SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 71-78

iMÁTgenes 10, 11 y 12

Fue el último en poseerla quien, instantes antes de perderla para siempre y movido por una presunción ya del todo instintiva, bautizó la ciudad con el nombre de Memoria grafiando esa palabra en las fachadas de las avenidas. Presumió que en un futuro, muy lejano quizá pero alcanzable, y a pesar de los trazos ya inseguros de su escritura afectada, alguien podría leerla y recobrar la lucidez.

Se desconoce el cataclismo que acabó con la facultad de recordar de sus habitantes porque, claro, nadie recuerda. No saben si habitan la ciudad donde nacieron. Ni si los pasos azarosos con los que deambulan por sus calles son afines a la idea de comunidad. Ni siquiera saben que viven porque es la memoria la que, apoyándose en el recuerdo conocido, el pasado, induce lo desconocido, el futuro, y así, en el breve intervalo mediante, un lapso infinitesimal, brota el presente de idilio puro. Sin recuerdo no hay pensamiento. Sin pensamiento se puede existir, pero no se vive.

Quien visitaba Memoria no podía entablar diálogo alguno con su gente. Habían olvidado todo lenguaje y cortesía y ante los ojos del extranjero se comportaban como primitivos sordomudos, seres incompletos a medio camino entre la piedra y el animal. Aunque repletas de transeúntes, el silencio reinante en las calles provocaba tal desánimo en el forastero que nada más llegar buscaba la salida. Nadie soportaba permanecer allí más de un par de horas.

Durante siglos los filósofos consideraron Memoria como paradigma de la felicidad nihilista al mismo tiempo que muchos creyentes vieron en ella una representación de la tierra prometida. Al principio, los debates sobre el caso ocuparon a toda la masa intelectual, no sólo la de los países vecinos, pero con el tiempo Memoria cayó en el olvido y pasó a disfrutar del anonimato existencial propio de sus ciudadanos. Olvidada por todos, ¿había una Memoria todavía? ¿Vivían aún los memorienses? Y de ser así, ¿eran felices?

En los pueblos cinematográficos tarde o temprano algo acaba por interrumpir el plácido y continuo transcurso de la monotonía. Lo mismo ocurrió en Memoria. Incluso allí se produjo un clic, una interrupción por la que el tiempo se vio obligado a enfilar una dimensión divergente para siempre con la seguida hasta ese instante.

Que fuera uno o una carece de importancia porque hoy en día nadie en Memoria (por cierto, ya no se llama así, pero de eso hablaré más adelante) se acuerda (aunque esa falta de memoria no es ahora síntoma de ninguna enfermedad) del sexo del fundador de las bases para la recuperación. El caso es que según la leyenda actuó como el simio protagonista de la célebre odisea cinematográfica de ficción científica. Lo que hizo fue darse cuenta, o sea, contar. Y contó. O habló. La cosa no está muy clara porque las discusiones entre lingüistas y matemáticos no han terminado aún. Los primeros sostienen que sin palabra no hay número, pues éste necesita de la llamada por ellos vocal muda para ser concebido. Los otros defienden la idea de una correspondencia de cantidad entre el objeto y el observador como impulso generador del concepto original que es la unidad.

Sea como fuere su inicio, los números naturales fueron reconstruidos uno por uno, palabra por palabra. De generación en generación y de modo más o menos autodidacta creció el número de memorienses capaces de asimilar esta nueva idea de contar y darse cuenta. Si bien añadir a este campo los números negativos supuso una espera de muchos años y provoca aún entre filósofos y matemáticos grandes discusiones: ¿Fue la aparición de los números negativos efecto del recuerdo, una consecuencia directa de la recuperación de la memoria, o más bien fue la concepción de los números negativos la que indujo el recuerdo y, por ende, el concepto de pasado?

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

Con el pasado se fraguó su reflejo, el futuro, y entre ambos medió de nuevo un presente infinitesimal. Mas éste sería un presente diferente de cualquier otro que en el pasado le hubiera precedido. Y así fue que el pueblo de Memoria, ignorante hasta entonces de su nombre y de sí mismo, ignorante de su historia y de que antes se hubiera llamado de otra forma se puso el nombre de Numeria. A fin de cuentas, su gente no distinguía entre números y palabras, para ellos eran una misma cosa y vivían de acuerdo a lo que yo, observador ajeno, describiría así: 'tanto al dictado del número como al de la palabra', y que para ellos no tiene sentido distinguir por tratarse de la misma cosa.

Con la memoria adviene la razón. Se entenderá que pronto (un pronto científico) se crearan o descubrieran (también con eso hay disputas entre ya no sé quienes) los números racionales. Y los irracionales. Curiosamente éstos fueron muy bien acogidos a pesar de poseer la que nosotros y los griegos llamamos inconmensurabilidad. Fue esa inconmensurabilidad, su carácter imprevisible e inescrutable al cien por cien, lo que les abrió las puertas de la ciudad. Los racionales aburrían a los numerios. Una vez calculado el desarrollo decimal de una fracción se acaba el misterio. Todas las cifras que la forman, o son unas pocas, o se repiten tediosamente hasta el infinito. Pero los irracionales, ¡ah, los irracionales!, esto es otro contar. De ellos cuesta decidir (cuando hay algún método o algoritmo que lo permite) qué cifra ocupa un determinado lugar. Su desarrollo decimal oculta a menudo enigmas extraordinarios que a los numerios encanta descifrar. Hallan en estos números lo imprevisto, la sorpresa. En ellos el presente conocido persigue sin descanso un futuro incierto, unas veces previsible, otras inalcanzable e indecible, pero al menos entrañan un futuro por desvelar: la vida.

Ayer corrió un rumor por las calles de Numeria. Un rumor movido por la brisa del recelo y el temor. Un nuevo alumbramiento se ha producido y sus mentores temen hacerlo público después de ver las reacciones suscitadas en sus colegas. Algunos no encuentran en su vocabulario elogios apropiados para calificar tan antológico logro del entendimiento humano y lo califican de increíble maravilla. Otros en cambio, arremeten contra él y el equipo que lo ha alumbrado llegándolos a tachar de farsa y de farsantes. El señor K, jefe del comité investigador y quien prevé de él utilidades y aplicaciones futuras insospechadas y difícil de vislumbrar y valorar en el presente, lo ha bautizado con el nombre de **i**, *la inicial de imaginario. Los partidarios de que la investigación no se interrumpa a causa de los prejuicios más conservadores animan al equipo a seguir adelante con sus pesquisas. Ven en la nueva* **i***nvención la posibilidad real de sal***i***r más allá de los límites que encierran la ciudad, de v***i***ajar a zonas remotas y desconocidas hasta ahora y de redimirse por fin de la timidez que a lo largo de los siglos ha calado tan profundamente su forma de ser. En suma, anhelan conjugar el verbo más breve de su vocabulario:* **i***r.*

El carácter natural, racional o irracional de un número es muy importante. La iMATgen virtual (iMATgen nº. 7) trataba de espejos encarados que reflejan un punto intermedio. Precisamente es el carácter numérico del ángulo que forman los dos espejos el que determina como son las cosas, al menos en el ámbito geométrico. Así, para espejos formando un ángulos que sea múltiplo racional de p la serie de reflejos es un itinerario cerrado que regresa al punto original. De lo contrario, la serie de reflejos no se cierra nunca. No podemos verlo en una peluquería porque la realidad física lo impide.

En ***¡Llévate un kilo por lo menos, reina!*** (iMATgen nº. 8) parecía que el carácter entero o decimal del peso de un producto determinaba el importe a pagar por él. Sin embargo, la realidad impuso de nuevo su dominio. El precio escrito en la cartulina omitía la expresión 'a partir de', causante de la interpretación inadecuada del matemático.

Pero si hay un número que se use a diario y cuyo carácter irracional sea el que determina la forma en la que se concreta, es la raíz cuadrada de dos. Lo encontramos en las hojas de los cuadernos de clase, en los formatos de algunos libros de texto y en el papel de impresión. La raíz de dos determina el formato DIN A.

Los estudiantes se sorprenden de que las hojas en las que han escrito, dibujado y tomado apuntes a lo largo de toda su vida académica tengan unas dimensiones basadas en una proporción irracional. La idea que genera el formato DIN A consiste en establecer las dimensiones de un rectángulo que al ser cortado por la mitad de su lado mayor proporcione dos nuevos rectángulos idénticos y semejantes al original. Si éste tiene longitud a y anchura b, cada mitad tendrá longitud b y anchura $a/2$. El original y sus mitades serán semejantes si $a/b=b/(a/2)$, o sea, si $a/b=\sqrt{2}$. Como consecuencia, la proporción entre la diagonal y el lado menor es $\sqrt{3}$.

La realidad impide que los valores verdaderos sean exactos. Por eso los formatos de papel DIN A son rectángulos cuyas dimensiones determinan proporciones cercanas a 1,4142... La hoja más utilizada, DIN A4, tiene 297mm de largo por 210mm de ancho, lo que da un cociente de 1,4142857... Sus dimensiones son esas y no otras (también otros valores producirían el mismo cociente) porque el rectángulo original de partida tiene un metro cuadrado de superficie. La solución del sistema de ecuaciones de este modo se plantea fija las dimensiones del rectángulo inicial o DIN A0:

$$\begin{cases} a \cdot b = 1 \\ \dfrac{a}{b} = \sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt[4]{2} = 1{,}189 \\ b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0{,}841 \end{cases}$$

Como puedes comprobar, no es este el formato de la revista que estás leyendo ahora. ■

iMATgen 10

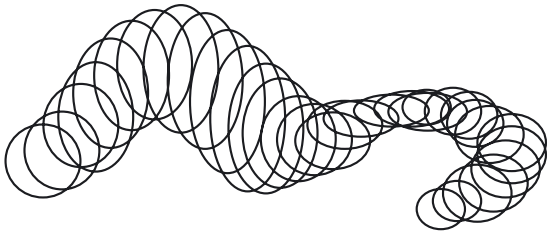
La introducción a estas tres iMÁTgenes comenzaba con el grafiado de una palabra en las fachadas de las avenidas de la ciudad del olvido. El relato es fantástico, pero no lo son los elementos que lo fundamentan: la memoria y la escritura. Esta fotografía tampoco es fantástica. Alguien aerografió esa pared con color rosa que aquí se verá gris. Es ese alguien, autor o autora, quien da a la imagen el realismo que posee. Y no sólo ese o esa, también nuestra memoria. Viendo este autógrafo nos acordamos de cuántas veces hemos visto (y quizá maldecido) otros similares en las fachadas de las casas de nuestra ciudad, de nuestro barrio y de nuestra propia casa.

Impregnar las paredes es una actividad que se remonta a los orígenes de nuestra cultura. Decenas de miles de años después de Altamira nos encontramos con la corriente artística de los graffiti. Su cuna está en Estados Unidos, allá por la década de los años ochenta. No es que en Europa no se hicieran, ya los había desde mucho antes en España, Irlanda del Norte y en el muro de Berlín, pero su carácter era reivindicativo y carecían del sentido artístico que adquirieron después. Originalmente se realizaban autógrafos o firmas personales. Había que trabajar rápido y realizar la obra en un pis pas. Hasta que diversos espacios públicos y privados no fueron puestos a disposición de los artistas no había tiempo para hacer mucho más que una firma. Hoy en día, al disponer de lugares autorizados, los artistas tienen el tiempo necesario para realizar ingentes obras de arte, cada una con su rúbrica particular que la identifica. Pese a ello no ha desaparecido el interés por aerografía paredes vírgenes. Un reto para adolescentes que pagan los vecinos. Algo parecido sucede con las mesas de un aula.

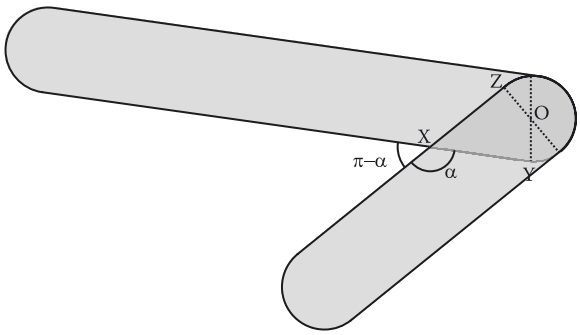
Los graffiti se realizan, en su mayoría, con spray o aerógrafo. Hace falta gran maestría para lograr que el resultado muestra un trazo seguro sin regueros de tinta. El goteo es el principal problema que debe vencer el principiante, ya que el trabajo se realiza en planos verticales y a mano alzada. En el aspecto del trazo influyen muchos factores, como por ejemplo el tipo de boquilla por la que sale el chorro de tinta, la textura de ésta, la distancia desde la que se aplica el spray y el ángulo con el que éste se dirige a la pared.

El graffiti de esta imagen no presenta regueros de tinta. Su trazo es bastante uniforme y seguro. Pero hay algo que llama la atención y que resulta fundamental para comprender esta imagen. No me refiero al significado verbal de lo escrito, sino a un rasgo de forma cuyo carácter reside en el ámbito geométrico. Se observan arcos curvilíneos que indican un cambio de dirección suave y paulatino, pero también hay cambios de dirección bruscos y repentinos, en zigzag. En la parte interior de esos zigzag aparecen picos, mientras que la parte exterior es redondeada. Además, en cada zigzag hay una sobrecarga de tinta en comparación con cualquier otra parte o fragmento del graffiti. ¿Cómo se explica esto? He aquí la iMATgen.

El spray tradicional tiene un orificio por el que se expulsa la tinta en forma de ángulo sólido, un cono relleno de color. La intersección de este cono con la pared sólo es perfectamente circular si su eje se mantiene ortogonal a ella. De lo contrario la intersección será una elipse (siempre y cuando este ángulo no sea exageradamente grande, en cuyo caso podría llegar a ser una parábola e incluso una hipérbola). Pero lo corriente es que el ángulo entre el eje del cono de expulsión de la tinta y la pared sea muy similar a un ángulo recto. Si el artista mantiene inclinado siempre el spray con el mismo ángulo y únicamente lo cambia de posición en un plano vertical paralelo a la pared, el vestigio aerografiado se crea círculo a círculo (eje ortogonal) o elipse a elipse (eje no exactamente ortogonal). El grosor del vestigio depende de la distancia a la pared desde la que se efectúa la aplicación y del movimiento de muñeca de su autor. Un resultado irregular podría ser:



Estudiemos ahora el motivo por el que en los cambios bruscos de dirección aparecen sobrecargas de tinta. Para facilitar la comprensión supongamos el caso del aerografiado circular. En un cambio de dirección brusco, el extremo del segmento o curva trazado actúa como pivote y se convierte en punto inicial del siguiente trazo. Aparece así una zona que la tinta impregna dos veces, una al entrar en la esquina, y la otra al salir de ella. Cuando se produce un cambio de dirección de ángulo α (en radianes), el vértice que se origina en el interior del giro es de π-α radianes:

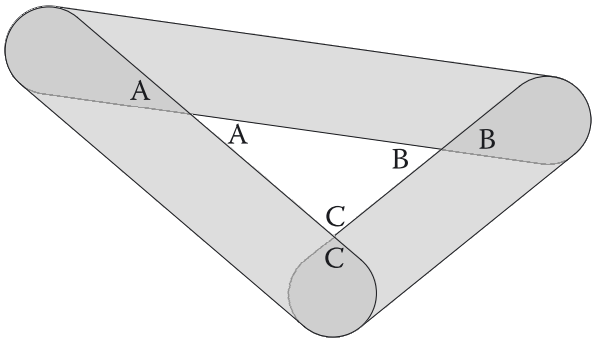


Siendo $2r$ el grosor del trazo (diámetro del caso circular uniforme) y siendo π-α el ángulo del vértice, el área de la zona A_s sobre coloreada es igual al área del cuadrilátero $XYOZ$ más el área del sector circular YOZ cuyo ángulo es mayor de 180º en el dibujo anterior. El cuadrilátero $XYOZ$ se forma con dos triángulos rectángulos idénticos cuyos catetos son r y r·tg(α/2). Por otro lado, el ángulo del sector circular YOZ es 2π-α y su radio r. Así las cosas:

$$A_s = r^2 \cdot \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \pi r^2 + r^2 \cdot \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Luego en un cambio de dirección siempre se sobre colorean el que llamaremos círculo de aerografiado, de área πr^2, y un fragmento puntiagudo cuya área depende de la mitad del giro efectuado. Si $\alpha=\pi$, el spray vuelve a pulverizar lo ya grafiado regresando sobre sus pasos y, además del círculo, lo sobre colorea todo ($A_s=\infty$).

Si se aerografía un triángulo, las tres zonas sobre coloreadas de los vértices formarán siempre el triángulo circunscrito al círculo de grafiado. En efecto, los ángulos de los vértices A, B y C del triángulo que el graffiti determina en el interior son los mismos que los de las tres zonas sobre coloreadas:



El perfil exterior de un zigzag aparece suave, sin pico, redondeado. Su perfil interior es agudo, afilado, puntiagudo. Así son los ***Zigzagueos en un graffiti*** y, si los miramos a través de la lupa, así son también los trazados con bolígrafo. ■

iMATgen 11

Gente, sobretodo críos, en una orilla. En el ángulo superior derecho una barcaza cargada de bicicletas, recién llegada o a punto de zarpar. En la esquina opuesta un par de mujeres vestidas con *saris*. Su atavío y el tono de la piel de los niños indican que la imagen fue tomada en el subcontinente indio, concretamente en las afueras de Varanasi, en la región de Uttar Pradesh. El agua es la del río más venerado del mundo, el Ganges. Sus aguas del color de la tierra a causa de las frecuentes y abundantes lluvias del monzón. Algunas niñas están ocupadas en una tarea que maridos, padres, hermanos e hijos establecen como propias de su género: el cuidado de la vajilla. Un cuidado que a primera vista parece dedicado a la limpieza, pero que una observación más atenta desmiente.

No es espuma, ni jabón, lo que recubre varios recipientes, sino barro, limo del río. A la derecha de la imagen una joven friega el lateral de un cuenco volcado. Lo hace echando su cuerpo encima de él y sujetándolo fuertemente con la mano izquierda. Ambos gestos dan una idea de la fuerza que dedica a sus acciones. Otra olla embadurnada de lodo, también boca abajo, espera a que la otra chica, ahora distraída, se aplique con ella. La faena no se realiza sólo por el exterior, también por dentro de los cacharros, como hace la mujer del sari blanco con un recipiente pequeño.

Aparte de los dos embadurnados de lodo, los cuencos de la fotografía están todos limpios. Y si nos fijamos más atentamente vemos que todos menos uno presentan un aspecto brillante, liso, sin apenas deformaciones, pulido. Sólo el que está detrás de la niña con la cabeza vuelta muestra abolladuras profundas. Este recipiente nos indica cuál es la labor de las jóvenes. Consiste en devolver a los cacharros un aspecto lo más parecido posible al que tenían de nuevos. Lo que hacen es limarlos, lijarlos, pulirlos, cosa que consiguen fregándolos con lodo. No sé si su intención era limpiarlos o pulirlos. Para saberlo habría que preguntárselo, pero para limpiarlos no les hacía falta ir al río. Sean cuales fueran sus intenciones, con o sin limpieza, los lijan y pulen.

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (1992), limar es *gastar o alisar los metales, la madera, etc. con la lima*. También es *debilitar, cercenar alguna cosa material o inmaterial*. Lijar es *alisar, pulir o limpiar una cosa con lija o papel de lija*. La lija es un pez cuya piel seca, *por la dureza de sus granillos, se emplea para limpiar y pulir metales y maderas*. El papel de lija es un *papel con polvos o arenillas de vidrio o esmeril adheridos, que sirve para pulir maderas o metales*. En su primera acepción, pulir es *alisar o dar tersura y lustre a algo*, pero en su segunda acepción es *componer, alisar o perfeccionar algo, dándole la última mano para su mayor primor y adorno*. Una superficie lisa es aquella *que no presenta asperezas, adornos, realces o arrugas*, pero no es lo mismo que una superficie llana. Lijar, limar y pulir desgastan la materia a la que se aplican, pero esa erosión es más ostensible y visible al lijar y limar. En cambio, el desgaste al pulir es más delicado, microscópico. Limar y lijar afectan a la forma de

una cosa, la alteran, mientras que el pulimento tan solo la suaviza y redondea afectando más al acabado.

Así se plantean las dos cuestiones que dan lugar a la iMATgen. Un modo de lijar una superficie es fregarla con barro, poco a poco, zona a zona, frotando a mano en vaivén o dando vueltas alrededor de un punto. Esos movimientos provocan la fricción entre la arenilla del lodo y la superficie del objeto frotado. Éste se erosiona y dicha erosión es más profunda en medio de la zona frotada que en los extremos porque la mano no ejerce tanta presión en ellos. Localmente, se elimina material, el objeto se desgasta y la convexidad de su superficie es rebajada. Si su curvatura original correspondía a un radio r, el resultado será la un arco o curva más llano, correspondiente a un radio R mayor. Es decir, el radio del arco lijado es mayor que el radio del arco original.

¿No es esto paradójico? ¿Acaso la esfera lijada tiene radio mayor que la original? Por otro lado, ¿qué significa pulir? ¿Cómo pueden una superficie o una curva ser lisas, suaves, sin arrugas, sin asperezas, redondeadas y, sin embargo, no ser rectilíneas? Ha tardado, pero estamos en otra iMATgen.

La esfera, el círculo y la circunferencia no solo surgen del vestigio que deja un punto al girar en torno de otro manteniéndose siempre a la misma distancia, también pueden generarse como límites de sucesiones de poliedros y polígonos. Las respuestas a las cuestiones anteriores se encuentran en esta concepción.

Imaginemos una sucesión de polígonos regulares, circunscrita o inscrita, a un círculo. Tanto en un caso como en otro, a medida que aumenta el número N de lados disminuye la longitud de cada uno y más se abre el ángulo A_N del vértice formado por dos lados consecutivos. En efecto, los vértices de un triángulo equilátero (60º) son más agudos que los de un cuadrado (90º), los de éste lo son más que los del pentágono (108º), los del pentágono son más agudos que los del hexágono (120º), y así sucesivamente hasta... ¿Hasta dónde? No podemos verlo porque los lados se hacen demasiado pequeños, pero intuimos que los vértices se abren cada vez más. Una primera reflexión puede invitar a pensar que esa abertura seguirá creciendo hasta el infinito y que quizá al final el polígono se abra en una recta, pero el ángulo de un vértice llano no es infinito, sino de 180º. Una observación más profunda permite ver que pese a aumentar, el crecimiento de esos ángulos (60º, 90º, 108º, 120º, ...) es cada vez menor: 90º-60º=30º, 108º-90º=18º, 120º-108º=8º... El ángulo A_N se abre cada vez más despacio. ¿Llegará a detenerse? Lo que el ojo no puede ver lo explica un cálculo razonado. En el valor del ángulo A_N del polígono regular de N lados no interviene la longitud de los lados que lo forman:

$$A_N = 180^\circ \cdot \frac{N-2}{N}$$

Para valores de N cada vez más grandes se obtienen valores de A_N cada vez más próximos a 180º. Lo intuimos, pero no lo vemos. Y nos lo creemos porque basamos nuestras afirmaciones en el cálculo. La conclusión es que, en el límite, el ángulo es llano (180º) porque cuanto mayor es el valor de N, más cerca de la unidad está el valor del cociente (N-2)/N:

$$\lim_N A_N = 180^\circ \cdot \lim_N \frac{N-2}{N} = 180^\circ \cdot 1 = 180^\circ$$

¿Quiere esto decir que el perfil de un círculo es rectilíneo? No. Significa que los ángulos, los vértices, acaban desapareciendo, y que el perfil es liso, sin picos ni irregularidades, sin asperezas. He aquí la esencia del lijado y del pulimento de un objeto. Con este análisis se caracteriza matemáticamente la lisura de la circunferencia y de las curvas 'localmente rectilíneas' del cálculo tradicional. Muy localmente, un arco circular sí es rectilíneo. El cálculo diferencial se basa en esta concepción. De ahí que entendamos el círculo como límite de polígonos. La 'rectitud local infinitesimal' es un rasgo del que adolecen, por ejemplo, las curvas fractales.

El caso de la esfera es más o menos lo mismo cambiando polígonos regulares por poliedros irregulares. El papel desempeñado por segmentos unidimensionales como son los lados de un polígono lo desempeñan ahora las caras poligonales bidimensionales de un poliedro. Si en un vértice de un polígono confluyen dos lados, ahora pueden encontrarse tres o más caras en un vértice de un poliedro. Aún así, y a medida que un poliedro (por ejemplo inscrito en una esfera) aumenta el número de caras, los ángulos multiédricos en cada uno de sus vértices, aunque sean diferentes, también se abren hacia un ángulo multiédrico llano. En suma, la esfera también es lisa, localmente llana pese a ser redonda.

Si tenemos en cuenta que esquinas, picos o vértices pueden tomarse como sinónimos de irregularidades, asperezas o arrugas, las cuestiones planteadas en esta iMATgen quedan contestadas.

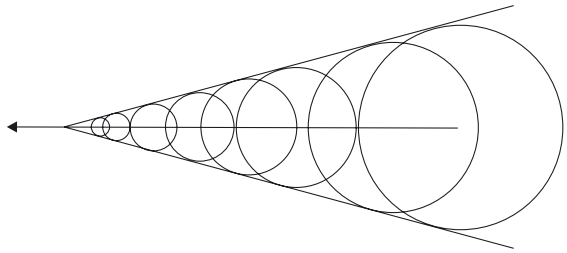
Observando la fotografía uno se da cuenta de que en la India se lijan y pulen cacharros como el río lija y pule los guijarros que arrastra. El lustre nunca proviene del interior de las cosas, sino del exterior. De la fricción con otros guijarros que comparten las mismas aguas, el mismo tiempo, el mismo río. El roce elimina asperezas, suaviza, redondea, haciendo las piedras agradables al tacto. Según el diccionario, pulir también *consiste en educar una persona para que sea más educada y elegante*. Tú y yo sabemos que es un arduo trabajo. Difícilmente sale redondo. Si al menos dispusiéramos de ***Limo del Ganges***... ■

iMATgen 12

Dos patos, uno casi blanco, el otro casi negro, nadando en las prístinas aguas del río Matarraña, afluente del Ebro y arteria vital de la comarca aragonesa de su mismo nombre, en la provincia de Teruel. El de esta provincia es un caso insólito porque existe más que cualquier otra. Sus límites reales superan los geográficos para extenderse hasta las mentes de quienes leen "¡Teruel existe!" en pegatinas enganchadas en las retaguardias de los automóviles. Así los turolenses hacen saber al resto del mundo que su territorio no es un vacío yermo y que nunca mereció el olvido que se le dispensó. Teruel está donde tu eres consciente de su existencia. Esto no depende de donde está Teruel, sino de donde estás tu.

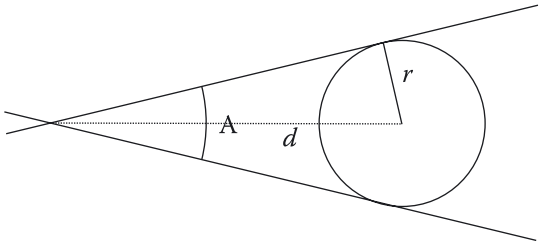
Entrando ya en el verano, el Matarraña fluye lentamente por Valderrobres. Sus aguas son poco profundas, pero muy limpias y transparentes. Es un río vivo en el que abundan los peces. Malo para ellos, bueno para otros. Mientras estos nadan sumergidos, los patos se pasean por las orillas y surcan el agua en todas direcciones. Se les ve y se les oye. En su deambular dejan vestigios efímeros en la superficie que los refresca y que va a dar lugar, en unos instantes, a una nueva iMATgen. Comprender esta imagen es comprender el rastro en forma de uve que se expande justo detrás de sus colas hasta las orillas. Si al echar una piedra al agua se crean ondas circulares concéntricas, ¿qué tienen que ver con el círculo estas estelas en uve de la fotografía? Se cerró la pregunta y se fraguó la iMATgen.

El movimiento del ánade en el agua altera la superficie. En su desplazamiento provoca en cada instante una agitación similar a la que produciría una piedra lanzada en cada punto de su trayectoria. El tiempo hace el resto. El círculo de agitación aumenta su radio a medida que el pato se aleja de su centro. Si la velocidad es constante, el radio de cada círculo será proporcional a la distancia que le separa del ánade. El resultado visual serán un par de rectas cuyos puntos perfilan tangencialmente los círculos sucesivos constituyendo su envolvente:

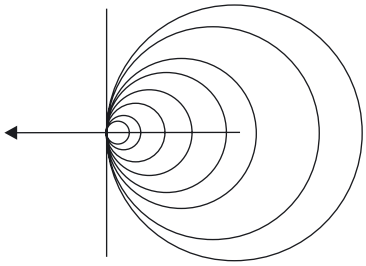


Entre el primer y el segundo círculo hay un lapso t durante el cual el radio r del primero crece según la velocidad k (supongámosla constante) de propagación de la onda en la superficie: $r=k\cdot t$. Si $d=v\cdot t$ es la distancia recorrida en ese lapso de

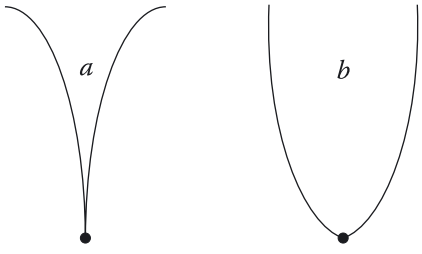
tiempo t a una velocidad v (supongámosla también constante por ahora), en la figura siguiente se aprecia que $r=d\cdot\text{sen}(A/2)$:



Pero siendo $r=k\cdot t$ y $d=v\cdot t$, obtenemos que $v=\text{k}/\text{sen}(A/2)$. La apertura de la estela es $A=2\cdot\text{arcsen}(\text{k}/v)$. Por tanto, cuanto mayor es la velocidad, menor será el ángulo. Esta última igualdad indica además que debe ser $v\geq k$. Si $v<k$, no hay ángulo porque los círculos no llegan a cortarse. Si $v=k$, el nadador avanza a la misma velocidad de propagación de las ondas. La abertura A es de 180º y el perfil de la estela es circular, en forma de **o**:



Si el ánade no nada en línea recta o si varía la velocidad, ¿cómo varía su estela? El resultado no es difícil de imaginar. Si la velocidad aumenta (caso *a)* se agudiza el ángulo; si la velocidad disminuye (caso *b*) la abertura se agranda. En este último caso la estela se redondea, pasando de tener forma de **uve** a tener forma de **u**:



En la fotografía las uves que trazan los patos tienen la misma abertura, son paralelas. Esto indica que ambos palmípedos nadan a la misma velocidad. Las estelas se perciben así, en forma de uve, aunque, en realidad, sean irreales, fruto de la confluencia de círculos, aparentes y ficticios también, cuya aparente realidad procede de la agitación de las aguas.

Ya llegó el verano. Hace mucho calor y el chirrido incesante de las cigarras en el pinar cercano vertebra la canícula. Estoy quieto, inmóvil en el sofá, pero aún así varias gotas de sudor recorren mi frente, después mi mejilla y, finalmente, caen al suelo estrellándose en salpicones diminutos y silenciosos. Un silencio que me aturde. Me pesa todo el cuerpo. Me pesa el aire que soporta. Mover un dedo se me antoja casi imposible, un esfuerzo digno de cíclopes. Pruebo a ver: arriba, abajo, arriba otra vez, abajo de nuevo. Agotador. No quiero mover ningún dedo. Pero el dedo, o los músculos de mi dedo, o las conexiones cerebrales que lo animan insisten en ello y dos falanges del índice de mi mano izquierda suben y bajan otra vez, y otra, sin mi voluntad. No soy yo quien las anima. Debería sorprenderme, pero no me sorprendo. A menudo mi cerebro tiene estas cosas.

Caído de lleno en el sopor, me zambullo en el agua y nado con los patos. Nos hablamos, pero no me sorprendo. Les digo que he comprendido el secreto de sus estelas. Al oírme se miran unos a otros con sorpresa. Luego se comentan algo y me invitan a seguirlos nadando. Acepto su invitación con alegría. Nadan calladitos, con elegancia, como si les empujara una brisa que no sopla en lugar de unos pies palmeados. Mientras les sigo contemplo maravillado las ***Oes, ues y uves estelares*** que dejan tras de sí. Al poco se detienen. Se ríen de mi chapoteo ruidoso que produce estelas demasiado espumosas. Uno se acerca para informarme de que los peces se están mosqueando porque mi pateo levanta el limo del fondo y enturbia el agua. Antes de alejarse, el ánade añade: 'No has entendido nada. Este no es el secreto, es tan solo tu modelo'. Mientras le persigo, entre brazada y brazada, le grito: ¡Enséñame!

Mi propio grito me devuelve a la vigilia. Y como me encuentro más lúcido que hace un rato vuelvo a pensar en números, geometrías, funciones y demás cosas que no puedo ver a través de ventanas corrientes. Y en el curso de mi lucidez me asalta el deseo de que esta vigilia matemática mía se corresponda con el sueño de algún otro yo más cuerdo que logra mantenerse a flote. ■