SUMA 47
Noviembre 2004, pp.19-28

Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I)

En este trabajo se ofrece una visión general de la geometría fractal y sus aplicaciones. Se hace un análisis de sus posibilidades didácticas mediante una recopilación, síntesis y adaptación de sus principales conceptos, de forma que sean asequibles a los alumnos de Secundaria. Consta de dos partes, este primer artículo se dedica fundamentalmente al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales, a través de actividades pensadas especialmente para los alumnos de esa etapa.

This paper offers an overview of fractal geometry along with its applications. Through compilation, synthesis and adaptation of its main concepts, the fractal teaching possibilities are analysed at Secondary level. In two parts, this first article looks at the concept of fractal, its dimension and generation of some sorts of them through activities specially devised for Secondary students.

La teoría del caos y, dentro de ella, la geometría fractal constituyen un campo de investigación reciente que surgió de la aparición de una especie de conjuntos llamados *monstruos geométricos* que amenazaban con hacer tambalearse los pilares sobre los que se habían construido muchas propiedades matemáticas, y que por ello, merecían ser condenados al olvido. Sin embargo, hoy en día constituyen una de las partes más fascinantes de las matemáticas, de las ciencias y de las artes.

Michael Barsley, conocido matemático y uno de los investigadores punteros en el terreno de la geometría fractal caracterizó este campo de investigación de la siguiente forma:

> La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Se arriesga uno a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices y de muchas otras cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos.

Puesto que los fractales están revolucionando la ciencia actual y concretamente las matemáticas, parece interesante introducir a nuestros alumnos en ellos, de manera que sean fuente de motivación y les ayuden a descubrir diferentes conceptos y procedimientos matemáticos, situándolos en contextos reales que muestren su necesidad y justifiquen su uso. En este trabajo se realiza una recopilación y síntesis de los complicados conceptos recogidos en la teoría de fractales, comprensible para nuestros estudiantes y una propuesta didáctica susceptible de ser llevada al aula de Secundaria.

La metodología llevada a cabo es la de presentar diferentes conceptos de la geometría fractal y de la teoría del caos de manera breve y sencilla, introduciendo unas actividades que ha de resolver el alumno trabajando en grupo, con otros compañeros, y guiado por el profesor. De esta manera se posibilita el aprendizaje por descubrimiento y el desarrollo de habilidades y destrezas en un ambiente colaborativo y se motiva y estimula al alumno a utilizar y desarrollar su capacidad para aprender por sí mismo.

La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos.

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete.
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete.

Algunas actividades son originales. Otras han sido recopiladas de diferentes libros y artículos que aparecen en la bibliografía y adaptadas al nivel de los estudiantes de Bachillerato. En todas sirve de gran ayuda, el uso de la calculadora gráfica o de algún programa de cálculo simbólico, como Derive o Maple, con los que poder representar gráficamente funciones y realizar cálculos. También ayuda poder utilizar el programa de geometría Cabri Géomètre, con el que se pueden representar algunos objetos.

El primer apartado, se dedica fundamentalmente al concepto de fractal y de dimensión fractal y es la más idónea para ser desarrollada en el aula como primer contacto. En los apartados siguientes profundizamos en las distintas formas de generar objetos fractales y en sus aplicaciones, muestra de su gran utilidad en el contexto de la sociedad actual.

La secuencia de las actividades no es cerrada pues lo que se pretende es presentar una propuesta que el profesor pueda adaptar según su criterio didáctico y las posibilidades de su alumnado.

¿Qué es un objeto fractal? Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior.

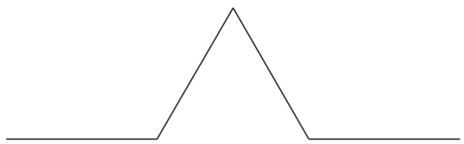
Concepto de fractal y de dimensión fractal

En este apartado se dan breves nociones sobre los objetos fractales, y algo, tan importante como complicado, que los caracteriza: el concepto de dimensión no entera.

La geometría fractal estudia y clasifica los objetos fractales. Pero, ¿qué es un objeto fractal? Su definición exacta está aún por establecer. Una manera de conocerlos y tratarlos es, quizás, analizando lo que tienen en común los procesos matemáticos mediante los que se generan. Un fractal es lo que se crea después de un proceso de iteración infinita, de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior. En muchas ocasiones, la forma de construirlos es muy sencilla. Se necesita muy poca información para obtenerlos y, sin embargo, el resultado final puede ser de una gran complejidad. El interés de estos objetos es que proporcionan modelos que simulan estructuras presentes en la naturaleza y posibilitan la realización de manipulaciones matemáticas que podrán ser aplicadas a la realidad. Una característica común a todos ellos, y que puede servir para definirlos, es su dimensión. Se admite que un fractal es *un objeto geométrico que puede ser descrito en términos de dimensiones que pueden no ser enteras*. La mayoría de las veces la dimensión de un fractal será un número no entero, pero existen algunos casos particulares de fractales, como la curva de Peano y todos los objetos propios de la geometría euclídea, que tienen dimensión entera. Aclaremos un poco este concepto.

> La gran mayoría de las formas geométricas referidas a objetos creados por el hombre han sido pensados, desarrollados y descritos dentro de la geometría euclídea (líneas, planos, arcos, cilindros...). Estos elementos tienen dimensión entera 1, 2 o 3. Nuestra costumbre de observar y representar objetos, definidos por medidas de largo, ancho y alto, constituye la principal dificultad para aceptar las dimensiones no enteras (fractales).

Consideremos la llamada *curva de Koch*. El proceso para crear esta forma es reemplazar repetidamente cada segmento por los cuatro segmentos siguientes:



El proceso empieza con un solo segmento y continua así sucesivamente sobre cada uno de los segmentos obtenidos en la fase anterior.

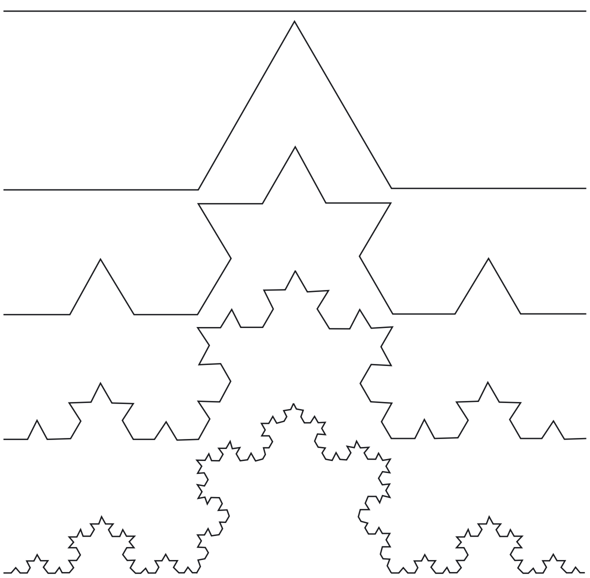
Actividad 1: Sobre una trama triangular construye las cinco primeras iteraciones de esta curva.

Objetivos: Introducir el concepto de iteración y de autosimilaridad mediante la presentación de uno de los llamados *monstruos geométricos*: La curva de Koch.

Observaciones: Al desarrollar esta actividad se trabaja el concepto de medida.

Tratamiento informático: Como el proceso es repetitivo, mediante el programa Cabri Géomètre y utilizando el teorema de Thales, se puede construir una macro que con solo hacer clic sobre cada segmento lo divida en tres partes, elimine el central y construya un triángulo equilátero sobre él (Figueiras y cols., 2000).

Hay que hacer notar que la longitud de la curva que ocupa el espacio inicial va aumentando en cada paso.



Actividad 2: En cada iteración por qué valor se multiplica la longitud de la curva? ¿Qué longitud tendrá la curva límite, cuando hacemos un número infinito de iteraciones? ¿Cuál es la longitud entre dos puntos cualesquiera de la curva? ¿Se podría encerrar esta curva dentro de una superficie acotada? ¿Se podría establecer la posición de uno cualquiera de sus puntos con un solo número?

Objetivos: Aclarar el concepto de dimensión euclídea e introducir la duda sobre la existencia de esa dimensión.

Observaciones: Se trabaja con la función exponencial, el límite de una sucesión y con longitudes infinitas en superficies finitas. Se aclaran ideas como el de longitud de una curva y el de posición de los puntos de la misma y su relación con el instrumento de medida (cuanto más preciso sea más detalles se descubrirán y la longitud aumentará).

A cada paso que se da la longitud se incrementa, de modo que en la k-ésima iteración la longitud es $(4/3)^k$. El alumno debería construir una tabla en la que se relacione el número de la iteración con la longitud de la curva correspondiente. Es importante que el alumno descubra que, en la curva límite, la longitud entre dos puntos cualesquiera es infinita, y, sin embargo, esta curva no se sale de un recinto acotado. La última pregunta permite reflexionar sobre la idea de que no es posible establecer la posición de sus puntos con un solo número (distancia al punto origen), como sucede al trabajar con dimensión euclídea 1. ¿Podrá ser la dimensión de la curva superior a 1?

Tratamiento informático: Calculadora gráfica para obtener las longitudes de la curva en cada iteración y representar gráficamente los puntos obtenidos.

Se puede concluir que el método para crear esta curva es sencillo pero no hay fórmula algebraica que describa sus puntos. La longitud de la línea fractal depende de la precisión del instrumento con el que midamos, o de la unidad de medida que tomemos. Cuando se intenta medir la línea con una regla, siempre se escaparán algunos detalles que no se pueden medir. Por tanto, el concepto de longitud carece de sentido.

Presentamos ahora el concepto de dimensión fractal, que en el caso de las líneas fractales va a indicar de qué forma o en qué medida la línea fractal llena una porción del plano. Además, dicha dimensión debe ser una generalización de la dimensión euclídea.

Consideremos un segmento de longitud *L*, se divide por la mitad y se obtienen dos segmentos de longitud *L/2*. Si se hace lo mismo para un cuadrado de lado *L*, se obtienen 4 cuadrados de lado *L/2* y si se aplica a un cubo se obtienen 8 de lado *L/2*. En cualquiera de los tres casos, el número por el que hemos de multiplicar el lado para que cada parte se convierta en el todo es 2, que es el llamado factor de escala. Se plantea una relación entre el número de elementos *a* y el factor de escala *s*, del tipo $s^d=a$, donde d es la dimensión del objeto.

$L = 2 \cdot \frac{L}{2}$ $\quad 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$ $\quad 2^1 = 2$

Dimensión
N.º de objetos
Factor
de escala

$L^2 = 4 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$ $\quad 1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad 2^2 = 4$

Dimensión
N.º de objetos
Factor
de escala

$L^3 = 8 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$ $\quad 1 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad 2^3 = 8$

Dimensión
N.º de objetos
Factor
de escala

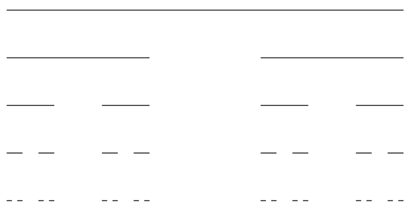
Actividad 3: ¿Si en la expresión $s^d=a$ despejamos *d* que se obtiene?

Objetivos: Obtener una expresión para la dimensión de un objeto.

Observaciones: Con esta actividad se repasa el concepto de logaritmo y su utilidad a la hora de resolver ecuaciones exponenciales.

Después de esta actividad, y puesto que el alumno ha obtenido una expresión para la dimensión de un objeto, se puede dar una definición de objeto fractal y un ejemplo de aplicación de la misma. Como hemos dicho, se suele aceptar e incluso definir que un objeto es fractal cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión euclídea.

Veamos otro ejemplo. Partimos del intervalo cerrado [0,1], lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central, volvemos a dividir en tres partes cada uno de ellos y eliminamos de nuevo el intervalo central y así sucesivamente.



Actividad 4: ¿Al continuar en la etapa k-ésima indefinidamente, cuántos intervalos cerrados habremos obtenido? ¿Qué longitud tendrá cada uno de esos intervalos? ¿Cuál es la longitud de todos los segmentos obtenidos en cada etapa? ¿Qué ocurrirá con el número de segmentos y la longitud de todos ellos cuando el número de iteraciones sea infinito?

Objetivos: Mostrar otro conjunto (de *Cantor*) que presenta extrañas propiedades y hacer reflexionar al alumno sobre las mismas y la posible dimensión del conjunto.

Observaciones: Se repasan conceptos como el de contar, cardinal de un conjunto y conjunto numerable. Al trabajar con esta actividad, el alumno se encuentra en la k-ésima etapa con 2^k intervalos de longitud $(1/3)^k$. La unión de todos ellos tiene longitud $(2/3)^k$ que tiende a cero cuando el número de iteraciones es infinito.

Tratamiento informático: Como antes, Cabri Géomètre y el teorema de Thales.

La dimensión fractal, en el caso de las líneas fractales, indica de qué forma o en qué medida la línea fractal llena una porción del plano.

Después de estas reflexiones, se puede dar esta definición de conjunto de Cantor: Si en cada etapa hallamos la unión de todos los intervalos obtenidos y después calculamos la intersección de todas estas uniones obtenemos un conjunto al que se le llama conjunto ternario de Cantor. Este conjunto es no vacío, pues al menos contiene los extremos de los intervalos, pero no solamente a ellos. Además es cerrado por ser intersección de intervalos cerrados. Nos encontramos con un conjunto de infinitos puntos no numerable pero de longitud nula.

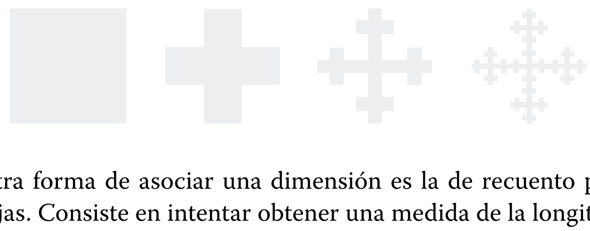
Actividad 5: Calcula las dimensiones fractales de la curva de Koch y del conjunto de Cantor. ¿Se pueden considerar los dos como conjuntos fractales?

Objetivos: Afianzar la idea de dimensión fractal como índice de la medida en que un objeto llena el espacio. Distinguir entre dimensión fractal (forma de llenar el espacio) y euclídea (forma de ocuparlo).

Observaciones: El alumno confirma con el cálculo de la dimensión de la curva de Koch, *(ln4/ln3) = 1,26*, que llena más el espacio que otras curvas de la misma dimensión euclídea que ella. Al ser su dimensión fractal mayor que su dimensión euclídea, sí es un objeto fractal. En el caso del conjunto de Cantor, ocurre lo contrario, su dimensión fractal es *(ln2/ln3) = 0,63*, menor que su dimensión euclídea, luego no es un fractal.

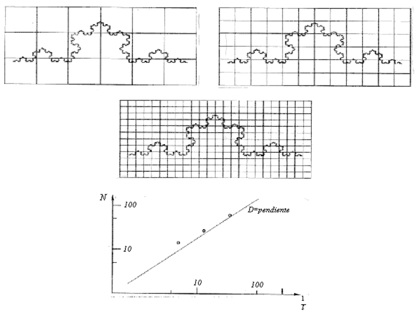
La dimensión es una característica que define a un objeto fractal, pero hay otras características que se dan en muchos de ellos, aunque no en todos:

- Autosimilitud: El conjunto fractal puede dividirse en partes tan pequeñas como se desee y estas partes representan una copia del total.
- Infinito detalle: Al ampliar un fractal aparecen muchos más detalles.
- Iteración: Los objetos se obtienen mediante un proceso repetitivo aplicado a los resultados obtenidos en cada fase.



Otra forma de asociar una dimensión es la de recuento por cajas. Consiste en intentar obtener una medida de la longitud de una curva mediante la medida de las longitudes l, de los lados de los cuadrados que forman un retículo que la recubra. Se cuenta el número de cuadrados N y se establece la relación entre N y l, $N = (1/l)^D$, donde D es, aproximadamente, la dimensión fractal. Se repite el proceso con retículos de cuadrados de lado cada vez menor y se representan las parejas $(1/l,\ N)$ en papel doblemente logarítmico. Se observa que dichos puntos se concentran en torno a una recta de pendiente D. Tomando logaritmos en la expresión de N se obtiene $lnN = D\ ln(1/l)$, función lineal de variable independiente $ln(1/l)$ y variable dependiente $ln\ N$. Se puede llegar a la conclusión que una buena forma de definir D es como

$$\lim_{l \to 0} \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{l}\right)}$$



Jürgens y cols., 1989.

La siguiente actividad se basa en uno de los primeros objetos fractales de dimensión superior a 1 aparecidos en la literatura sobre fractales (Mandelbrot, 1975).

Actividad 6: Utilizando tramas cuadradas, calcula la dimensión de recuento por cajas de la curva de Koch y la de una línea costera como la de Gran Bretaña.

Objetivos: Hacer ver al alumno otra definición de dimensión diferente a la fractal pero coincidente con ella en los objetos más característicos, de manera que se ponga de manifiesto el desarrollo de los conceptos matemáticos al intentar adaptarse y dar respuesta a los problemas surgidos en determinados momentos.

Observaciones: Se relacionan los conceptos de regresión lineal y dimensión.

Tratamiento informático: Calculadora gráfica, para introducir parejas de puntos, representarlas gráficamente y, calcular y dibujar la recta de regresión.

Sistemas dinámicos discretos

Se pretende ahora, dar una breve introducción a los sistemas dinámicos discretos, para poder iniciar la teoría del caos, introduciendo el concepto de atractor y determinados tipos de objetos fractales importantes que se generan de esta forma.

Los sistemas dinámicos se ocupan del movimiento, de las transiciones de un estado a otro. Un sistema dinámico discreto es un par de la forma (X, f), donde f es una aplicación de X en X que representa la ley de evolución del sistema dinámico. El conjunto X recibe el nombre de espacio de fases o de estados. La palabra discreto significa que el sistema evoluciona para valores discretos del tiempo. Las variables que describen el sistema dinámico discreto reciben el nombre de variables de estado y forman un vector llamado vector de estado.

Si se parte de una solución inicial x_0, denotaremos $x_k = f^k(x_0)$, en donde f^k representa la composición k veces de la función f. Se llama solución general a la expresión $F_x(k) = f^k(x)$. Al conjunto de valores $\{x_0, x_1, x_2, x_3...\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x)...\}$se le llama órbita de $x = x_0$. La obtención de expresiones analíticas para esta solución suele ser muy difícil o imposible, en estos casos se recurre a la representación gráfica.

Dado un sistema dinámico (X, f), se dice que $\varepsilon \in X$ es un punto fijo si $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Los puntos fijos merecen especial atención, son estados de equilibrio, una vez que se entra en ellos no se abandonan. Se clasifican en atractivos, repulsivos e indiferentes. Un punto fijo se dice que es atractivo si $|f'(\varepsilon)| < 1$. Esto quiere decir que existe un intervalo abierto que contiene a cuyos puntos tienen órbitas que mueren en ε. Se dice que es repulsivo si $|f'(\varepsilon)| > 1$. Viene a decirnos que todos los puntos próximos a ε, que estén dentro del mismo intervalo abierto al que pertenece, tienen órbitas que se alejan de ε. El punto fijo es indiferente si $|f'(\varepsilon)| = 1$. En este caso puede haber puntos próximos a ε cuyas órbitas se alejan de ε y otros cuyas órbitas caen en ε.

Se dice que el punto fijo ε es periódico o cíclico de periodo n del sistema (X, f), si existe un n tal que $|f^n(\varepsilon)| = \varepsilon$ y $|f^i(\varepsilon)| \neq \varepsilon$ Su órbita sería de la forma:

$$(\varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon), \varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon), \varepsilon, f(\varepsilon), f^2(\varepsilon) \ldots f^{n-1}(\varepsilon)\ldots)$$

El siguiente bloque de actividades permite introducir los sistemas dinámicos discretos y los conceptos asociados a él, como: órbita, punto fijo y sus diferentes clases y solución general. En ellas se trabajan conceptos ya conocidos por los alumnos, entre ellos la composición y el límite de funciones, ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, la función lineal, la cuadrática, y las progresiones aritméticas.

Actividad 7: Itera con la calculadora gráfica las funciones $f(x)=x^2$; $f(x)=\cos x$; $f(x)=1/x$, partiendo de diferentes valores iniciales. Investiga sus órbitas gráficamente y su estabilidad. (Una órbita es estable si, aunque cambiemos ligeramente el valor inicial, la órbita sigue siendo más o menos la misma).

Actividad 8: Calcula la solución general de la ecuación de Malthus $x_{k+1} = a \cdot x_k$ y el límite de dicha expresión. (Martín y otros, 1998).

Actividad 9: Calcula la solución general de un sistema dinámico con dos variables de estado como el siguiente:

$$x_{k+1}=x_k+y_k \qquad y_{k+1}=x_k$$

Actividad 10: Prueba que si $a \neq 1$, la ecuación $x_{k+1}=a \cdot x_k +b$ tiene un punto fijo y calcúlalo. Si ε es el punto fijo anterior. Prueba que si $x_k = z_k + \varepsilon$, entonces z_k satisface la ecuación $z_{k+1}=a \cdot z_k$. Comprueba que si $a=1$, las soluciones de la ecuación $x_{k+1}= x_k + b$ son progresiones aritméticas. (Martín y otros, 1998).

La actividad 7 presenta a los estudiantes tres funciones diferentes. En el primer caso, van a trabajar con una función muy sensible a las condiciones iniciales. Si tomamos valores muy próximos a 1, para los valores situados a la izquierda, las órbitas convergen a cero, para valores a la derecha de 1, las órbitas van a $+\infty$. Lo mismo sucede en un entorno de -1. En el segundo, sea cual sea el punto inicial, todas las órbitas convergen a un mismo punto fijo. En el tercero hay dos puntos periódicos de periodo 2.

Con la actividad 8 se practica la composición de funciones asociada al proceso de iteración de manera algebraica y se discuten los valores del límite en función de los valores de a. En la 9, el alumno se enfrenta a la composición de dos funciones, una de ellas es, a su vez, función de la otra. Como era de esperar, aparecen como coeficientes los números de Fibonacci por ello, antes de resolverla algebraicamente, se puede pedir a los alumnos que mediten sobre el posible resultado. La actividad 10 está pensada para ser resuelta algebraicamente. Los alumnos deben aplicar en ella relaciones de recursividad y es interesante que observen la relevancia del valor del parámetro a.

La calculadora gráfica permite obtener y representar las órbitas. Con las sucesiones se pueden generar valores y representarlos gráficamente, permitiéndonos analizar las órbitas, determinar o aproximarse a los puntos fijos y analizar la estabilidad de las órbitas, recalculando las mismas para pequeñas modificaciones del valor inicial.

Tipos de fractales

Se presentan aquí diferentes formas de obtener objetos fractales y ejemplos de algunos objetos que simulan formas de la naturaleza.

Fractales deterministas lineales

Los fractales lineales son descritos mediante sistemas dinámicos lineales. La función aplicada sobre el espacio de fases es una función lineal. Partiendo de un objeto inicial se aplica una función lineal repetidas veces sobre cada uno de los resultados obtenidos en el proceso anterior. Todos ellos se caracterizan por ser autosimilares. Cualquier parte del objeto contiene una copia reducida del original. La manera habitual de obtener estos objetos es mediante un sistema de funciones iteradas (IFS). Una transformación lineal actúa sobre el plano euclídeo y permite girar, desplazar y cambiar la escala de cualquier conjunto del plano. La transformación W, se denomina contractiva si hace que dos puntos cualesquiera estén más próximos después de haber sido transformados. Esta transformación modifica los puntos de un objeto hasta convertirlo en un punto fijo al que se denomina atractor.

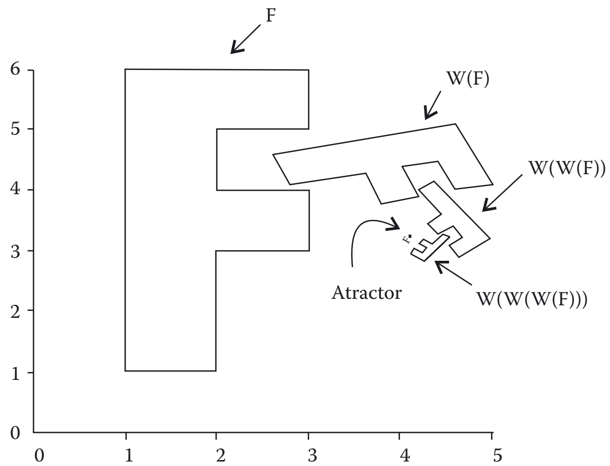
Se puede expresar como $W(x, y) = (ax+by+e, cx+dy+f)$ o bien

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

También se puede expresar

$$W\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha & -s\,sen\beta \\ r\,sen\alpha & s\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

donde r y s representan la escala, α y β la rotación y m y n la traslación

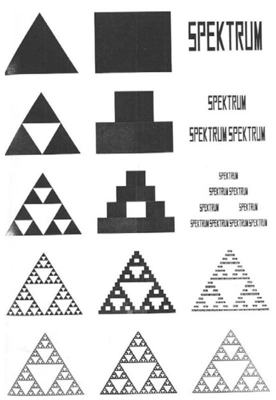


Si observamos la imagen anterior, la transformación *W* converge a un punto fijo. Este fenómeno se da con todas las aplicaciones contractivas. Lo curioso es que el atractor, independientemente de la imagen de origen, es siempre el mismo.

Un sistema de funciones iteradas es un conjunto de transformaciones lineales contractivas. Los sistemas de funciones iteradas están formados por transformaciones y probabilidades.

El helecho es un fractal generado por un sistema de funciones iteradas que consta de cuatro matrices de transformaciones 2x2, cuatro matrices 2x1 de traslaciones y cuatro probabilidades.

Cada transformación lineal tiene asociada una probabilidad que influye en su aplicación. Un conjunto fractal se puede representar en forma de matriz mediante un Sistema de Funciones Iteradas (IFS). Consideremos, por ejemplo, un sistema de funciones iteradas formado por tres aplicaciones contractivas, W_1, W_2 y W_3, y sus correspondientes probabilidades. A un conjunto inicial se le aplica una de las transformaciones, al objeto obtenido se le aplica otra de las transformaciones o la misma incluso, al objeto obtenido se le aplica, de nuevo, alguna de las tres transformaciones y así sucesivamente hasta caer en un objeto final, el atractor del sistema de funciones iteradas. Dentro del conjunto de fractales que se obtiene de esta forma están los de la geometría euclídea y los autosemejantes. Al margen de las probabilidades asociadas a cada transformación y del conjunto inicial de partida al que se aplican las mismas, el resultado es siempre el mismo objeto fractal, el atractor del IFS. Esto quiere decir que los IFS son independientes del conjunto inicial, como se muestra en el siguiente dibujo (Jürgens, 1989):



El uso de IFS ofrece la posibilidad de encontrar, para un objeto natural, un fractal que se aproxime a él lo que se desee. Dado un ente real, como una planta, una montaña, o el corazón humano se puede obtener un conjunto de aplicaciones lineales contractivas que determinarán un fractal que se aproximará a la realidad tanto como se quiera.

Esto es un helecho. Es un fractal generado por un sistema de funciones iteradas que consta de cuatro matrices de transformaciones 2x2, cuatro matrices 2x1 de traslaciones y cuatro probabilidades. La autosimilaridad es evidente en él.

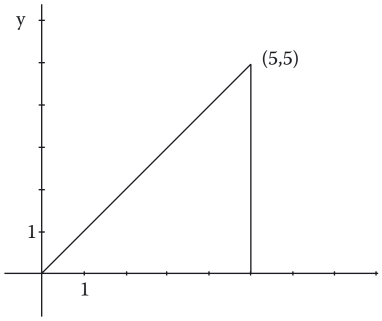
El triángulo de Sierpinski: Sin duda es uno de los objetos más simples e interesantes que existen. Uno de los aspectos más sorprendentes de dicho triángulo es que hay muy diferentes y fáciles formas para generarlo. El camino más fácil es empezar con un triángulo, (no es imprescindible que sea equilátero). Se unen los puntos medios de cada lado para formar cuatro triángulos separados y se elimina el central. Se repite el proceso indefinidamente con cada uno de los tres restantes.

Actividad 11: Con la ayuda de una malla triangular de puntos, dibuja unas cuantas iteraciones de dicho triángulo. ¿Qué figura obtienes? Calcula en cada iteración el perímetro y el área de la figura obtenida. Calcula el perímetro y el área para la figura que resultaría si se realizaran infinitas iteraciones. ¿Cuál podría ser la dimensión de este objeto? Calcúlala con la fórmula que ya conoces.

Objetivos: Presentar un objeto de los llamados extraños, de gran importancia, el triángulo de Sierpinski, afianzar los conceptos de iteración y autosimilaridad.

Observaciones: Se vuelve a trabajar el concepto de medida, en este caso referida al perímetro y al área del objeto. El alumno se ve obligado a razonar y reflexionar sobre el número de elementos obtenidos en cada iteración y sobre el factor de escala. Es conveniente que en cada iteración se calcule el perímetro y el área a la vez, de esta forma se puede comparar y ver que mientras que el perímetro aumenta el área disminuye, y este hecho puede ayudar a llegar a la conclusión de que, a pesar de ser un objeto contenido en el plano, la manera en que lo llena es un tanto peculiar y que, mientras que su dimensión euclídea sería 2, su dimensión fractal sería un valor comprendido entre 1 y 2. Al calcular la dimensión del mismo se comprueba este hecho y el proceso de razonamiento permitirá al alumno afianzar la idea de dimensión fractal.

Actividad 12: Aplica el siguiente sistema de funciones iteradas al triángulo que se muestra a continuación. ¿Qué obtienes?



$$W_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$W_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

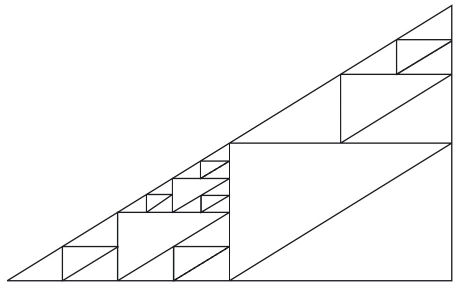
$$W_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Objetivos: Manipular el concepto de sistema de funciones iteradas.

> "El caos observa que realmente existen movimientos sin orden. Gracias a la teoría del caos, hemos comprendido que puede haber movimientos erráticos que no son aleatorios, sino que responden a reglas fijas."
> Feigenbaum

Observaciones: Se efectúan operaciones con matrices mediante las que se van reduciendo las medidas del objeto a la mitad y se trasladan. Con la primera transformación el triángulo se sitúa en la zona inferior de la izquierda, con la segunda en la zona inferior de la derecha y con la tercera se sitúa en la parte superior. La zona central quedaría vacía. En la k-ésima iteración tendríamos 3^k triángulos donde cada lado mide $(½)^k$ de la longitud del lado correspondiente en el primer triángulo. Se debe reflexionar sobre el objeto resultante (Sierpinski) y lo que implica cada transformación.

Utilizando las posibilidades de la calculadora gráfica, se introducen las matrices de escalado y de traslación, y se aplican a los vértices de los triángulos obtenidos en cada iteración. Introduciendo los valores en listas se pueden representar los puntos que se van obteniendo. Con Cabri Géomètre II se puede construir una macro que reduzca cada triángulo a la mitad y saque tres copias que traslade a los lugares correspondientes, para ver el efecto final. Se afianzarán los conceptos de iteración y recursividad.



El triángulo de Pascal (Tartaglia) y el triángulo de Sierpinski: El triángulo de Pascal es una creación fascinante que ha sido colocada en todo tipo de sitios: teoría de números, teoría de la probabilidad... Ahora cabe también en la geometría fractal.

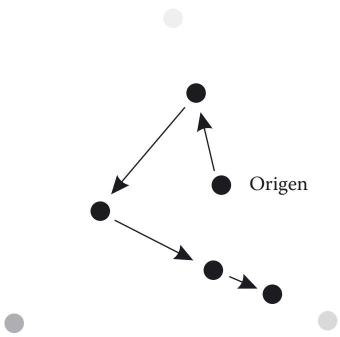
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 465 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Actividad 13: Colorea de negro en el triángulo anterior las casillas ocupadas por números impares y deja en blanco las casillas ocupadas por pares. ¿Qué obtienes? Haz lo mismo con los múltiplos de 4, dejando en blanco las casillas ocupadas por ellos. Igual con los múltiplos de 5 ¿Qué obtienes? Vamos a repetir el experimento trabajando en una base distinta a la habitual. Escojamos, por ejemplo, base cinco. Convierte el triángulo de Tartaglia a esta base, toma las 15 primeras filas y colorea de diferentes formas los grupos formados por ceros, por una parte, y por unos, doses y treses, por otra. ¿Qué obtienes? ¿Cuál es el patrón de formación de este triángulo de Sierpinski? Repite el proceso en otra base distinta. Usa otra regla para obtener dicho triángulo, como restar los dos números anteriores en vez de sumarlos y colorea de diferentes formas los positivos y los negativos. ¿Qué obtienes ahora? Inventa tú otras reglas y colorea de diferentes formas. ¿Observas algo común en todo lo obtenido a lo largo de la actividad?

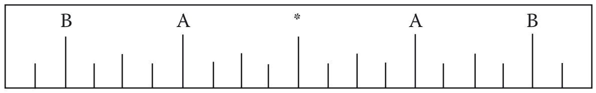
Objetivos: Presentar al alumno la curiosa relación que se establece entre el triángulo de Sierpinski y el de Tartaglia a través de juegos con los números.

Observaciones: Se trabaja con múltiplos, números combinatorios y bases diferentes a la decimal, y se permite al alumno usar la imaginación para experimentar con diferentes posibilidades. Esta actividad se puede utilizar para despertar la capacidad de asombro de los alumnos y mostrarles como lo aprendido en diferentes bloques de contenidos se relaciona de las más insospechadas formas. Sería interesante hacerles reflexionar sobre el porqué se establece esa relación entre ambos triángulos, analizando cómo se distribuyen en el triángulo de Tartaglia los pares y los impares, o los múltiplos de cuatro y los de 5, etc. y la formación de los huecos en dicho triángulo. Es posible, además, trabajar en diferentes bases y establecer relaciones entre las mismas, afirmando los procedimientos de formación de números en sistemas de numeración posicionales.

El juego del caos: Consiste en lo siguiente: Se marcan tres puntos como los vértices de un triángulo equilátero. Se colorea el vértice de arriba de rojo, el de abajo de la izquierda de verde y el de abajo de la derecha de azul. Se toma un dado que tenga dos caras rojas, dos verdes y dos azules. Para iniciar el juego, se necesita, un origen, que puede ser cualquier punto arbitrario del plano. Se procede del siguiente modo: Se lanza el dado, y dependiendo del color obtenido se mueve el punto origen la mitad de la distancia hacia el apropiado vértice coloreado. Después se repite el proceso, utilizando el punto obtenido en el anterior movimiento como origen del siguiente movimiento. No conviene marcar los primeros puntos obtenidos.



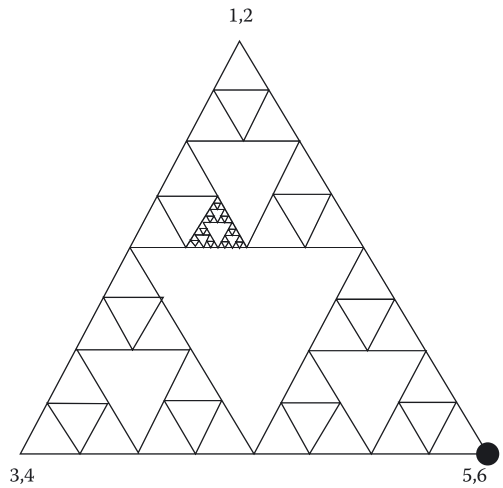
Actividad 14: ¿Qué crees que sucederá? Juega con un compañero y observa lo que pasa. Para efectuar las medidas te puedes ayudar de una regla como ésta:



Objetivos: Obtener el triángulo de Sierpinski a través del juego.

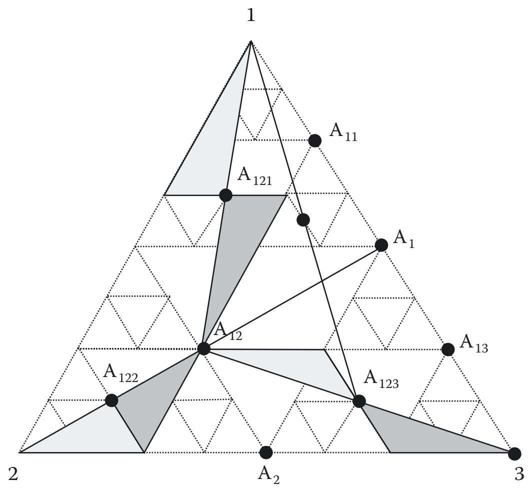
Observaciones: El alumno puede ver la riqueza de procedimientos que nos conducen a este interesante objeto, y, del mismo modo que en la actividad anterior, sería interesante que, después de jugar y de haber dibujado los puntos que se van obteniendo, intentaran dar una explicación del porqué de la formación del triángulo. Si se parte de uno de los vértices de alguno de los triángulos de alguna iteración, las siguientes posiciones se encuentran también en vértices de triángulos de alguna iteración. ¿Qué ocurriría si el punto de inicio se encuentra dentro de alguno de los triángulos eliminados? Igual que antes, los sucesivos puntos que se van obteniendo están contenidos en triángulos eliminados, ¿Cómo aparece, por tanto, el triángulo de Sierpinski? Se puede hacer, de nuevo, hincapié en el concepto de infinito, y hacer ver que al tomar un número muy grande de iteraciones los triángulos eliminados se vuelven tan pequeños que es muy difícil precisar qué puntos están en él y qué puntos no lo están. Con el uso de la regla del punto medio, los alumnos descubren un método sencillo y original de calcular el punto medio de un segmento de una determinada longitud.

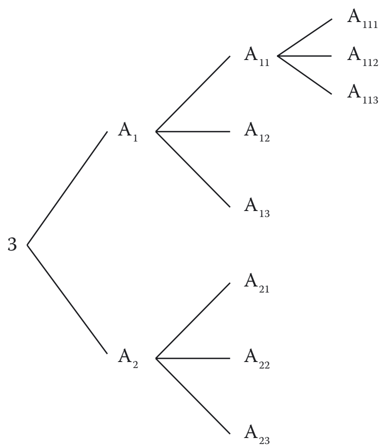
Actividad 15: Sitúate en un vértice del triángulo de Sierpinski y en un triángulo de una determinada iteración. Intenta estimar el número mínimo de tiradas necesarias para llegar a dicho triángulo desde dicho vértice.

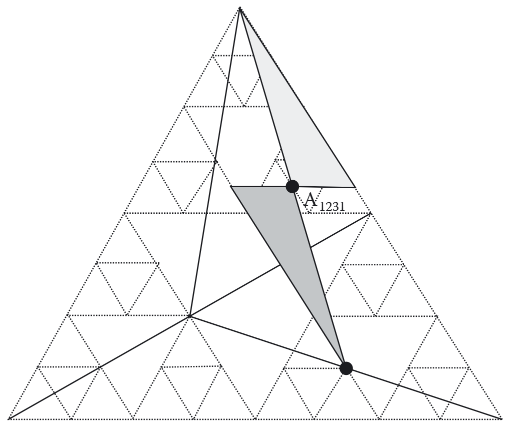


Objetivos: Profundizar en el algoritmo de formación del triángulo.

Observaciones: Al igual que en la actividad anterior se comprobaba experimentalmente que al caer en uno de los vértices de alguno de los triángulos que forman parte del triángulo de Sierpinski, los siguientes movimientos nos situaban en vértices de otros triángulos del objeto final, en esta otra actividad se puede comprobar también el mismo efecto. Se parte del vértice marcado y se consideran los puntos a los que se podría saltar. Dibujando la distancia a cada uno de los vértices, se podría calcular, en cada caso, el punto medio, aproximándolo primero y después conformando su posición exacta mediante simetrías y giros. De esta forma se puede trabajar con los movimientos. ■







REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIRAS, L. y cols. (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de los fractales", *Suma*, n.º 35, 45-54.

JÜRGENS, H.; PEITGEN, H.; SAUPE, D. (1989): "El lenguaje de los fractales", *Investigación y Ciencia*, n.º 169, 46-57.

MANDELBROT, B. (1975): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.

MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M. (1998): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.