SUMA 47
Noviembre 2004, pp. 63-66

En el entorno del teorema Kou-Ku (y IV)

Nos preguntábamos en algún momento del artículo anterior de esta serie si realmente el teorema de Pappus (fig. 1)

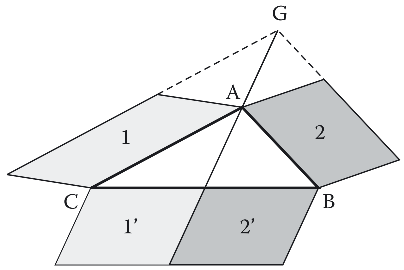

Figura 1

generaliza el de Pitágoras. Una duda surgida en el camino ante la brusca extensión de la idea inicial a la que estábamos asistiendo pero, una vez ascendidos al nuevo punto de observación, la vista del paisaje produce sensación de calma. También de sorpresa, por haber estado tanto tiempo sometidos a las restricciones de una perspectiva tan limitada. Ciertamente Pappus generaliza Pitágoras y, desde la altura a la que nos ha llevado, las condiciones del teorema kou-ku resultan anecdóticas. Un cuadrado no es más que un caso particular de paralelogramo y, una vez elegidas las rectas *r* y *s* (figuras 2 y 3) a la distancia conveniente para poder dibujarlos,

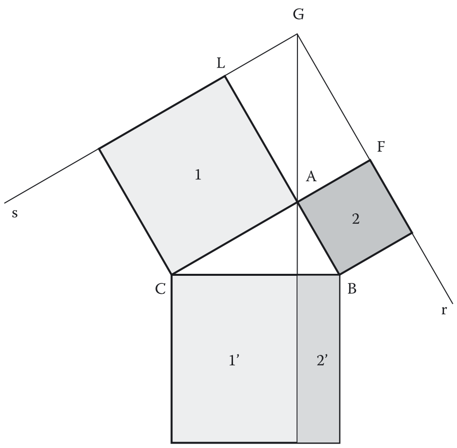

Figura 2

la exigencia de que los segmentos *LA* y *F*A sean o no perpendiculares a *AC* y *AB* nos resulta ahora una simple anécdota. El punto *G* permanece invariante si *L* y *F* se desplazan a lo largo de *r* y *s*, los paralelogramos *1* y *2* tienen también superficie constante, y la distancia *GA* es justamente la hipotenusa *CB*, de manera que el cuadrado construido sobre *BC* permanece fijo también. Otra cosa es que este caso “anecdótico” particular que hemos popularizado bajo el nombre de Teorema de Pitágoras —comprensible (y necesario) desde las exigencias inmediatas de tipo práctico de la vida cotidiana—, haya sido clave para el progreso humano. Las generalizaciones tienen estas cosas: producen placer intelectual, transportan al limbo del disfrute estético y abstracto, pero estos fríos lugares encierran menos significado vital que el punto anterior de partida.

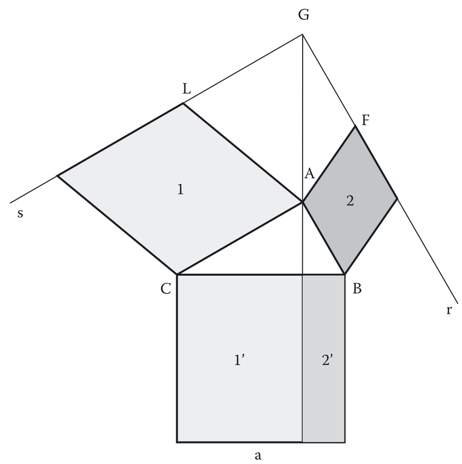

Figura 3

Lakatos, en *Pruebas y refutaciones*, teatraliza el proceso que conduce desde la conjetura ingenua[1] de Descartes para los

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fesp.org

vértices, caras y aristas de un poliedro (C+V = A+2) hasta la siguiente formulación de la conjetura:

> Si los espacios circuito y los espacios limitantes coinciden, el número de dimensiones del espacio 0-cadena menos el número de dimensiones del espacio 1-cadena más el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2.

convertida en un resultado sobre “un determinado conjunto de espacios vectoriales multidimensionales”. Uno de los apartados de la obra tiene como título *La extensión ilimitada de conceptos destruye el significado y la verdad.* Desde luego, no es éste todavía el caso de la generalización de Pappus; recordamos la frase como apoyo —quizás demasiado fuerte— a nuestra afirmación sobre la pérdida de carga vital en Pappus.

Podemos buscar situaciones extremas a las que llegar partiendo del viejo kou-ku. En la geometría de Lobachevski toma esta forma:

$$2\left(e^{a/k}+e^{-a/k}\right)=\left(e^{b/k}+e^{-b/k}\right)\left(e^{c/k}+e^{-c/k}\right)$$

Si desarrollamos en serie los dos términos, se obtiene:

$$a^2+\frac{a^4}{12k^2}+\ldots=b^2+c^2+\frac{\left(b^4+2b^2c^2+c^4\right)^4}{12k^2}$$

lo que nos permite observar que si el parámetro k→ ∞ el espacio tiende a ser euclidiano.

¿Y el recíproco?

Decíamos que hay cosas que casi nunca se hacen (en las aulas) y entre ellas colocábamos los procesos de generalización. En lo que se refiere al teorema kou-ku hay otra cosa que sorprendentemente no se hace: demostrar el recíproco. Todas las pruebas y las generalizaciones que hemos visto parten de la exigencia de un ángulo recto en el triángulo para llegar desde ahí a la igualdad de áreas. Es chocante que un gremio como el nuestro, que conserva entre sus glorias empolvadas la preocupación obsesiva por el rigor, no se plantee demostrar la situación recíproca aunque haga uso sistemático de ella. Pero lo cierto es que no es fácil encontrar demostraciones en sentido inverso. Las seis que recoge Nelsen (2001) van del triángulo a la fórmula, así como las 43 de la página web de A. Bogomolny que citamos en el primer artículo[2]. Es fácil, desde luego, realizar un proceso circular: *teorema de la altura → Pitágoras → teorema del cateto → teorema de la altura,* o comprobar la relación *si y sólo si* cuando el teorema está formulado en formato vectorial, pero ello no evita cierta insatisfacción. ¡Alguno de los innumerables puzzles, o la relación entre áreas de la demostración de Euclides deberían permitir realizar el proceso inverso!

Pues bien: volvamos a Euclides. Lo criticamos en el primer artículo como escritor poco ágil, pero no hay nada que objetar a su solicitud por el rigor. La proposición 47 del libro I demuestra el teorema en el sentido “habitual” y la número 48 se ocupa del recíproco. Cuando se lee su argumentación sorprende lo fácil que puede resultar superar la incomodidad gráfica de suponer un triángulo que en principio no tiene por qué ser rectángulo. Para eso está la Lógica, claro, y el dibujo de Euclides, austero como todos lo suyos, nos muestra un triángulo rectángulo que no podemos aceptar como tal al principio de la demostración. Nosotros la ilustraremos con uno cualquiera.

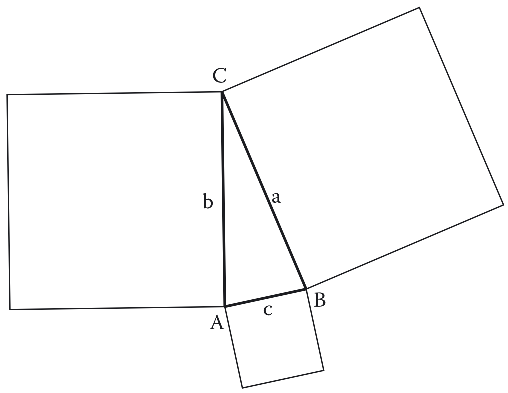

Figura 4

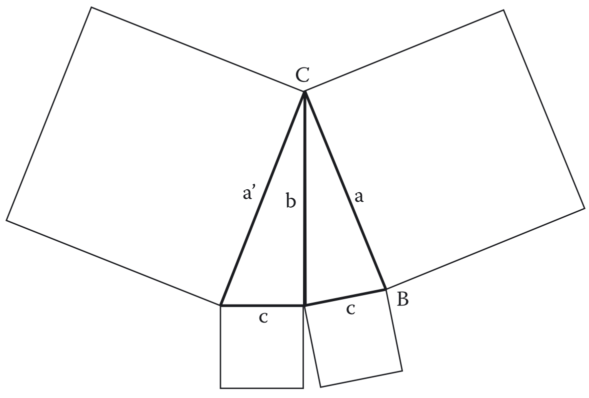

Figura 5

Supongamos en la fig. 4 que $a^2=b^2+c^2$. Construimos ahora un triángulo de lados *a’*, *b* y *c*, rectángulo en *A* (fig. 5). Por supuesto, $a'^2=b^2+c^2$, de donde *a’* = *a*. Los dos triángulos son, por tanto, iguales, lo que quiere decir que el primer triángulo *ABC* también era rectángulo.

Proclo[3] (s. V) alabó la actitud matemática de Euclides:

> Si escuchamos a quienes gustan de narrar cosas antiguas, hallaremos que atribuyen este teorema a Pitágoras y dicen que sacrificó un buey por su descubrimiento. Por mi parte, aunque admiro a los que conocieron primero la verdad de este teorema, más me maravilla el autor de los *Elementos*, no sólo por establecerlo mediante una clara demostración, sino por haber sentado en el libro sexto una proposición[4] aún más general con las pruebas incontestables de la ciencia.

Es, ciertamente, una actitud moderna, pero —si se nos permite una broma fácil— quizás no sea tan moderno ese uso anti-intuitivo de la Lógica desde que aparecieron los ordenadores. Volvamos al principio de esta serie de cuatro artículos, al puzzle que atribuimos a Dudeney pero que resultó ser de Perigal[5], y ayudados por CABRI analicemos una situación equivalente a la del recíproco: s*i el triángulo no es rectángulo, entonces no se cumple* $a^2=b^2+c^2$.

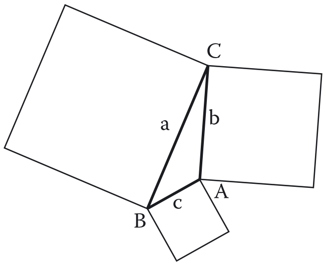

Figura 6

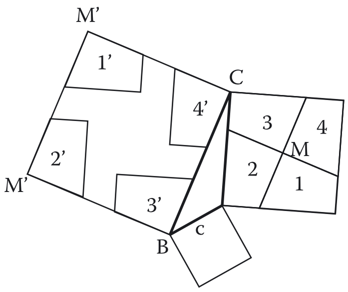

Figura 7

Dibujamos, por ejemplo, un triángulo obtusángulo, y marcamos en él los cuadrados sobre sus lados (fig. 6). En el puzzle de Perigal se trazaban por el punto central del cuadrado del cateto medio segmentos paralelos a los lados del cuadrado de la hipotenusa. Actuando de forma análoga (fig. 7), aparecen los cuadriláteros *1*, *2*, *3* y *4*. Los trasladamos ahora al interior del cuadrado grande de forma que los cuatro ángulos rectos en el punto M se sitúen en los vértices (puntos *M'*, *B* y *C*). Aparece así (fig. 8) un cuadrado interior congruente al del lado *c*, y queda claro que, en este caso, $a^2>b^2+c^2$. ¿Cuándo podremos colocar un igual en esta expresión? Experimentalmente se observa (fig. 9) que para ello debemos acercarnos al caso en que $A=90°$.

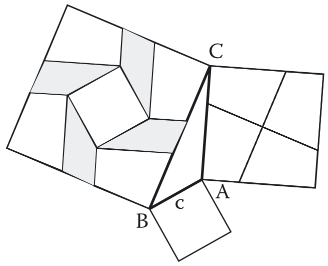

Figura 8

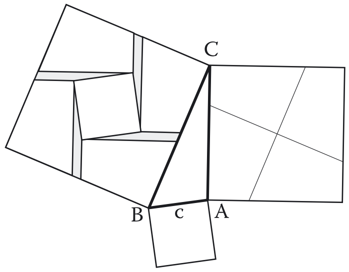

Figura 9

Como ya nos extendimos en exceso con el puzzle de Perigal, evitamos ahora analizar a fondo esta variante. Sólo resaltaremos, de nuevo, que las cuatro zonas de color gris deben sumar $-2cb\cos A$. Y, efectivamente, así es. Traslademos una de ellas al vértice *B* (fig. 10) para calcular su superficie. Obsérvese (fig. 11) que se trata de un trapecio cuya altura $AP=c\cos(\pi-A)=-c\cos A$, y que la suma de las dos bases $BR+AQ$ es justamente el lado *b* del triángulo. Así pues, el área de cada uno de ellos será $-1/2\ cb\cos A$.

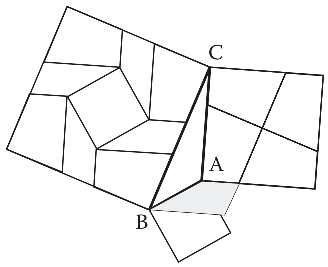

Figura 10

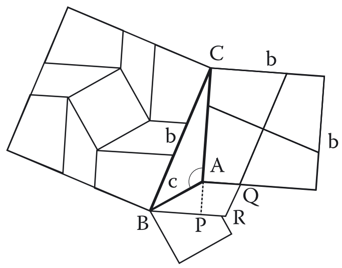

Figura11

¿Quién es Enzo R. Gentile?

A saber. En www.riconmatematico.com podéis bajaros un *tango del algebrista* del amigo Gentile. No lo hemos encontrado en un paseo al azar por la red. Ocurre que Roger B. Nelsen (2001) recoge un "teorema pitagórico" de una tal Gentile, sin dar ninguna referencia sobre él. El buscador nos llevó a la página del rincón, pero allí sólo encontramos el tango. Da lo mismo. Sea o no el tanguista el inventor del teorema, éste es muy atractivo. A fin de cuentas, si un presidente de USA se ocupó en demostrar el *kou-ku,* ¿por qué no va a ocuparse también de estas cosas un tanguista argentino[6]?

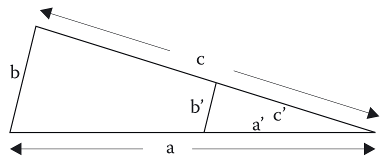

Figura 12

Coloca Gentile dos triángulos rectángulos semejantes en posición de Tales (fig. 12), y afirma: *aa'=bb'+cc'*. Nelsen lo prueba a partir de esa semejanza. Y si Gentile es cierto, tomando como razón de semejanza 1, resulta Pitágoras. Nosotros construiremos una figura para el recíproco: construimos rectángulos sobre los lados del triángulo grande de manera que el otro lado de cada uno sea su correspondiente del triángulo pequeño (fig. 13). Obtenemos así tres rectángulos semejantes y, si Pitágoras es cierto, entonces se debe dar la relación entre áreas *aa'=bb'+cc'*.

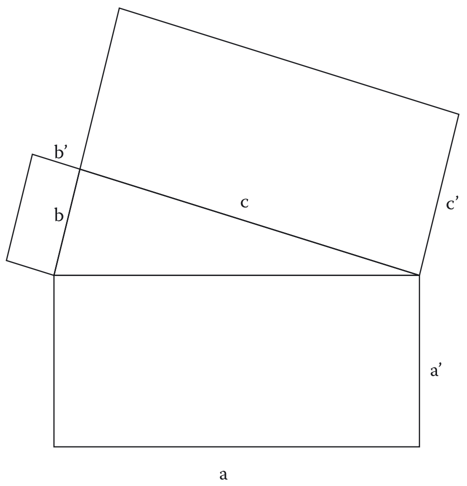

Figura 13

Gentile es, por tanto, equivalente a Pitágoras: caracteriza también a los triángulos rectángulos.

Epílogo

¿Existió realmente Pitágoras? Parece que sí. Desde luego –y esto es más importante– existió la secta de los pitagóricos, entre cuyas convicciones estaba la de la armonía numérica del universo[7]. Y ha existido siempre, y seguirá existiendo, una dosis de pitagorismo ingenuo metodológico como motor de la investigación matemática. Aunque el investigador o investigadora no lo acepte como filosofía personal, lo cierto es que su proceso de búsqueda sólo es vitalmente sostenible si tiene fe en que al final del camino encontrará algo; que será posible poner orden —armonía— en el caos inicial de observaciones. La misma fe que impulsó a todas las civilizaciones de la Antigüedad a ocuparse de la curiosa relación numérica que observaban en los triángulos rectángulos y que los chinos denominaron *Teorema kou-ku*.

Nota

Sería imperdonable terminar esta serie de artículos sin recomendar el de Miquel Albertí en el número 43 de *SUMA*, en el que hace una bonita demostración del teorema de Pitágoras a partir de una situación geométrica muy poco habitual: dos circunferencias concéntricas. ■

NOTAS

1 "Ingenua" en el sentido de Lakatos. Ingenua, metodológicamente, si está sustentada en unas pocas observaciones. Una conjetura puede ser ingenua y perspicaz al mismo tiempo.

2 www.cut-th-knot.org/pythagoras/index.shtml

3 Citado a pie de página por Mª Luisa Puertas Castaño, traductora de Elementos en la edición de Ed. Gredos (1991).

4 La proposición a la que se refiere es la número 31. En ella generaliza Euclides el teorema para figuras semejantes construidas sobre los catetos y la hipotenusa.

5 Mientras nosotros buscábamos datos sobre Henry Perigal, los colegas del grupo Alburquerque ya le habían atribuido el puzzle (SUMA n.º 43). Queda claro, por tanto, que leemos SUMA con retraso.

6 Suponemos, claro, que es, o que fue, argentino. La demostración del presidente Garfield (1876) puede verse en el libro de Nelsen. Por cierto, ¿sois capaces de imaginar a Bush ocupándose de estas cosas?

7 Olañeta acaba de publicar en un pequeño librito (Versos áureos de Pitágoras y otros fragmentos pitagóricos) los escritos más fidedignos que recogen el corpus ideológico ético–místico de la secta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EUCLIDES (1991, 94 y 96): *Elementos*. (Tres tomos) Ed. Gredos. Madrid.

NELSEN, Roger B. (2001): *Demostraciones sin palabras*. Proyecto Sur. Granada.

LAKATOS, I. (1986): *Pruebas y refutaciones.* Alianza Universidad. Madrid.