p(17/A9) = 2/16^2$.
$p(18/A9) = 3/2 \cdot 1/16^2$.
$p(19/A9) = p(20/A9) = 1/16^2$.
$p(21/A9) = p(D1 \cap L10 \cap S10) = p(D1)\ p(L10)\ p(S10) = 1/2 \cdot 1/16 \cdot 1/16 = 1/2 \cdot 1/16^2$.

Como la suma de todas estas probabilidades es 1 entonces es una función de probabilidad.

Finalmente se va a considerar el caso de que el jugador anterior saque 7 puntos en la tirada que le corresponde (A7). Como hay únicamente dos posibilidades de conseguir 7 puntos (4 0 2 1 ó 4 3 0 0), el jugador en turno tendrá que lanzar, dependiendo de la que se produzca, el disco con tres marcas o los discos con una y dos marcas. Como ambas posibilidades son equiprobables, el que se consigan los 7 puntos a partir de un lanzamiento u otro tiene la misma probabilidad, ½ en cada caso. Se analizan ambas posibilidades por separado (con un poco de paciencia, el lector puede realizar los cálculos detallados).

1. Si el lanzamiento del jugador anterior fue 4 0 2 1 (caso Aa7), el que tiene el turno debe tirar el disco con tres marcas y puede obtener 0 (D0) ó 3 (D3), ambos con la misma probabilidad (½). El cuadro de posibilidades es semejante al que se obtiene cuando el jugador anterior consigue 9 puntos aunque los resultados varían desde 0 hasta 23.

2. Si el lanzamiento del jugador anterior fue 4 3 0 0 (Ab7), el jugador que tiene el turno deberá lanzar los discos con uno y dos puntos con los que puede obtener de 0 a 3 tantos. Estos sucesos, siguiendo la notación utilizada, serán D0, D1, D2 y D3 y cada uno se da con una probabilidad de ¼.

¿Se inventó el juego pensando en las Matemáticas o es que éstas sirven, en muchos casos, para descubrir el funcionamiento de instrumentos cotidianos?

Una vez estudiados todos los casos dependiendo de los resultados que saca el jugador anterior en su tirada se podrían calcular las probabilidades de todos los resultados posibles en el juego Lu-lu. Dichas probabilidades serán, para cada n, utilizando la definición de probabilidad condicionada y que el sistema de sucesos {A0, A1, ..., A9, A10} es completo:

$p(n) = p(n / (A0 \cup A1 \cup \ldots \cup A9 \cup A10)) =$
$= p(n \cap (A0 \cup A1 \cup \ldots \cup A9 \cup A10))/p(A0 \cup A1 \cup \ldots \cup A9 \cup A10) =$
$= p(n \cap A0) + p(n \cap A1) + \ldots + p(n \cap A9) + p(n \cap A10) =$
$= p(A0)p(n/A0) + p(A1)p(n/A1) + \ldots + p(A9)p(n/A9)+$
$p(A10)p(n/A10)$

De esta forma se puede considerar el juego del Lu-lu como un experimento aleatorio con su espacio muestral asociado y una función de probabilidad definida sobre él.

Experimentación en el aula

Se observa que el análisis de los juegos anteriores permite manejar numerosos contenidos del currículum de Matemáticas de ESO y aplicar diversas estrategias para la resolución de problemas (un ejemplo referido a Números y operaciones está en Chamoso y Durán, 2003). Por esa razón se han experimentado con estudiantes y docentes. Números y operaciones era un juego conocido por la mayor parte de ellos que, en muchos casos, lo habían experimentado en las aulas en alguna ocasión. Sugerir la búsqueda de variantes del mismo y sus posibilidades llevó a descubrir una gran cantidad de actividades en las que aparecían diversos contenidos matemáticos. Por ejemplo, conseguir el número más alejado del que había que aproximar llevó a trabajar las potencias, operaciones entre ellas y las propiedades que verifican; que el número que se tratara de acercar fuera un número fraccionario convertía la actividad en conseguir no sólo un número sino un par o diversos pares de números que representaran la misma fracción; si estuviese comprendido entre 0 y 1 permitía estudiar los distintos tipos de números decimales; si fuese un número entero negativo posibilitaría utilizar las operaciones y propiedades de los números enteros...

En esas variantes, y otras que puede haber, se trabajan contenidos matemáticos muy diversos como, por ejemplo, las operaciones elementales y sus propiedades, prioridad de las operaciones, importancia de los paréntesis, probabilidad, cálculo y estrategias mentales, agilidad mental, divisibilidad, verbalización de la respuesta, distintos caminos para encontrar la solución, realización de conjeturas, comprobaciones y revisión del resultado. También aparecieron aspectos importantes como el respeto a los demás, comportamiento en grupo, estímulo por obtener la solución, competitividad, motivación. Además, este juego tiene un componente interesante ya que la actividad no tiene un final previsto. Es una cuestión abierta y coloca al profesor en un lugar cercano al alumno ya que, a priori, no goza de la solución ni del procedimiento para la resolución del problema. Por tanto, se convierte en un jugador más con un incentivo importante por ser el docente.

Intercambio de fichas proporciona la oportunidad de recoger datos, representarlos y analizarlos para tratar de obtener un modelo algebraico y su correspondiente modelo geométrico en el caso de una función afín. También es importante utilizar una notación apropiada. Se ha experimentado con estudiantes a partir de la siguiente ficha de trabajo:

1. ¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para completar el juego cuando el tablero tiene 3 * 4 casillas? ¿Cuántos son necesarios en el caso de que el tablero tenga 2 * 3 casillas?

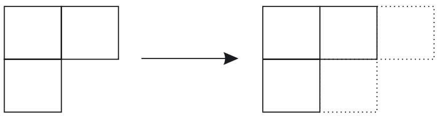
2. Construye un tablero de 4 * 5 y completa el juego. ¿Cuántos movimientos se necesitan para acabar? ¿Es el número mínimo?

3. También es posible reducir el tamaño del tablero. ¿Qué ocurriría en un tablero 1 * 2?

4. Rellena la siguiente tabla:

Número de casillas	Número mínimo de movimientos para concluir del juego
1 x 2	
2 x 3	
3 x 4	
4 x 5	
5 x 6	

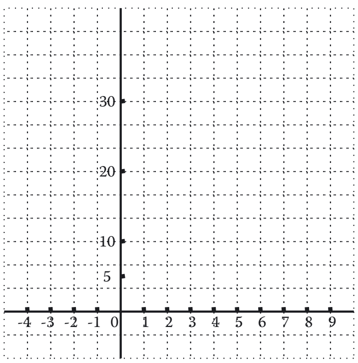
5. Para pasar de un caso al siguiente se amplía el tablero, es decir, se añade una casilla a cada fila adosadas a las ya existentes. Por ejemplo,



Para contar los movimientos necesarios para completar un caso podemos partir de los necesarios en el caso anterior y estudiar únicamente los desplazamientos que hay que añadir.

a. ¿Cuántos movimientos de diferencia hay entre el caso en que el tablero tiene 1 * 2 casillas y el que tiene 2 * 3?
b. ¿Cuántos de diferencia hay entre el caso del tablero de 2 * 3 y el de 3 * 4?
c. A partir de la casilla en que finaliza el juego cuando hay 2 * 3 casillas, ¿cuántos movimientos hay que realizar para resolverlo cuando hay 3 * 4? ¿Coincide con la respuesta del apartado a? ¿Cuándo se producen los movimientos que faltan?
d. Estudia las preguntas de c) para la situación en que se pasa de jugar con 3 * 4 casillas al caso de 4 * 5 casillas.
e. Suponiendo que se conocen los movimientos a realizar para completar el juego en el tablero de n * (n+1) casillas, ¿cuántos hay que hacer en el de (n+1) * (n+2)?

6. En el plano cartesiano que está dibujado a continuación, representa los puntos correspondientes a los pares de la tabla anterior.



Une los puntos marcados. ¿Qué figura resulta? ¿Te permite predecir cuántos movimientos son necesarios para completar este juego cuando el tablero tiene 6 * 7, 7 * 8 ó 8 * 9 casillas?

7. ¿Cuántos movimientos hay que hacer, como mínimo, para realizar el intercambio en el caso de que haya 100 fichas de cada color? Si alguien ha realizado 231 movimientos, ¿con cuántas fichas ha jugado? Explica cómo se deduce a partir de la gráfica. Es decir, generaliza el resultado para un número par de fichas (2n, n de cada color) y un tablero con 2n+1 casillas (un rectángulo de 2xn celdillas con una más adosada a una de las filas).

8. Con esos datos trata de establecer una fórmula que refleje el número de movimientos necesarios para completar el juego Intercambio de fichas en función del número de casillas del tablero. Ahora intenta responder las preguntas del apartado anterior.

En cuanto al juego Lu-lu, como se ha podido observar se complica mucho y se dispara el número de posibilidades cuando se condiciona la puntuación de un jugador en un turno al resultado del lanzamiento del jugador anterior. Se puede trabajar en los cursos de 1º y 2º de ESO si se pretenden estudiar las distintas maneras en que pueden caer los discos y relacionar los casos posibles con los puntos que se pueden conseguir, las puntuaciones que puede lograr un jugador en su turno, formas de conseguirlas... En 3º de ESO se puede trabajar, además, el espacio muestral y la función de probabilidad del experimento aleatorio *lanzar cuatro discos diferentes marcados por una de sus caras con 1, 2, 3 y 4 puntos respectivamente y sumar los puntos obtenidos* con alguna modificación. En 4º de ESO se puede utilizar para desarrollar los conocimientos sobre probabilidad, incluida la condicionada, con un experimento que no es habitual en los libros de texto. También existen variantes pues se puede considerar un juego análogo, pero más sencillo, que consiste en lanzar únicamente tres discos diferentes marcados con 1, 2 y 3 puntos, respectivamente, en una de sus caras.

Conclusiones

Después de la experimentación efectuada, ha sorprendido la gran cantidad de contenidos matemáticos que pueden surgir al trabajar un juego generalmente conocido como Números y operaciones, siempre que se tenga interés en ello y se trabaje con suficiente profundidad. También llama la atención que Intercambio de fichas, que a primera vista no tiene ninguna apariencia matemática se pudiera convertir en un instrumento para trabajar las Matemáticas. Incluso se ha visto que se puede llegar a descubrir una regla general para poder deducir el número mínimo de movimientos en un tablero de amplitud cualquiera. Otro aspecto llamativo es que, a partir del juego

Lu-lu se pueda, prácticamente, recorrer la mayor parte de los contenidos del currículum de Matemáticas relacionados con probabilidad de los cuatro años de Secundaria e incluso más. Con ello se ha mostrado que los juegos pueden utilizarse para trabajar elementos del currículum de muy diversas formas. No se considera que sean la solución de los problemas de Educación Matemática, ni mucho menos, pero sí que pueden ser un recurso que puede ayudar a desarrollar la enseñanza cuando el docente lo considere adecuado. En cualquier caso, hay que tener en cuenta las posibilidades del entorno educativo en que se quiera trabajar: docente, aula de trabajo, número de estudiantes, posibilidades de los alumnos, materiales...

Pero, sin embargo, en nuestra mente queda la pregunta: ¿Es que el juego se inventó pensando en las Matemáticas o es que éstas sirven, en muchos casos, para descubrir el funcionamiento de instrumentos cotidianos? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCALÁ, M. (1997): "Enseñanza de la Matemática y Niveles Operatorios", *Actas VIII J.A.E.M.*, Salamanca, 51-56.

BELL, R. y CORNELIUS, M. (1990): *Juegos con tablero y fichas: Estímulos a la investigación matemática*, Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.

BRIGHT, G. W., HARVEY J. G. y WHEELER, M. M. (1985): "Learning and Mathematics Games", *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 1 (monográfico), N.C.T.M., Reston.

BURRILL, G. (1997): "President's Report: Choices and Challenges", *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 5, 602-611.

BURRILL, G. (1998): "Changes in Your Classroom: From the Past to the Present to the Future", *Journal for Research in Mathematics Education,* 29, 5, 583-596.

CHAMOSO, J. Mª y DURÁN, J. (2003): "Algunos juegos para aprender Matemáticas", *Actas VII Seminario Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática*, Ponferrada, 163-176.

CHAMOSO, J. Mª y RAWSON, W. (2003): "Matemáticas en una tarde de paseo", *Colección Diálogos de Matemáticas*, Nivola, Madrid.

CORBALÁN, F. (1998): "Juegos de estrategia en la enseñanza secundaria", *Uno, n.º* 18, 59-71.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.

CRAWFORD, D. (1997): "Number games", *Mathematics in School,* 26, 4, 31-33.

FERRERO, L. (1991): *El juego y la matemática*, Colección Aula Abierta, Muralla, Madrid.

GALLAGHER, K. (1980): *Problem Solving through Recreational Mathematics*, En Krulik y Reys (Ed.), *Problem solving in School Mathematics*, 169-177, 1980 NCTM Yearbook, Virginia, Reston, NCTM.

GARDNER, M. (1987): *Carnaval matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1992): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1998): "Un cuarto de siglo de matemáticas recreativas", *Investigación y Ciencia*, octubre, 50-57.

GUERRERO OJEDA, J. (1989): "Ámbitos y funciones del currículum matemático", Epsilon 14, 57-62.

GUZMÁN, M. de (1996): *Aventuras Matemáticas: Una ventana hacia el caos y otros episodios,* Pirámide, Madrid.

HUIZINGA, J. (1951; original de 1938): "Homo ludens, essai sur la fonction sociale du jeu", *Colección Tel*, n.º 130, Gallimard.

I.N.C.E. (1997): "Resultados de Matemáticas", *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*, MEC, Madrid.

KEHLE, P. (1999): "Shifting Our Focus From Ends to Means: Mathematical Reasoning", *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, 4, 468-474.

MEC (1992): *Secundaria, Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

N.C.T.M. (1991): "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática", *SAEM THALES*, Sevilla.

N.C.T.M. (2000): *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, NCTM, Virginia.

POLYA, G. (1984): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas (primera edición en 1945), México.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (22ª edición) (2001): *Diccionario de la Lengua Española*, Espasa Calpe, Madrid.

RICO, L. (1990): *Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural,* en Llinares, S. y Sánchez, Mª V. (Ed.), Teoría y Práctica en Educación Matemática, 17-62 Alfar, Sevilla.

SÁNCHEZ PESQUERO, C. y CASAS GARCÍA, L. M. (1998): *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas*, Centro de Investigación y Documentación Educativa, MEC, Madrid.

VON GLASERSFELD, E. (1995): *Radical constructivism: A way of knowing and learning,* Falmer Press, London.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp.59-62

Las funciones racionales a través de su descomposición

En las matemáticas del Bachillerato, la representación gráfica de funciones racionales suele abordarse como un caso más de la representación general de funciones, aunque con una atención especial en el cálculo de las asíntotas. Para el cálculo de primitivas de funciones racionales se usa la descomposición de las mismas en fracciones simples. Se trata aquí de aplicar esta descomposición en la representación gráfica haciendo mención de las ventajas sobre el método que generalmente se suele usar.

In Maths at the Spanish non-compulsory Secondary Education, graphic representation of rational functions is usually tackled as one of the so many cases of the general representation of functions, with special attention to Asymptote calculus, though. Deconstruction into simpler fractions is used for the calculation of rational primitives functions. This article deals with applying this deconstruction to the graphic representation emphasizing its advantages over the method ordinarily used.

La representación gráfica de las funciones racionales en las matemáticas del Bachillerato suele tener un estudio poco diferenciado respecto al resto de funciones, al menos es así en la mayoría de libros de textos, por no decir en casi todos.

Por otra parte, en el cálculo de primitivas de funciones racionales se detalla el procedimiento de descomposición de una fracción impropia (grado del polinomio del numerador superior o igual al grado del polinomio del denominador) en suma del polinomio cociente más la fracción propia cuyo numerador es el resto de la división. Esto es:

$$f(x)=\frac{p(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

siendo, por el teorema fundamental de la división

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

y el grado de *r(x)* menor que el grado de *d(x)*.

Uno de los procedimientos más usuales en Matemáticas es la descomposición de cualquier ente matemático en otros más simples. En nuestro caso descomponemos una fracción impropia como suma de un polinomio y una fracción propia.

Siguiendo con la descomposición de *r(x)/d(x)*, se van obteniendo términos de la forma

$$\frac{a_1}{x-x_1},\frac{a_1'}{\left(x-x_1\right)^2},\ldots,\frac{a_2}{x-x_2},\frac{a_2'}{\left(x-x_2\right)^2},\ldots,\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1},\ldots$$

cuyos denominadores surgen de la descomposición de *d(x)*.

A continuación veremos algunos aspectos de la representación gráfica de funciones racionales en los que la descomposición anteriormente descrita presenta importantes ventajas sobre el método general de representación gráfica de funciones. Con fines didácticos tomaremos como ejemplos las representaciones gráficas de las funciones

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^3+x^2+3x-5}$$

Obtención de asíntotas no verticales

Una de las características más interesantes de las funciones racionales es el comportamiento asintótico de muchas de ellas.

Agustín Colell Martínez
IES Ramón Berenguer IV. Amposta. Tarragona.

Las asíntotas no verticales se obtienen, directamente, de la primera descomposición de la función racional como suma del polinomio cociente más la fracción residual

$$f(x)=\frac{p(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

Para valores de x tendentes a más o menos infinito el último término de la expresión tiende a 0 por ser el grado del denominador mayor que el grado del numerador, con lo cual la función racional tenderá al polinomio *q(x)*.

Si este polinomio es de primer grado, la función tiene a la recta *y=q(x)* como asíntota oblicua, si es de grado 0, entonces es asíntota horizontal. Si el grado de *q(x)* es superior a 1, no tiene asíntotas oblicuas; en este caso tiene ramas parabólicas en la dirección del eje *OY*.

Veámoslo con los ejemplos.

Ejemplo1: En la función

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3}$$

dividiendo obtenemos

$$f(x)=x+2+\frac{4}{x-3}$$

Para valores tendentes a más o menos infinito, el término 4/(x-3) tiende a 0, luego *f(x)* se aproxima a $y = x + 2$, y por lo tanto, esta recta es asíntota de la función.

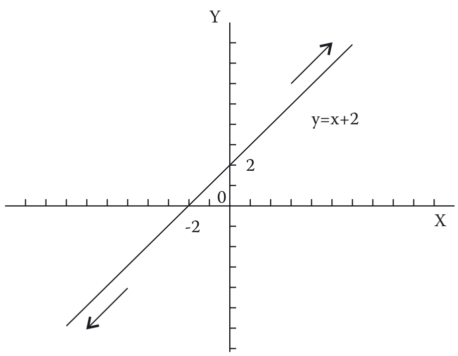


Figura 1

Ejemplo 2: Función

$$g(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^3+x^2+3x-5}$$

En este caso la fracción ya está reducida. La asíntota es la recta $y = 0$, es decir, el eje *0X*.

El método más extendido para obtener la asíntota $y = mx + n$, si existe, requiere la obtención de m y n mediante sendos límites muy simples, pero, por lo general no se demuestra o no se justifica el porqué de estos límites.

Obtención de asíntotas verticales

Descomponiendo la fracción residual en fracciones simples obtenemos diferentes términos

$$\frac{a_1}{x-x_1},\frac{a_1'}{(x-x_1)^2},\ldots,\frac{a_2}{x-x_2},\frac{a_2'}{(x-x_2)^2},\ldots,\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1},\ldots$$

Los términos del tipo

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1}$$

están acotados puesto que el denominador nunca se anula, además, para x tendente a más o menos infinito, la fracción tiende a 0 por ser el denominador de grado superior al del numerador.

En un entorno de x_1, los términos con denominador (x - x_1) tienden a infinito y los restantes toman valores acotados, por lo que se pueden despreciar.

La función *f(x)* tenderá a más o menos infinito dependiendo del límite lateral y la paridad del exponente de la potencia.Lo podemos ver en el ejemplo 1.

En un entorno de $x = 3$ el término 4/(x-3) domina sobre el término $x + 2$ con lo cual el límite lateral en $x = 3$ de la función coincide con el del término 4/(x-3). Sólo es necesario estudiar el signo de la fracción para saber si el límite lateral es más o menos infinito.

Para el límite lateral por la izquierda, el denominador x - 3 es negativo luego el signo de la fracción es negativo. En el cálculo del límite lateral por la derecha, el signo del denominador es positivo, luego la fracción también es positiva.

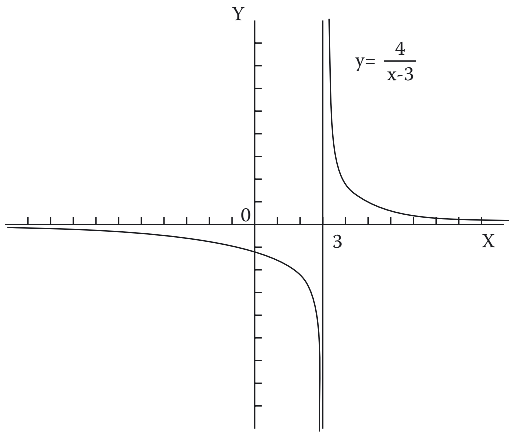


Figura 2

Para el ejemplo 2 obtenemos

$$g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2+2x+5}$$

El primer término tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con límite lateral por la izquierda menos infinito y límite lateral por la derecha más infinito.

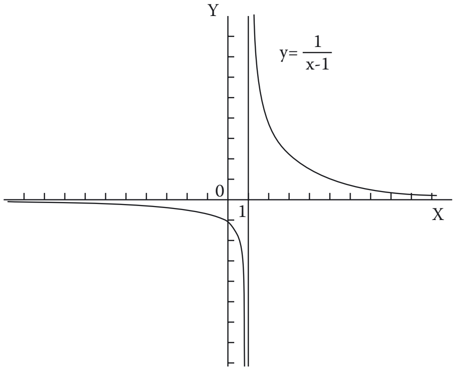


Figura 3

El segundo término siempre es positivo ya que el denominador es la parábola $y = x^2 + 2x + 5$ cuyo mínimo se encuentra en (-1, 4).

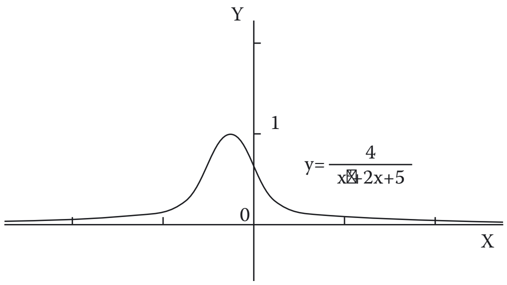


Figura 4

Representación a grandes trazos

En los casos sencillos las asíntotas determinan la representación gráfica.

Para la función *f(x)*, del comportamiento de la función en las proximidades de la asíntota $x = 3$ se puede deducir, además, si la función se aproxima a la asíntota $y = x + 2$ por encima o por debajo. Superponiendo y ajustando las figuras 1 y 2 resulta:

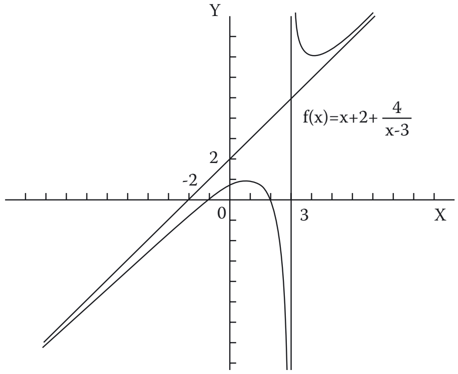


Figura 5

Para la función *g(x)* tendremos en cuenta la figura 3 y la representación gráfica del segundo término, figura 4. Hay que hacer aquí dos consideraciones importantes. La primera es que para x tendente a menos infinito el término $1/(x-1)$ predomina, en valor absoluto, sobre $4/(x^2+2x+5)$ por ser el denominador de éste de grado 2, por lo tanto la función tenderá por la izquierda a la asíntota *OX* con valores negativos. También puede observarse este hecho analizando el signo de la fracción *g(x)* para x tendente a menos infinito: el numerador es positivo por ser de grado par, en tanto que el denominador es negativo por ser un polinomio de grado impar.

La segunda consideración es que en el punto máximo del segundo término, $x = -1$, la función toma el valor $g(-1) = ½$, en cuyo entorno la gráfica está por encima del eje *OX*.

Dicho esto, la suma de las gráficas de las figuras 3 y 4 resulta ser la función *g(x)*, representada en la figura 6.

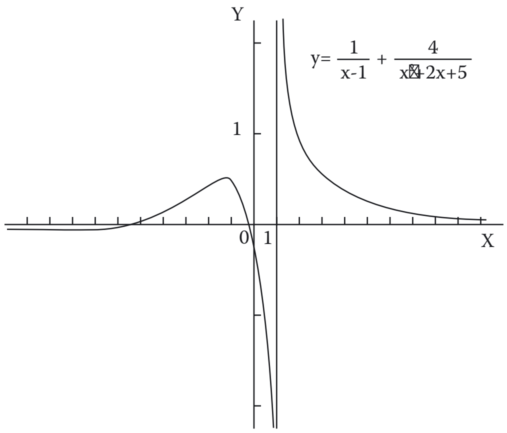


Figura 6

No se detalla el cálculo de los dos puntos de corte con el eje *OX* y de los dos puntos de inflexión. Sólo se pretende obtener la representación grosso modo de la función.

Llegados a este punto cabe significar que hemos basado la representación gráfica de las dos funciones en el estudio de sus asíntotas y en la suma gráfica de las funciones más simples en las que hemos descompuesto *f(x)* y *g(x)*.

Veamos ahora que también para el estudio local de las funciones la descomposición de la fracción impropia como suma del polinomio cociente más fracciones propias puede resultar interesante.

Derivadas

El estudio local de la función requiere la búsqueda de máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión, para lo cual será necesario calcular la derivada. También en la obtención de la derivada encontramos ventajas.

En el ejemplo 1 es mucho más fácil derivar

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-3} \quad \text{que} \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-3}$$

Así, las derivadas de ambas expresiones quedan:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$$

Igualando *f(x)* a 0 en la primera expresión obtenemos

$$\frac{4}{(x-3)^2} = 1$$

de donde $(x - 3)^2 = 4$.

Extrayendo la raíz cuadrada y pasando el 3 al segundo término obtenemos finalmente x = 3 ± 2.

En el caso de la función del ejemplo 2,

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - 4\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$$

La obtención de la derivada también resulta ser más fácil, aunque la búsqueda de las raíces de esta expresión sigue siendo inabordable.

Otras propiedades y consideraciones

A posteriori, en la gráfica de *f(x)* (figura 5) puede observarse que el punto de corte de las asíntotas es centro de simetría. Las rectas $y = x + 2$ y $x = 3$ se cortan en el punto $C(3,5)$.

Podemos comprobar la simetría viendo que

$$\frac{f(3-t) + f(3+t)}{2} = 5$$

para todo t diferente de 3.

También aquí presenta ventajas la descomposición en fracciones simples.

$$f(3-t) = 3 - t + 2 + \frac{4}{3-t-3} = 5 - t - \frac{4}{t}$$

$$f(3+t) = 3 + t + 2 + \frac{4}{3+t-3} = 5 + t + \frac{4}{t}$$

y la semisuma es 5.

Si en la descomposición aparecen términos de grado mayor que uno $a_1'/(x-x_1)^2$... solamente tenemos que modificar el signo del límite lateral según sea la multiplicidad y el signo del coeficiente a_1'.

Análogamente a como hemos visto para

$$\frac{4}{x^2 + 2x + 5}$$

puede demostrarse que los términos $(\alpha_1 x+\beta_1)/(x^2+b_1 x+c_1)$ no afectan a la existencia de las asíntotas verticales, aunque sí afectan a la existencia y localización de los puntos máximos, mínimos e inflexión.

Conclusiones

Es de destacar, de todo lo desarrollado en este artículo, que el estudio de las fracciones que resultan de la descomposición de una función racional es siempre mucho más simple que la función original.

En ocasiones, para funciones racionales de cierto grado de dificultad, la única manera de obtener una gráfica de forma aproximada es recurrir a la suma de las gráficas de los términos que obtenemos en la descomposición, como se ha hecho con la función *g(x)*.

Didácticamente los casos más frecuentes e interesantes son aquellos en los que el grado del numerador es superior en una unidad al grado del denominador.

Si el grado del numerador es 2 y el grado del denominador es 1 (como la función *f(x)* que hemos tomado como ejemplo 1) nos encontramos ante la suma de una recta y una hipérbola.

Si el grado del numerador es tres y el denominador es el producto de dos binomios de grado uno estaremos ante la suma de una recta y dos hipérbolas.

En las ocasiones en que he tenido oportunidad de aplicar la descomposición descrita en los párrafos anteriores he podido comprobar que tal descomposición ayuda sobremanera a la comprensión, por parte del alumnado, del comportamiento de las funciones racionales en el infinito. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REY PASTOR, J. y otros (1952): *Análisis matemático*, Kapeluz.

PISKUNOV: *Cálculo diferencial e integral*, Montaner y Simón S.A.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 63-66

En el entorno del teorema Kou-Ku (y IV)

Nos preguntábamos en algún momento del artículo anterior de esta serie si realmente el teorema de Pappus (fig. 1)

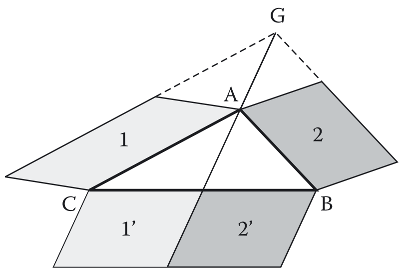


Figura 1

generaliza el de Pitágoras. Una duda surgida en el camino ante la brusca extensión de la idea inicial a la que estábamos asistiendo pero, una vez ascendidos al nuevo punto de observación, la vista del paisaje produce sensación de calma. También de sorpresa, por haber estado tanto tiempo sometidos a las restricciones de una perspectiva tan limitada. Ciertamente Pappus generaliza Pitágoras y, desde la altura a la que nos ha llevado, las condiciones del teorema kou-ku resultan anecdóticas. Un cuadrado no es más que un caso particular de paralelogramo y, una vez elegidas las rectas *r* y *s* (figuras 2 y 3) a la distancia conveniente para poder dibujarlos,

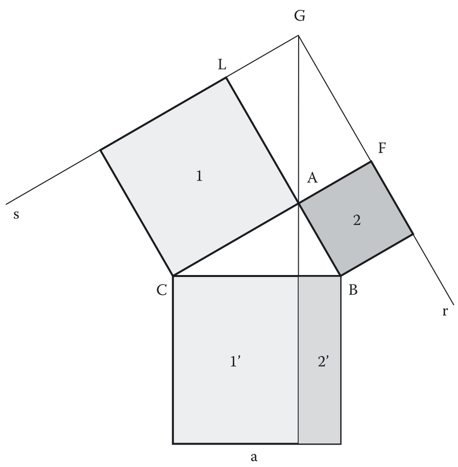


Figura 2

la exigencia de que los segmentos *LA* y *F*A sean o no perpendiculares a *AC* y *AB* nos resulta ahora una simple anécdota. El punto *G* permanece invariante si *L* y *F* se desplazan a lo largo de *r* y *s*, los paralelogramos *1* y *2* tienen también superficie constante, y la distancia *GA* es justamente la hipotenusa *CB*, de manera que el cuadrado construido sobre *BC* permanece fijo también. Otra cosa es que este caso “anecdótico” particular que hemos popularizado bajo el nombre de Teorema de Pitágoras —comprensible (y necesario) desde las exigencias inmediatas de tipo práctico de la vida cotidiana—, haya sido clave para el progreso humano. Las generalizaciones tienen estas cosas: producen placer intelectual, transportan al limbo del disfrute estético y abstracto, pero estos fríos lugares encierran menos significado vital que el punto anterior de partida.

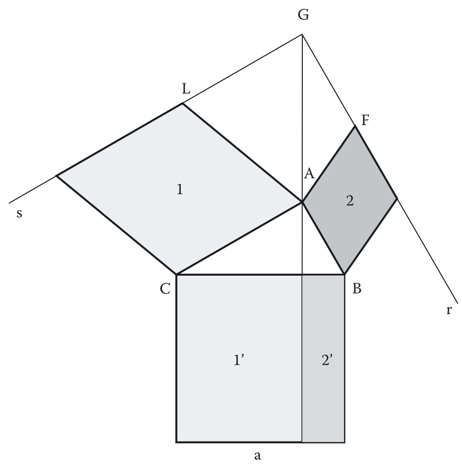


Figura 3

Lakatos, en *Pruebas y refutaciones*, teatraliza el proceso que conduce desde la conjetura ingenua[1] de Descartes para los

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fesp.org

vértices, caras y aristas de un poliedro (C+V = A+2) hasta la siguiente formulación de la conjetura:

> Si los espacios circuito y los espacios limitantes coinciden, el número de dimensiones del espacio 0-cadena menos el número de dimensiones del espacio 1-cadena más el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2.

convertida en un resultado sobre “un determinado conjunto de espacios vectoriales multidimensionales”. Uno de los apartados de la obra tiene como título *La extensión ilimitada de conceptos destruye el significado y la verdad.* Desde luego, no es éste todavía el caso de la generalización de Pappus; recordamos la frase como apoyo —quizás demasiado fuerte— a nuestra afirmación sobre la pérdida de carga vital en Pappus.

Podemos buscar situaciones extremas a las que llegar partiendo del viejo kou-ku. En la geometría de Lobachevski toma esta forma:

$$2\left(e^{a/k}+e^{-a/k}\right)=\left(e^{b/k}+e^{-b/k}\right)\left(e^{c/k}+e^{-c/k}\right)$$

Si desarrollamos en serie los dos términos, se obtiene:

$$a^2+\frac{a^4}{12k^2}+\ldots=b^2+c^2+\frac{\left(b^4+2b^2c^2+c^4\right)^4}{12k^2}$$

lo que nos permite observar que si el parámetro k→ ∞ el espacio tiende a ser euclidiano.

¿Y el recíproco?

Decíamos que hay cosas que casi nunca se hacen (en las aulas) y entre ellas colocábamos los procesos de generalización. En lo que se refiere al teorema kou-ku hay otra cosa que sorprendentemente no se hace: demostrar el recíproco. Todas las pruebas y las generalizaciones que hemos visto parten de la exigencia de un ángulo recto en el triángulo para llegar desde ahí a la igualdad de áreas. Es chocante que un gremio como el nuestro, que conserva entre sus glorias empolvadas la preocupación obsesiva por el rigor, no se plantee demostrar la situación recíproca aunque haga uso sistemático de ella. Pero lo cierto es que no es fácil encontrar demostraciones en sentido inverso. Las seis que recoge Nelsen (2001) van del triángulo a la fórmula, así como las 43 de la página web de A. Bogomolny que citamos en el primer artículo[2]. Es fácil, desde luego, realizar un proceso circular: *teorema de la altura → Pitágoras → teorema del cateto → teorema de la altura,* o comprobar la relación *si y sólo si* cuando el teorema está formulado en formato vectorial, pero ello no evita cierta insatisfacción. ¡Alguno de los innumerables puzzles, o la relación entre áreas de la demostración de Euclides deberían permitir realizar el proceso inverso!

Pues bien: volvamos a Euclides. Lo criticamos en el primer artículo como escritor poco ágil, pero no hay nada que objetar a su solicitud por el rigor. La proposición 47 del libro I demuestra el teorema en el sentido “habitual” y la número 48 se ocupa del recíproco. Cuando se lee su argumentación sorprende lo fácil que puede resultar superar la incomodidad gráfica de suponer un triángulo que en principio no tiene por qué ser rectángulo. Para eso está la Lógica, claro, y el dibujo de Euclides, austero como todos lo suyos, nos muestra un triángulo rectángulo que no podemos aceptar como tal al principio de la demostración. Nosotros la ilustraremos con uno cualquiera.

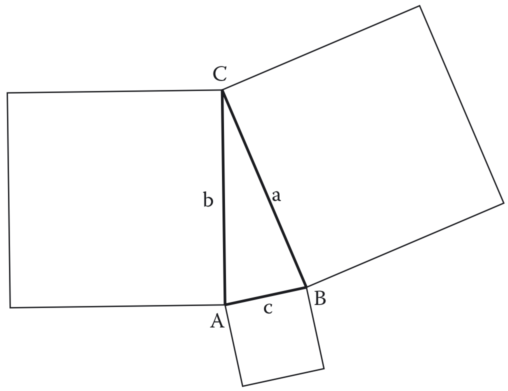


Figura 4

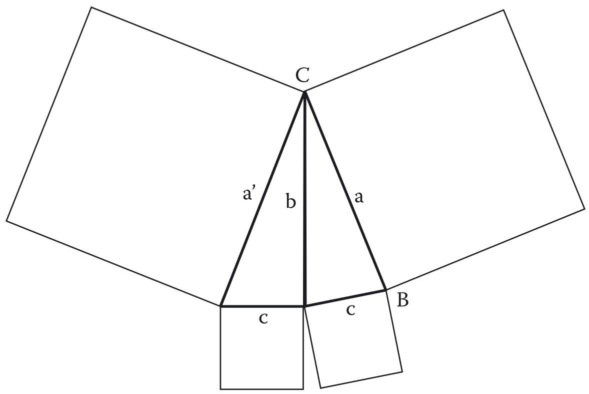


Figura 5

Supongamos en la fig. 4 que $a^2=b^2+c^2$. Construimos ahora un triángulo de lados *a’*, *b* y *c*, rectángulo en *A* (fig. 5). Por supuesto, $a'^2=b^2+c^2$, de donde *a’* = *a*. Los dos triángulos son, por tanto, iguales, lo que quiere decir que el primer triángulo *ABC* también era rectángulo.

Proclo[3] (s. V) alabó la actitud matemática de Euclides:

> Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento. Por mi parte, aunque admiro a los que conocieron primero la verdad de este teorema, más me maravilla el autor de los *Elementos*, no sólo por establecerlo mediante una clara demostración, sino por haber sentado en el libro sexto una proposición[4] aún más general con las pruebas incontestables de la ciencia.

Es, ciertamente, una actitud moderna, pero —si se nos permite una broma fácil— quizás no sea tan moderno ese uso anti-intuitivo de la Lógica desde que aparecieron los ordenadores. Volvamos al principio de esta serie de cuatro artículos, al puzzle que atribuimos a Dudeney pero que resultó ser de Perigal[5], y ayudados por CABRI analicemos una situación equivalente a la del recíproco: s*i el triángulo no es rectángulo, entonces no se cumple* $a^2=b^2+c^2$.

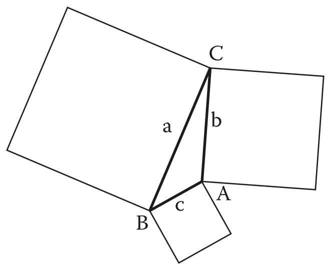


Figura 6

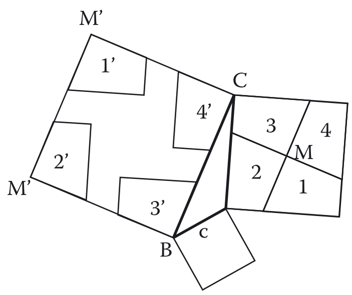


Figura 7

Dibujamos, por ejemplo, un triángulo obtusángulo, y marcamos en él los cuadrados sobre sus lados (fig. 6). En el puzzle de Perigal se trazaban por el punto central del cuadrado del cateto medio segmentos paralelos a los lados del cuadrado de la hipotenusa. Actuando de forma análoga (fig. 7), aparecen los cuadriláteros *1*, *2*, *3* y *4*. Los trasladamos ahora al interior del cuadrado grande de forma que los cuatro ángulos rectos en el punto M se sitúen en los vértices (puntos *M'*, *B* y *C*). Aparece así (fig. 8) un cuadrado interior congruente al del lado *c*, y queda claro que, en este caso, $a^2>b^2+c^2$. ¿Cuándo podremos colocar un igual en esta expresión? Experimentalmente se observa (fig. 9) que para ello debemos acercarnos al caso en que A=90º.

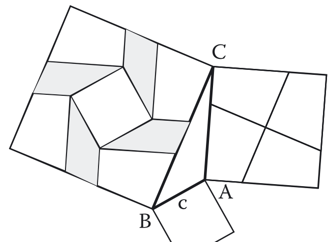


Figura 8

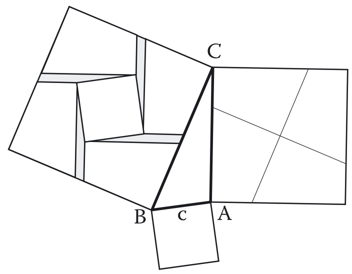


Figura 9

Como ya nos extendimos en exceso con el puzzle de Perigal, evitamos ahora analizar a fondo esta variante. Sólo resaltaremos, de nuevo, que las cuatro zonas de color gris deben sumar $-2cb\cos A$. Y, efectivamente, así es. Traslademos una de ellas al vértice *B* (fig. 10) para calcular su superficie. Obsérvese (fig. 11) que se trata de un trapecio cuya altura $AP=c\cos(\pi-A)=-c\cos A$, y que la suma de las dos bases $BR+AQ$ es justamente el lado *b* del triángulo. Así pues, el área de cada uno de ellos será $-1/2\ cb\cos A$.

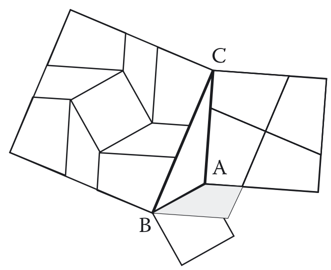


Figura 10

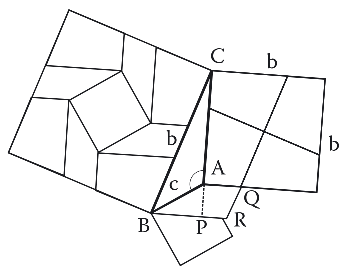


Figura11

¿Quién es Enzo R. Gentile?

A saber. En www.riconmatematico.com podéis bajaros un *tango del algebrista* del amigo Gentile. No lo hemos encontrado en un paseo al azar por la red. Ocurre que Roger B. Nelsen (2001) recoge un “teorema pitagórico” de una tal Gentile, sin dar ninguna referencia sobre él. El buscador nos llevó a la página del rincón, pero allí sólo encontramos el tango. Da lo mismo. Sea o no el tanguista el inventor del teorema, éste es muy atractivo. A fin de cuentas, si un presidente de USA se ocupó en demostrar el *kou-ku,* ¿por qué no va a ocuparse también de estas cosas un tanguista argentino[6]?

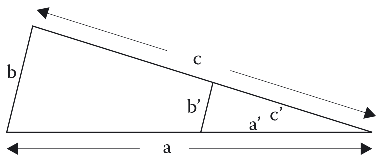


Figura 12

Coloca Gentile dos triángulos rectángulos semejantes en posición de Tales (fig. 12), y afirma: *aa’=bb’+cc’*. Nelsen lo prueba a partir de esa semejanza. Y si Gentile es cierto, tomando como razón de semejanza 1, resulta Pitágoras. Nosotros construiremos una figura para el recíproco: construimos rectángulos sobre los lados del triángulo grande de manera que el otro lado de cada uno sea su correspondiente del triángulo pequeño (fig. 13). Obtenemos así tres rectángulos semejantes y, si Pitágoras es cierto, entonces se debe dar la relación entre áreas *aa’=bb’+cc’*.

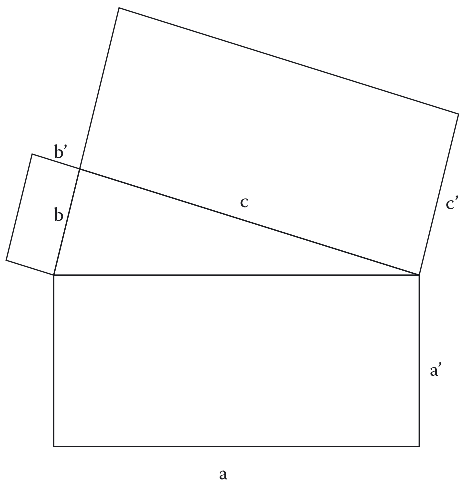


Figura 13

Gentile es, por tanto, equivalente a Pitágoras: caracteriza también a los triángulos rectángulos.

Epílogo

¿Existió realmente Pitágoras? Parece que sí. Desde luego –y esto es más importante– existió la secta de los pitagóricos, entre cuyas convicciones estaba la de la armonía numérica del universo[7]. Y ha existido siempre, y seguirá existiendo, una dosis de pitagorismo ingenuo metodológico como motor de la investigación matemática. Aunque el investigador o investigadora no lo acepte como filosofía personal, lo cierto es que su proceso de búsqueda sólo es vitalmente sostenible si tiene fe en que al final del camino encontrará algo; que será posible poner orden —armonía— en el caos inicial de observaciones. La misma fe que impulsó a todas las civilizaciones de la Antigüedad a ocuparse de la curiosa relación numérica que observaban en los triángulos rectángulos y que los chinos denominaron *Teorema kou-ku*.

Nota

Sería imperdonable terminar esta serie de artículos sin recomendar el de Miquel Albertí en el número 43 de *SUMA*, en el que hace una bonita demostración del teorema de Pitágoras a partir de una situación geométrica muy poco habitual: dos circunferencias concéntricas. ■

NOTAS

1 “Ingenua” en el sentido de Lakatos. Ingenua, metodológicamente, si está sustentada en unas pocas observaciones. Una conjetura puede ser ingenua y perspicaz al mismo tiempo.

2 www.cut-th-knot.org/pythagoras/index.shtml

3 Citado a pie de página por Mª Luisa Puertas Castaño, traductora de Elementos en la edición de Ed. Gredos (1991).

4 La proposición a la que se refiere es la número 31. En ella generaliza Euclides el teorema para figuras semejantes construidas sobre los catetos y la hipotenusa.

5 Mientras nosotros buscábamos datos sobre Henry Perigal, los colegas del grupo Alburquerque ya le habían atribuido el puzzle (SUMA n.º 43). Queda claro, por tanto, que leemos SUMA con retraso.

6 Suponemos, claro, que es, o que fue, argentino. La demostración del presidente Garfield (1876) puede verse en el libro de Nelsen. Por cierto, ¿sois capaces de imaginar a Bush ocupándose de estas cosas?

7 Olañeta acaba de publicar en un pequeño librito (Versos áureos de Pitágoras y otros fragmentos pitagóricos) los escritos más fidedignos que recogen el corpus ideológico ético–místico de la secta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EUCLIDES (1991, 94 y 96): *Elementos*. (Tres tomos) Ed. Gredos. Madrid.

NELSEN, Roger B. (2001): *Demostraciones sin palabras*. Proyecto Sur. Granada.

LAKATOS, I. (1986): *Pruebas y refutaciones.* Alianza Universidad. Madrid.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 67-70

Rompecabezas africano

Aspectos lúdicos de la Topología

Cuando se nombra la palabra Topología, o no se ha oído nunca o suele pensarse en una parte complicada de la matemática, sólo al alcance de aquellos que hayan profundizado bastante en sus estudios matemáticos. Sin embargo, hay aspectos topológicos elementales a los que podemos acercarnos desde edades muy tempranas.

Dado que la Topología es una geometría (de hecho recibe el nombre de Geometría de la Posición) que no tiene interés en la medida, sino solamente en la forma y en cómo ésta puede variar sin provocar roturas (cortes, ni aparición de agujeros), hay elementos de esta disciplina que aparecen antes que el concepto de medida. Aspectos como dentro o fuera, formas equivalentes, conexiones entre agujeros, caminos dentro de laberintos, etc., se pueden abordar en la infancia.

Algunos de los primeros juegos infantiles tienen relación con elementos topológicos. Por ejemplo, es frecuente en los primeros años de aprendizaje jugar con estructuras de madera llenas de agujeros por donde los infantes deben hacer pasar una cuerda que está anudada en un extremo; y en casi todos los niños se produce una gran fascinación por la plastilina y la transformación por deformación de unas figuras en otras.

Por su atractivo lúdico, muchos problemas topológicos aparecen en acertijos, pasatiempos...

Dado su atractivo lúdico, muchos problemas topológicos aparecen en acertijos, rompecabezas y pasatiempos, siendo excelentes pruebas para cualquier competición que podamos plantear a nuestros alumnos. Además hay problemas clásicos como los puentes de Königsberg, el de los cuatro colores, la Cinta de Möbius, la conexión entre casas y distribuidores energéticos, etc. que han fascinado durante décadas a los matemáticos o aficionados. Los profesores J. L. Carlavilla y G. Fernández hicieron una presentación de todos estos aspectos y muchos más de una forma amena y apasionante en un libro de obligada lectura (Carlavilla y Fernández, 1994).

Juegos y rompecabezas topológicos

Podemos encontrar multitud de juegos con connotaciones topológicas sin saber que estamos relacionándonos con esa materia. Muchos retos o incluso trucos de magia consisten en deshacer situaciones donde aparecen elementos unidos por cuerdas que a simple vista parecen imposibles (Muñoz, 2003).

En general, consideraremos como rompecabezas topológicos aquellos formados por cuerdas, maderas, anillas, bolas, alambres, etc., donde una situación, a simple vista irresoluble, puede resolverse mediante traslación de sus elementos, sin romper, rasgar o modificar la estructura topológica del juego.

Un estudio muy sistemático e interesante de los laberintos de alambre y de su implicación en la enseñanza puede encontrarse en el artículo publicado por nuestro compañero y amigo Pablo Flores Martínez en el n.º 41 de esta misma revista SUMA (Flores Martínez, 2002).

Desde el punto de vista matemático, los juegos topológicos potencian aspectos como la intuición, la visión espacial, el estudio sistemático de posibilidades, la búsqueda de soluciones imaginativas, la esquematización de los problemas y muchos más.

Un rompecabezas topológico tiene bastante relación con un problema de matemáticas. No solamente porque con frecuencia al enfrentarnos a ellos nos quedamos bloqueados al

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

no saber cómo comenzar, sino porque existen muchos procedimientos de la resolución de problemas que se aplican para resolver el reto que nos plantea el rompecabezas. Entre otros, podemos citar los siguientes heurísticos:

- Buscar un problema semejante. Muchos rompecabezas topológicos tienen estructuras de resolución muy parecidas. Por ello, al enfrentarnos a uno nuevo debemos ver si sirven o no las estrategias de resolución que conozcamos de casos similares.

- Empezar por lo más fácil. Si el rompecabezas tiene distintos retos, se debe comenzar por solucionar lo que a simple vista sea más fácil.

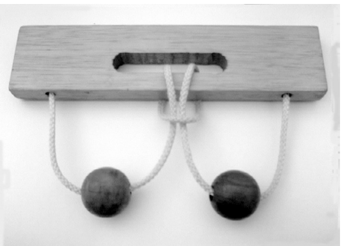
- Dividir el problema en partes. Para empezar por lo más sencillo debemos, si es posible, descomponer el rompecabezas en varias partes, que iremos resolviendo de forma independiente.

- Considerar el problema resuelto. A veces desandar el camino es más fácil que hacerlo. Podemos suponer que el rompecabezas está resuelto e intentar razonar, de atrás adelante, los pasos necesarios para la resolución.

- Realizar un esquema. En muchas ocasiones es fundamental realizar un esquema de la situación en que nos encontramos. Ayuda en la resolución y potencia la visión espacial.

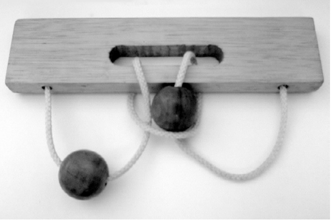
Rompecabezas africano de cuerda

Es, quizá, el puzzle de cuerda más famoso y que podemos encontrar con más facilidad en comercios, internet o incluso como regalo publicitario de algunas empresas. Se considera originario de las tribus guineanas, aunque está bastante extendido. En Estados Unidos se conoce como puzzle del yugo del buey.

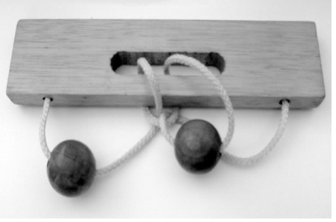


Como podemos ver por la imagen, consta de un trozo de madera donde se han realizado tres agujeros por los que se anuda una cuerda que se cruza formando dos lazos. El agujero importante es el central, pues los orificios de los extremos sólo sirven para sujetar la cuerda y que no quede libre (en algunos ejemplares comercializados, la cuerda en sus extremos se incrusta dentro de la madera y sólo tienen el hueco central). En cada lazo aparece una bola, cuya dimensión no le permite pasar por ninguno de los agujeros de la madera. El objetivo del juego es conseguir colocar las dos bolas en el mismo lazo. Como en todos los rompecabezas de este tipo, es necesario llegar a la solución sin deshacer los nudos que puedan estar a la vista ni romper ninguno de los elementos que forman el juego.

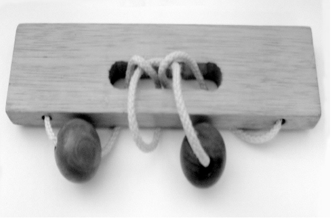
La resolución de este rompecabezas es bastante complicada para quien no la conozca, pues existe un cruce de cuerdas a través de los orificios de la madera que no es fácil de imaginar, ni siquiera al manipular el juego. Por ello detallamos los pasos de resolución de este problema.



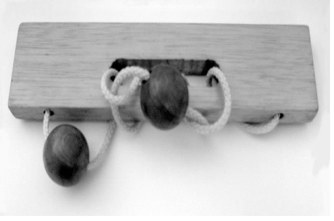
Paso 1



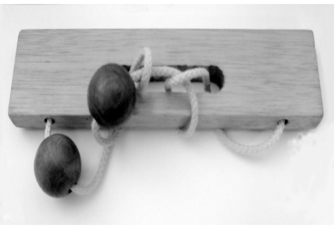
Paso 2



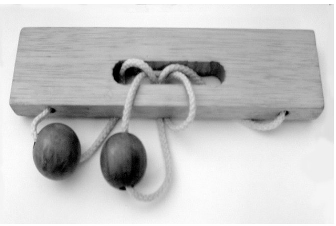
Paso 3



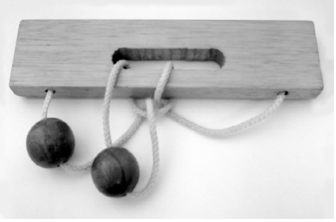
Paso 4



Paso 5

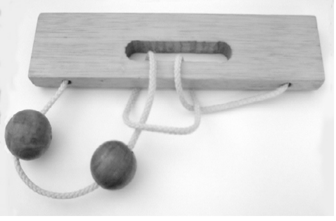


Paso 6



Paso 7

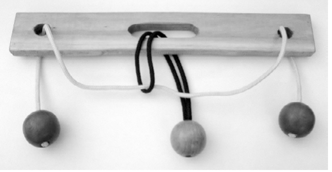
Paso 8



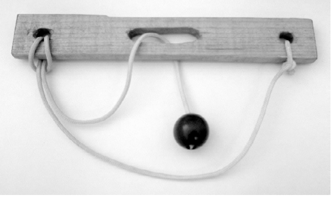
Puzzle resuelto

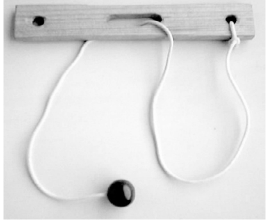
Una vez presentado el modelo clásico, veamos algunas variaciones, que a simple vista parecen similares, pero cuya resolución sigue un proceso distinto, y en general más simple que el caso anterior.

En los dos siguientes, el objetivo es extraer la anilla o la cuerda con la bola grande que se encuentra en el centro.

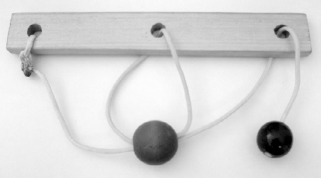


Este otro puzzle tiene como objetivo deshacer el cruce de cuerdas que aparece en la parte izquierda del juego, debiendo quedar el rompecabezas como aparece en la otra imagen.



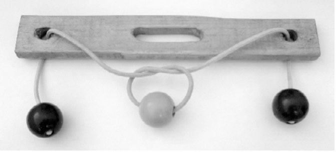


El objetivo del siguiente rompecabezas es extraer la bola central.

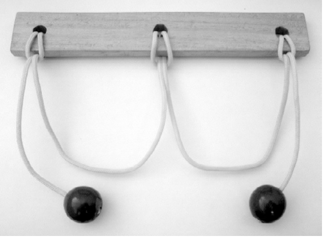


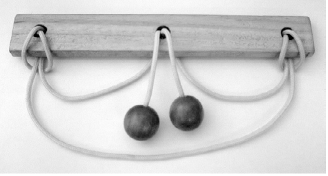
El rompecabezas que mostramos a continuación tiene un truco en su construcción. Mientras en los demás los cruces y uniones están a la vista, en este caso existe un lazo que queda oculto dentro de la bola grande y es el que permite resolver el problema. Es necesario que dentro de la bola se encuentre la disposición que vemos en la imagen.

En el siguiente modelo, debemos deshacer el cruce que aparece sobre la bola central.



Por último presentamos dos puzzles cuyo objetivo es extraer completamente la cuerda de la madera.





Estos dos últimos requieren mayor esfuerzo para poderlos resolver, pero la idea básica de manipulación es la misma que en los anteriores.

Aplicación didáctica

Ya hemos planteado anteriormente algunas de las relaciones existentes entre los rompecabezas topológicos y la resolución de problemas. Existen además otras posibilidades de aprovechamiento didáctico de estos juegos.

La primera es su construcción. Todos son más fáciles de construir que de resolver. Por ello los alumnos pueden hacerlo sin dificultad. Puede usarse, como hemos visto en las fotografías, material fácilmente asequible o de reciclado. Cualquier listón de madera sirve. Las bolas pueden ser las de los respaldos frescos de los coches (que se encuentran con facilidad en los mercadillos), otros tipos de bolas (de collares viejos de fantasía) o cualquier anilla o elemento que pueda circular por las cuerdas y que no quepa por los agujeros que realicemos. Se trata de un ejemplo práctico de bricolaje matemático.

Para su construcción se deben estudiar las medidas de la cuerda para que permitan los lazos y cruces que hay que realizar; así como el tamaño de los agujeros que, en el central, debe permitir pasar varias cuerdas a la vez.

Cuando se aborda la resolución de estos rompecabezas, y en general de todos los manipulativos, es inevitable un periodo de tiempo de manejo del juego sin más reflexiones. Casi nunca servirá para resolver el problema, pero sí para conocer las limitaciones y vueltas al punto de partida que se producen. Por ello es aconsejable plantearse mentalmente por dónde podría ir la solución.

También es interesante, para potenciar la visión espacial y realzar la capacidad de esquematizar los problemas de los alumnos, que dibujen el problema planteado y los pasos de la resolución, lo que además favorece las capacidades de representación gráfica.

Hay que tener cuidado al manipular los rompecabezas pues suelen surgir dos problemas. Por un lado no es raro que, de pronto, nos encontremos con el problema resuelto sin saber cómo hemos llegado a él, con lo cual tenemos otro problema, y es reconstruir el juego sin conocer los pasos que hemos seguido, lo que muchas veces es más complicado aún (de lo que podemos dar fe). Otra dificultad es que se líe tanto la cuerda que llegue un momento en que quede irreconocible la situación inicial. En ese caso, si es posible (que no siempre lo es), debemos volver a las condiciones iniciales. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARLAVILLA, J. L. y FERNÁNDEZ, G. (1994): *Aventuras topológicas*, Rubes Editorial, Barcelona.

FLORES MARTÍNEZ, P. (2002): "Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas)", *SUMA*, n.º 41, 29-35.

MUÑOZ SANTONJA, J. (2003): *Ernesto, el aprendiz de matemago*, Nivola, Madrid.

ZHANG, W. (1996): *Exploring Math Through Puzzles*, Berkeley, Key Curriculum Press.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 71-78

iMÁTgenes 10, 11 y 12

Fue el último en poseerla quien, instantes antes de perderla para siempre y movido por una presunción ya del todo instintiva, bautizó la ciudad con el nombre de Memoria grafiando esa palabra en las fachadas de las avenidas. Presumió que en un futuro, muy lejano quizá pero alcanzable, y a pesar de los trazos ya inseguros de su escritura afectada, alguien podría leerla y recobrar la lucidez.

Se desconoce el cataclismo que acabó con la facultad de recordar de sus habitantes porque, claro, nadie recuerda. No saben si habitan la ciudad donde nacieron. Ni si los pasos azarosos con los que deambulan por sus calles son afines a la idea de comunidad. Ni siquiera saben que viven porque es la memoria la que, apoyándose en el recuerdo conocido, el pasado, induce lo desconocido, el futuro, y así, en el breve intervalo mediante, un lapso infinitesimal, brota el presente de idilio puro. Sin recuerdo no hay pensamiento. Sin pensamiento se puede existir, pero no se vive.

Quien visitaba Memoria no podía entablar diálogo alguno con su gente. Habían olvidado todo lenguaje y cortesía y ante los ojos del extranjero se comportaban como primitivos sordomudos, seres incompletos a medio camino entre la piedra y el animal. Aunque repletas de transeúntes, el silencio reinante en las calles provocaba tal desánimo en el forastero que nada más llegar buscaba la salida. Nadie soportaba permanecer allí más de un par de horas.

Durante siglos los filósofos consideraron Memoria como paradigma de la felicidad nihilista al mismo tiempo que muchos creyentes vieron en ella una representación de la tierra prometida. Al principio, los debates sobre el caso ocuparon a toda la masa intelectual, no sólo la de los países vecinos, pero con el tiempo Memoria cayó en el olvido y pasó a disfrutar del anonimato existencial propio de sus ciudadanos. Olvidada por todos, ¿había una Memoria todavía? ¿Vivían aún los memorienses? Y de ser así, ¿eran felices?

En los pueblos cinematográficos tarde o temprano algo acaba por interrumpir el plácido y continuo transcurso de la monotonía. Lo mismo ocurrió en Memoria. Incluso allí se produjo un clic, una interrupción por la que el tiempo se vio obligado a enfilar una dimensión divergente para siempre con la seguida hasta ese instante.

Que fuera uno o una carece de importancia porque hoy en día nadie en Memoria (por cierto, ya no se llama así, pero de eso hablaré más adelante) se acuerda (aunque esa falta de memoria no es ahora síntoma de ninguna enfermedad) del sexo del fundador de las bases para la recuperación. El caso es que según la leyenda actuó como el simio protagonista de la célebre odisea cinematográfica de ficción científica. Lo que hizo fue darse cuenta, o sea, contar. Y contó. O habló. La cosa no está muy clara porque las discusiones entre lingüistas y matemáticos no han terminado aún. Los primeros sostienen que sin palabra no hay número, pues éste necesita de la llamada por ellos vocal muda para ser concebido. Los otros defienden la idea de una correspondencia de cantidad entre el objeto y el observador como impulso generador del concepto original que es la unidad.

Sea como fuere su inicio, los números naturales fueron reconstruidos uno por uno, palabra por palabra. De generación en generación y de modo más o menos autodidacta creció el número de memorienses capaces de asimilar esta nueva idea de contar y darse cuenta. Si bien añadir a este campo los números negativos supuso una espera de muchos años y provoca aún entre filósofos y matemáticos grandes discusiones: ¿Fue la aparición de los números negativos efecto del recuerdo, una consecuencia directa de la recuperación de la memoria, o más bien fue la concepción de los números negativos la que indujo el recuerdo y, por ende, el concepto de pasado?

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

Con el pasado se fraguó su reflejo, el futuro, y entre ambos medió de nuevo un presente infinitesimal. Mas éste sería un presente diferente de cualquier otro que en el pasado le hubiera precedido. Y así fue que el pueblo de Memoria, ignorante hasta entonces de su nombre y de sí mismo, ignorante de su historia y de que antes se hubiera llamado de otra forma se puso el nombre de Numeria. A fin de cuentas, su gente no distinguía entre números y palabras, para ellos eran una misma cosa y vivían de acuerdo a lo que yo, observador ajeno, describiría así: 'tanto al dictado del número como al de la palabra', y que para ellos no tiene sentido distinguir por tratarse de la misma cosa.

Con la memoria adviene la razón. Se entenderá que pronto (un pronto científico) se crearan o descubrieran (también con eso hay disputas entre ya no sé quienes) los números racionales. Y los irracionales. Curiosamente éstos fueron muy bien acogidos a pesar de poseer la que nosotros y los griegos llamamos inconmensurabilidad. Fue esa inconmensurabilidad, su carácter imprevisible e inescrutable al cien por cien, lo que les abrió las puertas de la ciudad. Los racionales aburrían a los numerios. Una vez calculado el desarrollo decimal de una fracción se acaba el misterio. Todas las cifras que la forman, o son unas pocas, o se repiten tediosamente hasta el infinito. Pero los irracionales, ¡ah, los irracionales!, esto es otro contar. De ellos cuesta decidir (cuando hay algún método o algoritmo que lo permite) qué cifra ocupa un determinado lugar. Su desarrollo decimal oculta a menudo enigmas extraordinarios que a los numerios encanta descifrar. Hallan en estos números lo imprevisto, la sorpresa. En ellos el presente conocido persigue sin descanso un futuro incierto, unas veces previsible, otras inalcanzable e indecible, pero al menos entrañan un futuro por desvelar: la vida.

Ayer corrió un rumor por las calles de Numeria. Un rumor movido por la brisa del recelo y el temor. Un nuevo alumbramiento se ha producido y sus mentores temen hacerlo público después de ver las reacciones suscitadas en sus colegas. Algunos no encuentran en su vocabulario elogios apropiados para calificar tan antológico logro del entendimiento humano y lo califican de increíble maravilla. Otros en cambio, arremeten contra él y el equipo que lo ha alumbrado llegándolos a tachar de farsa y de farsantes. El señor K, jefe del comité investigador y quien prevé de él utilidades y aplicaciones futuras insospechadas y difícil de vislumbrar y valorar en el presente, lo ha bautizado con el nombre de **i**, *la inicial de imaginario. Los partidarios de que la investigación no se interrumpa a causa de los prejuicios más conservadores animan al equipo a seguir adelante con sus pesquisas. Ven en la nueva* **i***nvención la posibilidad real de sal***i***r más allá de los límites que encierran la ciudad, de v***i***ajar a zonas remotas y desconocidas hasta ahora y de redimirse por fin de la timidez que a lo largo de los siglos ha calado tan profundamente su forma de ser. En suma, anhelan conjugar el verbo más breve de su vocabulario:* **i***r.*

El carácter natural, racional o irracional de un número es muy importante. La iMATgen virtual (iMATgen nº. 7) trataba de espejos encarados que reflejan un punto intermedio. Precisamente es el carácter numérico del ángulo que forman los dos espejos el que determina como son las cosas, al menos en el ámbito geométrico. Así, para espejos formando un ángulos que sea múltiplo racional de p la serie de reflejos es un itinerario cerrado que regresa al punto original. De lo contrario, la serie de reflejos no se cierra nunca. No podemos verlo en una peluquería porque la realidad física lo impide.

En ***¡Llévate un kilo por lo menos, reina!*** (iMATgen nº. 8) parecía que el carácter entero o decimal del peso de un producto determinaba el importe a pagar por él. Sin embargo, la realidad impuso de nuevo su dominio. El precio escrito en la cartulina omitía la expresión 'a partir de', causante de la interpretación inadecuada del matemático.

Pero si hay un número que se use a diario y cuyo carácter irracional sea el que determina la forma en la que se concreta, es la raíz cuadrada de dos. Lo encontramos en las hojas de los cuadernos de clase, en los formatos de algunos libros de texto y en el papel de impresión. La raíz de dos determina el formato DIN A.

Los estudiantes se sorprenden de que las hojas en las que han escrito, dibujado y tomado apuntes a lo largo de toda su vida académica tengan unas dimensiones basadas en una proporción irracional. La idea que genera el formato DIN A consiste en establecer las dimensiones de un rectángulo que al ser cortado por la mitad de su lado mayor proporcione dos nuevos rectángulos idénticos y semejantes al original. Si éste tiene longitud a y anchura b, cada mitad tendrá longitud b y anchura $a/2$. El original y sus mitades serán semejantes si $a/b=b/(a/2)$, o sea, si $a/b=\sqrt{2}$. Como consecuencia, la proporción entre la diagonal y el lado menor es $\sqrt{3}$.

La realidad impide que los valores verdaderos sean exactos. Por eso los formatos de papel DIN A son rectángulos cuyas dimensiones determinan proporciones cercanas a 1,4142... La hoja más utilizada, DIN A4, tiene 297mm de largo por 210mm de ancho, lo que da un cociente de 1,4142857... Sus dimensiones son esas y no otras (también otros valores producirían el mismo cociente) porque el rectángulo original de partida tiene un metro cuadrado de superficie. La solución del sistema de ecuaciones de este modo se plantea fija las dimensiones del rectángulo inicial o DIN A0:

$$\begin{cases} a\cdot b=1 \\ \dfrac{a}{b}=\sqrt{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=\sqrt[4]{2}=1{,}189 \\ b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}=0{,}841 \end{cases}$$

Como puedes comprobar, no es este el formato de la revista que estás leyendo ahora. ■

iMATgen 10

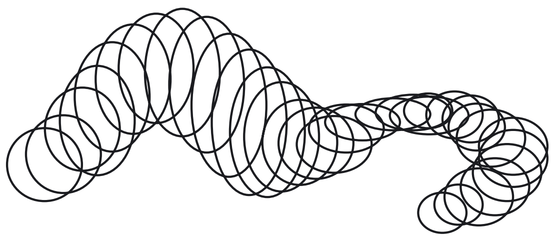
La introducción a estas tres iMÁTgenes comenzaba con el grafiado de una palabra en las fachadas de las avenidas de la ciudad del olvido. El relato es fantástico, pero no lo son los elementos que lo fundamentan: la memoria y la escritura. Esta fotografía tampoco es fantástica. Alguien aerografió esa pared con color rosa que aquí se verá gris. Es ese alguien, autor o autora, quien da a la imagen el realismo que posee. Y no sólo ese o esa, también nuestra memoria. Viendo este autógrafo nos acordamos de cuántas veces hemos visto (y quizá maldecido) otros similares en las fachadas de las casas de nuestra ciudad, de nuestro barrio y de nuestra propia casa.

Impregnar las paredes es una actividad que se remonta a los orígenes de nuestra cultura. Decenas de miles de años después de Altamira nos encontramos con la corriente artística de los graffiti. Su cuna está en Estados Unidos, allá por la década de los años ochenta. No es que en Europa no se hicieran, ya los había desde mucho antes en España, Irlanda del Norte y en el muro de Berlín, pero su carácter era reivindicativo y carecían del sentido artístico que adquirieron después. Originalmente se realizaban autógrafos o firmas personales. Había que trabajar rápido y realizar la obra en un pis pas. Hasta que diversos espacios públicos y privados no fueron puestos a disposición de los artistas no había tiempo para hacer mucho más que una firma. Hoy en día, al disponer de lugares autorizados, los artistas tienen el tiempo necesario para realizar ingentes obras de arte, cada una con su rúbrica particular que la identifica. Pese a ello no ha desaparecido el interés por aerografía paredes vírgenes. Un reto para adolescentes que pagan los vecinos. Algo parecido sucede con las mesas de un aula.

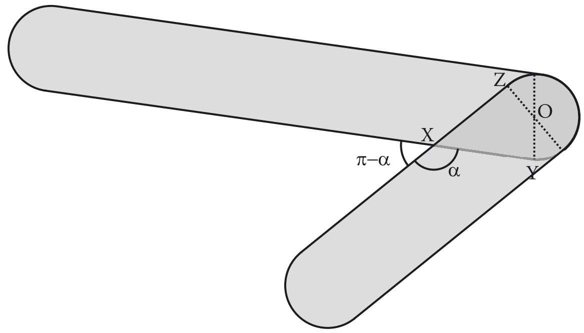
Los graffiti se realizan, en su mayoría, con spray o aerógrafo. Hace falta gran maestría para lograr que el resultado muestra un trazo seguro sin regueros de tinta. El goteo es el principal problema que debe vencer el principiante, ya que el trabajo se realiza en planos verticales y a mano alzada. En el aspecto del trazo influyen muchos factores, como por ejemplo el tipo de boquilla por la que sale el chorro de tinta, la textura de ésta, la distancia desde la que se aplica el spray y el ángulo con el que éste se dirige a la pared.

El graffiti de esta imagen no presenta regueros de tinta. Su trazo es bastante uniforme y seguro. Pero hay algo que llama la atención y que resulta fundamental para comprender esta imagen. No me refiero al significado verbal de lo escrito, sino a un rasgo de forma cuyo carácter reside en el ámbito geométrico. Se observan arcos curvilíneos que indican un cambio de dirección suave y paulatino, pero también hay cambios de dirección bruscos y repentinos, en zigzag. En la parte interior de esos zigzag aparecen picos, mientras que la parte exterior es redondeada. Además, en cada zigzag hay una sobrecarga de tinta en comparación con cualquier otra parte o fragmento del graffiti. ¿Cómo se explica esto? He aquí la iMATgen.

El spray tradicional tiene un orificio por el que se expulsa la tinta en forma de ángulo sólido, un cono relleno de color. La intersección de este cono con la pared sólo es perfectamente circular si su eje se mantiene ortogonal a ella. De lo contrario la intersección será una elipse (siempre y cuando este ángulo no sea exageradamente grande, en cuyo caso podría llegar a ser una parábola e incluso una hipérbola). Pero lo corriente es que el ángulo entre el eje del cono de expulsión de la tinta y la pared sea muy similar a un ángulo recto. Si el artista mantiene inclinado siempre el spray con el mismo ángulo y únicamente lo cambia de posición en un plano vertical paralelo a la pared, el vestigio aerografiado se crea círculo a círculo (eje ortogonal) o elipse a elipse (eje no exactamente ortogonal). El grosor del vestigio depende de la distancia a la pared desde la que se efectúa la aplicación y del movimiento de muñeca de su autor. Un resultado irregular podría ser:



Estudiemos ahora el motivo por el que en los cambios bruscos de dirección aparecen sobrecargas de tinta. Para facilitar la comprensión supongamos el caso del aerografiado circular. En un cambio de dirección brusco, el extremo del segmento o curva trazado actúa como pivote y se convierte en punto inicial del siguiente trazo. Aparece así una zona que la tinta impregna dos veces, una al entrar en la esquina, y la otra al salir de ella. Cuando se produce un cambio de dirección de ángulo α (en radianes), el vértice que se origina en el interior del giro es de π-α radianes:

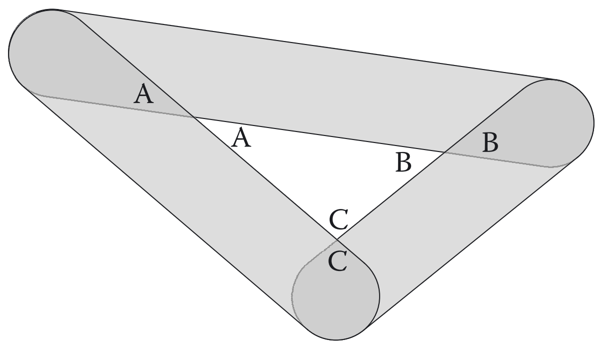


Siendo $2r$ el grosor del trazo (diámetro del caso circular uniforme) y siendo π-α el ángulo del vértice, el área de la zona A_s sobre coloreada es igual al área del cuadrilátero *XYOZ* más el área del sector circular *YOZ* cuyo ángulo es mayor de 180º en el dibujo anterior. El cuadrilátero *XYOZ* se forma con dos triángulos rectángulos idénticos cuyos catetos son r y r·tg(α/2). Por otro lado, el ángulo del sector circular *YOZ* es 2π-α y su radio r. Así las cosas:

$$A_s = r^2 \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \pi r^2 + r^2 \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Luego en un cambio de dirección siempre se sobre colorean el que llamaremos círculo de aerografiado, de área πr^2, y un fragmento puntiagudo cuya área depende de la mitad del giro efectuado. Si $\alpha=\pi$, el spray vuelve a pulverizar lo ya grafiado regresando sobre sus pasos y, además del círculo, lo sobre colorea todo ($A_s=\infty$).

Si se aerografía un triángulo, las tres zonas sobre coloreadas de los vértices formarán siempre el triángulo circunscrito al círculo de grafiado. En efecto, los ángulos de los vértices *A*, *B* y *C* del triángulo que el graffiti determina en el interior son los mismos que los de las tres zonas sobre coloreadas:



El perfil exterior de un zigzag aparece suave, sin pico, redondeado. Su perfil interior es agudo, afilado, puntiagudo. Así son los ***Zigzagueos en un graffiti*** y, si los miramos a través de la lupa, así son también los trazados con bolígrafo. ■

iMATgen 11

Gente, sobretodo críos, en una orilla. En el ángulo superior derecho una barcaza cargada de bicicletas, recién llegada o a punto de zarpar. En la esquina opuesta un par de mujeres vestidas con *saris*. Su atavío y el tono de la piel de los niños indican que la imagen fue tomada en el subcontinente indio, concretamente en las afueras de Varanasi, en la región de Uttar Pradesh. El agua es la del río más venerado del mundo, el Ganges. Sus aguas del color de la tierra a causa de las frecuentes y abundantes lluvias del monzón. Algunas niñas están ocupadas en una tarea que maridos, padres, hermanos e hijos establecen como propias de su género: el cuidado de la vajilla. Un cuidado que a primera vista parece dedicado a la limpieza, pero que una observación más atenta desmiente.

No es espuma, ni jabón, lo que recubre varios recipientes, sino barro, limo del río. A la derecha de la imagen una joven friega el lateral de un cuenco volcado. Lo hace echando su cuerpo encima de él y sujetándolo fuertemente con la mano izquierda. Ambos gestos dan una idea de la fuerza que dedica a sus acciones. Otra olla embadurnada de lodo, también boca abajo, espera a que la otra chica, ahora distraída, se aplique con ella. La faena no se realiza sólo por el exterior, también por dentro de los cacharros, como hace la mujer del sari blanco con un recipiente pequeño.

Aparte de los dos embadurnados de lodo, los cuencos de la fotografía están todos limpios. Y si nos fijamos más atentamente vemos que todos menos uno presentan un aspecto brillante, liso, sin apenas deformaciones, pulido. Sólo el que está detrás de la niña con la cabeza vuelta muestra abolladuras profundas. Este recipiente nos indica cuál es la labor de las jóvenes. Consiste en devolver a los cacharros un aspecto lo más parecido posible al que tenían de nuevos. Lo que hacen es limarlos, lijarlos, pulirlos, cosa que consiguen fregándolos con lodo. No sé si su intención era limpiarlos o pulirlos. Para saberlo habría que preguntárselo, pero para limpiarlos no les hacía falta ir al río. Sean cuales fueran sus intenciones, con o sin limpieza, los lijan y pulen.

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (1992), limar es *gastar o alisar los metales, la madera, etc. con la lima*. También es *debilitar, cercenar alguna cosa material o inmaterial*. Lijar es *alisar, pulir o limpiar una cosa con lija o papel de lija*. La lija es un pez cuya piel seca, *por la dureza de sus granillos, se emplea para limpiar y pulir metales y maderas*. El papel de lija es un *papel con polvos o arenillas de vidrio o esmeril adheridos, que sirve para pulir maderas o metales*. En su primera acepción, pulir es *alisar o dar tersura y lustre a algo*, pero en su segunda acepción es *componer, alisar o perfeccionar algo, dándole la última mano para su mayor primor y adorno*. Una superficie lisa es aquella *que no presenta asperezas, adornos, realces o arrugas*, pero no es lo mismo que una superficie llana. Lijar, limar y pulir desgastan la materia a la que se aplican, pero esa erosión es más ostensible y visible al lijar y limar. En cambio, el desgaste al pulir es más delicado, microscópico. Limar y lijar afectan a la forma de una cosa, la alteran, mientras que el pulimento tan solo la suaviza y redondea afectando más al acabado.

Así se plantean las dos cuestiones que dan lugar a la iMATgen. Un modo de lijar una superficie es fregarla con barro, poco a poco, zona a zona, frotando a mano en vaivén o dando vueltas alrededor de un punto. Esos movimientos provocan la fricción entre la arenilla del lodo y la superficie del objeto frotado. Éste se erosiona y dicha erosión es más profunda en medio de la zona frotada que en los extremos porque la mano no ejerce tanta presión en ellos. Localmente, se elimina material, el objeto se desgasta y la convexidad de su superficie es rebajada. Si su curvatura original correspondía a un radio r, el resultado será la un arco o curva más llano, correspondiente a un radio R mayor. Es decir, el radio del arco lijado es mayor que el radio del arco original.

¿No es esto paradójico? ¿Acaso la esfera lijada tiene radio mayor que la original? Por otro lado, ¿qué significa pulir? ¿Cómo pueden una superficie o una curva ser lisas, suaves, sin arrugas, sin asperezas, redondeadas y, sin embargo, no ser rectilíneas? Ha tardado, pero estamos en otra iMATgen.

La esfera, el círculo y la circunferencia no solo surgen del vestigio que deja un punto al girar en torno de otro manteniéndose siempre a la misma distancia, también pueden generarse como límites de sucesiones de poliedros y polígonos. Las respuestas a las cuestiones anteriores se encuentran en esta concepción.

Imaginemos una sucesión de polígonos regulares, circunscrita o inscrita, a un círculo. Tanto en un caso como en otro, a medida que aumenta el número N de lados disminuye la longitud de cada uno y más se abre el ángulo A_N del vértice formado por dos lados consecutivos. En efecto, los vértices de un triángulo equilátero (60º) son más agudos que los de un cuadrado (90º), los de éste lo son más que los del pentágono (108º), los del pentágono son más agudos que los del hexágono (120º), y así sucesivamente hasta... ¿Hasta dónde? No podemos verlo porque los lados se hacen demasiado pequeños, pero intuimos que los vértices se abren cada vez más. Una primera reflexión puede invitar a pensar que esa abertura seguirá creciendo hasta el infinito y que quizá al final el polígono se abra en una recta, pero el ángulo de un vértice llano no es infinito, sino de 180º. Una observación más profunda permite ver que pese a aumentar, el crecimiento de esos ángulos (60º, 90º, 108º, 120º, ...) es cada vez menor: 90º-60º=30º, 108º-90º=18º, 120º-108º=8º... El ángulo A_N se abre cada vez más despacio. ¿Llegará a detenerse? Lo que el ojo no puede ver lo explica un cálculo razonado. En el valor del ángulo A_N del polígono regular de N lados no interviene la longitud de los lados que lo forman:

$$A_N = 180^\circ \cdot \frac{N-2}{N}$$

Para valores de N cada vez más grandes se obtienen valores de A_N cada vez más próximos a 180º. Lo intuimos, pero no lo vemos. Y nos lo creemos porque basamos nuestras afirmaciones en el cálculo. La conclusión es que, en el límite, el ángulo es llano (180º) porque cuanto mayor es el valor de N, más cerca de la unidad está el valor del cociente (N-2)/N:

$$\lim_{N} A_N = 180^\circ \cdot \lim_{N} \frac{N-2}{N} = 180^\circ \cdot 1 = 180^\circ$$

¿Quiere esto decir que el perfil de un círculo es rectilíneo? No. Significa que los ángulos, los vértices, acaban desapareciendo, y que el perfil es liso, sin picos ni irregularidades, sin asperezas. He aquí la esencia del lijado y del pulimento de un objeto. Con este análisis se caracteriza matemáticamente la lisura de la circunferencia y de las curvas 'localmente rectilíneas' del cálculo tradicional. Muy localmente, un arco circular sí es rectilíneo. El cálculo diferencial se basa en esta concepción. De ahí que entendamos el círculo como límite de polígonos. La 'rectitud local infinitesimal' es un rasgo del que adolecen, por ejemplo, las curvas fractales.

El caso de la esfera es más o menos lo mismo cambiando polígonos regulares por poliedros irregulares. El papel desempeñado por segmentos unidimensionales como son los lados de un polígono lo desempeñan ahora las caras poligonales bidimensionales de un poliedro. Si en un vértice de un polígono confluyen dos lados, ahora pueden encontrarse tres o más caras en un vértice de un poliedro. Aún así, y a medida que un poliedro (por ejemplo inscrito en una esfera) aumenta el número de caras, los ángulos multiédricos en cada uno de sus vértices, aunque sean diferentes, también se abren hacia un ángulo multiédrico llano. En suma, la esfera también es lisa, localmente llana pese a ser redonda.

Si tenemos en cuenta que esquinas, picos o vértices pueden tomarse como sinónimos de irregularidades, asperezas o arrugas, las cuestiones planteadas en esta iMATgen quedan contestadas.

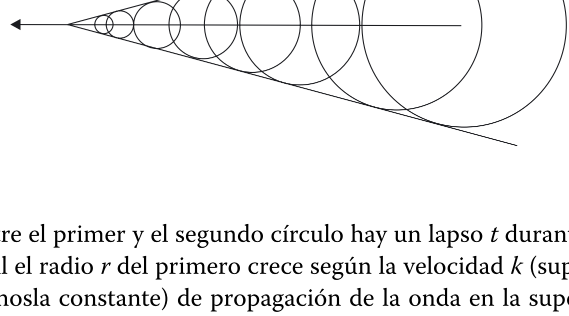
Observando la fotografía uno se da cuenta de que en la India se lijan y pulen cacharros como el río lija y pule los guijarros que arrastra. El lustre nunca proviene del interior de las cosas, sino del exterior. De la fricción con otros guijarros que comparten las mismas aguas, el mismo tiempo, el mismo río. El roce elimina asperezas, suaviza, redondea, haciendo las piedras agradables al tacto. Según el diccionario, pulir también *consiste en educar una persona para que sea más educada y elegante*. Tú y yo sabemos que es un arduo trabajo. Difícilmente sale redondo. Si al menos dispusiéramos de ***Limo del Ganges***... ■

iMATgen 12

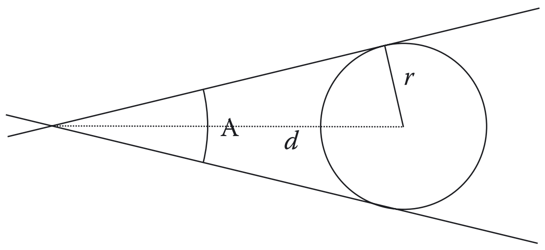
Dos patos, uno casi blanco, el otro casi negro, nadando en las prístinas aguas del río Matarraña, afluente del Ebro y arteria vital de la comarca aragonesa de su mismo nombre, en la provincia de Teruel. El de esta provincia es un caso insólito porque existe más que cualquier otra. Sus límites reales superan los geográficos para extenderse hasta las mentes de quienes leen "¡Teruel existe!" en pegatinas enganchadas en las retaguardias de los automóviles. Así los turolenses hacen saber al resto del mundo que su territorio no es un vacío yermo y que nunca mereció el olvido que se le dispensó. Teruel está donde tu eres consciente de su existencia. Esto no depende de donde está Teruel, sino de donde estás tu.

Entrando ya en el verano, el Matarraña fluye lentamente por Valderrobres. Sus aguas son poco profundas, pero muy limpias y transparentes. Es un río vivo en el que abundan los peces. Malo para ellos, bueno para otros. Mientras estos nadan sumergidos, los patos se pasean por las orillas y surcan el agua en todas direcciones. Se les ve y se les oye. En su deambular dejan vestigios efímeros en la superficie que los refresca y que va a dar lugar, en unos instantes, a una nueva iMATgen. Comprender esta imagen es comprender el rastro en forma de uve que se expande justo detrás de sus colas hasta las orillas. Si al echar una piedra al agua se crean ondas circulares concéntricas, ¿qué tienen que ver con el círculo estas estelas en uve de la fotografía? Se cerró la pregunta y se fraguó la iMATgen.

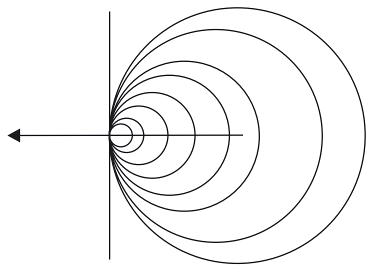
El movimiento del ánade en el agua altera la superficie. En su desplazamiento provoca en cada instante una agitación similar a la que produciría una piedra lanzada en cada punto de su trayectoria. El tiempo hace el resto. El círculo de agitación aumenta su radio a medida que el pato se aleja de su centro. Si la velocidad es constante, el radio de cada círculo será proporcional a la distancia que le separa del ánade. El resultado visual serán un par de rectas cuyos puntos perfilan tangencialmente los círculos sucesivos constituyendo su envolvente:



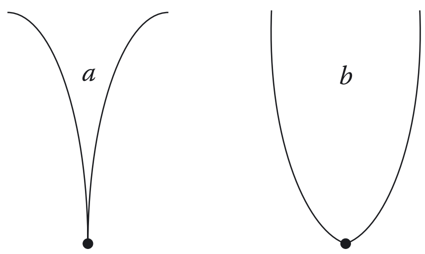
Entre el primer y el segundo círculo hay un lapso t durante el cual el radio r del primero crece según la velocidad k (supongámosla constante) de propagación de la onda en la superficie: $r=k\cdot t$. Si $d=v\cdot t$ es la distancia recorrida en ese lapso de tiempo t a una velocidad v (supongámosla también constante por ahora), en la figura siguiente se aprecia que $r=d \cdot \mathrm{sen}(A/2)$:



Pero siendo $r=k \cdot t$ y $d=v \cdot t$, obtenemos que $v=k/\mathrm{sen}(A/2)$. La apertura de la estela es $A=2 \cdot \mathrm{arcsen}(k/v)$. Por tanto, cuanto mayor es la velocidad, menor será el ángulo. Esta última igualdad indica además que debe ser $v \geq k$. Si $v<k$, no hay ángulo porque los círculos no llegan a cortarse. Si $v=k$, el nadador avanza a la misma velocidad de propagación de las ondas. La abertura A es de 180º y el perfil de la estela es circular, en forma de **o**:



Si el ánade no nada en línea recta o si varía la velocidad, ¿cómo varía su estela? El resultado no es difícil de imaginar. Si la velocidad aumenta (caso *a)* se agudiza el ángulo; si la velocidad disminuye (caso *b*) la abertura se agranda. En este último caso la estela se redondea, pasando de tener forma de **uve** a tener forma de **u**:



En la fotografía las uves que trazan los patos tienen la misma abertura, son paralelas. Esto indica que ambos palmípedos nadan a la misma velocidad. Las estelas se perciben así, en forma de uve, aunque, en realidad, sean irreales, fruto de la confluencia de círculos, aparentes y ficticios también, cuya aparente realidad procede de la agitación de las aguas.

Ya llegó el verano. Hace mucho calor y el chirrido incesante de las cigarras en el pinar cercano vertebra la canícula. Estoy quieto, inmóvil en el sofá, pero aún así varias gotas de sudor recorren mi frente, después mi mejilla y, finalmente, caen al suelo estrellándose en salpicones diminutos y silenciosos. Un silencio que me aturde. Me pesa todo el cuerpo. Me pesa el aire que soporta. Mover un dedo se me antoja casi imposible, un esfuerzo digno de cíclopes. Pruebo a ver: arriba, abajo, arriba otra vez, abajo de nuevo. Agotador. No quiero mover ningún dedo. Pero el dedo, o los músculos de mi dedo, o las conexiones cerebrales que lo animan insisten en ello y dos falanges del índice de mi mano izquierda suben y bajan otra vez, y otra, sin mi voluntad. No soy yo quien las anima. Debería sorprenderme, pero no me sorprendo. A menudo mi cerebro tiene estas cosas.

Caído de lleno en el sopor, me zambullo en el agua y nado con los patos. Nos hablamos, pero no me sorprendo. Les digo que he comprendido el secreto de sus estelas. Al oírme se miran unos a otros con sorpresa. Luego se comentan algo y me invitan a seguirlos nadando. Acepto su invitación con alegría. Nadan calladitos, con elegancia, como si les empujara una brisa que no sopla en lugar de unos pies palmeados. Mientras les sigo contemplo maravillado las ***Oes, ues y uves estelares*** que dejan tras de sí. Al poco se detienen. Se ríen de mi chapoteo ruidoso que produce estelas demasiado espumosas. Uno se acerca para informarme de que los peces se están mosqueando porque mi pateo levanta el limo del fondo y enturbia el agua. Antes de alejarse, el ánade añade: 'No has entendido nada. Este no es el secreto, es tan solo tu modelo'. Mientras le persigo, entre brazada y brazada, le grito: ¡Enséñame!

Mi propio grito me devuelve a la vigilia. Y como me encuentro más lúcido que hace un rato vuelvo a pensar en números, geometrías, funciones y demás cosas que no puedo ver a través de ventanas corrientes. Y en el curso de mi lucidez me asalta el deseo de que esta vigilia matemática mía se corresponda con el sueño de algún otro yo más cuerdo que logra mantenerse a flote. ■

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 79-81

Elogio de las escaleras

La descripción más genial de lo que es una escalera se la debemos a Julio Cortázar, en cuyo relato *Instrucciones para subir una escalera* nos dice:

> Nadie habrá dejado de observar que con frecuencia el suelo se pliega de manera tal que una parte sube en ángulo recto con el plano del suelo, y luego la parte siguiente se coloca paralela a este plano, para dar paso a una nueva perpendicular, conducta que se repite en espiral o en línea quebrada hasta alturas sumamente variables

incluyendo la recomendación inicial razonable:

> Las escaleras se suben de frente, pues hacia atrás o de costado resultan particularmente incómodas.

para seguidamente darnos las instrucciones pertinentes de uso:

> Para subir una escalera se comienza por levantar esa parte del cuerpo situada a la derecha abajo, envuelta casi siempre en cuero o gamuza, y que salvo excepciones cabe exactamente en el escalón. Puesta en el primer peldaño dicha parte, que para abreviar llamaremos pie, se recoge la parte equivalente de la izquierda (también llamada pie, pero que no ha de confundirse con el pie antes citado), y llevándola a la altura del pie, se le hace seguir hasta colocarla en el segundo peldaño, con lo cual en éste descansará el pie, y en el primero descansará el pie... Llegado en esta forma al segundo peldaño, basta repetir alternadamente los movimientos hasta encontrarse con el final de la escalera.

¡Para que luego digan que los de letras no son rigurosos! Es precisamente esta exagerada minuciosidad de Cortázar para describir algo tan cotidianamente asumido como es subir una escalera lo que hace al relato sorprendente.

Palacio de los Duques de Urbino, Urbino (Italia). Foto FMC.

Lo que les propongo en este clip es mirar a las escaleras matemáticamente y descubrir con ello su claro interés docente. Ya de entrada debemos admitir que según el material de que están hechas hay escaleras muy diversas (piedra, hormigón, madera, hierro...) y según la forma que tengan también admiten una extensa clasificación (caracol, telescópica, de techo, submarino, tijeras...). Por otra parte, la funcionalidad clasifi-

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org.

ca también a las escaleras en industriales, para estanterías, domésticas, monumentales, de evacuación, etc. Ya se sabe que todo en esta vida parece simple hasta que empiezas a indagar un poco (217.000 referencias en Google al entrar la palabra *escalera*).

La ley de los peldaños

Las escaleras no pueden (o no deberían) ser hechas a medida de un solo usuario. Son objetos transitables por cualquiera. Puede subir usted o bajar Cenicienta: las escaleras han de dar posibilidades de tránsito a una población muy amplia, desde jugadores de la NBA a bailarinas, pasando por niños, ancianos… Las escaleras asesinas están fuera de lugar y por tanto la ley debe intervenir.

Si considera un peldaño de altura C y huella horizontal H, las actuales normas de seguridad para la evacuación de edificios (NTP46 del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales) recomiendan valores de H superiores o iguales a 28 cm y alturas C entre 13 cm y 18,5 cm. Pero en otras normativas vigentes también puede hallar otras restricciones del estilo $H \geq 25$ cm y $C \leq 17$ cm o bien (Barcelona) $H \geq 26$ cm y $C \leq 18$ cm. Algunos tratados apelan a la fórmula empírica de seguridad $H+C = 46$ cm y a la de comodidad $H - C = 12$ cm, lo cual nos lleva a un sistema de dos ecuaciones cuyas soluciones son $H = 29$ cm y $C = 17$ cm, perfectamente admisibles.

> "Para subir una escalera se comienza por levantar esa parte del cuerpo situada a la derecha abajo, envuelta casi siempre en cuero o gamuza, y que salvo excepciones cabe exactamente en el escalón."
> *Julio Cortázar*

Admitamos de momento que fijamos las referencias ministeriales:

$$H \geq 28 \text{ cm} \quad \text{y} \quad 13 \text{ cm} \leq C \leq 18{,}5 \text{ cm}. \qquad [*]$$

¿Sería esto suficiente como normativa? Evidentemente no. ¿Se imagina que *cada* peldaño fuera diferente de los demás y tuviésemos que ir calibrándolos sin poder aplicar las recomendaciones de Cortázar? ¿Qué ocurriría si la altura C fuese fija pero H fuera variando incluso llegando a valores grandes que nos hicieran perder el ritmo?

La NTP46 lo resuelve imponiendo dos condiciones (http://www.mtas.es/insht/ntp/ntp_046.htm) la pendiente C:H debe ser constante y entre C y H deben darse las relaciones "60 2C+H 65". ¡Misterio!. Aparecen dos números (60, 65) y la expresión 2C+H pero la normativa se descuida (en la web) de los dos signos de desigualdad. Escrito bien sería:

$$\frac{C}{H} = p \quad \text{y} \quad 60\,cm \leq 2C + H \leq 65\,cm$$

condiciones que superpuestas a las iniciales (*) aun permiten una gama amplia de valores. En muchos casos se fija para 2C+H el valor intermedio de 63 cm:

$$2C+H = 63 \text{ cm}$$

lo que con $C=pH$ lleva a poder expresar tanto C como H en función de la pendiente p

$$H = \frac{63}{1+2p} \qquad C = \frac{63p}{1+2p}$$

También las relaciones [*] pueden formularse en este caso en relación a las pendientes.

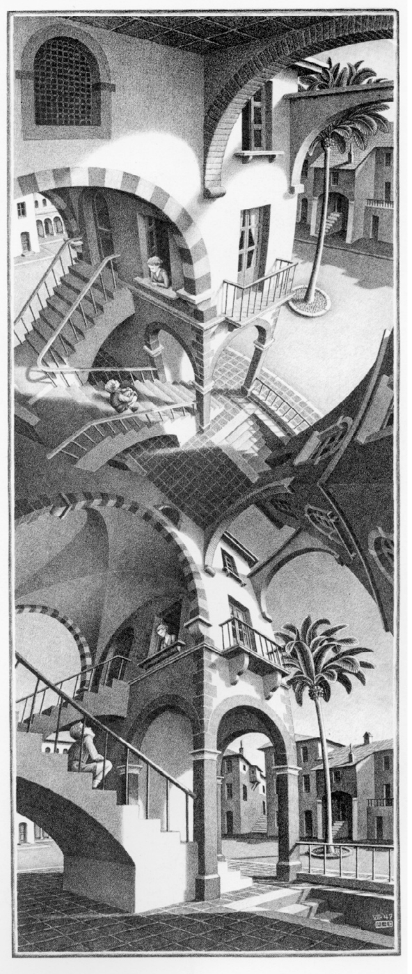
A partir de un ángulo de 50º (y hasta 90º) es inadmisible pensar en escaleras de obra transitables "a lo Cortázar" y se imponen escaleras metálicas o de madera que deberán subirse (y bajarse) con especial cuidado. Por esto hay tantos accidentes caseros cuando se intenta cambiar una bombilla subiendo la escalera desplegada a ritmo trepidante.

Cada tramo de escalera debe tener entre 3 y 18 peldaños, creando piadosos descansillos para recuperar la respiración y en el caso de grandes edificios asegurando que la evacuación por incendio sea posible con celeridad. Para ello las anchuras de las escaleras deben adecuarse a las plantas correspondientes, tener pasamanos, techos no claustrofóbicos, etc. Una persona debe disponer al menos de 0,28 m^2 para moverse y evitar el pánico y mientras que en movimiento horizontal rápido cabe suponer una velocidad de 76 m/min, en el descenso de escaleras debe suponerse que dicha velocidad desciende a 45 m/min. Todo ello ha llevado a desarrollar interesantes modelos matemáticos al servicio de la seguridad en edificios.

¿Rampas o escaleras?

Si bien las escaleras no constituyen un problema para muchas personas si que son una enorme barrera para muchísimas otras: para usted cuando se ha lastimado un pie, bebés, ancianos, compradores con carritos, esquiadores con piernas rotas, personas que usan sillas de ruedas, etc. Si bien los ascensores mitigan parte del problema de los desplazamientos interiores, al no ser estos factibles en los accesos desde la calle o no ser utilizables en caso de incendio, surge razonablemente la necesidad de rampas. Pero las rampas deben tener pendientes razonables y con permiso de Spiderman y Superman, lo único razonable para los sapiens-sapiens son pendientes del 5% no debiéndose superar el 12% (incluso las escaleras con p=tan A, si A<20º es recomendable que sean rampas).

Las razonables pendientes de las rampas hacen invariable su presencia en el interior de viviendas unifamiliares de diversos pisos. Así pues si usted tiene visión de futuro y piensa envejecer en casa nunca compre una casa adosada de dos o tres plantas que no tenga ascensor interior. Si lo hace, junto a la hipoteca de su vida puede estar usted asegurando acabar sus días en una cama cómodamente aparcada en el parking. ■



M.C. Escher: Arriba y Abajo (1947)

Para pensar un rato

Considere una escalera con pendiente p=tan A (20º≤A ≤50º) y techo de igual inclinación. ¿A que altura h sería razonable tener este techo (midiendo h entre un escalón cualquiera y el techo) para que una persona adulta pudiera subir por la escalera normalmente sin tocar el techo aunque levantase los brazos?

Comentarios o soluciones curiosas serán bienvenidos en elclip.suma@fespm.org

PARA SABER MÁS

ALSINA, C. (2004): *Contar para vivir mejor,* Rubes, Barcelona.

NEUFERT, E. (1969): *Industrialización de las construcciones,* Gustavo Gili, Barcelona.

PEDOE, D. (1979): *La Geometría en el Arte,* Gustavo Gili, Barcelona.

QUARONI, L. (1980): *Proyectar un edificio*, Xarait Edic,. Madrid.

STEEGMAN, E. y ACEBILLO, J. (1983): *Las medidas en arquitectura*, COAC, Barcelona.

En la web:

http://www.mtas.es/insht/ntp/ntp_046.htm

http://www.skalar-escaleras.com

http://www.escaleracaracol.com

http://www.arqcon.com.ar

Convergencia

Divergencia

Fotos Vicente Sierra Puparelli

SUMA 47
Noviembre 2004, pp.83-88

CosmoCaixa Barcelona

Las aportaciones del presente trabajo-informe provienen de las múltiples ocasiones que, en conferencias escuchadas, ponencias asistidas, artículos de revistas y de prensa, conversaciones privadas, Jorge Wagensberg (Director científico de los Museos de Ciencia de la Fundación La Caixa) me (nos) ha tratado de comunicar, tras una experiencia de más de 20 años en el Museo de la Ciencia de Barcelona, cuáles eran las hipótesis de trabajo para construir y desarrollar, en el mismo lugar pero con mucho más espacio, un nuevo Museo de la Ciencia. También de la experiencia generada por una exposición de la Fundación La Caixa "Y después fue... ¡La Forma!" que ha itinerado por múltiples lugares de España (en particular estuvo en el Museo Elder de Las Palmas de Gran Canaria entre Noviembre de 2003 y Febrero de 2004). Y, por último, de la realidad del Museo CosmoCaixa de Barcelona, ya inaugurado el pasado 23 de Septiembre. Todo esto (hipótesis, experiencia y realidad) que Jorge Wagensberg nos ha contado antes y mostrado ahora, es pura museología científica en su forma más moderna y más actual.

Integración del edificio antiguo y el nuevo. Arriba, al fondo, el Observatorio del Tibidabo.

Hipótesis de trabajo

1. Un Museo de Ciencia es un espacio dedicado a crear, en el visitante, estímulos a favor del conocimiento y del método científico (lo que se consigue con sus exposiciones) y a promover la opinión científica en el ciudadano (lo que se consigue con la credibilidad y prestigio que sus exposiciones dan al resto de actividades que se realizan en el museo: conferencias, debates, seminarios, congresos, etc.).

2. La audiencia de las exposiciones de un Museo de Ciencia es universal sin distinción de edad a partir de los 7 años, ni de formación, ni de nivel cultural, ni de ninguna otra característica. No existen visitantes de *diferente clase* en un Museo de Ciencia. Ello es posible porque las exposiciones se basan en emociones y no en conocimientos previos. Las actividades en cambio, si dependen de la historia del ciudadano, pueden tener objetivos especiales y pueden dirigirse a sectores particulares atendiendo a un nivel, interés o competencia.

3. El elemento museológico y museográfico prioritario es la *realidad*, esto es, el objeto real o el fenómeno real. El texto, la voz, la imagen, el juego, la simulación, la escenografía o los modelos de ordenador son elementos prioritarios en otros medios como las publicaciones, la TV, el cine, el parque temático, las clases, las conferencias, el teatro, etc., pero en museografía son sólo elementos complementarios. Una exposición nunca debe basarse en tales accesorios, es decir, una exposición de accesorios de la realidad puede ser muchas cosas, pero no una exposición.

4. Los elementos museográficos se emplean, prioritariamente, para estimular al máximo las siguientes tres clases de interactividad con el visitante:

Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

- Interactividad manual o de emoción provocadora (Hands On)

- Interactividad mental o de emoción inteligible (Minds On)

- Interactividad cultural o de emoción cultural (Heart On)

5. Los mejores estímulos para que el ciudadano siga al científico se inspiran en los mismos estímulos que hacen que el científico haga ciencia.

6. El mejor método para imaginar, diseñar y producir instalaciones museográficas en un Museo de Ciencia es el propio método científico (basado en los principios de objetividad, inteligibilidad y dialéctico).

7. El contenido de un Museo de Ciencia puede ser cualquier pedazo de la realidad desde el Quark hasta Shaskepeare, siempre que los estímulos y el método expositivo sea científicos. La prioridad corresponde siempre al objeto o al fenómeno real para cuyo conocimiento se usa luego la disciplina que convenga, porque *la naturaleza no tiene la culpa de los planes de estudio previstos en escuelas y universidades*.

8. El Museo es un espacio colectivo (aunque se pueda disfrutar individualmente). Esto define una jerarquía de valores en el espacio museográfico respecto del número de visitantes que pueden acceder a él simultáneamente:

- Nivel A: Acceden todos los visitantes (Es la escenografía general, la iluminación, los murales, los cuerpos centrales emblemáticos, audiovisuales, cine, sonido general, etc.)

- Nivel B: Accede un grupo de visitantes entre los que es posible una conversación (5 o 6 personas, una familia, etc.). (Un módulo de experimento, un objeto, un pequeño ámbito...).

- Nivel C: Accede un solo visitante en privado (textos, ilustraciones, ordenadores).

9. El concepto de *hilo conductor* es sólo una de las opciones posibles. En ningún caso es obligatorio.

10. Hay temas especialmente museográficos y temas que se tratan mejor con otros medios.

11. Existe un rigor museográfico y existe un rigor científico. El museo ha de ser museográficamente riguroso (no hacer pasar reproducciones por objetos reales, no sobrevalorar ni infravalorar la trascendencia, la singularidad o el valor de una pieza, etc.) y científicamente riguroso (no emplear metáforas falsas, no presentar verdades que ya no están vigentes, no esconder el grado de duda respecto de lo que se expone, etc.) El rigor museográfico se pacta entre el museólogo y los diseñadores y el rigor científico se pacta entre el museólogo y los científicos expertos en el tema.

12. En un Museo de Ciencia se trata al visitante como a un adulto, en todos los sentidos, como eventualmente se trataría a un científico o a un futuro científico. Un ciudadano es museológicamente adulto en cuanto sabe leer y escribir. El visitante siempre tiene derecho a rehacer su verdad por sí mismo. No se deben enviar mensajes especiales garantizados o blindados por la tradición o la autoridad científica.

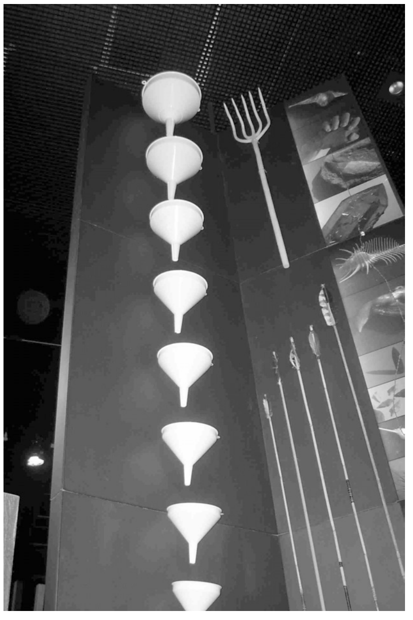
13. El papel de un Museo de Ciencia en una sociedad organizada democráticamente es el de escenario común y creíble entre cuatro sectores:

- La sociedad misma entendida como el ciudadano de a pie que se beneficia y sufre la ciencia.

- La comunidad científica donde se crea el conocimiento científico.

- El sector productivo y de servicios donde se usa la ciencia.

- La administración donde se gestiona la ciencia.



Exposición: Y después fue... ¡La Forma!

Fue una exposición realizada por el Museu de la Ciencia de la Fundación La Caixa (Barcelona), con dos formatos. Uno, para ser expuesta en dicho Museo (también se expuso en el CosmoCaixa de Madrid), y otro formato-versión itinerante, que fue expuesta en varias ciudades españolas.

Se trataba de una exposición muy especial, porque en vez de divulgar unos conocimientos, proponía a los visitantes y a la comunidad científica una teoría sobre *la forma*.

El punto de partida era muy sencillo: ¿por qué unas determinadas formas (la esfera, el hexágono, la espiral, etc) aparecen tan a menudo en la naturaleza? ¿por qué este éxito? La exposición “Y después fue... ¡La Forma!” proponía una explicación sugerente: cada una de estas formas básicas tiene asociada una función.

El equipo dirigido por Jorge Wagensberg reunió una extraordinaria colección de minerales, semillas y plantas, fósiles, utensilios de distintas épocas, obras de arte contemporáneo, en una exposición donde se combinaban todas las disciplinas y se creó un laboratorio de formas, con experimentos que demostraban la relación entre las ocho formas básicas de la naturaleza y ocho funciones necesarias para la vida.

La exposición se estructuraba en tres partes. La primera introducía al visitante en el mundo de los objetos: qué tipos de objetos hay y cuáles son sus propiedades fundamentales. La segunda proponía una ficción museográfica: a partir de la combinación de las siete propiedades fundamentales de un objeto (función, necesidad, tamaño, composición, forma, estructura y color) podríamos llegar a organizar hasta 127 exposiciones diferentes. Para “Y después fue... ¡La Forma!” se eligieron sólo dos: forma y función.

Un Museo de Ciencia es un espacio dedicado a crear, en el visitante, estímulos a favor del conocimiento y del método científico.

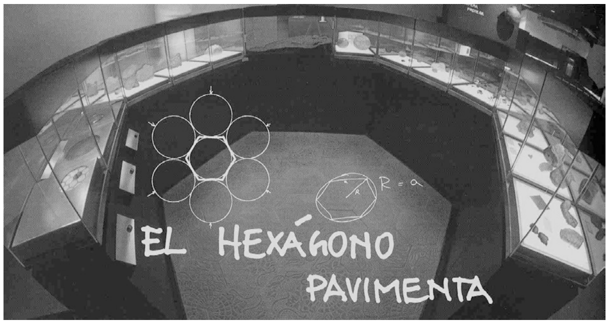
El tercer apartado era una exposición de objetos de la más diversa procedencia, que demostraban la relación entre forma y función, y permitían al visitante establecer analogías entre formas espontáneas (necesarias), vivas e inteligentes (diseñadas).

Jorge Wagensberg siempre cuenta que “Y después fue... ¡La Forma!” fue un reto museográfico, en el sentido de que no se utilizan maquetas, ni modelos, ni simulacros, sólo objetos y fenómenos reales. “La historia de la ciencia -añade Jorge- es la historia de las buenas preguntas, no la de sus respuestas. En este sentido ha sido una exposición que ha provocado diálogo entre los visitantes”

En una buena exposición se tienen más preguntas después de salir que antes de entrar. (Jorge Wagensberg).

Forma-función

El hexágono aparece en los nidos de abejas y avispas, en los ojos facetados de los insectos, en pieles, caparazones y esqueletos, en los balones de fútbol... Un círculo admite otros seis círculos iguales y tangentes a él mismo, cuando se comprimen, el espacio intersticial se esfuma y surgen los hexágonos: el hexágono pavimenta.



El cono brilla en dientes, picos, hocicos, espinas, puntas, embudos, herramientas... El ángulo transmite todas las fuerzas hacia el vértice y allí se encuentran: el ángulo penetra.

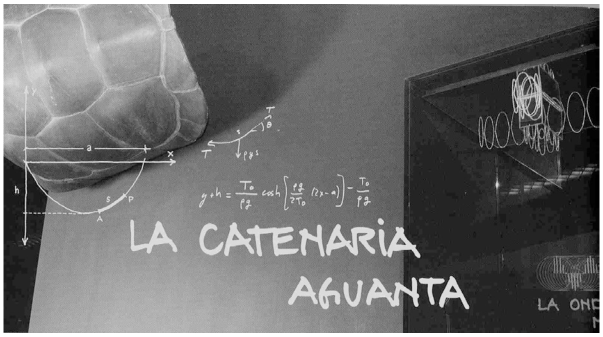
La onda se dibuja en el movimiento de gusanos (ondas longitudinales), reptiles y peces (ondas laterales), así como en mamíferos acuáticos (ondas verticales); la onda mueve bien la materia y mueve información sin desplazar la materia: la onda comunica.

La espiral se exhibe en cuernos, conchas, flores, trompas y colas en reposo, rollos de mil clases... Es la manera de crecer sin derramarse por el espacio: la espiral empaqueta.

La hélice se usa en todo tipo de anclajes: lianas, zarcillos, colas y trompas en uso, fibras, cabellos, cuerdas, tornillos... Según la ley de Euler, en física, la resistencia a la tracción crece exponencialmente con el número de vueltas que entran en fricción: la hélice agarra.

Los fractales son inevitables en ramas, raíces, venas, arterias, nervios... Es la manera de llegar a todos los puntos del espacio con continuidad. Las plantas son fractales por fuera y los animales lo son por dentro: los fractales rellenan.

El espinazo de un gran dinosaurio, una liana de la selva amazónica... tienen forma de catenaria. Físicamente significa que no hay fuerzas normales a la curva susceptibles de mover la estructura. La estructura sólo sufre fuerzas tangenciales que se anulan entre sí: la catenaria aguanta.



El Sol, las burbujas de cava, ciertos frutos, semillas, huevos, etc... tienen forma esférica. La esfera protege porque ofrece la mínima superficie (bueno para retrasar las pérdidas de calor) que encierra un volumen determinado, y porque no hay por donde agarrarla o morderla: la esfera protege.

> *La esfera protege porque ofrece la mínima superficie que encierra un volumen determinado.*

Un comentario final de Wagensberg:

> Resulta que casi todas las formas frecuentes en la materia viva están emparentadas con la platónica perfección del círculo. Su necesidad se comprende, su función se explica, ¡son inteligibles!. Los fractales, en cambio, no tienen nada que ver con la circunferencia. Su función en la vida está clarísima, pero para ser muy funcional antes hay que ser un poco necesario. ¡La selección no puede favorecer lo que no existe! ¿En qué se basa la necesidad de los fractales? ¿Por qué hay tantos en la materia inerte? Un teorema lo acaba de demostrar: *La fractalidad tiene, por sí misma, una alta probabilidad de emergencia.* ¡No necesita el parentesco del círculo para optar a la selección!

Una exposición se valora mejor por la cantidad de conversación que provoca que por su número de visitantes. (Jorge Wagensberg).

CosmoCaixa Barcelona

Aquellas hipótesis de trabajo se han tornado en explícitos y deliberados principios museológicos. Aquella experiencia, que ya asumía parte de esos principios, se amplía en esta Sala de la Materia que es el corazón del nuevo Museo.

Sala de materia

El objetivo de la Sala de la Materia es que los visitantes de CosmoCaixa Barcelona comprendan la historia más bella de la Historia: ¿Cómo se puede pasar de una sopa de quarks a una antología poética? Es decir, la muestra recoge desde las partículas elementales hasta la complejidad de la cultura humana. La respuesta a ese interrogante no es nada fácil y, para encontrar la solución, el Museo usa la ciencia y las técnicas museográficas más diversas. El recorrido por la historia de la materia se realiza a lo largo de cuatro grandes ámbitos: la Materia inerte, la viva, la inteligente y la civilizada.

La onda mueve bien la materia y mueve información sin desplazar la materia: la onda comunica.

Materia inerte

La historia empieza en los orígenes del Universo, hace unos 13.700 millones de años. Durante unos 10.000 años, el universo era estéril y sólo existía materia inerte. El ámbito de la Materia inerte se ocupa del origen, la evolución y las leyes de la materia anteriores a la aparición de la vida.

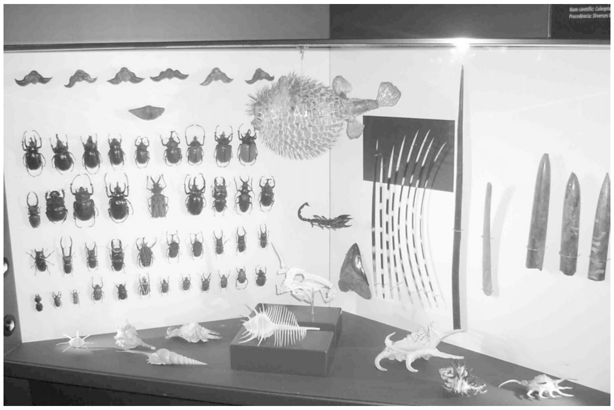
Materia, energía, ondas y luz son algunos de los protagonistas de este espacio, en el que se repasan algunas de las leyes fundamentales que gobiernan el Universo. Con estos principios se explican buena parte de los fenómenos que nos rodean y que tienen que ver con la atmósfera, los mares o el interior de la tierra. Tornados, remolinos, olas, meteoritos,... todos ellos desfilan ante los ojos del visitante de CosmoCaixa Barcelona.

A lo largo de 64 módulos se puede ver, por ejemplo, el comportamiento de las partículas que componen un gas o la propagación del sonido, o maravillarse con el experimento sobre la rotación de la Tierra. También se puede experimentar la inercia y la caída libre, y observar cómo se forma una lluvia de meteoritos. El Muro geológico es el elemento más emblemático de este espacio.

Materia viva

En el ámbito de la Materia viva se trata el origen de la vida, cómo ha evolucionado y las estrategias utilizadas por los seres vivos para adaptarse. ¿Cómo empezó la vida? Gran parte de las 49 instalaciones de este espacio, en el que los módulos sobre genética tienen un papel destacado, intentan dar respuesta a esta pregunta. Con unos microscopios interactivos, el visitante disfrutará de imágenes espectaculares en las que se refleja la diversidad de los organismos que integran el mundo microscópico.

Las columnas de Winogradsky son verdaderos ecosistemas en miniatura, que crecen y evolucionan dentro de cada sala y se caracterizan por la gran diversidad de microorganismos que viven en ellas. Una de las columnas representa un ecosistema de la Tierra primitiva de hace unos 3.500 millones de años, cuando todavía no había oxígeno en la atmósfera; otra representa un ecosistema más evolucionado, que ya contaba con la presencia de bacterias productoras de oxígeno. La colonización de la tierra seca trata las principales adaptaciones que los peces tuvieron que experimentar para sobrevivir fuera del agua como anfibios y reptiles. En esta sección también se exploran las ocho formas más comunes de la naturaleza y las funciones de cada una de ellas.



Materia inteligente

Una gran escultura de tres neuronas en interacción, es uno de los elementos más emblemáticos en el ámbito de la Materia inteligente. La obra está inspirada en dibujos de Santiago Ramón y Cajal, científico que dispone de un espacio propio para recordar sus centenarios estudios de neurobiología.

Este espacio aborda la definición de la inteligencia, y la evolución de la vida se sigue a través de los restos fósiles dejados por organismos que vivieron en el pasado. Observando estos restos se pueden ver los cambios en la morfología, la aparición de diversos órganos y las adaptaciones a las nuevas necesidades. La capacidad de respuesta de los seres vivos y el desarrollo de mecanismos para procesar la información del exterior incrementan sus posibilidades de supervivencia. El Ambrarium recoge buena parte de las casi 700 piezas de insectos atrapados en ámbar que posee el Museo. Una de ellas, la piedra Jorge Caridad, es un trozo de ámbar en el que quedaron atrapadas gran cantidad de hormigas cuando intentaban evacuar su hormiguero, hace unos veinte millones de años. CosmoCaixa Barcelona reconstruye esta historia de un modo detectivesco, en un subámbito que sirve para hacer una introducción al método científico y a sus procedimientos.

Materia civilizada

En este ámbito, una parte de la materia inteligente ha accedido al conocimiento. Se trata de la inteligencia simbólica, exclusiva de los seres humanos, que ha permitido el nacimiento de la cultura y la civilización. Este espacio recoge los hitos básicos del largo proceso de la especie humana: el bipedismo, las primeras industrias líticas, el fuego, la adquisición de autoconciencia, el lenguaje, el pensamiento simbólico, la ganadería y la agricultura, la escritura y el alfabeto. Cada uno de estos hitos se representa en CosmoCaixa Barcelona con elementos reales y con módulos interactivos que permiten interpretarlos. Así, en este espacio se muestra la primera evidencia de un homínido que caminó erguido, una colección de herramientas de piedra y metal, los restos de un hogar neandertalense, un entierro neolítico, grabados rupestres, muestras de escrituras de todas las épocas...

> *Los fractales son inevitables en ramas, raíces, venas, arterias, nervios... Es la manera de llegar a todos los puntos del espacio con continuidad.*

El recorrido por la evolución humana se complementa con la reproducción, a tamaño real, de cinco homínidos: Australopitecus afarensis, Homo habilis, Homo erectus, Homo neanderthalensis y Homo sapiens. En las cinco reproducciones se han utilizado las últimas investigaciones y se ha seguido una técnica muy realista. Un último espacio dedicado a la ingeniería de materiales recuerda al visitante que la especie humana es la única capaz de transformar la materia e inventar nuevas *formas*. ■

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 89-92

Más de lo mismo

Parece fuera de toda discusión que los medios de comunicación constituyen uno de los referentes de nuestra sociedad y uno de los factores de impacto en todos los ciudadanos. En cuanto a la credibilidad, está bien asentada, considerándolos en su conjunto, no cada uno en particular, superando incluso las referencias continuas sobre las mentiras que difunden. Una credibilidad muy por encima de la que se otorga al colectivo de los profesores.

Si todo lo anterior es cierto referido al total de la sociedad, lo es mucho más si nos limitamos al colectivo de los alumnos, más jóvenes, sin criterios firmes formados todavía y más maleables por los medios. La influencia de los medios es una de las razones por las que uno de los objetivos fundamentales del sistema educativo tiene que ser el aprendizaje de la lectura crítica de los medios. Objetivo complejo al que deben de contribuir todas las materias, entre ellas las matemáticas.

Una forma de hacerlo es algo a lo que ya me he referido en otros artículos de esta sección: la búsqueda de los frecuentes y repetidos errores (de contenido matemático en nuestro caso) que aparecen en los medios. Y me refiero a 'errores', no las consabidas erratas, sino situaciones de bulto, profundas y repetidas que se dan una y otra vez, y que indican que hay razones profundas de su aparición y que son, por tanto, difíciles de erradicar. Y que si se presentan en un colectivo tan influyente y tan sometido a la crítica pública como el de los que confeccionan los medios de comunicación (más amplio que lo que se suele llamar periodistas) indica que están arraigados en la sociedad y que son producto de una deficiente educación matemática. Y no solo eso, sino que su persistencia indica poca sensibilidad social ante los fallos matemáticos. En los últimos años las faltas ortográficas y sintácticas en los periódicos han disminuido ostensiblemente, pero no lo han hecho en una proporción equivalente los errores matemáticos.

Fuentes de errores

A riesgo de repetir tópicos, porque a estas alturas se supone que son bien conocidos, repetiré que los 'yacimientos' de errores continúan siendo los números, las gráficas y las estadísticas. Comentamos algunas cosas sobre cada una de ellas.

> *En los medios, las gráficas erróneas casi son más frecuentes que las correctas.*

En los números sigue habiendo grandes problemas en el manejo de los números grandes, quizás como efecto reflejo de su ausencia en la realidad educativa, con independencia de su presencia en los programas. Se trata además de una habilidad difícil de conseguir, porque en la mayoría de los casos se trata de cantidades sobre las que no se tiene ninguna experiencia ni capacidad de decisión. En particular siguen apareciendo errores frecuentes en el uso de los billones, que son en la 'literatura' internacional (y en las noticias de las agencias de prensa internacionales) el equivalente a ese *palabro* inventado por la Academia de *millardo*, de uso errático, y no a los billones castellanos por los que se suele traducir. También es penosa la profusión de errores en los porcentajes, síntoma de que se manejan con poca soltura. Y menos disculpable por el hecho de que se utilicen con profusión.

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Las gráficas erróneas casi son más frecuentes que las correctas. Y no solo en el contenido de los periódicos sino también en los anuncios, en los que a veces son 'errores' tan groseros que hacen pensar en la manipulación interesada, que deberían llevara a intervenir a los poderes públicos (por ejemplo los vigilantes en los medios de que no aparezcan anuncios que hieren la sensibilidad del espectador). Sirva como ejemplo la gráfica que acompañaba al anuncio de Antena 3 aparecido en muchos medios el 2/9/04, sobre su liderazgo de audiencia este verano (Figura 1): es engañosa desde todos los puntos de vista imaginables.

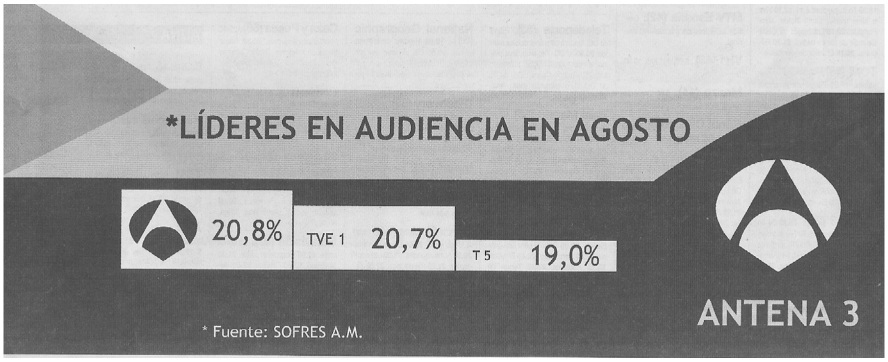


Figura 1. Publicado en muchos medios el 2/09/04

Y de cuando en cuando aparecen gráficas *imaginativas*, en las que se introducen variaciones sobre las habituales. Como la de la Figura 2 (*El País*, suplemento de Educación, 6 de septiembre de 2004) cuyo sentido, por más empeño que he puesto en ello, confieso no haber entendido. A los pocos días (10 de septiembre) había una *Fe de errores* que lo único que decía era que "los porcentajes de alumnos extranjeros en centros públicos y privados estaban cambiados entre sí", que no daba mucha luz sobre la pertinencia de la elección del tipo de gráfica ni su facultad de arrojar luz sobre los datos.

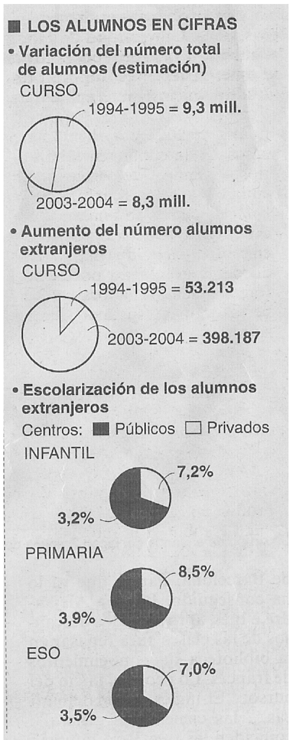


Figura 2. *El País*, 6 del 9 de 2004

La estadística

Una mirada aunque sea superficial a los medios de comunicación nos convence rápidamente que es la parte de las matemáticas con mayor presencia. Unas veces de forma directa (por medio de encuestas de diversos tipos) y otras de forma soterrada y no muy honesta. Me referiré a dos habituales. Las listas de éxitos (sobre todo de música joven) de las emisoras de radio tienen la apariencia de encuestas que dan lugar a una ordenación de los diferentes temas musicales, cuando en realidad se confeccionan por métodos no muy transparentes en los que el tratamiento estadístico serio tiene poco que ver.

Y cuando hay alguna cuestión ante la que hay posturas a favor y en contra, un procedimiento habitual en los noticiarios de TV es recoger más o menos el mismo número de opiniones de cada una de las posturas, sin importar el porcentaje de ciudadanos que mantenga cada una de las opiniones. No es extraño que no se tenga una percepción social muy positiva de la Estadística, más aún si se tiene en cuenta otra situación común: los empachos de encuestas no siempre neutras en los periodos electorales.

Estas prácticas sobrepasan el listón de los errores para entrar en otro tipo de actuaciones que sólo la ingenuidad o la indiferencia pueden tachar de descuidos, sobre todo porque se repiten con asiduidad.

Pero incluso con los llamados *errores* lo peor es la aceptación como inevitables. Se empieza dando explicaciones peregrinas como la de la Defensora del lector de *El País* (en el artículo *Errores y credibilidad*, 12 de septiembre de 2004):

> Los históricos del periódico -y de ello pueden dar fe también todos los Defensores del Lector- mantienen que en EL PAÍS, como en todos los periódicos del mundo, ha habido errores desde su primer número, aunque señalan que quizá los lectores estuvieran entonces más preocupados por tener información de lo que realmente sucedía, que por los fallos que salpicaban el periódico.

para caer en el fatalismo:

> Piensen, y no es una justificación, que los errores en un periódico son como las moscas en verano. Hay que luchar insistentemente contra ellas, evitarlas, intentar que no sean legión y que no molesten demasiado. Pero es inevitable, en verano hay moscas.

Lecturas críticas

La búsqueda de errores puede ser para los alumnos una divertida forma de hacer una lectura crítica de los medios y de reflexionar sobre los conocimientos matemáticos que tienen y su plasmación fuera de los muros escolares. Que puede ser válida si se hace sobre periódicos completos de un día cualquiera, pero que puede ser mucho más provechosa sobre un dossier de artículos buena parte de los cuales (¡pero no todos!) tengan algunos de los errores típicos. Y sería conveniente utilizar los únicos periódicos que aparecen en las aulas que no son producto de alguna promoción comercial: los deportivos (que dicho sea de paso pueden ser una fuente de todo tipo de actividades matemáticas). Y quizás en un próximo futuro, cuando los actuales alumnos sean quienes confeccionen los medios, tengan menos errores.

Pero no pensemos que solo los alumnos tienen que realizar lecturas críticas. También los profes debemos hacer otra que nos permita percibir la importancia social relativa de los tópicos que tratamos en clase para ajustar la importancia que les damos en el aula. Y veremos que no se sostienen situaciones habituales como dedicar a la Estadística solo un par de semanas (además las últimas del curso con el riesgo de que la premura de tiempo las haga 'desaparecer') y no todos los años. Esa lectura crítica nos permitirá detectar las lagunas matemá-

Figura 3. *El Periódico de Aragón*, 28/9/04

M. G., Madrid

El problema de los sombreros

La identificación errónea de los cadáveres de 30 militares españoles fallecidos en el accidente del Yak-42 constituye un "desbarajuste" en términos humanos, pero también en términos matemáticos. Según los expertos consultados por EL PAÍS, las matemáticas cuentan con un problema clásico para referirse a esta situación. Se denomina *el problema de los sombreros* y su enunciado es, aproximadamente, como sigue:

"Treinta hombres entran en un bar y cuelgan sus sombreros, todos idénticos, en el perchero. Tras haber ingerido una considerable cantidad de alcohol, se marchan, recogiendo cada uno un sombrero. ¿Qué probabilidades hay de que ninguno coja el suyo?".

El problema se resuelve en términos estadísticos. Por puro azar hay un 37% de posibilidades de que ninguno de los 30 salga con su sombrero. La probabilidad de que sólo uno se lleve el que le corresponde es la misma (37%), mientras que se reducen al 26% las posibilidades de que haya más de un acierto. En otras palabras, "si vemos a cinco de ellos salir con su propio sombrero, podemos sospechar que no todos estaban borrachos".

En el caso del Yak-42, los generales españoles tenían un 37% de posibilidades de errar en la identificación de todos los cadáveres y un 63% de acertar en uno o más de los casos si se limitaron a distribuirlos a voleo.

"El resultado que obtuvieron es perfectamente compatible con el hecho de que la adjudicación de las identidades a los cadáveres se hiciera al azar", afirman los expertos consultados.

No fue eso, sin embargo, lo que se dijo en su momento. Cuando EL PAÍS y *El Heraldo de Aragón* publicaron, el 2 de marzo pasado, el informe de la fiscalía turca que ponía de manifiesto que 30 cadáveres estaban sin identificar pocas horas antes de su repatriación a España, el entonces ministro de Defensa, Federico Trillo-Figueroa, rechazó "rotundamente" que se cuestionara la "profesionalidad impecable" de los generales que firmaron la identificación de los cuerpos y lamentó que "un asunto tan doloroso haya sido objeto de un tratamiento informativo tan poco riguroso y con muy poco respeto a la intimidad de los afectados".

Ante la petición de explicaciones por parte del PSOE, el entonces presidente Aznar le espetó: "¡Dejen a los muertos en paz!"

Figura 3. *El Periódico de Aragón*, 28/9/04 ticas de la educación de las generaciones que actualmente realizan los medios, para no repetirlas (los errores de algunas gráficas pueden ser debidos a la malicia en los anuncios o a la manipulación en algún debate político enconado; en los demás es ignorancia). Y además hacernos una mejor idea de la presencia y apreciación social de las matemáticas, tanto más necesaria en los tiempos de reforma en los que estamos inmersos ya de lleno y en los que habrá que aportar razones internas a las propias matemáticas sobre la necesidad de dedicarles más tiempo en el sistema escolar. Pero también razones comparativas con las otras materias, porque la lucha por un lugar al sol va a ser dura y sin cuartel. Como muestra humorística de lo que se avecina tenemos el chiste un chiste de Postigo (*El Periódico de Aragón*, 28/9/04) (Figura 3).

Sorpresas

Pero no todo son desastres matemáticos. De cuando en cuando aparecen bien traídos ejemplos no obvios que dan luz sobre situaciones bien complejas. Como el artículo adjunto (Figura 4) aparecido en *El País* del 2/9/04. ■

Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 93-97

Leon Battista Alberti, la ingeniería y las matemáticas del Renacimiento

Ana Millán
hace.suma@fespm.org

Hace seiscientos años, el 14 de febrero de 1404 nació en Génova Leon Battista Alberti, uno de los principales representantes del Renacimiento italiano. Se iniciaba el Quattrocento: las ciudades europeas volvían a la vida, después de la trágica crisis del siglo precedente, marcado por las carestías, la guerra de los cien años y la peste negra, la terrible epidemia desencadenada en 1347. Alberti pertenecía a una conocida familia de Florencia, uno de los centros más vitales del espectacular desarrollo industrial, comercial y financiero europeo de los siglos XI-XIII, un periodo que puede ser considerado como una Revolución industrial de la Edad Media. A partir de mediados del siglo XIV y durante el siglo XV, la difícil coyuntura y sobre todo las fluctuaciones monetarias provocaron una dramática serie de bancarrotas de compañías y bancas florentinas que minaron el poder de la ciudad. Paradójicamente, en esas circunstancias las letras y las artes conocieron una época de esplendor, marcada por las figuras de los grandes humanistas (como, ente otros, Marsilio Ficino y Pico della Mirandola) que se reunían en el círculo neoplatónico de Lorenzo de Medici y por los grandes artistas que crearon el inigualable paisaje urbano que aún hoy podemos contemplar.

León Battista Alberti (1404-1472)

Alberti destaca en este ambiente por su personalidad intelectual polifacética. Licenciado en derecho canónico por la universidad de Bolonia en 1428, en su juventud escribió numerosas obras en latín sobre todos los temas típicos del humanismo, como la educación, el gobierno, la moral y el elogio del saber desinteresado independiente del ejercicio de una profesión y del dinero. Su vida transcurrió entre Florencia y Roma —pues se mantenía gracias a algunos beneficios eclesiásticos que le fueron concedidos— y frecuentó los círculos de humanistas en ambas ciudades. Su actividad principal puede ser considerada su trabajo de consejero de varios papas en relación con la renovación urbana de Roma, así como la recuperación y restauración de edificios e iglesias en varias ciudades italianas. Alberti es autor de muchos proyectos que sin embargo no dirigió en primera persona. Podríamos decir que la suya fue una labor de consultoría, y además de elaboración teórica del pensa-

Mientras que el interés por las matemáticas de muchos humanistas era esencialmente filosófico y con connotaciones místicas, en Alberti encontramos el eco de la matemática práctica, típico de la tradición italiana derivada de la obra de Fibonacci.

miento técnico del Renacimiento. Entre sus amistades se contaban Filippo Brunelleschi y otros muchos artistas, así como dos matemáticos, Paolo Toscanelli y Luca Pacioli.

Efectivamente, Alberti había empezado a estudiar matemáticas durante los años de una enfermedad juvenil que le había obligado a interrumpir sus estudios universitarios. Ahora bien, mientras que el interés por las matemáticas de muchos humanistas era esencialmente filosófico y con connotaciones místicas, ligado al renacer del interés por el pensamiento de Platón y a la circulación de las ideas de la cábala, en Alberti encontramos el eco de la matemática práctica típico de la tradición italiana derivada de la obra de Fibonacci, que condujo entre los siglos XV y XVI a un espectacular desarrollo del álgebra.

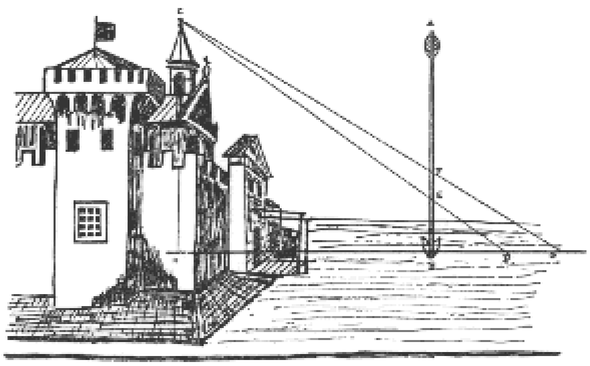


Figura 1.

La principal obra matemática de Alberti, *Ludi matematici* (escrita en torno a 1452, de la que procede la figura 1), está dedicada a la geometría práctica, esto es a las reglas de medición (superficies de terrenos, altura de torres, distancias entre ciudades); y escribió también una obra dedicada a la criptografía *De componendis cifris* (escrito en torno al 1466).

En contraste con la opinión de muchos humanistas, Alberti defendió la escritura en lengua vulgar y en su obra principal en toscano (la matriz del italiano actual), *Sobre la familia*, defiende una educación y un estilo de vida que permitieran el desarrollo de toda la potencialidad de la persona, sin desdeñar las actividades prácticas y un moderado bienestar económico

Si en el humanismo renacentista se suele ver la ruptura con la época medieval y el papel de la herencia clásica en la creación de la cultura occidental, la figura de Alberti permite acercarse a la herencia medieval y al papel de la técnica en la cultura europea, y al lugar de las matemáticas en el saber del ingeniero moderno.

obtenido con ellas. Si en el humanismo renacentista se suele ver la ruptura con la época medieval y el papel de la herencia clásica en la creación de la cultura occidental, la figura de Alberti permite acercarse a la herencia medieval y al papel de la técnica en la cultura europea, y al lugar de las matemáticas en el saber del ingeniero moderno.

Los humanistas miraban al pasado medieval como una época de estancamiento, de oscurantismo religioso e ignorancia, y su ideal era la cultura greco-latina y la exaltación de la dignidad humana, del libre ejercicio del espíritu crítico. La visión que aún hoy persiste de la Edad Media es fruto en gran parte de este punto de vista, que desfigura la rica evolución de Europa después del año mil. Es cierto también que la cultura latina medieval se había centrado en los problemas de matriz teológica, que condicionaban sin duda el ejercicio del libre pensamiento. Aun así, en las universidades y los monasterios europeos se llevó adelante un intenso trabajo filosófico y científico, que se confrontó con la herencia greco-latina y con los autores del islam clásico. En un estadio bastante avanzado de este trabajo, y precisamente a causa de su relevancia, las autoridades eclesiásticas cristianas intervinieron imponiendo una rígida censura a la actividad intelectual.

La visión de la Edad Media europea como una *época oscura* implica además ignorar la extraordinaria evolución de la innovación y del saber técnico. El interés por las actividades prácticas, por la acción opuesta a la contemplación, representaba uno de los rastros de la herencia del Imperio romano, aunque en la época medieval la evolución técnica experimentó una fuerte aceleración, facilitada por los cambios en el contexto cultural, social y político. A partir del siglo XI fueron introducidas invenciones en todos los ámbitos de la actividad humana, que la sociedad europea acogió y desarrolló con entusiasmo y vitalidad. Ejemplos fundamentales son: la rotación trienal de los cultivos; la explotación de la energía animal del caballo en la agricultura gracias a un correcto aparejo; la explotación de la energía hidráulica, con el molino de agua, no sólo para moler el trigo sino en la industria (textil, como en la figura 2, que muestra la operación de abatanadura de los tejidos, así como metalúrgica, de fabricación de la cerveza); el desarrollo de las armas de fuego, de las máquinas simples para alzar o transportar pesos, usadas en la actividad militar y en la construcción y de otras máquinas, como la rueca; y la invención del mecanismo por excelencia, el reloj mecánico que sustituyó a los antiguos relojes de agua y solares.

El mundo medieval había sufrido una cierta esquizofrenia respecto al bullir de la actividad técnica, por la rígida separación entre las artes mecánicas y las artes liberales y el consecuente

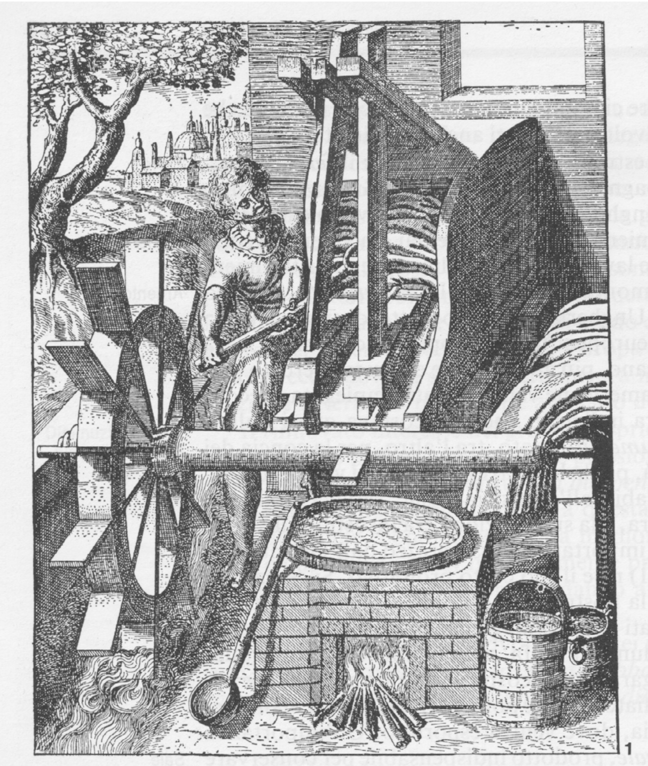


Figura 2

desprecio entre los universitarios y los eruditos por el trabajo manual y por la actividad práctica, que englobaba sin distinción la actividad de los artesanos, de los artistas y de los técnicos. Este punto de vista tiene ilustres precedentes en los pensadores griegos, y se mantuvo incluso durante el Renacimiento, a pesar del nuevo interés que se registraba por las cuestiones de la vida terrena. Leonardo de Vinci (1452-1519) se queja en sus escritos de la actitud de censura hacia él de los humanistas:

> Aunque no supiera aducir como ellos a los autores, mucho más digno de ser leído es aquello donde se aduce la experiencia, maestra de sus maestros. Van hinchados y pomposos, vestidos y ornados no de sus fatigas, sino de las fatigas de otros; y a mí mismo no conceden las mías; y si me desprecian a mí inventor, cuanto mayor desaprobación merecerán ellos, que no son inventores sino tromperos y recitadores de obras ajenas.
>
> *Códice Atlántico.*

Y también en 1577 Guidobaldo del Monte escribía en sus *Libros de mecánica*:

> Pero puesto que esta palabra Mecánica no será comprendida por todos según su verdadero significado, y al contrario los habrá que la considerarán un término injurioso (ya que en muchas partes de Italia es habitual llamarle a uno Mecánico como burla e insolencia, y algunos consideran un desprecio ser llamados Ingenieros) no será un despropósito recordar que Mecánico es un vocablo honestísimo ... el que conviene a un hombre de alto negocio que sepa con sus manos y con su juicio llevar a cabo obras maravillosas de singular utilidad y para el placer del vivir humano.

Durante el Renacimiento italiano se experimentó, entre los arquitectos e ingenieros (constructores de máquinas o *ingenios*), la exigencia de elaborar las bases teóricas de la propia actividad; y a esta tarea Alberti dio una contribución fundamental. Entre Medioevo y Renacimiento se debe hablar de arquitecto-ingeniero, pues ambas profesiones coincidían en la figura de un experto en construcción, conducción del agua y máquinas, con una marcada predilección por las aplicaciones militares y un mayor interés por las máquinas respecto a los técnicos romanos, que eran sobre todo grandes constructores de edificios y obras públicas. Ya en época medieval estos ingenieros empezaron a salir del anonimato de los artesanos y mecánicos y han llegado hasta nosotros algunos de sus escritos. Pero es sobre todo el Renacimiento la primera edad de oro de la ingeniería moderna, con un amplio conjunto de arquitectos-ingenieros, una gran producción de tratados técnicos y los primeros intentos de introducir las patentes para proteger a los *agudísimos ingenios capaces de excogitar y hallar varios artificios ingeniosos* (como se lee en una ley emanada en Venecia en 1474).

> *El mundo medieval había sufrido una cierta esquizofrenia respecto al bullir de la actividad técnica, por la rígida separación entre las artes mecánicas y las artes liberales y el consecuente desprecio entre los universitarios y los eruditos por el trabajo manual y por la actividad práctica de los artistas y de los técnicos.*

Durante los siglos XV y XVI se registra una doble evolución de la ingeniería. Por una parte, la profesión de ingeniero experimenta una maduración: las cortes europeas comienzan a sentir la exigencia de contar con ingenieros que se ocupen, más allá de las máquinas de guerra, de la dirección de proyectos técnicos como la conducción de las aguas, los caminos o los puentes. Por otra parte, se da un fuerte impulso a la creación de una ciencia del ingeniero, esto es, una disciplina sistemática basada en una producción escrita. A este fin, los ingenieros del Renacimiento juzgaban fundamental la asociación de la técnica con las matemáticas, las cuales podían dar una contribución fundamental para elevar la dignidad cultural de la ingeniería.

La relación entre las matemáticas y la ingeniería avanzaba con titubeos. En realidad, se trataba de una situación heredada del mundo clásico, en el que la tradición empírica de la ingeniería coexistía con una tradición técnica *matemática* que databa de la época helenística. Muchos ingenieros (*mechanici*) activos en el mundo romano habían recibido una formación matemática en Alejandría. Y los estudiosos alejandrinos habían producido algunos tratados importantes que examinaban cuestiones técnicas con el auxilio de la geometría. Un primer ejemplo es la *Óptica* atribuida a Euclides, un estudio matemático de la visión muchos de cuyos teoremas se relacionan directamente con lo que Herón llama la escenografía (*cómo conviene dibujar* [gráphein] *las imágenes de los edificios*), es decir, los problemas del dibujo y la representación gráfica. Otro ejemplo fundamental es la *Mecánica* de Herón, en la que se examinan las cinco máquinas simples. Y sobre todo, las obras de estática (*Sobre el equilibrio de los planos*) e hidrostática (*Sobre los cuerpos flotantes*) de Arquímedes, que sientan las bases de una ciencia teórica de la mecánica, representan el punto de referencia fundamental de esta tradición.

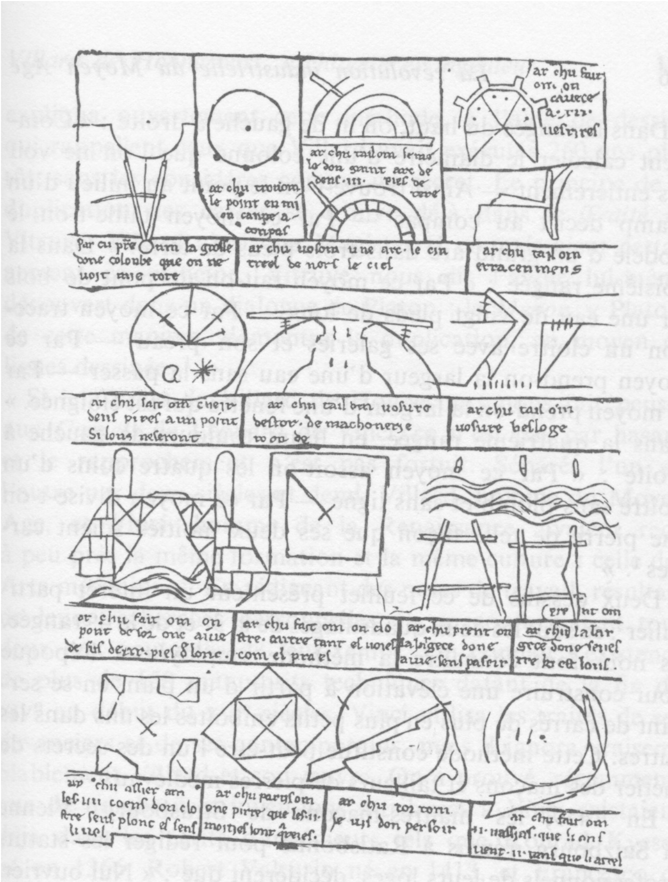


Figura 3

Un segundo filón era representado por una obra dedicada a las máquinas, la *Mecánica*, atribuida a Aristóteles, que circuló entre los siglos XV y XVI en la versión latina con el título *Quaestiones Mechanicae*, y traducida en varias lenguas vulgares. En ella el lenguaje geométrico se combina con una visión de la máquina como un *engaño* a la Naturaleza, como un artificio. En la tradición empírica se inscribían los *Diez libros de arquitectura de Vitrubio* (siglo I), que aunque defendía la exigencia de una formación sólida para el ingeniero y utilizaba la geometría, presentaba esencialmente en su obra reglas prácticas y no aplicaba la estática matemática.

Los estudiosos alejandrinos habían producido algunos tratados importantes que examinaban cuestiones técnicas con el auxilio de la geometría.

En muchos tratados renacentistas, la solemne afirmación de la importancia de las matemáticas en la actividad del ingeniero presente en la introducción, contrastaba con la total ausencia en sus páginas de cálculos precisos relativos al diseño de las máquinas y en relación con su rendimiento. Si embargo, los historiadores de la técnica consideran que Brunelleschi se basó en estudios matemáticos de estática y geometría de la elipse para construir la cúpula de la iglesia de Santa Maria del Fiore, en la que trabajó entre 1420 y 1436. Y Leonardo analizó geométricamente muchas de las máquinas típicas de la técnica europea, el molino de agua, los engranajes y la rueca. Alberti, por su parte, en su tratado *Della pittura* (1432), dedicada a las nuevas concepciones renacentistas, se ocupó de la teoría de la perspectiva como técnica pictórica formulando sus resultados en el lenguaje geométrico de la óptica de Euclides.

La representación gráfica basada en la geometría constituye uno de los aspectos fundamentales de la sistematización del saber técnico. Un ejemplo de época medieval es la representación *ingenua* por medio de la cuadriculación en los croquis de los cuadernos de notas del ingeniero francés Villard de Honnecurt (primera mitad del siglo XII). Los límites del pensamiento geométrico de los ingenieros del Renacimiento son evidentes en otra obra fundamental de Alberti, *De re aedificatoria*, dedicada a la técnica de la construcción. Este tratado, compuesto en latín entre 1443 y 1452, pretende emular y superar la obra de Vitrubio (la obra de Alberti fue publicada después de su muerte, en 1485, y dos años después lo fue la de Vitrubio: eran los primeros años de la imprenta).

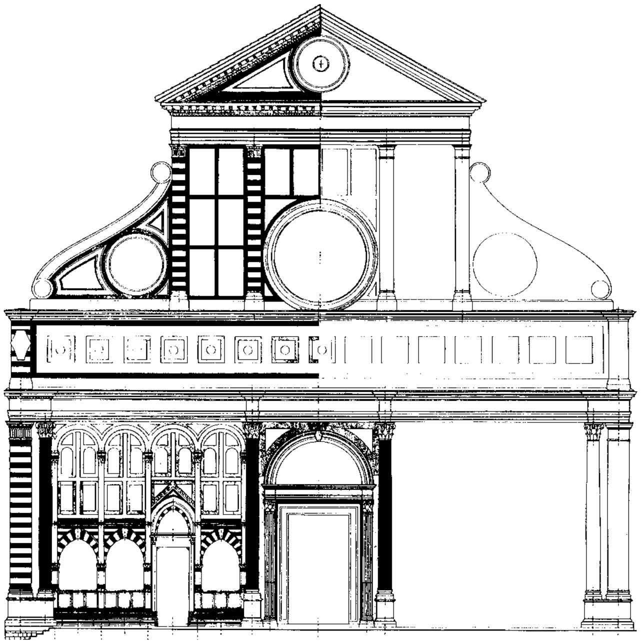


Figura 4. Foto FMC

Alberti, gran admirador de los logros técnicos de Brunelleschi, distinguía lúcidamente los aspectos estéticos y los aspectos de ingeniería que se entremezclaban en la arquitectura, y a la vez consideraba que el diseño sobre bases matemáticas distinguía al arquitecto del simple técnico especializado. Sin embargo, las matemáticas entraban en la actividad constructiva a través de la forma y no a través de la estática de los edificios. En su obra se utiliza el lenguaje de las proporciones para presentar en forma matemática reglas empíricas —por ejemplo en la construcción de los puentes de piedra— y, a la vez, partiendo de la teoría de las proporciones se derivan criterios estéticos, inspirados por la teoría musical y basados en las clásicas medias aritmética, geométrica y armónica.

Las concepciones de Alberti, que buscaban recuperar la monumentalidad de la arquitectura clásica, inspiraron algunos famosos edificios de la época, como la fachada de Santa Maria Novella en Florencia, una iglesia gótica del siglo XIII, que fue reformada en 1458.

El Renacimiento italiano representa un periodo de transición en la relación de las matemáticas con la praxis, tanto en la esfera técnica como en el comercio y otras actividades. La antigua tradición de matemática práctica, basada en recetas empíricas, que coexistía con la matemática culta de matriz griega, recibió una gran atención. Al mismo tiempo, recibió nuevo impulso la aplicación de la matemática teórica a problemas técnicos. La interacción entre las matemáticas y la técnica en la Europa moderna se mostró fecunda para ambos sectores del saber. Así, algunos importantes problemas técnicos, en los campos de la fabricación de lentes y la balística, fueron un estímulo poderoso en el desarrollo del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Los estudios de perspectiva de Alberti, junto a los de Durero —que hicieron obsoleta la óptica euclidiana— se colocan en los orígenes de la renovación de la geometría con el desarrollo de la geometría proyectiva. Viceversa, durante los siglos XVIII y XIX las nuevas técnicas matemáticas y de la física-matemática mostraron una utilidad efectiva en la actividad del ingeniero que transformó profundamente las formas tradicionales del pensamiento del ingeniero.

Característico del ingeniero moderno fue la sustitución de una visión estático-arquitectónica de la realidad técnica por una visión dinámica, de proceso, de optimización. El análisis matemático sustituyó naturalmente a la teoría de las proporciones y a la geometría clásica, renovando y consolidando a la vez la unión entre matemáticas y ciencias de la ingeniería. El uso de las matemáticas y de la ciencia llevó así a alejar la figura del ingeniero de la figura del artista. De hecho, en la ingeniería moderna la relación con las matemáticas ha sido a menudo de amor-odio, porque se ha identificado en las matemáticas la pérdida de algunos elementos que distinguen al pensamiento técnico del pensamiento científico, el valor de la inspiración, de la experiencia y de la interacción directa con la realidad. ■

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Florencio Villarroya Bullido**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Serapio García Cuesta**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: -
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Actividades: **Xavier Vilella Miró**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez i Urgellés
UPC Vilanova i la Geltrú, 08800 Barcelona

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Paseo del Limonar 2, 29016-Málaga

Sociedad Aragonesa "Pedro Sánchez Ciruelo" de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR II. Avda. Reina Sofía n.º1. 30009 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima"
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Calle García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática.
Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 99-108

Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones

Presentación de En un cuadrado

Solía dar con mi abuelo Antonio larguísimos paseos, durante los cuales el declamaba en voz alta poemas de Rubén Darío. Yo sobrellevaba la vergüenza de ir a su lado haciendo como que no le conocía e intentando decidir qué golosina elegiría en La Pajarita, La Violeta, Lhardy, Casa Mira *o* Juncal *cuando acabase aquel tormento, pues mi abuelo, que aunque estuviese como una cabra de tonto no tenía un pelo, sabía muy bien qué prometerme para mantenerme a su vera.*

Durante aquellos paseos, si él no estaba recitando Sonatina, Marcha Triunfal *o alguna de las* Margaritas, *mi abuelo y yo, fundamentalmente, discutíamos. Los temas siempre eran los mismos: los edificios y religión. Nuestros paseos comenzaban en su casa, junto a la plaza de Emilio Castelar. Como a mi abuelo le gustaba el edificio del Fénix y a mí Bankunión, la primera discusión solía tener un cariz intelectual: "ese edificio que tanto miras es un mamarracho". "Pues el que estabas mirando tú es siniestro". De esta guisa y recorriendo, ya fuese la Castellana hasta la Plaza de Cibeles, ya fuese la calle Serrano hasta la Puerta de Alcalá, íbamos tan entretenidos hasta la Puerta del Sol, donde hacíamos nuestra primera parada en La Pajarita. De nuevo en marcha, comenzaba el recorrido de escaparates:* Lhardy, La Violeta *y* Casa Mira.

Desde Casa Mira, unas veces retrocedíamos de nuevo hasta la Plaza de Canalejas, bajábamos por la calle de Alcalá hasta Cibeles, y desde allí nos dirigíamos directamente a Juncal, *en la calle Recoletos. Otras veces seguíamos por la Carrera de San Jerónimo hacia abajo hasta la Plaza de Neptuno, y allí solía comenzar la segunda discusión, que nos mantendría entretenidos durante el camino de vuelta. Mi abuelo no podía pasar con su nieta junto al desnudo Neptuno sin hacer algún comentario pío mientras miraba la Iglesia de los Jerónimos, a ver si así me distraía la atención. Y, claro, aquello nos metía de lleno en el segundo de nuestros temas de debate. "Decía*

Esta nueva sección de SUMA toma el título del cuadro de Kasimir Malevich (1878-1935)
En un cuadrado (1913)

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fesmp.org

Jesucristo ...” “Mira abuelo, déjate de rollos que Jesucristo era socialista...” Y así de vuelta hasta López de Hoyos.

Tanto cuando discutíamos sobre edificios, como cuando discutíamos sobre religión, estaba claro que la diferencia esencial entre nuestros puntos de vista surgía de dos cosas: la muy distinta manera que teníamos mi abuelo y yo de concebir el mundo y espacio que nos rodea como seres humanos, y el lugar tan distinto en el que colocabamos al ser humano en este espacio. Podríamos decir que, como en casi todas las relaciones, el problema entre nosotros era una cuestión de espacio. Un espacio que mi abuelo —como Newton y los matemáticos del siglo XVII, por otro lado— tenía identificado con su idea de Dios y del universo que nos rodea —un contenedor infinito que nos alberga y que es independiente de nosotros— y que yo, como matemática del siglo XX —entonces—, tenía identificado con el fruto de lo que ocurre en el propio espacio en cada momento. He aquí nuestros puntos de vista, el de mi abuelo y el mío, recogidas en una definición de diccionario.

> Espacio y tiempo. Términos usados en filosofía para describir la estructura de la naturaleza. A veces son descritos como contenedores en los que ocurren todos los sucesos y procesos naturales, y a veces como relaciones que conectan tales sucesos. (*Enciclopedia Collier's, 1968)*

Velázquez*, Las Meninas* (1656),
Museo del Prado, Madrid

La segunda frase en esta definición nos dice que espacio y tiempo son unas veces concebidos como contenedor, y otras como relaciones. Curiosamente, estas dos palabras, contenedor *y* relación *describen, respectivamente, la idea de Espacio que encontramos en el siglo XVIII, cuando la noción de espacio se menciona explícitamente por primera vez en matemáticas (en cartas de Newton y en el apéncide a* Introductio *de Euler (1748)), y la idea de espacio en las matemáticas contemporáneas (definido con precisión por Hausdorff (1914).*

Muerto ya mi abuelo, he mantenido dos costumbres: el recorrido de nuestros paseos, y las reflexiones sobre las distintas maneras de concebir y describir el espacio y, en particular, entender qué motivó a los matemáticos a llevar a cabo el enorme salto conceptual que supone el pasar de concebir y describir el espacio como un contenedor único en el que habitan las cosas, a concebir y describir el espacio como una red de relaciones que se establece entre cosas concretas. Cuando pensamos en el espacio como un contenedor, estamos pensando en el espacio como un objeto global enorme dado a priori. Un espacio-red, sin embargo, no es un espacio elegido a priori, sino uno que se construye a partir de las relaciones locales que se establecen entre los elementos del propio espacio. Y muchas veces serán las redes de relaciones, las que, sustituyendo los elementos iniciales, funcionen como “puntos”, como ladrillos básicos de estos espacios matemáticos.

Con los años introduje un cambio fundamental en el recorrido de mis paseos, que desde hace tiempo termino entrando en el Museo del Prado, en el Reina Sofía o en el Thyssen y recorriendo alguno de sus pasillos. De esta manera, de forma natural los cuadros de Velázquez, Goya o Picasso, por citar algunos ejemplos, empezaron a añadirse a los edificios en mis reflexiones sobre el espacio en matemáticas.

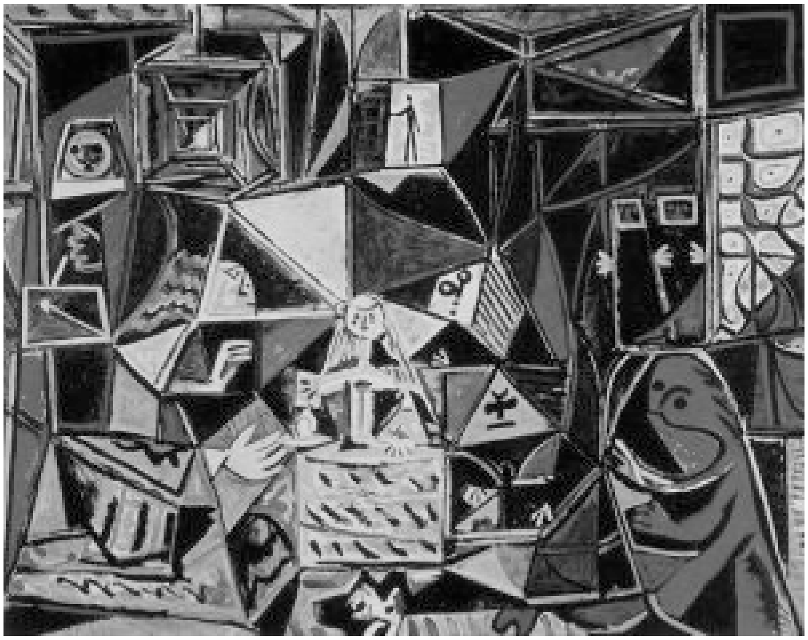
Las matemáticas funcionan a base de ideas, y las ideas son imágenes mentales. Y como imágenes que son, se ven o no se ven. El proceso de comprensión de las matemáticas y de las ideas en general, requiere pasar por el momento de súbita iluminación, por el ¡Eureka! *de Arquímedes.*

> Quizás la mejor manera de describir mi experiencia haciendo mátemáticas sea comparándola con entrar en una mansión oscura. Entras en la primera habitación, y está a oscuras, completamente a oscuras. Vas dando tumbos, tropezando con los muebles. Poco a poco aprendes dónde está cada mueble, y finalmente, después de más o menos seis meses, encuentras el interruptor de la luz y lo conectas. De repente todo se ilumina, y puedes ver exactamente dónde estás. Entonces entras en la siguiente habitación oscura ...
>
> *Andrew Wiles,*
> *en* El último teorema de Fermat,
> *programa Horizon de la cadena de televisión BBC*
> *2 de octubre de 1997.*

Con frecuencia, una imagen física adecuada consigue que se encienda el interruptor en nuestra cabeza y logremos ver la idea. El problema está en que las matemáticas, al ser abstractas, no traen consigo imágenes físicas, y con frecuencia hemos de buscar los interruptores fuera de ellas. En cuadros, por ejemplo. El salto de la caja a la red supone un cambio enorme en la manera de mirar, física y conceptualmente, en nuestro derredor. Este cambio, que podemos reconocer en todos los ámbitos de nuestra cultura, no sólo el científico, está muy bien ilustrado por los cuadros Las Meninas *de Velázquez (1656) y* Las Meninas *de Picasso (1957).*

En el lienzo de Velázquez el espacio entre la princesa y María Agustina Sarmiento, la doncella que se arrodilla frente a ella, es un contenedor cúbico externo a ambas niñas, parte de la habitación en la que la escena tiene lugar. Una habitación que, tal y como está representada en el cuadro, no cambiaría nada si las jóvenes no estuviesen en ella. Sin embargo, el espacio entre estas mismas figuras en el cuadro de Picasso es una red: la manera en la que cada niña ve a la otra, y la posición en la que cada una de ellas está colocada respecto a la otra, da lugar a la red de triángulos que como estructura espacial las conecta entre sí y con el resto de las figuras en la habitación. La escena está compuesta por múltiples relaciones locales que Picasso representa mediante una estructura espacial formada por figuras geométricas básicas como triángulos y rectángulos. Podríamos sacar a las niñas de la escena pintada por Velázquez sin necesidad de cambiar el resto de la habitación, mientras que si hiciésemos lo mismo en el lienzo de Picasso, habría que pintar de nuevo todo el cuadro.

En esta sección describiremos algunos aspectos del proceso que, a lo largo de dos siglos (el XIX y XX) nos lleva desde un espacio concebido como contenedor infinito en el que flotan todos los objetos hasta el espacio concebido como una red de relaciones entre objetos Un proceso que tuvo lugar y se manifestó en todos los aspectos de la cultura occidental. Desde estas páginas intentaremos analizar algunos detalles de la evolución experimentada por la mirada matemática, e ilustraremos las ideas con algunos de los cuadros que se pintaban en las distintas épocas en que los conceptos matemáticos que analizaremos se cocinaban. Las elecciones, tanto en las matemáticas como en la pintura, responden a preferencias personales: dentro de lo que conocemos y viene al caso, elegimos lo que más nos gusta. Relatos más detallados pueden encontrarse en Corrales (2000) Gray (1992); Osserman (1995); Panofsky (1927); Serres (1990) y Tarrés (1994). ■



Picasso, *Las Meninas (1957)*
Museo Picasso, Barcelona

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CORRALES, C. (2000): *Contando el espacio*, despacio.mobcoop ediciones, Madrid.

EULER, L. (1748): *Introductio*, en *Opera Omnia*, Leipzig-Berlin-Zurich, 1911-1957.

GRAY, J. (1992): *Ideas del espacio*, Biblioteca Mondadori,1992.

HAUSDORFF, F. (1914): *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig –Veit.

OSSERMAN, R. (1995): *Poetry of the Universe; a mathematical exploration of the Cosmos*, Traducción al castellano en Drakontos Grijalbo-Mondadori, 1997.

PANOFSKY, E. (1927): *Perspective as Symbolic Form*, Trad. al castellano en Ed. Tusquets, 1991.

SERRES, M. (1990): *Le passage du Nord-Ouest*. Trad. al castellano en Editorial Debate, 1991.

TARRÉS, J. (1994): "La topología general desde sus comienzos hasta nuestros días", en *Historia de la matemática en el siglo XIX* (2ª parte), R. Acad. CC. Exactas, Físicas y Naturales.

Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones

Una de las contribuciones esenciales a la forja de la mirada matemática contemporánea, fue la de B. Riemann a mediados del siglo XIX. La emergencia en el contexto matemático de geometrías distintas de la euclídea, llevó a Riemann a analizar las restricciones a las que habían estado sometida la geometría hasta entonces, y a hacerse una serie de preguntas que fueron determinantes en la evolución del concepto matemático de espacio. Sus reflexiones liberaron a las matemáticas, entre otras cosas, de la limitación impuesta por el uso exclusivo de los objetos de la geometría euclídea como constituyentes de un espacio matemático, y la obligación de vivir en universos tridimensionales.

El espacio ambiente en el que existen los objetos de la geometría de Euclides se conoce como Espacio Euclídeo; un espacio con una geometría esférica será un espacio esférico; un espacio con una geometría hiperbólica será un espacio hiperbólico, etc. Espacios con distintas geometrías tienen distintas propiedades. En unos habrá rectas paralelas, en otros no; en unos la suma de los ángulos de un triángulo será siempre 180°, en otros no. Riemann cayó en la cuenta de que, aceptadas como válidas geometrías distintas de la euclídea, el paso natural a continuación es aceptar también como válidos los espacios ambiente en que habitan estas geometrías.

> *Riemann cayó en la cuenta de que, aceptadas como válidas geometrías distintas de la euclídea, el paso natural que dar a continuación es el aceptar también como válidos los espacios ambiente en que habitan estas geometrías.*

El problema que surge de inmediato es que una vez tenemos construidos varios espacios matemáticos, algunos muy parecidos entre sí, el decidir cuál de ellos casa mejor con el Espacio Físico deja de ser obvio. Como señala Riemann, nuestra decisión depende tanto de nuestras pre-concepciones sobre el Universo Físico como de los datos experimentales que tengamos a mano. *¿Por qué ha de ser el Espacio Físico un enorme contenedor cúbico?*, argumenta. *¿Por qué no puede ser una esfera inmensa o un gran elipsoide?* Si tal fuese el caso, dado el tamaño del Universo nosotros lo percibiríamos plano, como, esencialmente, lo percibimos. Reflexiones parecidas a estas llevaron a Riemann a varias conclusiones fundamentales que hermosamente explica (con una única fórmula, corta) en la *Habilitationsschrift* que presentó en 1854 cuando tomó posesión de su puesto de *Privatdozent* en la universidad de Göttingen (Riemann, 1854). La primera fue reconocer que Espacio Geométrico (el espacio ambiente a que da lugar un tipo de geometría) y Espacio Físico son conceptos distintos. Una vez dado este paso, el siguiente es dejar atrás el espacio tridimensional, y Riemann lo hace en tres direcciones simultáneamente.

- Por un lado, considera espacios curvos, espacios con curvatura no cero, siguiendo el camino abierto por las geometrías de Gauss, Lobachevsky y Bolyai.
- Por otro, generaliza las propiedades del Espacio Euclídeo a espacios con más de tres dimensiones, comenzando así el estudio de lo que se conoce como Hiperespacios (espacios con más de tres dimensiones).
- Finalmente, propone la validez de espacios construidos a partir de objetos distintos de los elementos de la geometría euclídea.

> *Cuando murió Riemann en 1866, en matemáticas se tenía una concepción intuitiva de la dimensión de un espacio, que se identificaba con el número de coordenadas independientes necesarias para determinar la posición de un punto en tal espacio.*

Las reflexiones de Riemann sugirieron posibilidades maravillosas, y también hicieron que las gentes de la matemática fuesen conscientes de que había aún mucho trabajo que llevar a cabo. Por ejemplo, la noción de dimensión tenía que ser definida. Una tarea encarada, entre otros, por Cantor y Dedekind. Cuando murió Riemann (1866), en matemáticas se tenía una concepción intuitiva de la dimensión de un espacio, que se identificaba con el número de coordenadas independientes necesarias para determinar la posición de un punto en tal espacio. Por ejemplo, un espacio esférico tendría dimensión 2, pues se necesitan sólo dos coordenadas —longitud y latitud— para determinar la posición de un punto sobre la superficie de la esfera. Pero esta definición nunca hasta entonces se había necesitado dar de forma precisa.

En su correspondencia de 1874, Georg Cantor y Richard Dedekind reflexionaron sobre esta idea intuitiva de dimensión, y ambos estaban de acuerdo en que un conjunto de dimensión 2 debería, de alguna manera, ser más grande que otro de la misma naturaleza y dimensión 1. El método más fácil para comprobar si dos conjuntos tienen el mismo tamaño consiste en emparejar los elementos de uno y otro: si después de hacerlo no nos sobra ningún elemento en ninguno de los dos conjuntos, podemos concluir que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. En matemáticas, formar parejas con los elementos de dos conjuntos de manera que cada pareja tenga un elemento de cada conjunto y que ningún elemento esté en más de una pareja, se llama establecer una *correspondencia biunívoca* entre los conjuntos. Cantor y Dedekind pensaban que no debería ser posible establecer una correspondencia biunívoca entre conjuntos de distinta dimensión, por ejemplo una recta (dimensión 1) y una superficie (dimensión 2). Pero para su sorpresa —y la de toda la comunidad matemática—, en 1877 Cantor logró construir una correspondencia biunívoca entre un segmento y un cuadrado, un segmento y un cubo y, en general, un segmento y una caja de cualquier dimensión positiva p. Este ejemplo llenó de perplejidad a Dedekind, pues parecía indicar que es posible reducir p dimensiones independientes a una sola dimensión y eso contradice la idea intuitiva de dimensión.

Leamos algunos extractos de la correspondencia entre Cantor y Dedekind sobre el tema (traducción de la autora de la versión inglesa de John Fauvel y Jeremy Gray (1987)).

Cantor a Dedekind, 5 de enero de 1874:

> ¿Es posible establecer una correspondencia entre un cuadrado (supongamos un cuadrado en el que incluimos sus lados) y un segmento (supongamos un segmento con sus extremos incluidos) de tal manera que a cada punto de la superficie corresponde un punto del segmento y, recíprocamente, a cada punto del segmento le corresponde un punto de la superficie? En este momento me parece que la respuesta a esta pregunta —por mucho que uno esté tan tentado de responder *no*, que la demostración parezca superflua— ofrece grandes dificultades.

Cantor a Dedekind, 29 de junio 1877:

> Su última respuesta a nuestro trabajo fue tan inesperada y nueva que, por decirlo de alguna manera, no seré capaz de recuperar la compostura hasta que no haya recibido de usted, querido amigo, una decisión sobre su validez. Mientras no lo haya confirmado sólo puedo decir: *lo veo pero no lo creo* [cursivas en francés en el original]. [...] La distinción entre dominios de dimensiones diferentes deberá ser buscada de forma muy distinta que el característico número de sus coordenadas.

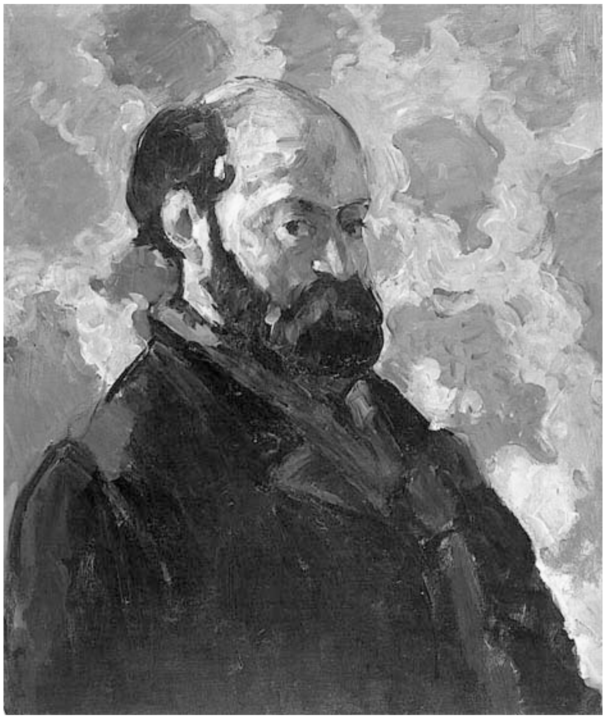
Dedekind a Cantor, 2 de julio 1877:

> He comprobado su demostración una vez más, y no encuentro ninguna laguna en ella; estoy convencido de que su interesante teorema es verdad y le felicito, [...] Pero ahora creo posible, provisionalmente, el siguiente teorema: dada una correspondencia biunívoca entre los puntos de una variedad continua **A** de dimensión a por un lado, y los puntos de una variedad contínua **B** de dimensión b por otro, entonces la correspondencia en cuestión, si a y b son desiguales, es necesariamente discontinua.

Como leemos en el último párrafo, Dedekind llegó a la conclusión de que si somos capaces de establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos continuos de dimensiones distintas, entonces esta correspondencia habrá de ser discontinua (una correspondencia es discontinua, por ejemplo, si tiene saltos o agujeros). Esta idea le llevó a enunciar la siguiente conjetura (conocida hoy como el *teorema de la dimensión*): “toda correspondencia biunívoca entre conjuntos de distinta dimensión es discontinua”. Este teorema no fue demostrado por Dedekind ni Cantor ni ninguno de sus contemporáneos. Tras muchos años y mucha gente intentándolo, fue demostrado, independientemente y siguiendo métodos distintos, por L.E.J. Brouwer y H. Lebesgue en 1911.

> *Esta idea llevó Dedekind a enunciar la siguiente conjetura (conocida hoy como el* teorema de la dimensión*): “toda correspondencia biunívoca entre conjuntos de distinta dimensión es discontinua”. Este teorema no fue demostrado por Dedekind, ni por Cantor.*

Aunque Cantor no lograse demostrar el teorema de la dimensión, sus intentos por entender el paso de una a dos dimensiones —de un segmento a un cuadrado—, y de dos a tres dimensiones—de un cuadrado a un cubo—, le llevaron a hacer descubrimientos que cambiaron de manera esencial la forma en que la gente de la matemática miraba el mundo en derredor.



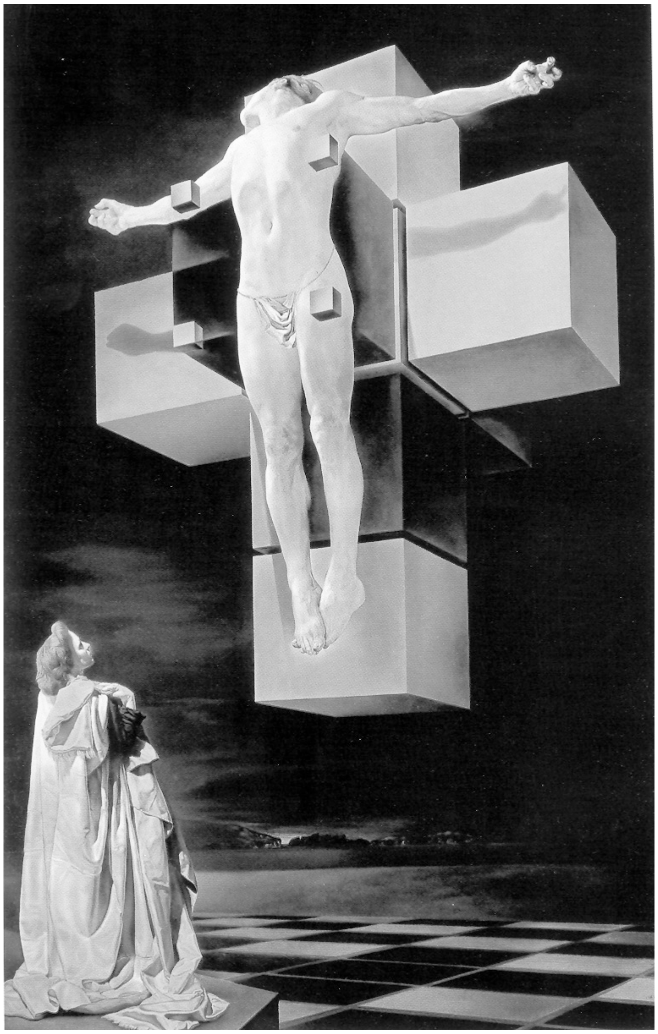
Paul Cezanne (1839-1906) -Autoretrato

Cézanne nos ofrece el mejor ejemplo gráfico de los esfuerzos llevados a cabo por los pintores contemporáneos a Cantor y Dedekind por entender el paso de dos a tres dimensiones, esto es, para reducir relaciones de profundidad a relaciones sobre una superficie: Cézanne ve un objeto tridimensional y quiere construirlo sobre un lienzo bidimensional, y hacerlo sin efectos ilusorios ni deformaciones. Desde Masaccio (y sus infructuosos esfuerzos para construir un toro, una rosquilla) y hasta la época de Cézanne, los pintores occidentales no habían intentado construir objetos, y por lo tanto nunca habían tenido que enfrentarse al problema de la deformación. La vuelta de Cézanne a la construcción de objetos le obliga a enfrentarse con la desagradable deformación, una lucha que, según sus escritos, le hizo sufrir toda su vida. Por supuesto Cézanne falla, como fallaron cartógrafos y matemáticos antes de que Euler demostrase en el siglo XVIII que la representación conforme —esto es, la construcción sin deformaciones— de un objeto tridimensional sobre una superficie bidimensional es imposible. Sin embargo, gracias a sus intentos, Cézanne aprendió a liberarse (y liberar de paso a los pintores que le siguieron) de la tiranía de la tridimensionalidad. Las estrategias de Cézanne (y de Seurat, Matisse, cubistas, etc.) para resolver el problema —el uso de trazos gruesos y discontínuos, la construcción de volúmenes mediante planos, o el dar la misma textura y colores a los distintos objetos y materiales, por ejemplo a las montañas y al cielo a su alrededor (Corrales, 2000 y Loran, 1963)—, pueden verse con toda claridad en la serie de cuadros que llevó a cabo entre 1904 y 1906 sobre el monte *Saint Victoire*.

Cézanne nos ofrece el mejor ejemplo gráfico de los esfuerzos llevados a cabo por los pintores contemporáneos a Cantor y Dedekind por entender el paso de dos a tres dimensiones, esto es, para reducir relaciones de profundidad a relaciones sobre una superficie.

Hay algo que subyace de manera esencial al trabajo de Cèzanne y Dalí: su preocupación por el tema de las dimensiones. Para empezar, y desde el punto de vista formal, hay algo que introduce Cézanne y que Dalí mantiene: en los cuadros de Cézanne, los tamaños no varían de acuerdo con las reglas perspectivas.

En 1904, hace exactamente cien años y en pleno esplendor de Cézanne, nace Salvador Dalí. Hay algo que subyace de manera esencial al trabajo de ambos: su preocupación por el tema de las dimensiones. Para empezar, y desde el punto de vista formal, hay algo que introduce Cézanne y que Dalí mantiene (como tantos otros de sus contemporáneos, que llegaron a las Escuelas de Bellas Artes en un momento en el que las ideas y técnicas de Cézanne eran materia esencial de estudio): en los cuadros de Cézanne, los tamaños no varían de acuerdo con las reglas perspectivas. Su espacio (como el de muchos pintores renacentistas, —pensemos en Giotto o Piero de la Francesca— no es el espacio ilusorio de Proclo (1970) reproducido mediante la perspectiva, claroscuro o gradaciones de color. Profundidad, tridimensionalidad, se obtiene compensando los volúmenes de tal manera que se respeta la bidimensionalidad del lienzo; variando la distancia entre planos verticales, Cézanne crea profundidad, tensión y ritmo, siempre en relación con el plano, con lo bidimensional. Lo mismo que hará Dalí en sus lienzos. Pero más allá de esta primera —y fácil de ver— manera común de enfrentarse al problema de construir un objeto con volumen sobre una tela plana, Cézanne y Dalí estaban ambos profundamente interesados en el tema del paso de una a otra dimensión. Y como los matemáticos, —Cantor y Dedekind, por ejemplo— también los pintores se esforzaron en estudiar el paso de una a dos y de dos a tres dimensiones, buscando las reglas generales que les permitirían, como en muchos aspectos ha hecho la matemática contemporánea, trascender el problema de las dimensiones: no hace falta que nos preocupemos por saber en qué dimensión estamos trabajando, porque lo que estamos haciendo funciona en cualquiera de ellas.



Cézanne, Seurat y, de hecho, casi todos los pintores que a fines del siglo XIX y principios del XX trabajaban estos temas, solo estaban interesados en el problema desde el punto de vista de la representación pictórica. Dalí quería ir más allá, quería llegar a construir objetos en cuatro dimensiones.

Aunque sus escritos y declaraciones sobre el tema estén llenos de palabras altisonantes y conceptos complicados (y con frecuencia, también de disparates), lo cierto es que al analizar los cuadros en los que Dalí ilustra sus reflexiones sobre el tema, nos damos cuenta de que tanto las herramientas matemáticas sobre las que se sustenta, como sus propuestas, son muy simples. Estudiemos el primero y más famoso de ellos *Corpus hypercubus (Crucifixión)* de 1954.

Corpus hypercubus: cuerpo hipercubo. Efectivamente, hay un cuerpo, el del crucificado, pero, ¿dónde está el hipercubo? La cruz que flota en el espacio del cuadro esta formada por ocho cubos, pero todos ellos son cubos-cubos, esto es, cubos de tres dimensiones. ¿A qué hipercubo se refiere Dalí? En una entrevista que Carlos de Miguel hizo al pintor en 1972 con motivo de la muerte de su colaborador y amigo, el arquitecto Emilio Pérez Piñero[1], Dalí explica que en este cuadro, el Cristo, que es la cuarta dimensión, descansa, como debe ser, sobre un hipercubo, esto es, sobre un cubo de cuatro dimensiones, objeto que él, Dalí, pintó siguiendo las reglas matemáticas establecidas por Raimundo Lull tal y como las describió con toda precisión Juan de Herrera en su *Discurso sobre la Figura Cúbica.* Así pues, según el propio Dalí, los ocho cubos que aparecen en el lienzo, además de formar una cruz, juntos constituyen un hipercubo, es decir, un cubo de cuatro dimensiones, y la clave para entender tal construcción está en el texto de Juan de Herrera.

Buscamos, pues, el tratado sobre la figura cúbica del arquitecto del Monasterio Palacio del Escorial. Nos cuesta encontrarlo, pues en la única edición a la que tenemos acceso (Herrera (1979, libro de 509 páginas), el texto de Juan de Herrera aparece escondido entre las notas de los editores, escritas imitando el estilo del *Discurso* y sin especificar claramente dónde empieza y dónde termina la voz de Herrera (páginas 57 a 154). Según voy leyendo el Discurso, para extraer la parte matemática y no perderme en las frecuentes disquisiciones esotéricas, voy clasificando las páginas del texto según su contenido (la numeración de las páginas se refiere a la edición citada):

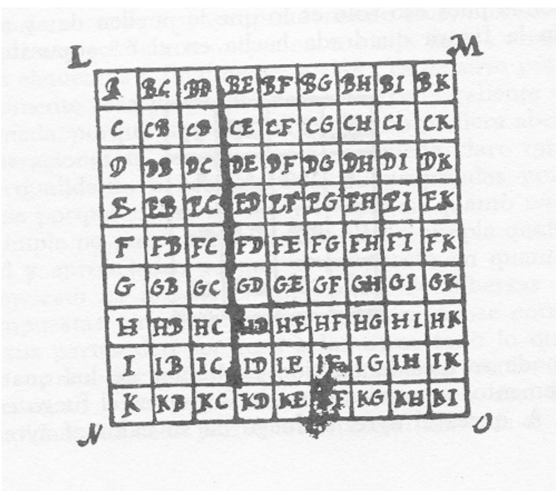
Página 68: El *Discurso* comienza con una serie de láminas. Las dos primeras, muestran tres círculos y tres triángulos equiláteros, todos ellos concéntricos. Los tres triángulos son todos del mismo tamaño y están inscritos en el menor de los círculos. Círculos y triángulos son las figuras que, según Juan de Herrera, es preciso conocer para poder introducir el cubo. Las láminas restantes ilustran cómo construir un sistema de coordenadas en un cuadrado: dividimos dos de sus lados en varias partes iguales, asignamos a cada parte una letra distinta, construimos con estas partes una retícula de pequeñas celdillas cuadradas y, como en el juego de los barcos, a cada celdilla le asignamos las dos letras que le correspondan.

Parte 1 (págs. 69 a 88): Enunciado y análisis de las definiciones de Euclides de cuadrados y cubos (Euclides (1925), VII-18, VII-19, XI-25).

Parte 2 (págs. 88 a 111): Breve presentación de los trece artículos de la doctrina de Raimundo Lull, de las tres dimensiones de todo lo que es (Razón formal, Razón final y la suficiencia y el cumplimiento de las dos Razones, formal y final), y de los nueve principios absolutos de que, según Raimundo Lull, todo lo que es está hecho (bondad, grandeza, duración, potestad, sabiduría o instinto, voluntad o apetito, virtud, verdad y gloria o suavidad y, por último, deleitación), seguida de una descripción detallada de todo ello.

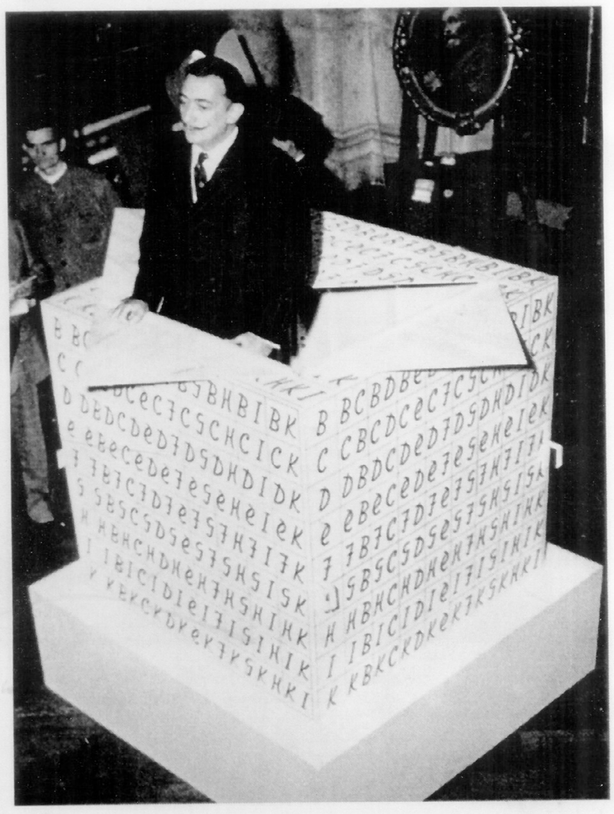
Parte 3 (págs. 112 a 154): Explicación de por qué el cubo contiene en sí todo lo que es, partiendo de que todo lo que es tiene las tres dimensiones enunciadas en la parte 2, y está hecho de la combinación de, como mucho tres, de entre los nueve principios absolutos o ingredientes listados en la parte 2. La explicación se resume muy fácilmente: tomamos un primer segmento, que representará la primera de las dimensiones, y lo dividimos en nueve partes, una por cada uno de los principios absolutos. Denotamos estas nueve partes por las letras *B, C, D, E, F, G, H, I* y *K* respectivamente. Siguiendo las instrucciones de Euclides explicadas en la parte 1, con este segmento y otro similar que representa la segunda dimensión, construimos un cuadrado formado por 9 x 9 = 81 celdillas planas que, como en el juego de los barcos, denotamos por *BC*, *FG*, etc.

Al llegar a este punto, dibujo el cuadrado resultante con sus celdillas, y escribo en cada una de ellas su nombre. Comparo mi dibujo con el de Juan de Herrera.



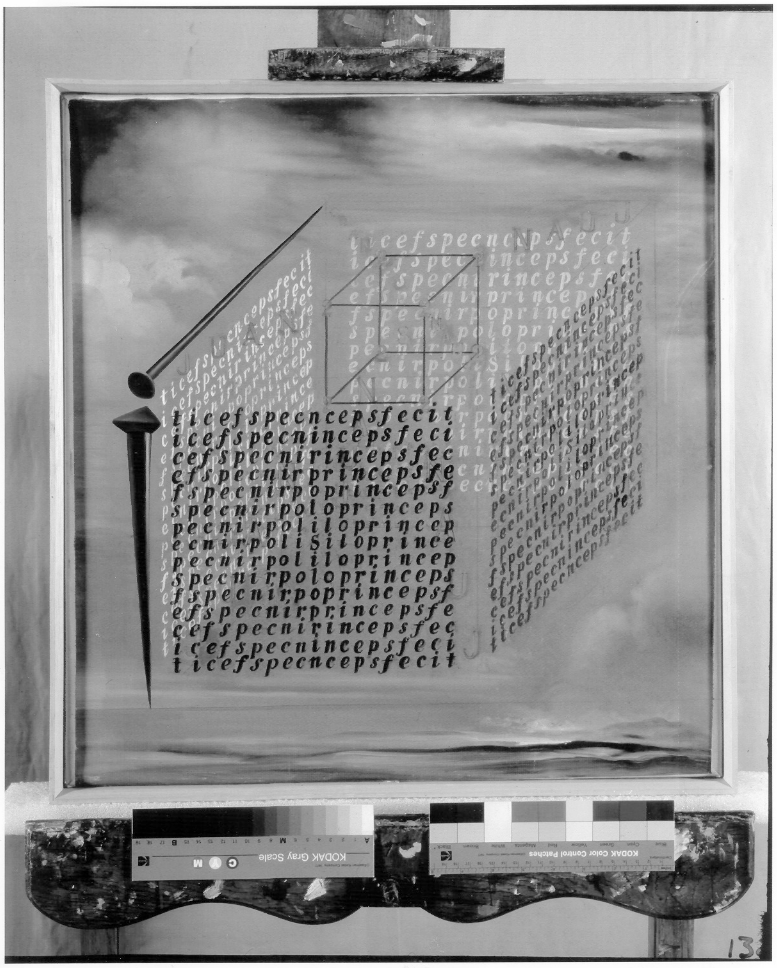
No coinciden: en mi dibujo cada celdilla se corresponde con dos letras. En el dibujo de Herrera, algunas casillas tienen sólo una letra sobre ellas. Sigo leyendo. Según Lull, ningún principio absoluto se combina consigo mismo, por lo que Juan de Herrera, para evitar que las casillas diagonales aparezcan como *BB*, CC, etc, hace un pequeño desplazamiento siguiendo una regla sencillísima que aparece ya en algunas de las figuras de la página inicial del *Discurso*, y cuya búsqueda se deja como ejercicio.

A continuación, Herrera repite la jugada con una tercera copia del segmento que, representando al tercera dimensión, nos permitirá construir un cubo formado por 81x9= 729 celdillas tridimensionales, cada una de ellas denotada por, como mucho, tres entre las nueve letras con que comenzamos. Si todo lo que hay en el universo está hecho de tres dimensiones, argumenta Juan de Herrera, y de la combinación de como máximo tres de entre los nueve principios absolutos, en nuestro cubo aparece representado todo lo que es.


1179

En plena lectura del texto de Herrera, una amiga me trae una foto peculiarísima de Dalí. Tomada en Roma en 1954, año en que se pintó *Corpus hypercubus*, muestra al artista saliendo de un enorme cubo de cartón con sus caras cubiertas por letras.

Curiosamente, el cubo del que emerge el pintor es precisamente el descrito y dibujado por Juan de Herrera. Así pues, efectivamente, Dalí había, si no leído el texto, al menos estudiado los dibujos del *Discurso sobre la figura cúbica*. ¿De dónde extraería el pintor las supuestas instrucciones para la construcción del *hipercubo*, si Herrera no menciona en ningún momento la cuarta dimensión?



Con estas cuestiones en la cabeza, fui a visitar, primero el Monasterio del Escorial, y luego la sala dedicada a Dalí en la colección permanente del Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía. Recorría la habitación con poco entusiasmo, pensando, como suelo hacer cada vez que me enfrento a la obra de este pintor, "¡Cómo me gusta su mano y qué poco me atrae su cabeza!", cuando un cuadro hermoso y chiquito casi me hace gritar: frente a mí, el cielo y el horizonte que se contempla al mirar en dirección a Madrid desde los jardines del Monasterio del Escorial y, entre las nubes y las colinas, dos cubos flotando, uno dentro del otro. Me acerco al lienzo, pintado en delicados tonos pastel, y leo el título: *A propósito del Discurso sobre la figura cúbica de Juan de Herrera*[2] , pintado en 1960.

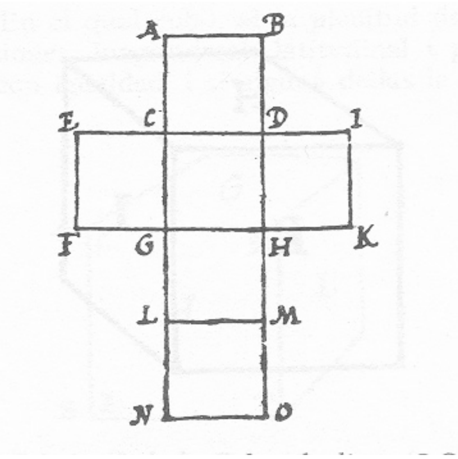
Tanto por el paisaje que le rodea, como por los otros cuadros que conozco en los que Dalí ha pintado el Monasterio del Escorial —*Retrato del embajador Cárdenas*, 1943, y *Retrato ecuestre de Carmen Bordiú Franco*, 1974, (Desar-nes (2004), págs. 360 y 636 resp.)—, deduzco que el cubo interior representa el edificio, una figura sólida limitada por aristas bien recortadas contra el cielo. Sobre cada uno de sus ocho vértices aparece dibujado el dígito 2 en amarillo, y en el centro flota el número 3. Este cubo interior se mantiene en el aire sostenido por ocho cadenas que, saliendo de cada uno de sus ocho vértices, le unen a los ocho vértices del cubo exterior, delimitado por dos enormes clavos de hierro y cuatro paredes de letras escritas sobre superficies traslúcidas. Los eslabones de las cadenas son las letras del nombre del arquitecto, Juan, pintadas de amarillo: Juan sustenta su edificio en el cubo exterior, formado exclusivamente por clavos y letras. ¿Qué querrá esto decir?

Clavos y letras, clavos y letras… ¿Crucifixión y libros? ¿Por qué no? Iglesia y Biblioteca: el edificio del Escorial. Efectivamente, para entrar en el Palacio, se ha de pasar primero por la Biblioteca, y luego por la Iglesia.

Los clavos son distintos, uno tiene la cabeza circular, el otro triangular: ahí están los círculos y triángulos de las láminas iniciales del *Discurso*, las figuras que, según Juan de Herrera, hay que "penetrar para introducir el cubo". ¿Y no penetran los clavos?

El único detalle que me queda por entender qué pinta ahí en el cuadro, está ya claro también: los vértices del cubo interior son puntos de sus caras, figuras bidimensionales, y por lo tanto dos coordenadas —dos letras, en el sistema de Juan de Herrera— bastan para describirlos. El centro, sin embargo, es un punto del interior del cubo, y se requieren tres coordenadas para identificarlo.

Pensando en esta diferencia entre los puntos de la superficie y del interior del cubo, de repente *veo* la construcción del *hipercubo* de Dalí. Busco la ilustración del cubo desplegado que acompaña la definición XI-25 de Euclides en el texto del Discurso, y la comparo con la del *Corpus hypercubus.*



Ahí está, una cruz formada por seis cuadrados, que doblada da lugar al cubo (con volumen, tridimensional). ¿Qué ocurre si cada uno de los seis cuadrados lo transformamos en un cubo? Si lo hacemos respetando la simetría bidimensional de la cruz original, obtenemos una nueva cruz, con volumen y formada por ocho cubos: la cruz sobre la que reposa el Cristo del cuadro.

Si al *doblar* la cruz bidimensional obtengo un cubo tridimensional, al doblar la cruz tridimensional obtendré un cubo de cuatro dimensiones: ¡el hipercubo de Dalí!

Cierto es que la topología y la experiencia cotidiana nos dicen que, mientras que no hay problema en utilizar las aristas compartidas por cuadrados consecutivos en una cruz plana como bisagras, y doblar por ellas, el movimiento equivalente en la cruz tridimensional sobre la que yace el Cristo en *Corpus Hypercubus*, que consistiría en doblar por las caras que comparten cubos consecutivos, es imposible. Caras no pueden ser utilizadas como bisagras. Pero eso es un problema de la topología y de la materia. Dalí era un artista genial, y como tal no limitado ni por las reglas de la lógica ni por las del mundo material. Faltaría más. ■

NOTAS

[1] Agradezco a Sol de la Cuadra y Miguel Seguí, comisarios de la exposición-homenaje a Salvador Dalí y Emilio Pérez Piñero —MOPU, Madrid OCTUBRE 2004— que, al enterarse de que yo preparaba este trabajo, se desplazasen hasta Madrid y me mostrasen su copia en vídeo de esta entrevista.

[2] Agradecemos al Dpto. de Registro de Obras de Arte del MNCARS que nos hayan permitido utilizar su material fotográfico para llevar a cabo este estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CORRALES, C. (2000): *Contando el espacio*, despacio.mobcoop ediciones, Madrid.

DESARNES, R., NÉRET, G. (2004): *Salvador Dalí, 1904-1989. L a obra pictórica*, Taschen.

EUCLIDES (1925): *The thirteen books of The Elements*, traducción al inglés de Sir T.L. Heath, Dover.

EULER, L. (1748): *Introductio*, en *Opera Omnia*, Leipzig-Berlin-Zurich, 1911-1957.

FAUVEL, J., GRAY, J. (1987): *The History of Mathematics: a reader*, The Open University.

GRAY, J. (1992): *Ideas del espacio*, Biblioteca Mondadori.

HAUSDORFF, F. (1914): *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig –Veit.

HERRERA, J. de (1979): *Discurso del Señor Juan de Herrera, aposentador Mayor de S.M., sobre la figura cúbica*, Simons y Godoy eds., Biblioteca de marginados, heterodoxos y visionarios, Ed. Nacional.

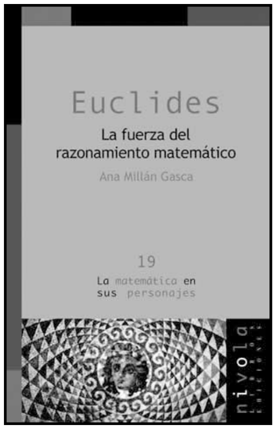
LORAN, E. (1963): *Cézanne's Composition* (1943), Univ. of California Press.

PROCLO (1970), *A commentary on the first book of Euclid's elements*, traducido al inglés por G.R Morrow , Princeton Univ. Press.

RIEMANN B. (1854): *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen,* Habilitationschrift, Göttingen. Edición comentada en castellano de José Ferreirós, CSIC 2000.

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 109-116

Para acercarse a Euclides



Euclides.
La fuerza del razonamiento matemático.
Ana Millán Gasca
Nivola, libros y ediciones
Madrid 2004
ISBN 84-95599-85-6
176 páginas

La Biblioteca Clásica Gredos ha publicado en los últimos años una nueva versión castellana de los Elementos *de Euclides (traducción de Mª L. Puertos, con introducción de L. Vega, BCG n.º155, 191, 228) completada con la traducción de tres obras menores atribuidas a Euclides, la* Óptica*, la* Catóptrica *y los* Fenómenos *(traducción de P. Ortiz, BCG 277). Acaba de salir de imprenta el libro* Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*, escrito por Ana Millán Gasca, colaboradora de* SUMA*. Presentamos el libro con algunas reflexiones sobre Euclides y la enseñanza de las matemáticas tomadas del capítulo con el que concluye el libro.*

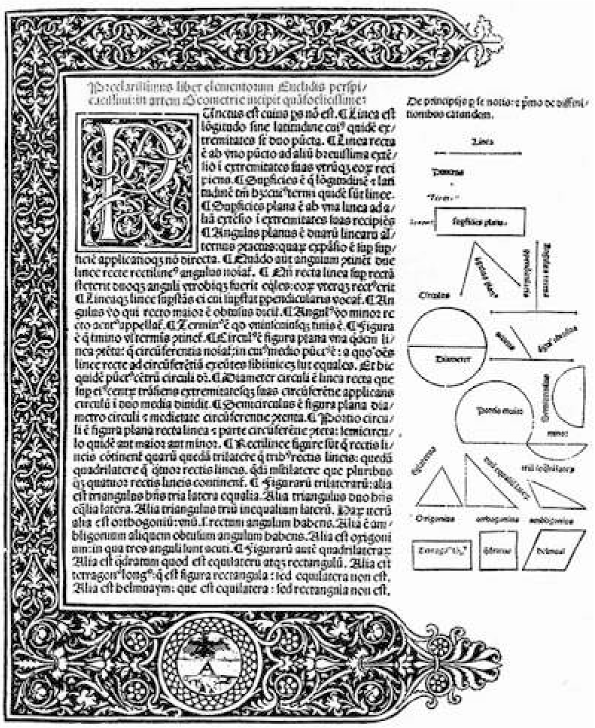
Del matemático griego Euclides las crónicas nos dibujan poco más que una sombra —hasta el punto de que hay quien ha dudado de su existencia histórica— que se alarga, sin embargo, sobre la entera historia de las matemáticas. "El geómetra" por excelencia, "el autor de los *Elementos*", verdadero Partenón de los antiguos saberes de la aritmética y de la geometría, son los apelativos que han consagrado su figura. En este libro nos acercamos a él a través de su obra más famosa, así como de otras menos conocidas, como las dedicadas a la óptica y a la ciencia de los cielos, que elaboran la idea griega de geometrización de la Naturaleza.

La fascinante historia de la transmisión de los *Elementos* empieza en los siglos finales de la Edad Antigua, cuando algunos estudiosos, testigos de la ruina de la civilización grecoromana, se esforzaron por preservar para el futuro la gran obra de Euclides. El itinerario pasa por las capitales culturales del Islam, donde el estudio de la tradición euclidiana animó nuevas investigaciones matemáticas; entre los copistas medievales del texto griego, que prepararon los manuscritos hoy conservados en Florencia, en la Ciudad del Vaticano y en París. Pasa también por las ciudades de frontera entre los mundos cristiano y musulmán donde trabajaron los traductores al latín; hasta los talleres de los primeros impresores, en Venecia y en Basilea, en los albores de la Edad moderna. La obra fue llevada hasta la China por el misionero jesuita Matteo Ricci, que tradujo algu-

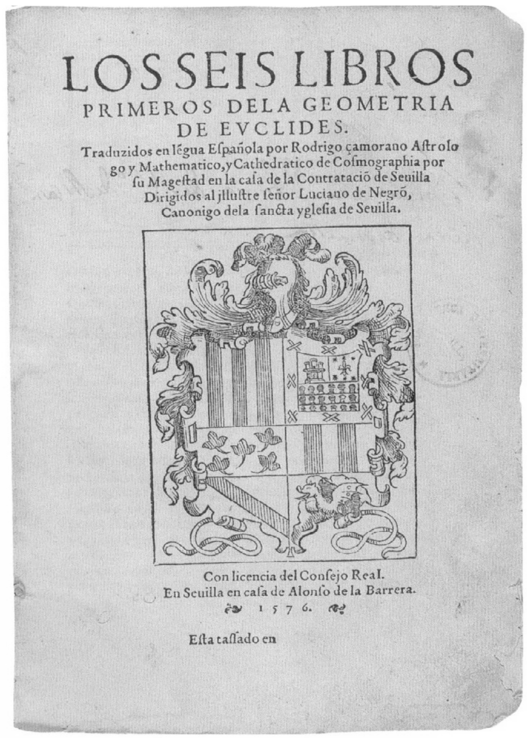
Ana Millán Gasca
Universidad de Tor Vergata, Roma (Italia)
Tomado del último capítulo de Euclides, La fuerza del razonamiento matemático, *Nivola 2004*

nos libros a principios del siglo XVII; y era un libro siempre presente en los pupitres de estudiantes y en las mesas de trabajo de los matemáticos europeos hasta finales del siglo XIX. Hoy, acercarse a este clásico es una vía para entender mejor la naturaleza del razonamiento y del modo de pensar matemático.

Nivola 2004), en plena oleada de rechazo de la geometría —al grito de ¡Abajo Euclides!— en casi todos los países europeos. La lectura de los *Elementos* hoy *en el nivel universitario* tiene un doble valor, cultural y matemático, y puede ser un interesante ingrediente en un curso general de matemáticas e incluso



Primera edición impresa. Venecia, 1482



LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DE LA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al illuſtre ſeñor Luciano de Negrõ, Canonigo de la ſancta yglesia de Seuilla.
Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.
Eſta taſſado en

Primera edición en castellano 1574. Por Rodrigo Çamorano

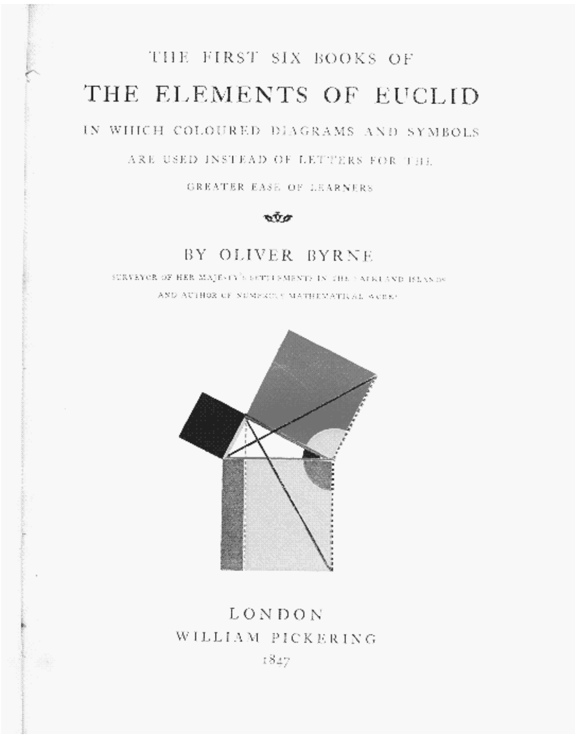
Los *Elementos* han servido, durante siglos, como libro de texto de la enseñanza *elemental* por excelencia. Este papel fue a menudo discutido desde un punto de vista didáctico, y siguió reafirmándose hasta bien entrado el siglo XIX. La introducción de la matemática moderna en el siglo XX acabó para siempre con este primado, salvo en los países anglosajones. Cerrada esta fase didáctica, cabe preguntarse si el "olvido" total de los *Elementos* no sea un daño mayor que la vieja defensa a ultranza de su valor en la enseñanza. Es un tema sobre el que reflexionar.

Un manual clásico en este sentido es la edición de los *Elementos* publicada en 1868 por Enrico Betti y Francesco Brioschi, bajo el patrocinio de Luigi Cremona, para los institutos de enseñanza secundaria en Italia, un país que ha mantenido por tradición un lugar principal para la geometría en este nivel. Y, entre las publicaciones recientes que pueden ser útiles en este sentido, es importante recordar un clásico en castellano, la obra *Mirar y ver. Ocho ensayos de geometría intuitiva* de Miguel de Guzmán, publicada en 1977 (reedición revisada,

el hilo conductor, por ejemplo, de un curso elemental de geometría, o de un curso de "matemática elemental desde un punto de vista superior" útil para los futuros profesores de matemáticas.

Los profesores disponen de dos libros recientes que pueden resultar muy útiles a este fin: el libro de Benno Artmann, *Euclid. The creation of mathematics*, "un intento de comprender la naturaleza de las matemáticas desde el punto de vista de su fuente antigua más importante" (Springer, 1999) y, desde un punto de vista más técnico, el libro de Robin Hartshorne *Companion to Euclid. A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants* (American Mathematical Society, 1997). Son útiles además, dos ediciones modernas de Euclides: la clásica edición inglesa de Thomas L. Heath (edición Dover, 1981) y la edición francesa de Bernard Vitrac (Presses Universitaires de France, 1990-98).

Si se emprende una tarea de este tipo existen varias vías posibles, según que el acento sea puesto más sobre los aspectos históricos, sobre las matemáticas de los *Elementos*, o sobre los aspectos epistemológicos y filosóficos que esta obra puede ilustrar con gran eficacia. Cualquier enfoque es legítimo didácticamente, aunque se pueda correr el riesgo, en algunos casos, de desfigurar el rostro auténtico del pensamiento matemático griego. Baste pensar en la cuestión de la "traducción algebraica" de los *Elementos*, y su utilidad desde el punto de vista de la lectura histórica de la obra o bien de su utilización en la enseñanza. Se trata de un problema cuya solución no puede ser obligada, y lo importante es que el profesor elija su vía teniendo presentes los conocimientos históricos actuales. En tal sentido es muy útil el análisis de Ivor Grattan-Guinness en su artículo *Numbers, ratios and proportions in Euclid's Elements* (publicado en la revista «Historia mathematica» en 1996), donde se hacen por ejemplo interesantes referencias a las notas de la edición de Heath (que recurre a menudo a la lectura algebraica).


THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS
BY OLIVER BYRNE
LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

Edición de Oliver Byrne de 1847

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
ACCESSIT XVI. DE SOLIDORUM Regularium comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBUS, accuratisq; scholijs illustrati.
AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.
SOCIETATIS IESV.
ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

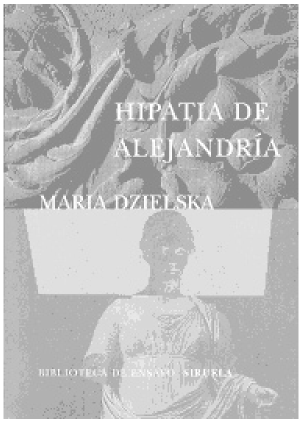
Edición del jesuita Clavio, Roma 1574

Valga, en fin, como invitación a esta "recuperación" de Euclides en la enseñanza y en la cultura matemática, cuanto ha escrito Puertas Castaños como nota conclusiva de su traducción (Euclides, *Elementos Libros X-XIII*, Gredos, 1998, p. 358):

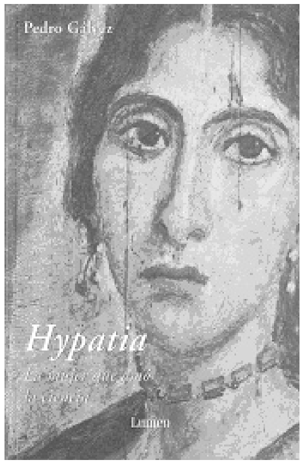
> Es difícil negarse a reconocer el olfato de los antiguos matemáticos griegos para dar con temas de importancia básica, con cuestiones de permanente interés y con objetos capaces de seducir a gentes de diversos tiempos y culturas. Si estas formas de proyección son una de las marcas de un «autor clásico», hay autores clásicos tanto en el campo de las artes y las letras como en el campo del conocimiento y del método científico: los hay a pesar de los prejuicios "literarios" que dan en limitar el legado griego al ámbito de las humanidades; los hay a pesar de los prejuicios "científicos" que dan en suponer que el conocimiento no puede desarrollarse sin matar al padre. Euclides es un autor clásico. ■

Ana Millán Gasca es profesora de Historia de la ingeniería industrial en la Universidad de Roma "Tor Vergata" y de Historia y epistemología de la ciencia en la Scuola di specializzazione all'insegnamento superiore de la Universidad de L'Aquila. Ha publicado numerosos trabajos sobre la comunidad matemática española en los siglos XIX y XX, entre ellos *El matemático Julio Rey Pastor* (IER, 1988). Entre sus libros recientes: *El mundo como juego matemático* (Nivola, 2001) y *The Biology of Numbers* (Birkhäuser, 2002), ambos con G. Israel; *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza* (Mimesis, 2004); y el volumen, editado con M. Lucertini y F. Nicolò, *Technological concepts and mathematical models in the evolution of modern engineering systems* (Birkhäuser, 2003).

El irresitible hechizo de Hipatia de Alejandría



Hipatia de Alejandría.
Maria Dzielska
Siruela (Biblioteca de ensayos)
Traducción de J.L. López Muñóz
Madrid, 2004
ISBN 84-7844-749-0
159 páginas



Hypatia, La mujer que amó la ciencia.
Pedro Gálvez
Lumen
Barcelona, 2004
ISBN 84-264-1440-0
272 páginas

El hechizo de Hipatia no decae en el tercer milenio. En este año 2004 se presentan dos nuevas ediciones, un ensayo y una novela, sobre la filósofa y matemática alejandrina asesinada salvajemente por integristas cristianos en las calendas de 415. Curiosamente son fuentes cristianas también algunas de las que nos recuerdan la crueldad y el sadismo del martirio de la hija de Teón:

> *Algunos de ellos* [los cristianos]*, cuyo cabecilla era un lector llamado Pedro, corrieron a toda prisa empujados por un ardor salvaje y fanático, la asaltaron cuando ella volvía a casa, la sacaron de su carro y la llevaron a la iglesia llamada de Cesarión, donde la desnudaron completamente y la mataron con escombros de cerámica. Después de descuartizar su cuerpo, llevaron sus trozos al Cinarión, y allí los quemaron. Este asunto constituyó un gran oprobio, no sólo para* [el patriarca] *Cirilo sino para el conjunto de la Iglesia Alejandrina*
>
> Sócrates Escolástico (sigloV)

Este relato de Sócrates, junto a los de Damascio, y Juan Obispo de Nikiu, son los únicos de fuente antigua sobre los trágicos sucesos. Son suficientes para construir una leyenda.

Lamentablemnete, Sinesio de Cirene, el discípulo mas conocido de Hipatia murió antes del 415 y no pudo relatarnos los hechos. Mujer, sabia, finales del mundo antiguo y salvaje asesinato se combinaran para recrear la historia y reproducirla según las inquietudes y prejuicios del narrador o narradora de cada época.

Los dos libros recientes son *Hipatia de Alejandría* de Maria Dzielska y *Hypatia. La mujer que amó la ciencia* de Pedro Gálvez. El primero de ellos es un maravilloso libro, bellamente editado, de una estudiosa de Sinesio, que también quedó atrapada por la sabia matemática. Se trata —el ensayo de Dzielska— de un libro académico que consigue apasionarnos. La autora no se limita a comentarnos las fuentes antiguas, pues donde brilla con mas fuerza es cuando nos relata la frecuente reaparición literaria de su leyenda desde el siglo XVIII hasta hoy. La editorial Siruela -fiel a su característica calidad- nos presenta en castellano un libro fundamental. Solo puede objetarse que llega un poco tarde, pues en el 2002, la catedrática de filosofía gijonense Amalia González nos ofreció un pequeño pero inestimable volumen con un contenido ejemplar, que además incluye una selección de textos originales. Sin duda el libro de la polaca era imprescindible, pero su impacto hubiera sido mayor con mas diligencia traductora (la edición inglesa es de 1995). Por otra parte, la traducción es también espléndida, viniendo avalada por uno de nuestros más reconocidos profesionales de estas tareas: José Luis López Muñoz.

El libro de Gálvez es una novela bien narrada. Con la calidad del sello editorial, tenemos otra recreación de la subyugante personalidad de Hipatia. El autor no ha podido resistir la tentación ensayística, y dedica el ultimo capitulo al *Legado de Hipatia*, mismo titulo de la obra de homenaje a la mujer en la ciencia de Margaret Alic.

No deja de ser curioso, que el libro de Gálvez replique al de Dzielska. La polémica esta servida. La novela es una encendida defensa del espíritu griego y la ciencia antigua, contra el dogmatismo religioso, encarnado en San Cirilo. El feminismo militante del autor hace de la obra una muestra de todas las virtudes de la mujer sabia, injustamente sepultadas por el patriarcado dominante. Donde creo que el autor se excede es en atribuir la oculta o manifiesta intención de la filóloga polaca de la defensa de la Iglesia. La lectura del libro de Dzielska no deja ese sabor.

Si la parte mas lograda del ensayo sobre Hipatia es el análisis critico de la leyenda literaria, la novela también es en sus comienzos cuando mejor nos atrapa. La historia de Alejandría, que es la del helenismo y del desarrollo mas brillante de la ciencia matemática hasta la edad moderna, es recordada por Teón el mismo día que nace su "bellísima" hija.

De forma modesta, hemos de decir que después de la critica filológica a las recreaciones ideológicas, lo que hace Maria Dzielska es darnos la suya: Hipatia muere por estar en medio de un conflicto entre la iglesia y el estado. Esta es la parte más floja, y el objeto de las iras de Gálvez. No es para tanto; por muy polaca que sea, la filóloga no es una quinta columnista de su compatriota en el papado. Su versión puede ser mejor que otras, pero no es concluyente, pues era una tarea hoy imposible. El merito de Dzielska es su acreditado estudio de los usos ideológicos de Hipatia, lo cual nos permite un sano escepticismo, incluso de la tesis de la propia autora.

Es curioso que Gálvez caiga también en tópicos, pese a su encendido antidogmatismo, que no por extendidos deben de dejar de ser combatidos:

- La cultura alejandrina no termina con la muerte de Hipatia. La tradición helénica, pagana o cristianizada, se mantiene con fuerza hasta el siglo VI. Si no florecen matemáticos brillantes, en cambio, si se vivirán momentos claves para la filosofía y la física. La critica a la cinemática de Aristóteles realizada entre otros por Juan Filopon será fundamental para la moderna ruptura galileana y la revolución científica del XVII.
- Hablar del genio griego y de la larga oscuridad medieval, ignorando las culturas asiáticas islámica y sánscrita es un pecado de eurocentrismo tan criticable como el patriarcado machista.
- No sabemos si Hipatia fue bella, si lo fue —aunque terrible— su trágica historia, y si son bellísimas la Aritmética de Diofanto y las Cónicas de Apolonio, sus libros de cabecera. Pero atribuir juventud y belleza a la mártir del paganismo alejandrino es un exceso literario o un prejuicio arraigado entre hombres. Para la estudiosa polaca, la filosofa era una mujer mayor en el año de su asesinato; la argumentación es consistente. La novela sigue los convencionalismos y se apunta a la versión de mujer madura pero en plenitud física e intelectual: nacida en 370.

Gracias al libro de Dzielska sabemos que Hipatia no solo fue salvajemente asesinada, también su memoria ha sido usada según la finalidad del narrador de turno que la cite como referencia:

- El protestante contra el papista.
- El arriano contra el católico.
- El teósofo ilustrado contra el dogmático.
- El ateo contra la religión.
- El feminismo contra el machismo.
- El paganismo contra el cristianismo.
- La castidad frente al libertinaje.
- La liberación sexual frente a la represión.
- La ciencia frente al oscurantismo
- El cristianismo frente a sus críticos.

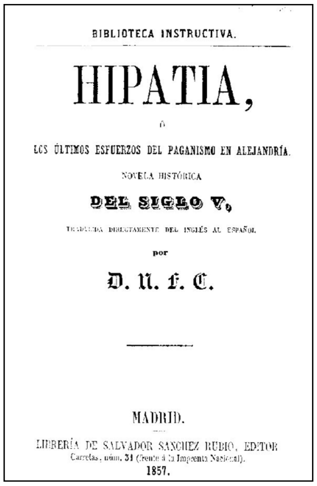
Puede observarse no sólo la diversidad de usos, también se aprecia la versatilidad del mito: para unos casta, para otros liberada sexualmente; para unos atea, para otros pagana y para otros ferviente cristiana. Todo puede valer, pero el uso de Hipatia que queda cristianizada en Santa Catalina de Alejandría es sin duda de los más excesivos.

Para quienes lean a Gálvez, debo advertir además sobre otras dos cosas: el uso de guiños históricos que exigen complicidad, y la presencia esporádica de huellas de la Hispania tardo romana en Alejandría. Esta última puede resultar un poco chocante.

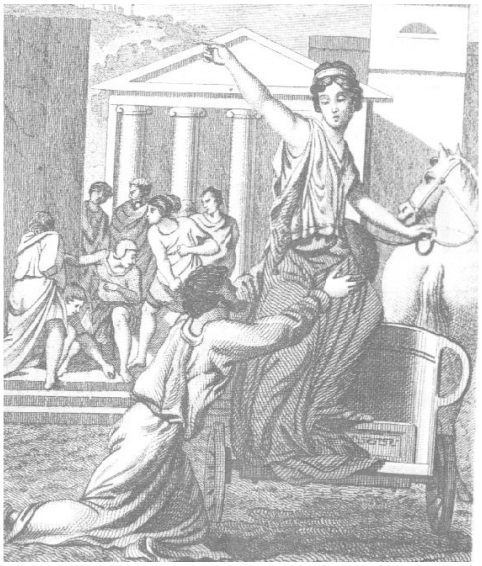
Hipatia en castellano

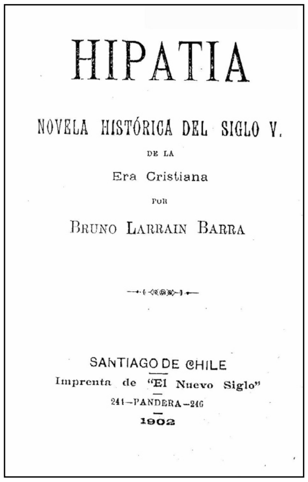
Hipatia aparece muy pronto en la literatura castellana. Lope de Vega ya la cita en *La doncella Teodor,* y Juan Bautista Cubíe en *"Las mugeres vindicadas de las calumnias de los hombres"* (1765).

Ni el libro de Dzielska ni el de Gálvez entran a estudiar la presencia de Hipatia en castellano. Es de destacar la temprana traducción de *Hipatia, los últimos esfuerzos del paganismo en Alejandría* (1853), la novela del clérigo Charles Kingsley que mas contribuye a extender el conocimiento de la sabia matemática. Se trata de una buena edición —con bellos grabados— fechada en 1857. El libro esta bien catalogado en la Biblioteca Nacional pese a que no aparece el nombre del autor, y que del traductor conocemos sólo las iniciales.


BIBLIOTECA INSTRUCTIVA.
HIPATIA,
ó
LOS ÚLTIMOS ESFUERZOS DEL PAGANISMO EN ALEJANDRÍA.
NOVELA HISTÓRICA
DEL SIGLO V,
TRADUCIDA DIRECTAMENTE DEL INGLÉS AL ESPAÑOL
por
D. N. F. C.
MADRID.
LIBRERÍA DE SALVADOR SANCHEZ RUBIO, EDITOR
Carretas, núm. 31 (frente á la Imprenta Nacional).
1857.

Por otra parte es interesante reseñar que en Chile en 1902 ya se escribe una curiosa novela sobre Hipatia, donde la "jeometra" aparece como sabia enamorada, fuerte en el estudio y sensible al amor. El autor es Bruno Larrain Barra, del que poco sabemos, aunque su apellido es el de una familia muy activa en el país andino.




HIPATIA
NOVELA HISTÓRICA DEL SIGLO V.
DE LA
Era Cristiana
POR
BRUNO LARRAIN BARRA
SANTIAGO DE CHILE
Imprenta de "El Nuevo Siglo"
241—BANDERA—246
1902

Con el titulo de *Hypatia* de Dora Russell se inició la andadura de una editorial feminista en 1930: *Avance.* El libro está escrito para defender la liberación femenina, y de la matemática alejandrina solo utiliza su imagen histórica de profesora *destrozada por los cristianos.*

En estos momentos en España hay varios grupos de profesoras y un congreso con el nombre de Hipatia en Castilla y León y Andalucía. Hipatia es la referencia obligada en cualquier libro que trate de rescatar la presencia de las mujeres con nombre propio en la ciencia. ■

Ángel Requena Fraile
IES de La Cabrera, La Cabrera (Madrid)

Fibonacci.
El primer matemático medieval

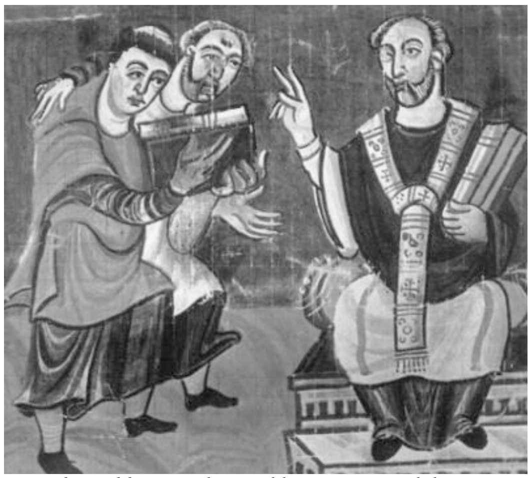
FIBONACCI. EL PRIMER MATEMÁTICO MEDIEVAL
Ricardo Moreno Castillo
Nivola
La matemática en sus personajes
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-82-1
109 páginas

A este matemático medieval, Fibonacci, va dedicado el número 18 de la colección *La Matemática en sus Personajes*, de la editorial Nivola aparecido recientemente.

Como ya es habitual en los libros de esta colección, su autor Ricardo Moreno Castillo, no sólo nos presenta algunos de los trabajos y aportaciones de Leonardo de Pisa, más conocido por Fibonacci (hijo de Bonaccio), sino que nos sitúa históricamente en el mundo medieval , recordándonos a muchos de los personajes que tuvieron un papel importante en el desarrollo tanto de la matemática como de la propia civilización europea.

La idea que tenemos del medievo es la de un periodo oscuro, con reducido número de avances científicos, que antecedió a la explosión que supondría la etapa renacentista. Sin embargo, la labor realizada por compiladores, traductores y enciclopedistas de hacer compresibles las obras y logros tanto del mundo antiguo como del mundo árabe, se pueden considerar como una de las aportaciones más importantes del mundo medieval , sin la cual sería imposible entender los avances de todo tipo conseguidos en la etapa posterior.

Compiladores y Enciclopedistas es el título del capítulo primero en el que figuran algunas de las aportaciones de personajes como: Boecio (480-524), Isidoro de Sevilla (570-636) o



Codex Fuldensis, siglo X, Biblioteca Nacional de Viena. Alcuino de York y Rabano Mauro entegan un libro a Edgardo

Beda el venerable (673-735). Resulta interesante recordar algunos de los nombres que Boecio da a los números: *perfectos*, *deficientes* y *abundantes*.

En el capítulo segundo, *El renacimiento Carolingio*, el autor nos recuerda algunos hechos históricos anteriores a la coronación de Carlomagno y selecciona una serie de interesantes problemas de la que califica "primera obra escrita de matemática recreativa" de Alcuino de York (735-804). Las referencias históricas continúan en el capítulo tercero, *La época de los traductores*, con la inclusión esquemática de la vida y obra de algunos de ellos, como: Gerberto de Aurillac, Adelardo de Bath, Juan de Sevilla, Gerardo de Cremona o Roberto de Chester.

Dejando aparte el capítulo 6, O*tros matemáticos medievales*, el resto de los capítulos de este libro hacen referencia a la obra de Fibonacci. En el capítulo 4 se seleccionan una serie de problemas resueltos por el matemático medieval en aquellos famosos "torneos matemáticos". La selección resulta muy interesante (el del reparto del capital, el del pentágono equilátero, el de la ecuación de tercer grado...). No es menos interesante la sorprendente precisión de algunos de los resultados obtenidos por Leonardo de Pisa y resulta muy curiosa la forma sexagesimal del resultado.

Escultura de Leonardo de Pisa Fibonacci en el Camposanto de la Duomo de Pisa, reproducida en *Fibonacci. El primer matemático medieval.* Foto FMC

El *Liber Abaci* es la obra más conocida de Leonardo y el título del capítulo quinto. En él se incluyen referencias a los números (las justificaciones de las pruebas del 9, del 11, o del 7), algunos problemas geométricos (los mástiles, las trayectorias de los pájaros, etc.). Tanto o más interesante que la misma selección de problemas que el autor realiza son las soluciones que propone Leonardo de Pisa a muchos de estos problemas. De ellas se pueden extraer interesantes ideas didácticas.

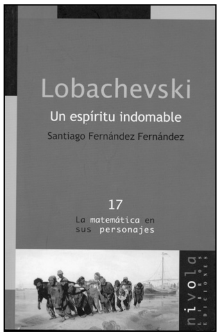
El capítulo 5 concluye con el problema por el que es más conocido Leonardo y que ha dado lugar a una de las sucesiones más famosas, sorprendentes e interesantes que se estudian en matemáticas. Nos referimos, claro está, al problema de los conejos y a la sucesión llamada *Sucesión de Fibonacci*. En el último capítulo se revisan algunas propiedades de esta sorprendente sucesión y su relación con el número de oro, con aportaciones de matemáticos como Binet, Lagrange o D'Alembert.

En resumen, el trabajo realizado por Ricardo Moreno Castillo, nos puede dar una idea más ajustada de esta etapa histórica tan desconocida como es la Edad Media europea. Los grandes hombres que vivieron esa época tuvieron limitaciones en su trabajo, pero sus aportaciones a las etapas posteriores como recopiladores y traductores del conocimiento anterior resultó decisivo. Por otra parte, el autor nos proporciona una colección de problemas de aplicación en un aula de secundaria, que tienen además la riqueza añadida de los procedimientos historicos utilizados para resolverlos, en una época en la que el álgebra simbólica estaba aún por descubrir. ■

Antonio Hernández
IES Juan de la Cierva, Madrid

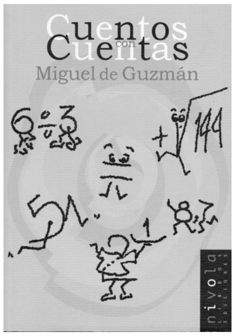
Libros recibidos

FIBONACCI.
EL PRIMER MATEMÁTICO MEDIEVAL
Ricardo Moreno Castillo
Nivola
La matemática en sus personajes
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-82-1
109 páginas

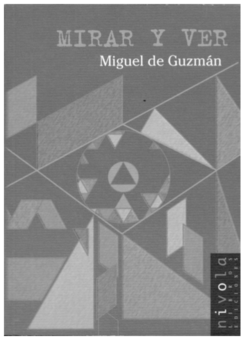


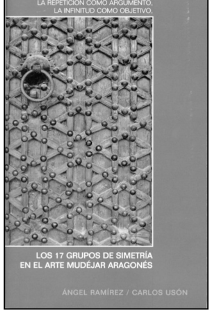
LOBACHEVSKI.
UN ESPÍRITU INDOMABLE
Santiago Fernández Fernández
Nivola
La matemática en sus personajes
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-69-4
238 páginas

CUENTOS CON CUENTAS
Miguel de Guzmán
Nivola
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-66-X
124 páginas

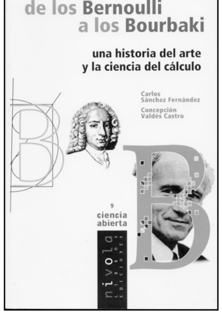


MIRAR Y VER.
Miguel de Guzmán
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-46-5
126 páginas



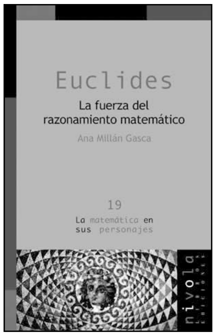


LOS 17 GRUPOS DE SIMETRÍA EN EL ARTE MUDÉJAR ARAGONÉS.
Ángel Ramírez y Carlos Usón
UNED Aragón
Huesca, 2002
ISBN 84-88230-20-6
44 páginas

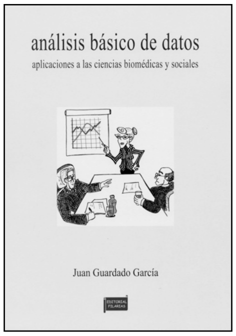


DE LOS BERNOULLI A LOS BOURBAKI. UNA HISTORIA DEL ARTE Y LA CIENCIA DEL CÁLCULO.
Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro.
Nivola
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-70-8
382 páginas

Libros recibidos

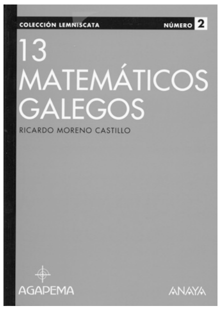


EUCLIDES.
LA FUERZA DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO.
Ana Millán Gasca
Nivola, libros y ediciones
Madrid 2004
ISBN 84-95599-85-6
176 páginas

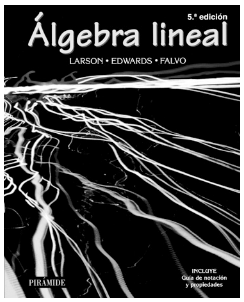


ANÁLISIS BÁSICO DE DATOS.
APLICACIONES A LAS CIENCIAS BIOMÉDICAS Y SOCIALES.
Juan Guardado García
Editorial Filarias
Calamonte (Badajoz), 2004
ISBN 84-932488-6-X
186 páginas

13 MATEMÁTICOS GALEGOS.
Ricardo Moreno Castillo
AGAPEMA-ANAYA
Colección Lemniscata
Madrid , 2003
ISBN 84-667-2637-3
118 páginas

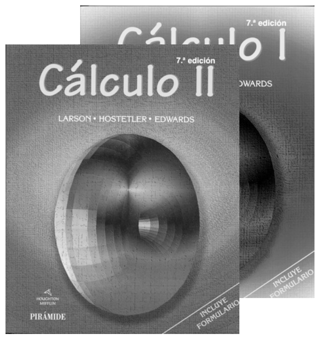


IX OLIMPIADA MATEMÁTICA ASTURIANA. PARA ESTUDIANTES DE ESO
SAEM "Agustín de Pedrayes"
Asturias, 2002
106 páginas



ÁGEBRA LINEAL
Larson-Edwars-Falvo
Ediciones Pirámide
Madrid, 2004
ISBN 84-368-1878-4
539 páginas

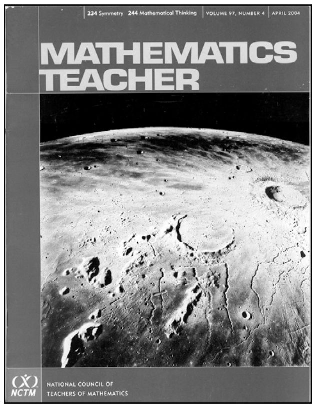
CÁLCULO I Y II
Larson-Hostetler-Edwars
Ediciones Pirámide
Madrid, 2004
ISBN 84-368-1707-9
84-368-1756-7
774 y 506 páginas



SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 119-123

Mathematics Teacher, revista de la National Council of Teachers of Mathematics de USA

Título: **Mathematics Teacher**
Edita: *National Council of teachers of Mathematics*
Periodicidad: ***nueve números al año (Sept, Oct, Nov, Dic, Ene, Feb, Mar, Abr y May)***
Lengua: ***inglés***
Dirección: ***1906 Association Drive***
Reston, VA 20191-1502
USA
Página web: *http://www.nctm.org/*
Número comentado: *Vol 97, n.º 4, April 2004*
ISSN: ***0025-5769***



El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) es, probablemente, la mayor asociación de profesores de matemáticas de todo el mundo, con más de 100.000 asociados, que pertenecen mayoritariamente a los Estados Unidos y Canadá, aunque también están afiliados numerosos profesores e investigadores de todo el mundo. Como otras asociaciones de profesores de matemáticas su propósito es tener una perspectiva de lo que se debe hacer en la educación matemática y conseguir la capacidad de liderazgo que son necesarios para mejorar el aprendizaje de las matemáticas entre los estudiantes, promover la excelencia en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos y jugar el papel de defensor de la educación matemática.

La influencia del NCTM en la educación matemática es notable y se materializa en sus numerosas publicaciones, que son citadas en cualquier discusión sobre lo que se debe hacer en la enseñanza de las matemáticas en todo el mundo. Buena prueba de ello es el impacto que tuvieron los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, que la sociedad Thales publicó en su día en castellano, y el que tienen en este momento los *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* también recientemente publicados por esta sociedad.

Su catálogo de publicaciones es bastante extenso e incluye tanto libros de actividades y materiales como estudios teóricos. Una de las publicaciones emblemáticas del NCTM es un libro, que se publica cada año, y que contiene un estudio temático sobre un aspecto concreto de la educación matemática: el *Yearbook*, del que han aparecido hasta la fecha 66 números (y es que el NCTM ya cumple los 85 años de funcionamiento). El último *yearbook* se titula *Perspectives on the Teaching of Mathematics* y en él los autores de los artículos

> *La influencia del NCTM en la educación matemática es notable y se materializa en sus numerosas publicaciones, que son citadas en cualquier discusión sobre lo que debe hacerse en la enseñanza de las matemáticas en todo el mundo.*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org

aportan experiencias, hallazgos, reflexiones, etc., en las que se hacen eco de las propuestas de los nuevos estándares.

No obstante, esta sección la dedicamos a presentar otro tipo de publicaciones periódicas: las revistas. También en este aspecto es importante la actividad del NCTM ya que publica cinco revistas. Una de ellas es una publicación exclusivamente electrónica, otra está dedicada a los trabajos de investigación didáctica mientras que las otras tres se centran cada una de ellas en un nivel educativo. En este número me referiré exclusivamente al *Mathematics Teacher*, la revista que aborda la problemática de los últimos años de la educación secundaria.

Ser socio del NCTM da derecho a elegir una de sus revistas con cargo a la cuota y el *Mathematics Teacher* está especialmente indicada para los alumnos y profesores de los últimos cursos del instituto (la *high school* americana), así como para los encargados de la formación del profesorado. Es una publicación de la que aparecen nueve números al año, de septiembre a mayo, con una extensión de 80 páginas en formato A4 y a todo color. Además de recibir la edición en papel, existe la posibilidad de que los socios descarguen en formato PDF los diversos artículos de la revista a la que están suscritos. De hecho una buena manera de hacerse idea de la factura del *Mathematics Teacher*, y del contenido y estilo de los artículos de la revista consiste en descargar, desde la pagina web del NCTM, todo el número de abril de 2001 de la revista, que está disponible como muestra para cualquiera que visite la página (http://my.nctm.org/eresources/toc.asp?journal_id=2&Issue_id=130).

Entre esas publicaciones se encuentran los Principios y Estándares para la Educación Matemática*, recientemente publicados por la Sociedad Thales, ademas de la revista* Mathematics Teacher*, a la que dedicamos esta sección.*

Es un propósito, declarado por la propia revista, que los artículos que se publiquen en ella presenten investigaciones y exploraciones basadas en situaciones intuitivas, en las que se haga uso de razonamientos informales para ayudar a los alumnos a desarrollar una fuerte base conceptual, que les permita progresar hacia mayores grados de abstracción matemática. Los editores distinguen básicamente dos tipos de contribuciones a la revista: *regular articles* y *departments*. La principal diferencia entre unos y otros es el tratamiento que reciben en el proceso que va desde que el autor los remite a la revista hasta que ésta finalmente decide incluirlo entre los que van a ser publicados. Los *artícles* pasan por un riguroso proceso de referenciado, en el que tan sólo se le comunica al autor la decisión final. Sin embargo, con los trabajos remitidos a una determinada sección (*departments*), si su editor considera que la idea que desarrollan merece la pena —es prometedora—, establece contacto con el autor y trabaja con él preparando la versión definitiva que aparecerá publicada.

Es un propósito declarado de la revista, presentar investigaciones y exploraciones basadas en situaciones intuitivas, en las que se haga uso de razonamientos informales para ayudar a los alumnos a desarrollar una fuerte base conceptual que les permita progresar hacia mayores grados de abstracción matemática.

Regular Articles

Entre las recomendaciones que la revista hace a los autores se les incluye que intentar desarrollar demasiadas ideas en un artículo casi siempre lleva a hablar de muchas cosas pero ninguna en profundidad, y que ese tipo de artículos no suelen ser bien considerados por el panel de editores. En consecuencia, los artículos que aparecen en *Mathematics Teacher* suelen ser bastante breves (no son habituales artículos de más de 6 páginas). Además, la existencia de una unidad de estilo entre ellos denota un trabajo exigente y en profundidad, de los “referees” de la revista al orientar a los autores. Todos los artículos empiezan con una presentación de las ideas que se van a desarrollar en ellos que trata de atraer a los lectores dejando una buena impresión de lo que luego se va a leer. Otra característica bastante generalizada es que los artículos se centran fundamentalmente en experiencias de aprendizaje de los alumnos y por ello incluyen los materiales usados, las producciones de los alumnos y se ilustran casi siempre con fotografías de los alumnos trabajando. Se evitan los artículos que proporcionan recetas para la enseñanza. Las conclusiones, consecuentemente, se centran en lo que los alumnos han aprendido en la experiencia que se ha realizado y en lo que se debería modificar en el futuro.

Para este comentario me he analizado fundamentalmente el número del pasado mes de abril, en el que la sección de artículos consta de los siguientes cinco trabajos:

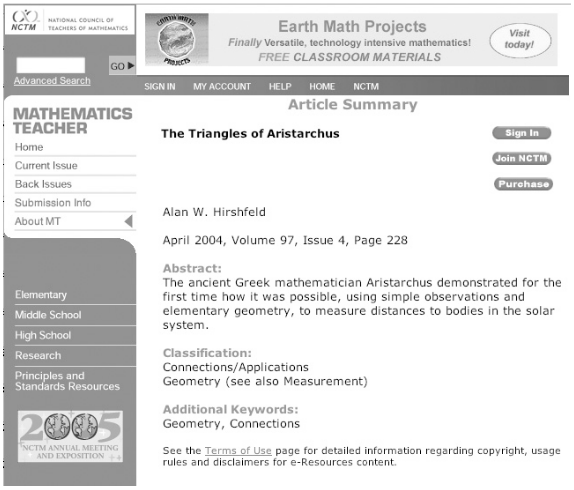


Figura 1. Una página de la *web* de la revista

- *The Triangles of Aristarchus*: Es un trabajo de historia de las matemáticas en el que se describe la forma en que Aristarco calculó las distancias relativas a las que están la Luna y el Sol de la Tierra y el tamaño relativo de los tres astros.
- *Fostering Mathematical Inquiry with Explorations of Facial Symmetry:* En el que se describen dos actividades en las que, mediante el uso de aplicaciones informáticas de tratamiento de imágenes y geometría interactiva, los alumnos de un curso introductorio de geometría exploran la simetría de los rostros. A través de estas dos actividades , el autor muestra cómo conseguir que los alumnos vean la simetría como algo más que una propiedad geométrica abstracta y que diseñen algoritmos de reconocimiento de la simetría, algebraicos y geométricos, de acuerdo con los conocimientos matemáticos que poseen.
- *Focusing on Students' Mathematical Thinking:* En este artículo se proporcionan sugerencias e ideas para que los profesores observen de cerca la manera de pensar de sus alumnos. Se da una relación de estrategias que proporcionan el tiempo y la oportunidad para que se desarrolle el pensamiento matemático en clase y se describe la forma de impulsarlo entre los alumnos. Finalmente se señala lo impotante que resulta que el profesor reflexione frecuentemente sobre lo que hace en clase, para con ello conseguir prestar más atención al proceso de pensamiento matemático de sus alumnos.
- *Discover Mathematical Knowledge through Recreatonial Mathematics Problems:* En este artículo se muestra cómo se usó un problema como vehículo para introducir a una alumna de la *high school* en el placer de la investigación matemática. El problema en cuestión fue el siguiente: Quince alumnas tienen la costumbre de ir en grupos de tres cuando salen para su paseo diario. ¿Es posible organizar a las chicas de tal forma que no hay dos chicas que coincidan en el mismo grupo en toda una semana?
- *Building Your Own Regresion Model:* Los autores, después de ponderar las ventajas de las hojas de cálculo frente a las calculadoras gráficas para la construcción de modelos de regresión para fenómenos del mundo real, describen con detalle las actividades realizadas con alumnos de una high school, en una clase avanzada de álgebra en la que la mayoría no tenía familiaridad con las hojas de cálculo.

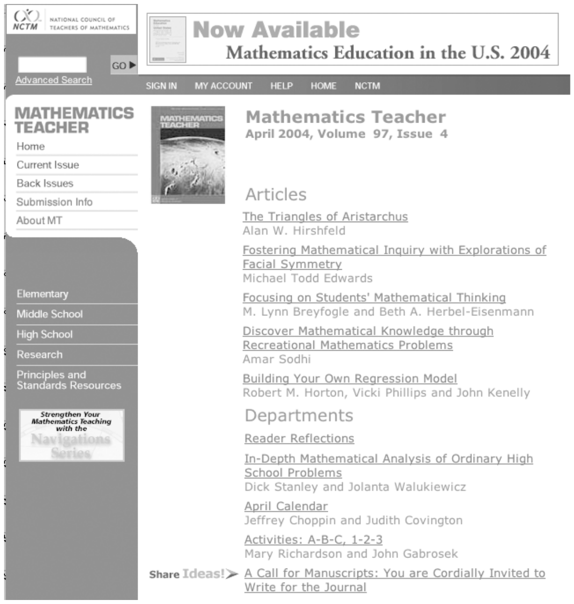


Figura 2. Página principal de *Mathematics Teacher* en Internet

Departments

Una parte importante de la revista la constituyen las diversas secciones. A continuación daré una breve descripción de los argumentos que se tratan en las secciones deteniéndome en alguna de ellas un poco más, haciendo referencia en estos casos al contenido del número correspondiente al número de abril de 2004 de *Mathematics Teacher.*

Las secciones son las siguientes:

Activities

Esta sección incluye actividades matemáticas, que han sido probadas en el aula con éxito. En el artículo se describe el contenido, desarrollo y resultados de la actividad y además se proporciona a los lectores el material en formato reproducible para su uso directo en clase. Este hecho convierte a la sección en un instrumento especialmente útil para el profesorado.

En el número que nos ocupa, se publica el artículo *A-B-C. 1-2-3,* en el que se describe una actividad en la que los alumnos usan datos sobre las frecuencias de aparición de las letras en inglés para estudiar la relación entre la frecuencia relativa de las letras y el porcentaje de fichas de esa letra en el juego *Scrabble* y la relación entre la frecuencia relativa de una letra y la puntuación de la ficha correspondiente en el juego. La actividad tiene dos partes que pueden aplicarse sucesivamente o limitarse tan sólo a la primera. En ésta los alumnos exploran la regresión lineal, mientras que la segunda está dedicada a la regresión cuadrática y cúbica.

Calendar

Las páginas centrales de la revista las ocupa un calendario, del mes correspondiente a la publicación, con un problema para cada día. Los problemas que aparecen son variados en dos sentidos: son apropiados para alumnos de los últimos años de secundaria y se refieren a las diferentes partes del currículo de matemáticas. En las páginas siguientes al calendario viene la solución completa a los problemas que lo componen, así como la fuente de la que se ha copiado el problema o se ha sacado la idea para posteriormente modificarla.

En conjunto el calendario proporciona un importante recurso para el profesorado tanto por la cantidad —basta pensar el número de problemas que se publican cada año y la de años que lleva publicándose—, como por la calidad de los problemas que contiene. En general son problemas con cierto interés, relacionados con todos los tópicos del programa.

Las páginas centrales de la revista las ocupa un calendario, del mes correspondiente a la publicación, con un problema para cada día.

Classy Tips

En esta sección se da respuesta de forma breve a dudas sobre aspectos pedagógicos o de gestión de la clase a las que se enfrenta el profesorado en su labor diaria. La revista anima a sus lectores a que planteen todo tipo de preguntas.

Connecting Research to Teaching

El propio título de la sección ilustra sobre su contenido. Los editores orientan a los investigadores para que presenten sus resultados de manera que la información sirva para ayudar al profesorado a comprender las concepciones y errores conceptuales de sus alumnos respecto de ideas matemáticas importantes, se valoren diferentes enfoques de la enseñanza o se ofrezcan actividades que permitan mostrar la comprensión que alcanzan los alumnos de los conceptos matemáticos.

Soundoff

Se trata de artículos firmados, de carácter editorial, en los que de forma lógica y en profundidad se aborda alguna cuestión significativa o se defiende un determinado punto de vista sobre algún aspecto de la enseñanza o aprendizaje de las matemáticas. Son artículos que suponen implicación personal del autor y en consecuencia los lectores deben posicionarse respecto de las ideas en él expuestas. En un número reciente se publicó dentro de esta sección un artículo cuyo título era *If at First You Don't Succeed... Test, Test Again (Not*!) (MT, Vol. 97, n.º 5 pp.310-312): en él se defendía que la práctica de repetir los exámenes a los alumnos, sin haber puesto remedio a las causas de los malos resultados, no es el mejor plan para mejorarlos. Sería como pensar que los alumnos eran capaces de superar el examen pero no lo hicieron por causas desconocidas, casi siempre no haber estudiado lo suficiente. ¡La polémica está servida…!

En la sección Connecting Research to Teaching *los editores orientan a los investigadores para que presenten sus resultados de manera que la información sirva para ayudar al profesorado a comprender las concepciones y errores conceptuales de sus alumnos...*

Media Clips

Esta sección se basa en el uso de informaciones aparecidas en los medios de comunicación que sirven para ilustrar el uso, o el mal uso, de las matemáticas y que son apropiadas para su uso en clase.

Reader Reflections

Desde que hace años empecé a frecuentar el *Mathematics Teacher* me llamó la atención la gran cantidad de pequeñas aportaciones (cartas al director) que aparecen con regularidad dentro de esta sección. En cada revista, un buen número de páginas contienen breves comentarios a alguno de los artículos publicados, ofrecen breves apuntes sobre cuestiones de enseñanza no relacionadas con ningún artículo, aportan ampliaciones de aspectos tratados con anterioridad en la revista, dan soluciones a problemas del calendario —que en ocasiones son correcciones a las publicadas—, e incluso contestan a otras intervenciones anteriores dentro de la sección. Hace tiempo quisimos animar a los lectores de SUMA, —pero no tuvimos éxito— a comportarse de la misma forma que los lectores del *Mathematics Teacher,* pues estas intervenciones son un reflejo de que lo publicado en la revista no ha pasado desapercibido.

La mayor parte de los autores agradecen las críticas que enriquecen sus artículos, mientras que para los editores de las revistas es sano saberse bajo la atenta mirada de sus lectores que no dejarán que se les cuele ningún error. Así que no debemos renunciar a que nuestra revista se enriquezca con las críticas y comentarios de sus lectores y debemos seguir aspirando a conseguir parecernos en este aspecto a la revista americana.

Sharing Teaching Ideas
Esta sección incluye apuntes prácticos sobre contenidos de enseñanza relacionados con el currículo de la educación secundaria. Generalmente se trata de materiales probados en clase por los autores y que dan un enfoque novedoso al habitual.

Tech Tips
La sección está dedicada a proporcionar materiales y actividades basadas en el uso de tecnología, encaminadas a mejorar la instrucción, la evaluación y ampliar el currículo. Preferentemente se trata de pequeños textos que explican como hacer para sacar partido de calculadoras, ordenadores, vídeos y otros medios técnicos en clase de matemáticas.

Publications, Products…
Llama la atención la profusión de anuncios comerciales —muchos de ellos del propio NCTM—, en los que se anuncian publicaciones y productos relacionados con la enseñanza de las matemáticas. Esta fuerte presencia publicitaria da una imagen bastante mercantilista de la asociación americana, sobre todo si la comparamos con la que es normal entre las asociaciones similares, no sólo de nuestro país sino en el entorno europeo. Pero también son una prueba de que existe un gran mercado para esos productos, soportado sobre su elevado número de socios y sobre la muy amplia población de habla inglesa.

Pero no todo es publicidad. También hay las secciones dedicadas a la valoración de publicaciones y otros productos, interesantes para la enseñanza de las matemáticas. Cumple una función que nunca podrá ser sustituida por la publicidad y que permite a los lectores tener una primera idea de lo que puede encontrar y, por tanto, les ayuda a tomar la decisión de si merece o no la pena adquirir el producto en cuestión.

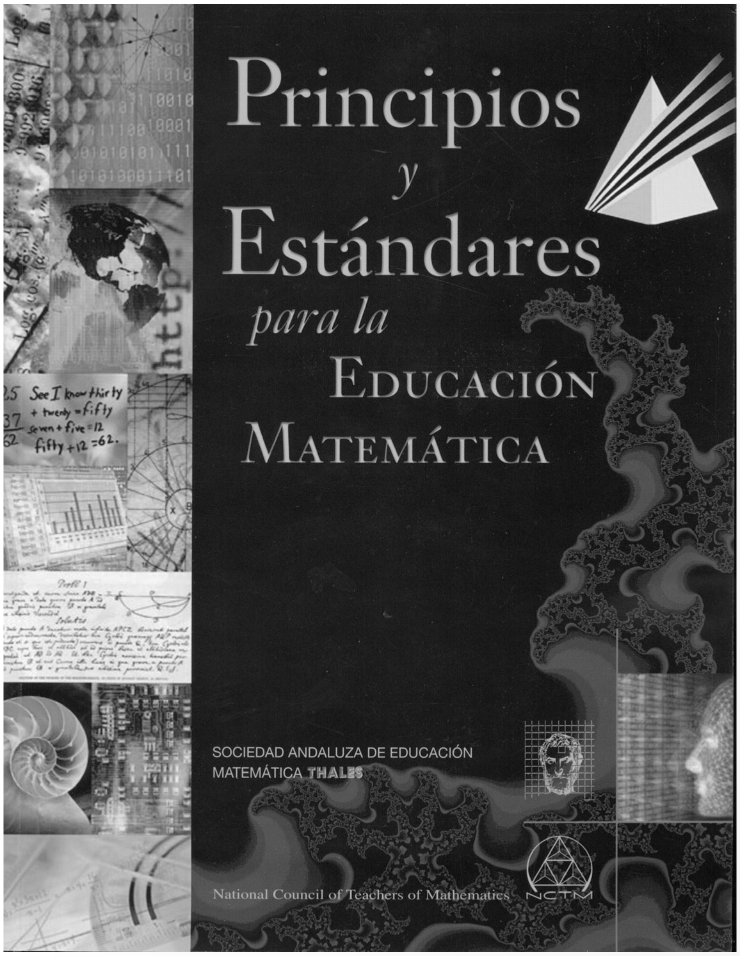
Mathematics Teacher *en la red*

Dentro de la página web del NCTM (www.nctm.org) hay un espacio dedicado a sus publicaciones periódicas, al que se puede acceder desde la página principal. Una vez en la sección que corresponde a la revista podemos consultar el índice del último número y de los números anteriores (Fig. 2). Una vez entramos en el índice cada artículo tiene un enlace a una ficha que contiene un pequeño resumen, su clasificación y algunas palabras clave (Fig. 1). Si somos suscriptores de la revista podremos bajarnos, en formato PDF, el artículo completo. Si no lo somos, la ficha será toda la información a la que podremos acceder, salvo que queramos adquirir el artículo, para lo que deberemos previamente registrarnos como usuarios de la página. No me cabe ninguna duda de que esta fórmula de adquisición de la revista, cada vez va a estar más presente en el panorama de las publicaciones especializadas.

Desde la página web, también podemos formalizar nuestra suscripción a la revista optando entre varias fórmulas. Si esta es la revista que más nos interesa, podemos pagar la cuota de socio del NCTM, que son 72$ al año, y que da derecho a elegir una de las revistas que publica la asociación y a acceder a todas aquellas opciones de la página web que son exclusivas a los miembros del NCTM: entre ellas está la revista "on-line" *On-Math*. Si sólo queremos aprovechar todo el conjunto de recursos on-line que hay en la página web, y que van más allá de las revistas, existe la posibilidad de hacer una suscripción limitada a estos derechos por 46$ al año. Por otra parte, también existe la posibilidad de añadir a nuestra suscripción más revistas, a un coste de 30$ adicionales por cada una de ellas. Por último el formulario de suscripción se descarga fácilmente y puede mandarse por correo ordinario, fax o mail.

> *Siempre encuentro cosas aprovechables en sus páginas: problemas del calendario, actividades que sólo hay que traducir y llevar a clase, ideas contenidas en artículos que se transforman en materiales útiles, información sobre publicaciones...*

Llevo bastante tiempo siguiendo esta revista y siempre encuentro cosas aprovechables en sus páginas: problemas del calendario, actividades que sólo hay que traducir y llevar a clase, ideas contenidas en artículos que se transforman en materiales útiles, información sobre publicaciones, etc. El esfuerzo de los editores para conseguir claridad en la redacción de los artículos facilita la lectura de quienes no dominamos el inglés. Por todo ello, estoy convencido de que es un buen recurso para el profesorado o para un departamento que pueda permitirse desembolsar una suscripción. ■



Principios y estándares para la educación matemática.

National Council of teachers of Mathematics
M. Fernández (traductor)
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Granada, 2004
ISBN 84-933040-3-4
412 páginas

Pedidos a:

SAEM THALES. Centro de Documentación
Departamento de Matemáticas
CASEM
Campus del Río San Pedro
Universidad de Cádiz
11510 Puerto Real

Tfno y FAX: 956016050
Email: *thales.matematicas@uca.es*

SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 125-131

Matemáticas... de cine

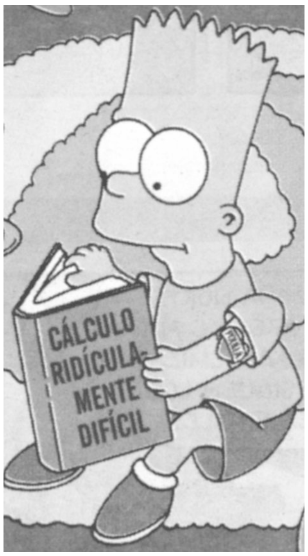
En esta sección vamos a proponer que el cine entre en la clase de Matemáticas en Secundaria. No se tratará sólo de entretener a los alumnos, aunque también (¡ojalá lo consiguiéramos más a menudo!), sino de aprovechar la fascinación de la pantalla para sembrar en sus mentes una idea esencial: las Matemáticas no son algo muerto, limitado a una clase y unos libros, sino que están en nuestro mundo, jugando un papel importante, tanto en la Historia colectiva como en muchas historias personales. Pero hay que saber verlas, como también hay que saber ver el cine.
El cine es la gran ilusión que en la oscuridad de una sala, que puede ser el aula, suplanta a la realidad. En clase, cada escena precisará un análisis posterior, una puesta en común que, además de enseñar a ver, establezca un nexo verosímil entre esa ilusión y la realidad verdadera.
En cada artículo se harán reflexiones sobre el alcance y validez de la propuesta. Después, se propondrán diversas escenas, concretando los niveles y temas para su uso didáctico. Seguramente despierten la memoria cinematográfica del lector. SUMA podría ser receptora de las reseñas que permitan la localización de otras escenas por cualquier profesor interesado en la propuesta y componer con ellas un listado útil. Dirigirlas a decine.suma@fespm.org .

Para expresar que algo nos ha salido muy bien, decimos que ha ido *de cine*, tal es el prestigio del Séptimo Arte. ¿Cómo le va a las Matemáticas en el cine? ¿También *de cine*? (valgan la redundancia y la recursividad)... más bien al contrario.

Dos gags reveladores

Una de las series televisivas que cuenta con mayor audiencia entre nuestros alumnos y sus familias es la española *Aquí no hay quien viva*, que narra con humor las peripecias de una comunidad de vecinos. Los chavales la ven, ríen con ella y la comentan al día siguiente. La estrella de la serie es Emilio, el portero de la finca, que a menudo procura que haya paz y entendimiento en el vecindario pidiendo *un poquito de por favor*.

En un episodio de la serie se instala una empresa de pompas fúnebres en los bajos del edificio y Belén, vecina de la casa a quien pretende Emilio, entra a trabajar como recepcionista de la funeraria. Belén toma para ello el aspecto que se considera adecuado al caso: traje de chaqueta oscuro, zapatos y corbata negros y pelo recogido en moño. Al verla, Emilio la piropea una vez más, diciéndole: “¡Ay, cómo me pones con ese look de profesora de Matemáticas!”



Otra serie de éxito indiscutible son Los Simpson. La viñeta adjunta, donde Bart lee un libro de *Cálculo ridículamente difícil* habla por sí sola.

En la película irlandesa *El crimen desorganizado* (*I went down*, Paddy Breathnatch, 1997), unos delincuentes chapuceros secuestran a un individuo y lo recluyen en un motel de carretera. No pueden resistir la tentación de irse un rato a disfrutar del bar y la piscina. Dejan a su víctima atado en la cama de la habitación y se ausentan. Para que se entretenga, ponen a su alcance el mando a distancia del televisor. El secuestrado empieza a *zapear* de cadena en cadena. Llega a un canal educativo donde, ante una pizarra, un individuo empieza a explicar el *Teorema Fundamental del Álgebra*. En ese preciso instante cae al suelo el mando y, maniatado como está,

José María Sorando Muzás
decine.suma@fesmp.org

el secuestrado ya no puede cambiar de cadena, viéndose obligado a escuchar la disertación académica. Se intercala otra escena de los secuestradores esparciéndose. Se supone que ha pasado un largo tiempo; volvemos a ver qué sucede en la habitación. En la pantalla, con rostro y voz sádicas, el mismo individuo prosigue la demostración. Sobre la cama, la víctima suda, y golpea la pared con la cabeza, desesperado ante el duro suplicio.

En las películas se hace humor con las Matemáticas, pero ya vemos en qué claves. En el subconsciente colectivo, las Matemáticas son algo serio, más bien grave, y esa grave seriedad está más cerca de lo fúnebre que de lo vital. Si se viven, es antes como tortura que como placer. Aunque estas palabras puedan parecer exageradas, la realidad es que eso, *lo que sale en la tele y en el cine* es lo que se piensa en la calle. La pantalla se alimenta de los clichés que ya existen en la sociedad, amplificándolos y transmitiéndolos de forma especialmente eficaz con los adolescentes.

En esta situación, los profesores de Matemáticas tenemos, al menos, dos batallas que librar: derribar en las mentes de nuestros alumnos ese prejuicio social antimatemático y, por supuesto, ayudarles a aprender. Pero si no vencemos en la primera, es dudoso que lleguemos a hacerlo en la segunda.

Tenemos, al menos, dos batallas que librar: derribar en las mentes de nuestros alumnos ese prejuicio social antimatemático y, por supuesto, ayudarles a aprender. Pero si no vencemos en la primera, es dudoso que lleguemos a hacerlo en la segunda.

Usemos el cine

Planteo este objetivo: que los alumnos se apropien de las Matemáticas como un elemento más en su mundo, en vez de enfrentarse a ellas como algo hostil. Una apropiación no sólo en la parcela académica, también fuera de la clase, en lo doméstico, en lo lúdico, en lo creativo, en lo emocional, etc. Y si las películas son para ellos fuente de autoridad, ¿por qué no usarlas en nuestra empresa?

No me refiero sólo a los videos didácticos, o a las series de divulgación científica realizadas con mayor brillantez (Cosmos, Más por menos, etc.), sino también y especialmente al cine comercial. Usemos la espectacular tramoya de Hollywood en nuestro beneficio; tengamos a Russell Crowe, Jodie Foster, Bruce Willis o Kate Winslett como "actores secundarios" de nuestra clase. La atención del auditorio está asegurada.

¿Pero hay otro tipo de apariciones en pantalla de las Matemáticas sin connotaciones negativas? Es decir, películas o simples escenas donde se realce su valor y se destaque su presencia decisiva en todos los ámbitos. Son pocas, pero las hay. En estos artículos se mostrarán algunas y se propondrá dónde y cuándo utilizarlas en Secundaria. De hecho, quien esto escribe las ha utilizado.

¿Se trata de poner un largometraje entero en clase? No. Nos falta tiempo lectivo y la trama global del film casi siempre escapa a nuestro núcleo de interés, las Matemáticas. La propuesta consiste en utilizar en el momento adecuado aquellas escenas que en sí mismas, de forma aislada, tengan un significado comprensible y que refuercen nuestros objetivos pedagógicos.

Educación en valores

Comenzaremos presentando tres películas que tienen en común el hecho de contener escenas en las que coinciden matemáticos y militares. Las relaciones entre ambos gremios surgen siempre a propósito de la Criptografía, un campo de aplicación matemática con alto valor estratégico.

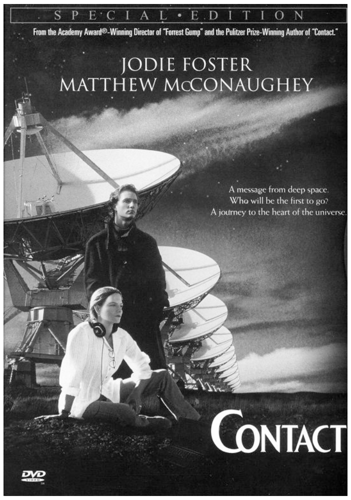
De forma más tensa o sutil, según los casos, se advierte el enfrentamiento entre el discurso jerárquico militar y el racional científico. En las tres, los matemáticos aparecen como subcontratados del *sistema nacional de seguridad*. Los auténticos profesionales del ramo, los militares, acuden a ellos pidiéndoles resultados que permitan dar por cerrada una situación comprometida, mientras que los matemáticos razonan sobre esa situación y argumentan sobre la viabilidad de ese propósito, dejando abierta la compleja realidad.

Tras la visión de cada escena en clase, es necesario realizar una puesta en común donde se pongan de manifiesto todas las lecturas a que haya dado lugar, tanto las previstas por el profesor como aquellas otras con que nos sorprenderán los alumnos. La ocasión se presta especialmente para desarrollar la educación en valores, siempre presente por acción u omisión, pero que rara vez hacemos explícita en clase de Matemáticas. A los profesores nos ocurre muchas veces con los valores como a los alumnos con las Matemáticas: están en nuestro hacer diario, pero no nos damos cuenta.

Las escenas que a continuación se citan dan lugar al planteamiento de cuestiones como estas: ¿Cuándo es lícito poner el saber al servicio de la máquina de la guerra? ¿Lo era ante la invasión del nazismo? ¿Lo fue con la bomba atómica?; ¿y en la Guerra Fría? ¿Y en las guerras preventivas? ¿Debe permanecer el científico al margen de todo ello? ¿Puede hacerlo?... Si pensamos que todo esto no corresponde a nuestra clase, podemos ceñirnos sólo a los contenidos matemáticos de cada escena y dejar lo demás para la clase de Ética. Pero tal vez no seamos de esa opinión. ■

Para empezar, ciencia ficción

CONTACT
Director**: Robert Zemeckis.**
Actores*: Jodie Foster, Matthew Mc Conaughey, John Hurt.*
Guión*: adaptación de la novela de Carl Sagan.*
Producción*: Warner Bros. USA 1997.*
Distribuidora*: Warner Bros. Home Video.Disponible en VHS y DVD.*



ESCENA. Se sitúa entre los minutos 34:00 y 44:00.

ARGUMENTO. Ellie Arroway es una investigadora espacial entregada a su gran deseo, poder comunicarse algún día con seres de otras galaxias. Junto con un grupo de expertos en emisión y recepción de ondas de radio, trabaja duramente con la esperanza de interceptar un mensaje descifrable proveniente de otro mundo. De repente, su sueño se hace realidad. Se recibe una extraña señal discontinua desde la estrella Vega, a 26 años-luz de la Tierra. Pronto descubre su significado: se trata de la sucesión de los números primos.

Acuden altos cargos del Gobierno, de la CIA y del Pentágono, intentando blindar y controlar el acontecimiento. Su primera pregunta: *Si son inteligentes, ¿por qué no se comunican en inglés? ¿Por qué los números primos?* Ellie, tras recordarles que la mayor parte de la Humanidad no habla inglés, les da una breve clase de aritmética y enuncia una frase lapidaria*: ... han elegido los números primos porque las Matemáticas son el único lenguaje universal*.

Los visitantes quedan cortados por la claridad y determinación de la científica; momento que es aprovechado por ésta para desalojar a los soldados que han entrado armados en una instalación civil.

NIVEL. 1º y 2º ESO. **TEMA.** Divisibilidad.

EN CLASE. Los alumnos que acogieron con sorpresa y alborozo el pase de una *peli de acción*, con ritmo trepidante, actores conocidos, una puesta en escena llamativa... se han visto conducidos por la trama del film al mismo tema que se está tratando en clase de Matemáticas: la divisibilidad. Además, la protagonista (¡una científica!) sobrepasa a quienes ostentan la razón de la fuerza mediante la fuerza de la razón de sus argumentos y lanza un contundente eslogan a favor de las Matemáticas. Alcanzado ese clímax, es un buen momento para cortar la escena.

COMPLEMENTOS. La misma idea de la escena anterior, aunque con los humanos como emisores del mensaje y en versión geométrica, fue expresada por Verne más de un siglo antes. Es una ocasión adecuada para presentar ese texto a los alumnos y que empiecen a ver que se pueden abrir las fronteras entre la realidad, la ficción; entre las ciencias, las artes y las letras; que todos los saberes confluyen en la mente humana.

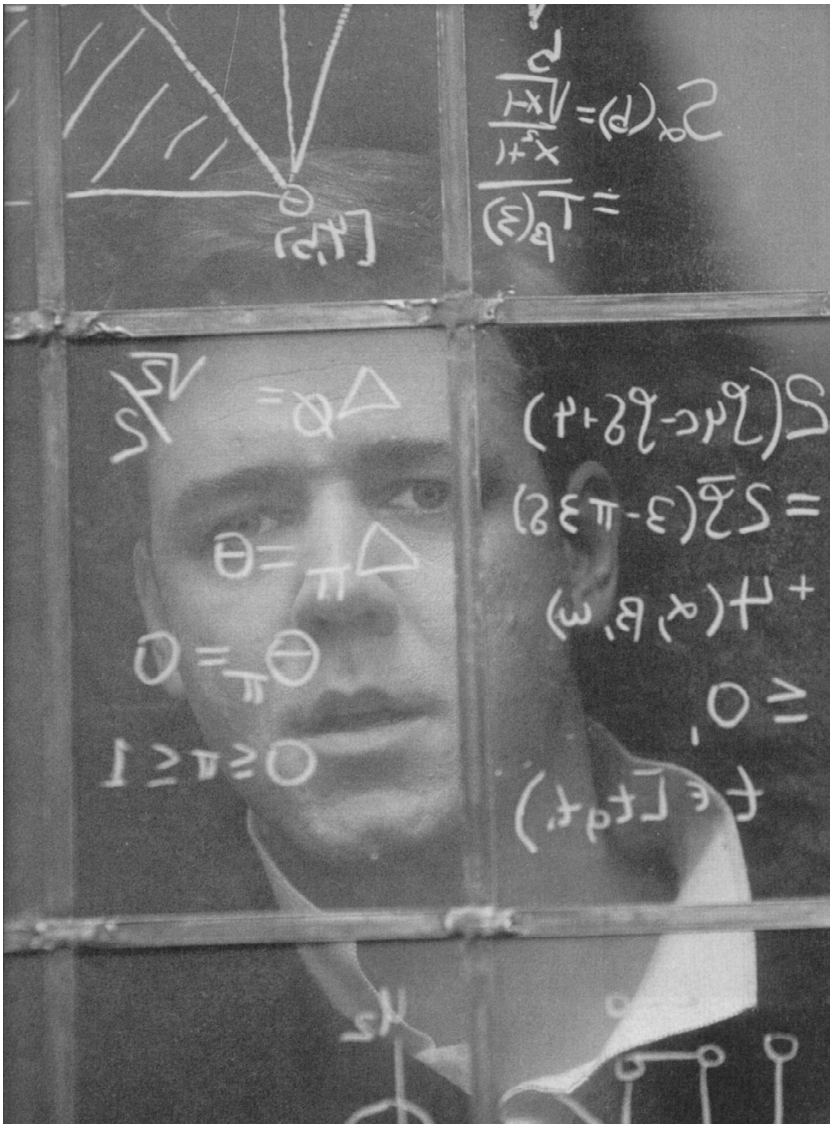
> …años atrás, un geómetra alemán propuso enviar una expedición científica a las estepas de Siberia. Allí, en aquellas vastas llanuras, tendrían que describir formas geométricas enormes, dibujadas con trazos de una luminosidad cegadora, entre las cuales figuraría la proposición que se refiere al cuadrado de la hipotenusa, comúnmente llamada por los franceses el *puente de los asnos*. "Cualquier ser inteligente —decía el geómetra— ha de poder entender el significado científico de la figura. Los selenitas, si es que existen, nos responderán con una figura similar y, una vez establecida la comunicación, será fácil formar un alfabeto que nos permita conversar con los habitantes de la Luna."

Julio Verne, *De la Tierra a la Luna*[1],1865

■

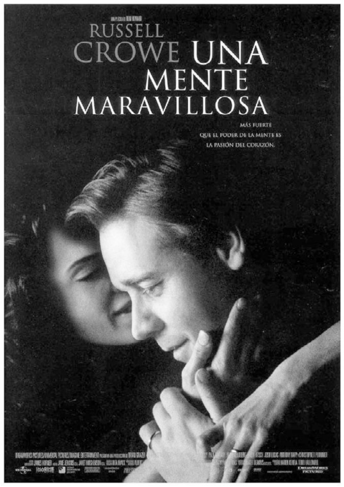
NOTA

[1] Una vez más, las premoniciones de Verne se cumplieron de forma bastante aproximada. El *Teorema de Pitágoras* figura en el mensaje elaborado por los físicos canadienses Yvan Dutil y Stéphane Dumas, enviado el 1 de julio de 1999 desde la antena de 70 m de diámetro del Evpatoria Deep Space Center en Ucrania, con destino a cuatro estrellas similares al Sol, situadas en direcciones donde el polvo interestelar alterará poco el mensaje durante su propagación.



El actor Russell Crowe en el papel de Nash en *Una Mente Maravillosa (A Beautiful Mind)*, de Ron Howard, 2001

Matemáticos y espías



UNA MENTE MARAVILLOSA (A BEAUTIFUL MIND).
Director: **Ron Howard**.
Actores: *Russell Crowe, Ed Harris, Jennifer Connelly y Christopher Plummer.*
Guión: *adaptación por Akiva Goldsman del libro escrito por Sylvia Nasar.*
Producción: *Dream Works Pictures USA 2001. Película triunfadora en los Oscars 2002, con 4 estatuillas; entre ellas, la de Mejor Película.*
Distribución: *Universal Pictures Video. Disponible en VHS y DVD.*

ARGUMENTO. En 1953, en plena Guerra Fría, el matemático John Forbes Nash es llamado al Pentágono. Se han detectado transmisiones soviéticas sin significado aparente. Ante un muro cubierto de números, Nash encuentra patrones geométricos y descifra la clave. Descubre que se trata de coordenadas geográficas correspondientes a rutas para cruzar la frontera de EEUU. Una vez cumplido su trabajo se le dan las gracias y se le despide. Nash se da cuenta de que hay un misterioso observador tras una celosía y hace dos preguntas: *¿Quién es el mandamás?* y *¿qué traman los rusos?* No recibe respuesta a ninguna de ellas y amablemente se le indica la salida.

NIVEL. 4º ESO y Bachillerato. **TEMA**. Combinatoria.

EN CLASE. Hay, al menos, dos niveles de lectura para esta escena. Por una parte, la presentación de la Criptografía como aplicación de la Combinatoria; por otra, la relación entre el científico y el Poder.

En el primer nivel, se pueden presentar los sistemas criptográficos clásicos y citar los más modernos de clave pública, basados en la factorización de grandes números. La Teoría de Números tiene ese rasgo singular: los problemas más arduos y algunos aún sin resolver (el *Teorema de Fermat* hasta hace poco y la *Conjetura de Goldbach*, por ejemplo) pueden ser planteados, pese a su complejidad, de forma comprensible para un público amplio. Como una aplicación del tema en estudio, se pueden calcular todas las combinaciones a que da lugar la adopción de un sistema de cifrado concreto. Y como interesante enlace desde la combinatoria a la probabilidad, suponiendo una correspondencia biunívoca entre letras y símbolos, se puede descifrar un mensaje mediante el estudio comparado de las frecuencias relativas de los símbolos en el mensaje y de las letras en nuestro idioma. Una referencia clásica a este método está en la narración *El Escarabajo de Oro* de Edgar Allan Poe.

En cuanto al segundo nivel, vemos que si en la ficción de *Contact* la astrónoma se imponía con firmeza a los militares, en esta otra historia, más real, queda muy claro que el científico es un asalariado del poder, que no sabe bien para quién ha trabajado ni en qué.

COMPLEMENTOS. Al hilo de lo último, viene al caso la historia real de Alexander Grothendieck (Berlin, 1928) matemático de primera línea mundial, galardonado en 1966 con la medalla Fields, que en 1970, al descubrir que sus trabajos estaban financiados por una fundación vinculada a la industria bélica, declaró su objeción de conciencia y abandonó la investigación en el *Institut des Hautes Études Scientifiques*. El 27 de enero de 1972 en Ginebra se despedía de la comunidad científica diciendo: *... la gran mayoría de mis colegas no se plantean sus trabajos en términos de finalidad* y *... entonces para qué sirve una Ciencia completamente alejada de lo que debería ser su objetivo, a saber, un servicio a la Humanidad*.

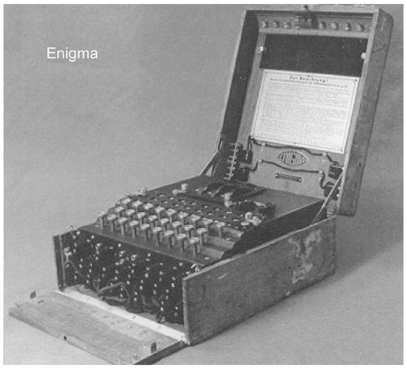
Para la siguiente escena, retrocedamos en el tiempo hasta la Segunda Guerra Mundial. ■

Matemáticos en la guerra

ENIGMA
Director: **Michael Apted**
Actores: *Dougray Scott, Kate Winslet, Jeremy Northam y Saffron Burrows*
Guión: *Adaptación por Tom Stoppard de la novela de Robert Harris*
Producción: *Intermedia Films & Senator Entertainment. Gran Bretaña 2001*
Distribución: *Sogepaq. Disponible en VHS y DVD.*

ESCENA. Se sitúa entre los minutos 6:00 y 11:20.

ARGUMENTO. En 1943 un equipo de matemáticos trabajaba en Bletchey Park, sede de los servicios secretos británicos, descifrando los mensajes nazis codificados con la famosa máquina *Enigma*. Ya habían conseguido descifrar el código pero, inesperadamente, el enemigo lo ha cambiado. El mayor convoy aliado de suministros, con un millón de toneladas de flete y diez mil personas a bordo, está cruzando el Atlántico y, al no poder localizar los submarinos nazis decodificando sus transmisiones, está en peligro de ser atacado. Alarmados, los almirantes de la Marina acuden a los descifradores de claves.



Reproducción de la famosa máquina
Enígma, que da título a la película

Tom Jerico, el matemático protagonista, hace una disertación ante los jefes militares sobre la complejidad combinatoria de las claves posibles y la dificultad de encontrar la acertada en un plazo corto de tiempo. El jefe de más alta graduación capta la gravedad de la situación pero, con respecto a la explicación sentencia: "No he entendido ni una palabra".

NIVEL. 4º ESO y Bachillerato. **TEMA**. Combinatoria.

EN CLASE.- En lo matemático, las posibilidades que ofrece esta escena son muy similares a las que ofrecía la anterior. En cuanto a la discusión sobre valores, presenta un interesante contrapunto a aquella. En *Una Mente Maravillosa* nos encontrábamos en la Guerra Fría, que condujo al mundo al borde de su destrucción con la escalada nuclear disuasoria, ante la conjetura de la *guerra posible*, mientras que en *Enigma* nos enfrentamos a la guerra real contra el nazismo desatada en los campos de batalla. Son dos escenarios diferentes para las mismas preguntas. Su confrontación sugiere matizar los juicios.

COMPLEMENTOS. Para provocar las dos cuestiones citadas (Criptografía y reflexión ética), esa escena es suficiente. Si queremos además recrear la situación aprovechando la espectacularidad propia del film, podemos seleccionar las escenas que continúan el argumento principal, el descifrado de *Enigma*, prescindiendo de las demás tramas que se cruzan en la película. Para ello, se pueden añadir a la anterior estas tres escenas:

- El convoy se va a topar con los submarinos y los matemáticos comprenden que si captan las transmisiones de éstos informando de las posiciones de los blancos localizados, sabiendo su significado (pues la situación del convoy propio es conocida) podrán encontrar más fácilmente la clave (minutos 53:10 a 56:00).

- El convoy es localizado por los submarinos y comienzan las transmisiones. Éstas son interceptadas y los matemáticos empiezan su trabajo (minutos 75:00 a 79:30). En esta escena se ve el trabajo con coordenadas sobre el mapa.

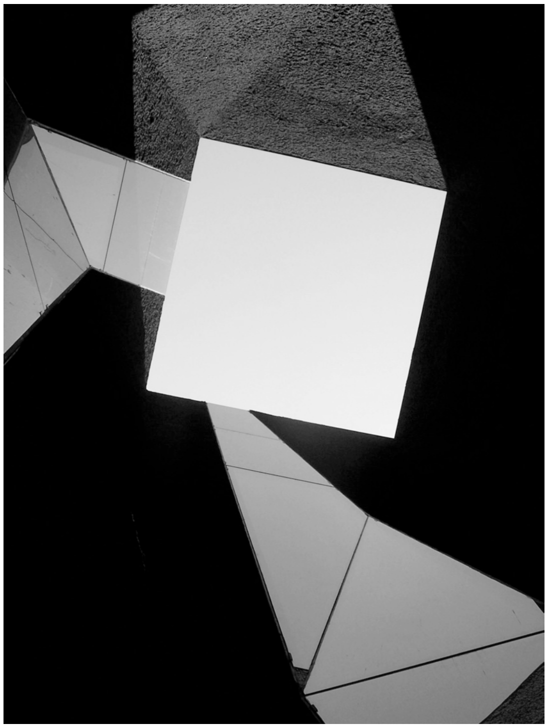
- Asistimos a la resolución del problema por la búsqueda de bucles, en primer plano y en tiempo real, algo inédito en el cine. La tensión aumenta, pues conforme avanza el tiempo, se acortan las esperanzas de salvar el convoy. Comienza el ataque y varios barcos son hundidos, pero los matemáticos ya han recogido suficientes mensajes cifrados para comprobar que tienen la solución: el grafo que da el código *Enigma*. Gracias a ello se salvarán muchos miles de vidas y se adelantará el fin de la guerra (minutos 79:50 a 83:05).

Dougray Scott interpretando a Tom Jerico y Kate Winslet en dos escenas de *Enigma*, de Michael Apted, 2001

Otra imágen de la máquina *Enigma*

Son en total, casi 16 minutos de cine trepidante, con las Matemáticas en primer plano, batallas navales, hechos históricos... Sea cual sea el valor que concedamos a la película íntegra, parece que este extracto ya nos ofrece bastante.

Hemos visto ejemplos donde el cine de comercial, de entretenimiento, usado con intención, nos puede servir para revalorizar las Matemáticas a ojos de los alumnos. También para que conozcan un nuevo tema de aplicación matemática como es la Criptografía e incluso para plantear las relaciones entre Ciencia y Poder. En próximos artículos, también de la mano del cine, abriremos las puertas de la clase de Matemáticas a la intriga, a la pasión amorosa, a la Historia y al humor. ■

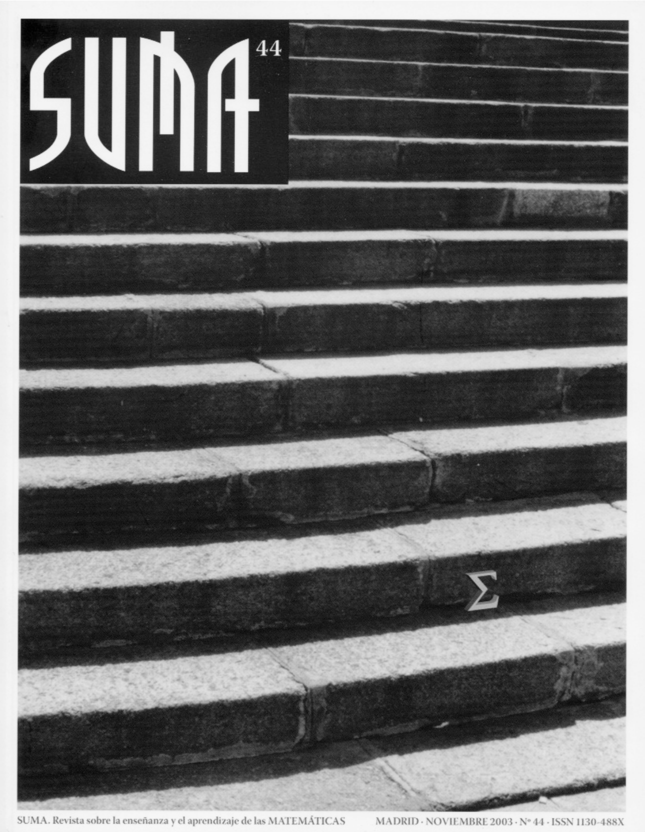


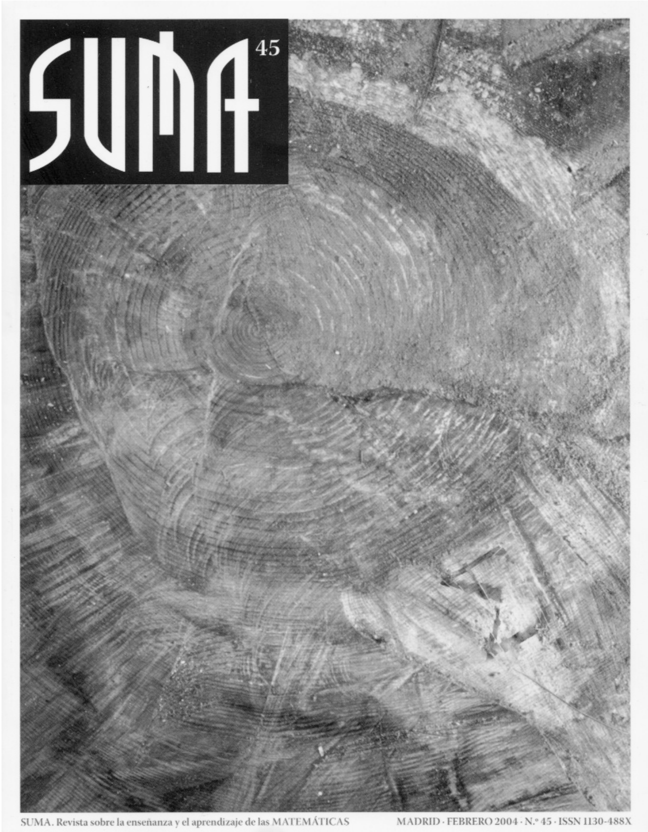
Tragaluz cuadrado, Barcelona, Forum 2004. Foto J. M. Sorando

Romboide fotovoltaico I, Barcelona, Forum 2004. Foto J. M. Sorando

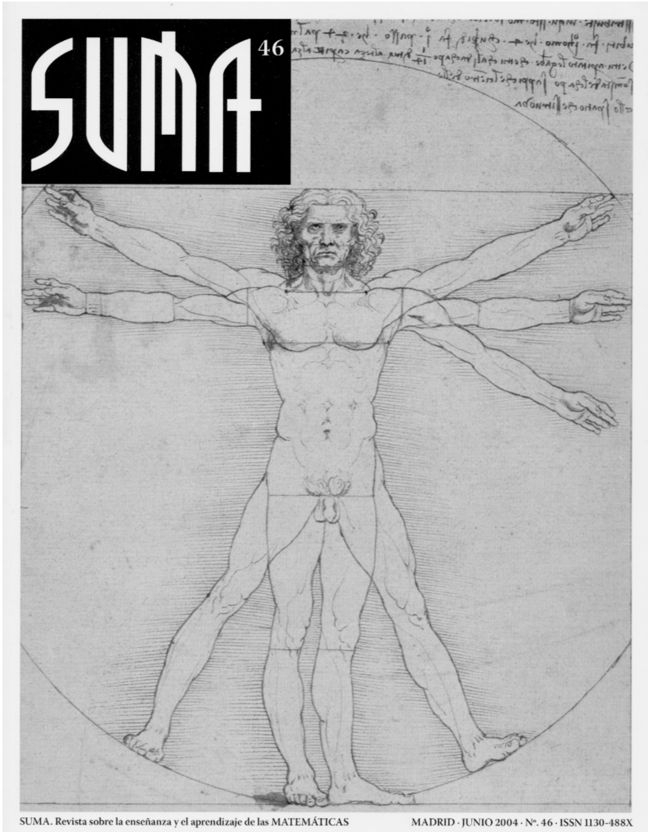
En la arista, Barcelona, Forum 2004. Foto J. M. Sorando

Romboide fotovoltaico II, Barcelona, Forum 2004. Foto J. M. Sorando

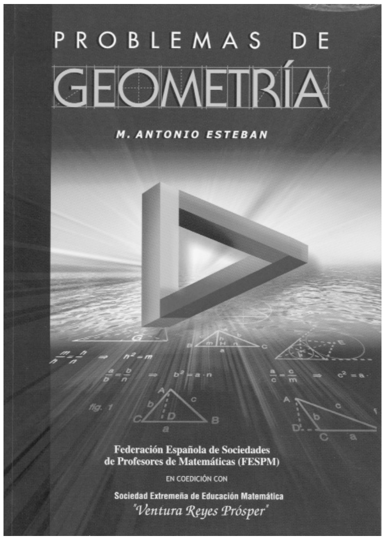

SUMA 44
Σ
SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
MADRID · NOVIEMBRE 2003 · Nº 44 · ISSN 1130-488X


SUMA 45
SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
MADRID · FEBRERO 2004 · N.º 45 · ISSN 1130-488X


monografía 01
ideas de
emmatemática
castelnuovo


SUMA 46
SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
MADRID · JUNIO 2004 · Nº. 46 · ISSN 1130-488X

Publicaciones de la FESPM



PROBLEMAS DE GEOMETRÍA.
M. Antonio Esteban
En coedición con la Sociedad
Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"
Cáceres, 2004
ISBN 84-931776-5-2
172 PÁGINAS.

ACTAS DE LAS V JAEM

El Servivio de Publicaciones de la FESPM ha publicado en CD-ROM las *Actas de las V Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, celebradas en Castellón de la Plana del 20 al 23 de marzo de 1991. Con esta publicacón la coleción de Actas de las JAEM queda completa. Los asistentes a aquellas Jornadas las pueden solicitar gratuitamente rellenando y envíando el siguiente boletín a **Servicio de Publicaciones FESPM, Apdo. 590, 06080-Badajoz**.

Actas de las V Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas
Castellón de la Plana, 1991

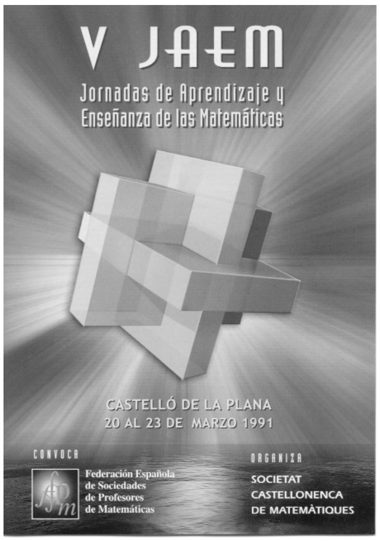
Como ASISTENTE a las V JAEM deseo recibir el CDROM con las Actas en la siguiente dirección:

Apellidos ____________________ Nombre ____________________

C/, Plz. ____________________ N.º __________

Ciudad (Provincia) ____________________ C.P. __________

Correo-e ____________________



Cese de Florencio Villarroya como presidente de la FESMP. Convocatorias de cargos

El pasado mes de octubre cesó como presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas el profesor Florencio Villaroya Bullido. Su cese se produce, como prevén los estutos de nuestra federación, al cesar a su vez como presidente de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "Pedro S. Ciruelo", al frente de la cual ha estado más de una década.

Como establecen los estatutos, en tanto la Junta de Gobierno no proceda a la elección de un nuevo presidente, ejercerá como tal el profesor Serapio García Cuesta, hasta ahora vicepresiente de la Federación y presidente a su vez de la Sociedad Castellano-Manchega de profesores de Matemáticas, al que deseamos los mayores éxitos al frente de la Federación.

En la Junta de Gobierno del pasado 23 de octubre de 2004, se decidió convocar los cargos correspondientes a la Secretaría de Prensa, actualmente vacante, la Secretaria de Actividades y Formación del Profesorado y la Secretaría de Actividades con Alumnos, de nueva creación estas dos últimas, en sustitución de la desaparecida Secretaría de Actividades, que queda así desdoblada en dos y sus funciones repartidas entre ambas nuevas Secretarías.

Se recogen en las siguientes páginas las convocatorias de esos tres cargos, que como tales, formarán parte de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva de la FESPM. ■

Convocatoria del cargo de Secretaria o Secretario de Actividades con Alumnos

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 23 de octubre de 2004, ha decidido convocar la Secretaría de Actividades con Alumnos en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la *Secretaría de Actividades con Alumnos* cualquier socia o socio de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos en tal condición. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste su condición de socio activo de una Sociedad Federada y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Este proyecto deberá incluir los siguientes contenidos:

1. Organización de la fase estatal de las Olimpíadas, en colaboración con la Sociedad que las organice.
2. Coordinación del Día Escolar de las Matemáticas, Promoción de los actos en todas las Comunidades, asegurar y coordinar la redacción del texto de la publicación anual.
3. Recopilar y distribuir el conjunto de Actividades que realizan las Sociedades Federadas en las que participan directamente alumnos (niños, niñas, jóvenes, en la calle, en centros abiertos, etc.).

La Secretaría puede tener un/a único/a secretario/a o bien conformarse como un equipo de secretaría de varias personas. En el caso de equipo, una de las personas adscritas asistirá a las reuniones de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 12 de enero de 2005, dirigida a:

Presidencia de la FESPM
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
c/ Limonero 28 Madrid

B) Por correo electrónico hasta el 15 de enero de 2005. En tal caso el mensaje se dirigirá a:

presidente@fespm.org

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá a la Secretaria o Secretario de Actividades con los Alumnos entre los candidatos/as presentados/as, oido previamente al Secretario General, en su reunión del día 12 de febrero de 2005.

Josep Sales i Rufí.
Secretario General

Convocatoria del cargo de Secretaria o Secretario de Actividades y Formación del Profesorado

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 23 de octubre de 2004, ha decidido convocar la Secretaría de Actividades y Formación del Profesorado en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la *Actividades y Formación del Profesorado* cualquier socia o socio de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos en tal condición. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste su condición de socio activo de una Sociedad Federada y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Este proyecto deberá incluir los siguientes contenidos:

La labor de esta secretaría ha de estar íntimamente ligada a la Secretaría General, tomando el carácter de una verdadera Vicesecretaría General o Secretaría Adjunta a la Secretaría General, con la que debe trabajar estrechamente y compartir tareas.

Debe asumir los siguientes tareas:

1. Coordinar las actividades conjuntas con otras organizaciones.
2. JAEM.
3. Proponer actividades de acuerdo con las líneas de actuación decididas por la Junta de Gobierno.
4. Proponer seminarios de formación, sus sedes, y su organización.
5. Recoger, describir, clasificar, las actividades con profesores de cada Sociedad y difundir esta información en todas las Sociedades federadas, para llegar, si se considera conveniente, a una cierta coordinación.

La Secretaría puede tener un único/a secretario/a o bien conformarse como un equipo de secretaría de varias personas. En el caso de equipo, una de las personas adscritas asistirá a las reuniones de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 12 de enero de 2005, dirigida a:

Presidencia de la FESPM
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
c/ Limonero 28 Madrid

B) Por correo electrónico hasta el 15 de enero de 2005. En tal caso el mensaje se dirigirá a:

presidente@fespm.org

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá a la Secretaria o Secretario de Actividades y Formación del Profesorado entre los candidatos presentados, oido previamente al Secretario General, en su reunión del día 12 de febrero de 2005.

Josep Sales i Rufí.
Secretario General

Convocatoria del cargo de Secretaria o Secretario de Prensa

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 23 de octubre de 2004, ha decidido convocar la Secretaría de Prensa en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la *Secretaría de Prensa* cualquier socia o socio de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos en tal condición. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste su condición de socio activo de una Sociedad Federada y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.

Este proyecto deberá incluir los siguientes contenidos:
1. Mantenimiento de la página web de la FESPM.
2. Coordinación de las relaciones de la Federación con la prensa y los medios.
3. Recoger y publicar los cambios de personas y datos que se den en las sociedades.
4. Publicidad de las convocatorias de Jornadas, publicaciones y actividades de la FESPM y de las Sociedades Federadas.

La Secretaría puede tener un único/a secretario/a o bien conformarse como un equipo de secretaría de varias personas. En el caso de equipo, una de las personas adscritas asistirá a las reuniones de la Junta de Gobierno y de la Comisión Ejecutiva.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 12 de enero de 2005, dirigida a:

Presidencia de la FESPM
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
c/ Limonero 28 Madrid

B) Por correo electrónico hasta el 15 de enero de 2005. En tal caso el mensaje se dirigirá a:

presidente@fespm.org

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá a la Secretaria o Secretario de Prensa entre los candidatos/as presentados/as, oido previamente al Secretario General, en su reunión del día 12 de febrero de 2005.

Josep Sales i Rufí.
Secretario General

SUMA 47
Noviembre 2004

Jornadas sobre Educación Matemática. Santiago de Compostela 16,17 y 18 de septiembre de 2004

Durante los días 16, 17 y 18 de septiembre de 2004 tuvieron lugar en el Palacio de Congresos y Exposiciones de Galicia en Santiago de Compostela, las "Xornadas sobre Educación Matemática". Dirigidas a todo el profesorado, estas Jornadas han sido organizadas por la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria en colaboración con las sociedades matemáticas: AGAPEMA, FESPM, RSME y SEIEM.

Éstas no fueron unas jornadas más. Fueron un intento de acercamiento entre diferentes asociaciones de profesionales de la Matemática para intentar tratar problemas comunes. AGAPEMA/FESPM, RSME y SEIEM condujeron y prepararon intensas y atractivas sesiones que resultaron todo un éxito, reflejado sobre todo tanto en el elevado número de asistentes como de ponencias desarrolladas, así como en las distintas conferencias a cargo de otras tantas figuras de la Educación Matemática de primera fila en Europa. De hecho el subtítulo fue *La Educación Matemática en la Europa del siglo XXI*.

Hay que resaltar, por lo tanto, el duro trabajo en equipo del núcleo del comité de programa AGAPEMA-RSME, especialmente de Tomás Recio y Manuel de León, sin el cual las Jornadas no hubiesen sido posibles. Incluso, hay que atribuirles la idea y los primeros pasos de la concepción de ellas, así como las numerosas tardes que les dedicaron para conseguir el objetivo propuesto. Es justo reconocer también el apoyo de la Consellería de Educación en su organización y desarrollo.

Tres grupos de trabajo compuestos por un miembro[1] de cada organización profesional, prepararon tres ponencias: *La convergencia europea en educación y las nuevas leyes educativas españolas LOU y LOCE, Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro, y*

Manuel Díaz Regueiro
Luis Puig Mosquera
AGAPEMA

Dos momentos de las Jornadas de Santiago

Formación inicial y continua del profesorado de educación primaria y de educación secundaria.

No en todas las ponencias hubo unanimidad. Es un hecho que los puntos de partida y las preocupaciones de los profesores de matemáticas de distintos niveles educativos son diferentes, lo que quedó reflejado en los resultados, lo cual no desmerece las actividades de las jornadas. Pero el principal resultado, más allá de los textos elaborados que pueden ser consultados en la página de AGAPEMA[2], es la propia existencia y funcionamiento de los grupos. Sabemos que estos encuentros y discusiones son necesarios y hemos dado muestra de que sabemos organizarlos. Los problemas no se resuelven en unas únicas Jornadas. Sentarnos a pensar y elaborar estrategias de resolución comunes es el único camino posible. Esta es la conclusión fundamental.

La mesa redonda sobre *La educación matemática en la encrucijada de la educación española* atrajo la atención y la participación de los numerosos asistentes con distintas y fundadas opiniones. Las conferencias, de Sánchez Ron sobre *El poder de las matemáticas*, de Antibi sobre *La constante macabra*, de Joao Pedro da Ponte: *O ensino da Matemática em Portugal, de* Guy Brousseau (Premio ICMI 2003, premio Klein): *Investigaciones en educación matemática*, de Kahane sobre la Comisión Kahane francesa, de Claudi Alsina, de Rosa Mª Ros, etc., fueron ilustrativas y muy bien recibidas.

Complementadas con presentaciones de *Divulgamat* y *Thesaurus*, o con la entrega del *II premio Galicia de Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación Matemática* —convocado por la FESPM/AGAPEMA— que recibieron Francisco Botana y José Luis Valcarce por su trabajo *Lugares geométricos planos*, un trabajo que es posible descargar en la red, desde la página de AGAPEMA, y que seguro ha de resultar de enorme utilidad a los profesores de Secundaria en la enseñanza de la geometría.

Completó el programa un emotivo homenaje a Miguel de Guzmán, en el que intervinieron Luis Balbuena (FESPM), Modesto Sierra (SEIEM) y Tomás Recio (RSME) realzando su figura y su mensaje. En escenario, acompañando este homenaje, había unas tensegridades, elaboradas por un equipo dirigido por Covadonga Rodríguez-Rey Moldes, y la portada de GAMMA 4. Esta revista junto con el libro *13 matemáticos galegos,* fue repartida a todos los asistentes.

Se elaboró un documento, *Declaración de Santiago,* que pone el énfasis en la necesidad de que una colaboración continua y permanente en el tiempo, en la necesidad de la existencia efectiva y no nominal de una Comisión de Educación Matemática que coordine los numerosos esfuerzos que han de hacerse en la mejora de ésta Educación en España. Esta declaración se espera que sea aprobada próximamente por las Ejecutivas de las distintas asociaciones. ■

NOTAS

1 Grupo1: Adolfo Quirós (RSME), Bernardo Gómez* (SEIEM), Florencio Villaroya (FESPM), Luis Puig (AGAPEMA), Juan Manuel Viaño (RSME).
Grupo 2 : Josep Gascón* (SEIEM), Josep Sales (FESPM), Miguel Muñoz-Lecanda (RSME), Rosa Segura (AGAPEMA).
Grupo 3: Enrique de la Torre (SEIEM), Enrique Zuazua (RSME), Manuel Díaz Regueiro (AGAPEMA), Salvador Guerrero* (FESPM).
*Coordinadores del grupo.

2 http://www.agapema.com

Convocatoria del IV Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el IV Premio "Gonzalo Sánchez Vázquez", en homenaje de quien fue su Presidente de Honor, de acuerdo con las siguientes bases:

1. Se trata de premiar la labor docente y los *valores humanos*: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.

2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

3. El Premio consistirá en el nombramiento de *Socio de Honor* de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.

4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.

5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al Presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.

6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de enero de 2005.

7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.

8. Para la concesión del Premio, la junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:

- Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
- Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
- Currículo con hechos, anécdotas, etc. referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.

9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.

10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las XII JAEM que se celebrarán en Albacete en julio de 2005. ■

V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática Oporto, 17-22 julio 2005

*El **Congreso Iberoamericano de Educación Matemática** (CIBEM) es un encuentro que se realiza cada cuatro años y que reune a profesores e investigadores esencialmente provinientes de las comunidades de educación matemática de America Latina, de Barsil, de España y de Portugal.*

Este congreso tuvo su primera edición en el año 1990 en Sevilla. Se realizó después en Blumenau (Brasil), Caracas (Venezuela) y en Cochabamba (Bolivia).

*En esta ocasión, en su V edición, visita Portugal, donde tendrá lugar en la ciudad de **Oporto** en julio de 2005, corriendo la organización a cargo de la APM.*

Para participar en el V CIBEM es necesario rellenar una ficha de inscripción que puede ser solicitada a la organización (APM—Núcleo de Porto, Dpto. de Matemática Pura, Facultade de Ciências da Universidade do Porto, Rua Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Portugal). También es posible incribirse a través de Internet (www.mytwt.net/cibem5). En los dos casos la inscripción se deberá acompañar del correspondiente pago. Hasta el 30/03/05 el precio de inscripción es de 130 euros, A partir de esa fecha y hasta el 15/06/2005 el importe de la inscirpción será de 200 euros.

Los paricipantes en el V CIBEM pueden presentar comunicaciones orales o en póster. Para ello tienen que indicar el título de la comunicación en el boletín de inscipción. En el caso de las comunicaciones orales es necesario enviar, por email o en un disquete, antes del 31/01/2005 un resumen (máximo 200 palabras) y el texto completo (máximo 4000 palabras) en un archivo Word o PDF, junto con las necesidades de equipo. Las comunicaciones orales dispondrán de 25 minutos para su presentación y 20 minutos para debate, y podrán ser eventualmente integradas en alguno de los grupos de discusión.

En el caso de los póster es necesario también enviar un texto descriptivo (menos de 1000 palabras). Para el montaje de cada póster en el encuentro se dispondrá de un espacio aproximado de 1 m (anchura) x 1,20 m (altura). La Comisión Científica comunicará la aceptación de las comunicaciones orales y en póster antes del 15/03/2005.

Temas del encuetro

Grupos de discusión: GD01-*Geometría y medida*; *GD02-Números y Álgebra*; GD03- *Análisis de datos, Estadistica y probabilidades*; GD04-*Resolución de problemas y tareas investigativas;* GD05-*Tecnologías de la información y la Comunicación*; GD06-*Historia de las Matemáticas*; GD07-*Evaluación*; GD08-*Formación inicial de profesores*; GD09-*Desarrollo profesional, reflexión sobre la práctica*; *GD10-Multiculturalidad*; GD11-*Adaptaciones curriculares.*

Mesas redondas: *Formación matemática de los profesores, Desarrollo curricular, Estudios de evaluación internacionales.* ■

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

3. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres incluyendo los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte informático (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia del archivo de texto que contenga el artículo y del que contenga la hoja de datos y los resúmenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta deberá identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto así como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	$ 60 USA	$ 22 USA

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID

por Fax al: 912 911 879

por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ___________

☐ N.^{os} sueltos ___________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00047