SUMA 47

Noviembre 2004, pp.11-18

Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional

El proyecto CUBE es una propuesta de trabajo en el aula de Matemáticas donde a partir de la película CUBE (Vincenzo Natali, 1997) se desarrollan una serie de actividades introductorias a la Geometría Analítica tridimensional y a la visualización espacial geométrica. Consta de dos partes, una relativa al guión de la película y otra derivada hacia el desarrollo del currículo de 4º de ESO en el bloque de Geometría. Las características de la propuesta hacen que se presente como un proyecto abierto a la interdisciplinariedad e idóneo para la práctica del aprendizaje significativo en un contexto de prácticas procedimentales.

CUBE is a proposal for a project for the math class issuing from the film cult CUBE (Vincenzo Natali, 1997), it develops a series of activities introducing both analytical three-dimensional geometry and special geometrical visualization. The project consist of two parts: one relating directly to the film script and another one focusing on the development of 4th year ESO geometry curriculum. The characteristics of the proposal allows scope for cross curricular involvement, is also open to multi-level approaches and very apt to the practice of meaningful learning in a context of procedural tasks.

La dificultad de motivar al alumno en los cursos de ESO es un grave problema del que todos los docentes de Secundaria nos hacemos eco. En la asignatura de Matemáticas, donde los contenidos se perciben por tradición como aburridos y desconectados de la realidad, la situación se agrava. De ahí el interés en buscar nuevos recursos motivadores que interesen al alumno y muevan su curiosidad. Uno de ellos, ampliamente utilizado en otras áreas, es el vídeo. Precisamente debido al escaso material en el área de matemáticas (series de TVE, Universo matemático y Más por menos de Antonio Pérez) resulta curioso encontrar una película de ficción donde el tema central y motor de la historia sea un tema matemático tratado con el rigor suficiente como para trabajar con ella en el aula de Matemáticas. El título referido es CUBE del director Vincenzo Natali, año 1997 (Ciberpaís 7/6/2001, Cartelera Turia nº 1.822 (4/10 enero 1999)) (Fig 1).

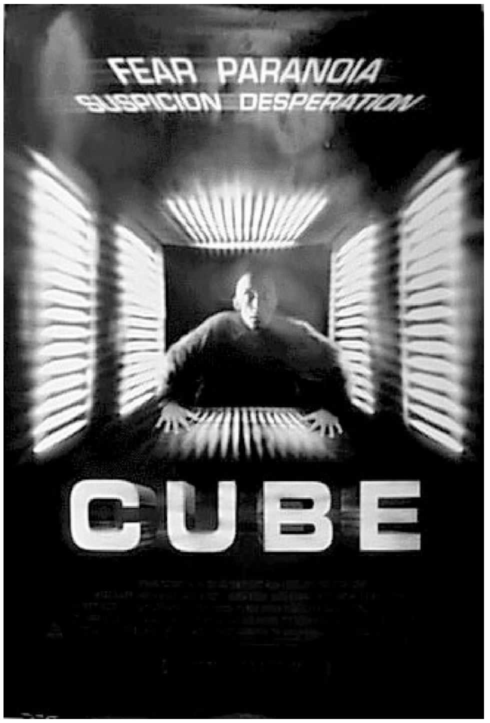

Figura 1. Imagen promocional de la película

Un primer punto de interés radica en poder introducir al alumno en el universo tridimensional. Como dice Floreal Gracia (1994)

> ...la intuición espacial permite un desarrollo más equilibrado del estudiante, en especial por que se posibilita a una parte de los alumnos y alumnas a conseguir las capacidades establecidas para la Secundaria Obligatoria, sin pasar necesaria y únicamente por el eje de la lógica y el razonamiento.

Una actividad interesante para mejorar la intuición espacial es precisamente pasar del plano al espacio. Desde este punto

Elena Thibaut Tadeo
IES Tierno Galván. Moncada.

de vista, la visualización de una estructura cúbica, como la que se da en los ejercicios con policubos (Alsina, 1988, 1997) es un inicio acertado para trabajar en geometría espacial.

En matemáticas es muy dificil motivar al alumno, por lo que se buscan nuevos recursos que le interesen y muevan su curiosidad. Uno de ellos es el cine.

El siguiente paso a seguir sería intentar representar algebraicamente los puntos del espacio. El rompecabezas propuesto en la película resulta una introducción perfecta a los sistemas cartesianos de representación y permite un juego de coordenadas muy adecuado para la práctica de simbolización numérica de desplazamientos y posiciones.

Por último, las posibilidades que ofrece la película para la reflexión sobre ciertas características de algunos poliedros y el llenado del espacio en estructuras similares al cúbico (Guillén, 1991), hace que resulte idónea para el 4º curso de ESO en la opción B.

Planteamiento de la actividad: Material del aula

Para poder comenzar a trabajar después de haber visto la película conviene que el alumno tenga las claves para descifrar matemáticamente lo que ocurre. Este es el texto del que dispondrán en clase:

CUBE

En esta película nos encontramos con una prisión de características muy particulares. La finalidad de su existencia y el porqué los protagonistas han sido encerrados en ella no es asunto de esta asignatura.

Pero lo que sí nos interesa es su funcionamiento.

El recinto es un espacio cúbico compuesto por otros cubos más pequeños, todos ellos de igual tamaño (14 pies de lado). Por Worth sabemos que está contenido en una carcasa exterior de dimensión 1432 pies cuadrados. Leaven hace cálculos y deduce, haciendo la hipótesis de que entre la carcasa exterior y el cubo gigante hay un espacio igual al lado de un cubo pequeño, que hay un total de 26 cubos en cada arista. Calcula después el total de cubos: 17576.

Cada cubo pequeño tiene una compuerta en cada una de sus caras, en total seis, que conducen a otro cubo. En el interior de esas compuertas se puede leer un número de nueve cifras, agrupadas de tres en tres, que identifican al cubo. Leaven descubre que si suma las cifras, obtiene las coordenadas de ese cubo en un sistema de ejes cartesianos. Pero se encuentra con un cubo con una coordenada igual a 27. Eso no es posible porque habíamos dicho que por el volumen de la carcasa exterior el máximo de cubos eran 26. Se dan cuenta en ese momento que probablemente los cubos con esas coordenadas hacen de puerta de salida, ya que estarían en contacto con la carcasa exterior. Pero para que eso sea posible, los cubos deben cambiar su posición, ya que el cubo con la coordenada 27 se encuentra en ese momento en contacto con otros cubos y no con la carcasa exterior.

¿Cómo se mueven los cubos? Leaven dice que si la suma da unas coordenadas, deberían ser las del punto inicial, y por lo tanto la resta debería dar los cambios de posición. Veámoslo con un ejemplo:

320 176 223 — Éstas son las cifras del cubo.

320: 3+2+0=5=x
176: 1+7+6=14=y — Éstas son las coordenadas.
223: 2+2+3=7=z

320: 3-2=1; 2-0=2; 0-3=-3 — Desplazamientos en x.
176: 1-7=-6; 7-6=1; 6-1=5 — Desplazamientos en y.
223: 2-2=0; 2-3=-1; 3-2=1 — Desplazamientos en z.

Obtenemos el primer desplazamiento sumando las restas a las coordenadas de la posición anterior:

(5+1, 14+(-6), 7+0)=(6, 8, 7) llegará a esta posición.

En el segundo desplazamiento:
(6+2, 8+1, 7+(-1))=(8, 9, 6) llegará a esta posición.

En su tercer desplazamiento:
(8+(-3), 9+5, 6+1)=(5, 14, 7) vuelve a la posición inicial.

Para saber en qué desplazamiento se encuentra el cubo tenemos que conocer las cifras de los cubos que le son adyacentes y calcular, con estas, las coordenadas iniciales y las que corresponden a sus desplazamientos. Comparando unas y otras podemos concluir que sólo en una de las tres se puede encontrar en contacto con los cubos que le rodean. Lo vemos con un ejemplo.

Supongamos que las tres posiciones posibles del cubo son:

(14, 8, 6) (7, 7, 5) (6, 4, 3)

y que las posiciones posibles de tres de los cubos que le rodean son:

arriba	(5, 3, 2)	<u>(7, 7, 6)</u>	(14, 5, 3)
derecha	(11, 12, 10)	<u>(7, 8, 5)</u>	(12, 1, 5)
izquierda	(13, 14, 7)	(7, 14, 6)	<u>(7, 6, 5)</u>

Si miramos las coordenadas de la segunda posición encontramos que si le sumamos 1 a la coordenada z, nos da (7, 7, 6) que coincide con una de las posiciones del cubo de arriba. Si le sumamos 1 a la coordenada 1, nos da (7, 8, 5), que coincide con una de las posiciones del cubo de la derecha. Y si le restamos 1 a la coordenada, nos da (7, 6, 5), que también es una de las posiciones del cubo de la izquierda. Por tanto el cubo en el que nos encontramos está en su segunda posición y le faltan dos movimientos para volver al inicio. Además, el de arriba y el de la derecha también se encuentran en su segunda posición; y el de la izquierda en su tercera.

El recinto de CUBE es un espacio cúbico compuesto por otros cubos de igual tamaño. Cada cubo pequeño tiene una compuerta en cada una de sus caras. en la que se puede leer un número de nueve cifras, agrupadas de tres en tres.

De lo dicho antes deducimos que todos los cubos no se mueven a la vez. Cada uno de ellos ha comenzado a cambiar su ubicación en momentos diferentes, lo que hace extremadamente complejo el mecanismo del cubo gigante.

Así es como Leaven puede encontrar cuántos movimientos faltan para que el cubo puerta vuelva a su punto de inicio, es decir, a la salida.

Además de toda esta complejidad en el diseño de CUBE, se añaden, para hacerlo más difícil todavía, trampas mortales en algunos cubos.

Al principio Leaven piensa que contenían trampa cuando cualquiera de los tres números de tres cifras era primo. Después se da cuenta de que en realidad eran aquellos que se descomponían en una potencia de un único número primo. Ser primo sólo era un caso particular en el que el exponente es 1. Ejemplo:

Al principio:

563 es primo, entonces tiene trampa
128 no es primo, entonces no tiene trampa

Luego:

$563=563^1$, entonces tiene trampa
$128=2^7$, entonces tiene trampa!!!

Es conveniente realizar un debate para aclarar todas las posibles dudas antes de plantear la primera serie de actividades (1ª parte). Éstas son las siguientes:

Peligroso
¿Cuál es el mayor número de tres cifras con trampa y cuál es su descomposición factorial? ¿Cuál es el menor?

Lo que hace Kazan no es tan difícil como adivinar los números que son primos. ¿Por qué?

Probablemente debido a un error en la traducción, Kazan hace cálculos incorrectos. Comprueba los siguientes:

567 (2)	*898 (2)*	*545 (2)*	*Seguro*
656 (2)	*779 (2)*	*462 (3)*	*Seguro*
563 (2)			*Seguro*
384 (1)			*Trampa*
805 (2)			*Seguro*

Se trabajan los números primos y se familiariza al alumno con las ternas de números. El heurístico que interesa trabajar es la práctica de ensayo-error para buscar el resultado correcto.

Faraónico
¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?

Viendo las coordenadas de cada cubo, ¿hay otra manera de deducir que habrá 26 cubos?

Calcula el volumen total de cube sin contar la carcasa exterior (debes tener en cuenta que hay tres cubos más: los que hacen de salida, una por cada coordenada).

Para hacernos una idea, busca cosas que tengan el mismo volumen que cube.

Hay dos formas de deducir el número de cubos de la prisión: en una de ellas hay que explicar el razonamiento que se hace en la película (a partir de un dato empírico, ir de lo conocido a lo desconocido), y en la otra se ha de interpretar la numeración de los cubículos (se hace una hipótesis). El cálculo de volúmenes, la comparación y la estimación, es el objetivo de la última parte de la actividad.

E pur si mouve
Explica qué es un sistema cartesiano de puntos. Dibuja en la proyección de los tres planos definidos por los ejes (XY, XZ, YZ) el movimiento de los siguientes cubos:

566 778 462
626 999 347

Hay cubículos que no se mueven por todo el cubo. ¿Cuáles son? Describe como será su movimiento y razónalo.

Se puede guiar una búsqueda bibliográfica para explicar un sistema cartesiano de puntos. Las proyecciones sobre planos pueden resultar complicadas por eso conviene, según los grupos, trabajar únicamente el cálculo de las coordenadas de movimientos y su representación en perspectiva tridimensional. Los cubículos que no se mueven por todo el cubo tienen las numeraciones:

xxx yyy zzz, no cambian su posición;
xxx yyy, ..., se mueven en una recta;
xxx, ..., ..., se mueven en un plano.

La generalización es el objetivo de esta parte de la actividad.

Claustrofóbico
En el plano de la figura siguiente (Fig 2) tienes representado el dibujo de un laberinto bidimensional. Cada cuadrado está determinado por un par de números de dos cifras.

Si ya sabes cómo se mueven los cubos tridimensionalmente, no te será difícil explicar como funcionan los cuadrados en dos dimensiones. Para hacerlo más sencillo, piensa que todos los cuadrados cambian de posición al mismo tiempo.

16	11-79	13-88	24-88	35-88	46-88	57-88	86-79	88-88
14	11-68	31-77	42-77	62-86	73-59	75-68	77-77	79-86
12	11-57	22-75	60-39	62-48	64-57	66-66	68-75	79-39
10	11-46	22-64	51-37	53-46	55-55	57-64	59-73	88-64
8	11-35	40-26	42-35	44-44	46-53	48-62	86-35	88-53
6	20-51	31-24	33-33	35-42	37-51	39-60	77-42	88-42
4	20-13	22-22	24-31	26-40	37-13	57-22	68-22	79-22
2	11-11	13-20	42-11	53-11	64-11	75-11	86-11	88-20
	2	4	6	8	10	12	14	16

Figura 2. Laberinto bidimensional con la numeración de cada cubículo cuadrangular

Haz un diagrama de las posiciones que adoptarán después de cada desplazamiento.

¿Por qué no aparecen las coordenadas impares?

La necesidad de generalizar y la representación simbólica de resultados son los objetivos principales de esta actividad. De hecho, la contestación a la última pregunta es sencilla si se generaliza:

AB; *A + B* = coordenada; *A - B* = desplazamiento; *A+B+A-B*=2*A*=coordenada de la segunda posición que ha de ser necesariamente par. Otra posible propuesta es el desarrollo de un sistema similar ortogonal en cuatro dimensiones, haciendo una breve referencia al hipercubo.

Otra serie de actividades (2ª parte) que complementan las anteriores y cubren una parte del currículo de Matemáticas en 4º ESO-B, serían las relacionadas con la geometría de poliedros. Las propuestas son las siguientes.

Prismoide: *Con prismas. ¿Qué condición deben cumplir los polígonos de las bases para que sea posible hacerlo? ¿Cuántos polígonos regulares cumplen este requisito? Ayúdate con dibujos en tus explicaciones.*

Doderom: *Otro poliedro que tiene todas sus aristas del mismo tamaño como el cubo y que también puede cubrir todo el espacio sin dejar huecos es el dodecaedro rómbico (Fig 3).*

¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Dibuja su desarrollo en el plano.

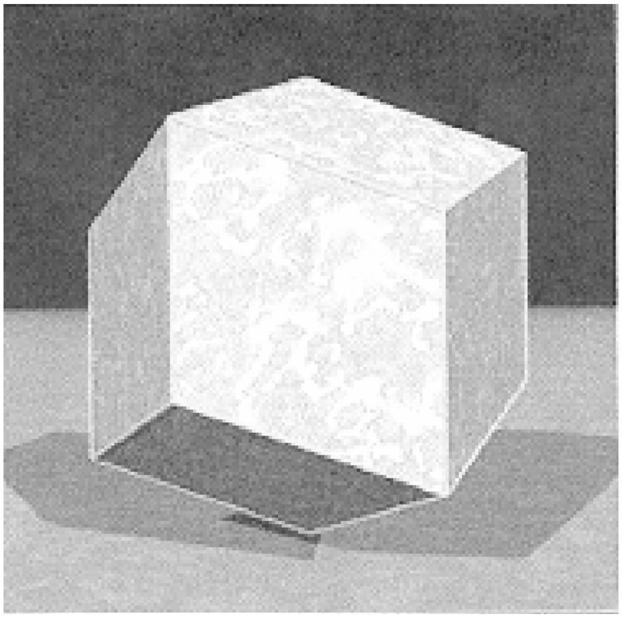

Figura 3. Dodecaedro rómbico (rhombic dodecahedron)

Decuforme: *Deformando un cubo para que sus caras acaben siendo rombos. ¿Cómo ha de ser la deformación para que encajen y se pueda hacer una construcción compacta como CUBE que llenen todo el espacio sin dejar huecos? Ayúdate con dibujos en tus explicaciones.*

Octatruncum: *Otro poliedro que tiene todas sus aristas del mismo tamaño como el cubo y que también puede cubrir todo el espacio sin dejar huecos es el octaedro truncado (Fig 4).*

¿ Cuántas caras, aristas y vértices tiene? Dibuja su desarrollo en el plano.

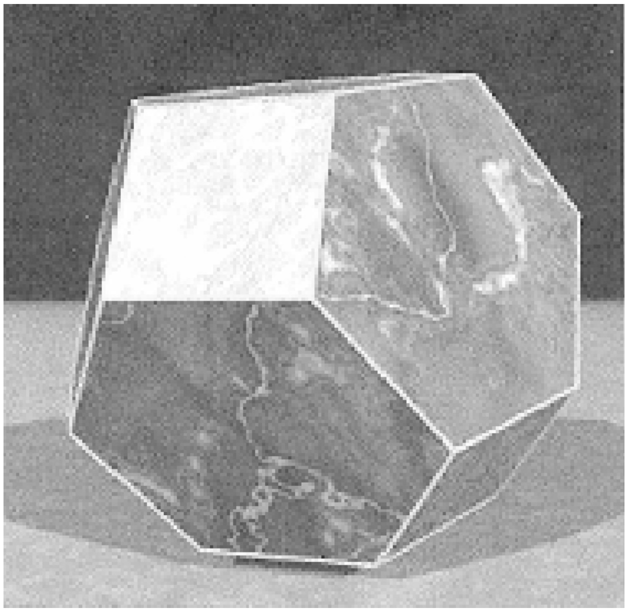

Figura 4. Octaedro truncado (truncated octahedron)

Resultados en el aula de 4º de la ESO

Currículo

La experiencia didáctica se concibió inicialmente para aplicarse según el Decreto 47/1992. Aunque se trabajan en general todos los objetivos generales de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, es en especial el apartado 7, en el que se insiste más directamente: *Identificar las formas y relaciones espaciales que se presenten en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan.* Los contenidos se encontraban recogidos en el Bloque 3: Geometría, en concreto dentro del apartado 1. Elementos básicos: Elementos de los polígonos, poliedros y cuerpos de revolución; Simetrías y regularidades en las construcciones y configuraciones geométricas; Propiedades elementales de las figuras y de los cuerpos. También se trabajan los contenidos del bloque 7: Resolución de problemas. Algoritmos y 8: Matemáticas y actitudes.

Actualmente el Decreto 39/2002, que modifica al de 1992, regula el currículo de Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. En este caso, además de tener como objetivos todos los generales de etapa especificados, es el apartado 5 el que se trabaja de forma directa: *Aplicar los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea. Identificando las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensible a la belleza que generan*. Los contenidos que se han desarrollado en las actividades expuestas se encuentran recogidos en el bloque 3: Geometría: *Se trata de estudiar en el plano y en el espacio figuras y cuerpos geométricos y algunas de sus relaciones y de sus propiedades. Además de la relación plano-espacio, también se abordará el paso del plano al espacio (mediante el plegado de desarrollos de diferentes cuerpos regulares o no, de distintas vistas planas) y el paso del espacio al plano, con visiones desde distintos lugares de cuerpos o configuraciones geométricas, desarrollos... Se propone también el estudio de algunas figuras y cuerpos importantes. Asimismo es fundamental la adquisición de un vocabulario que les permita hablar de su entorno geométrico.* Y concluye: *Por otra parte se abordará el inicio del estudio de la geometría analítica plana resaltando la relación existente entre ésta y los métodos del álgebra.*

Las actividades propuestas también comprenden los contenidos relacionados con la resolución de problemas y los actitudinales del Decreto 39/2002 como comunes a todos los bloques.

Metodología

La metodología empleada en el tratamiento de aula de las actividades ha sido la propuesta por Feuerstein, mediated learning experience o experiencia de aprendizaje mediado. En la lista siguiente (Serrano y Tormo, 2002) se resumen los criterios o categorías que propone Feuerstein en su metodología de la mediación.

Intencionalidad y reciprocidad: Consiste en implicar al mediado en el aprendizaje, haciéndole asumir los estímulos: ésa es la intención del mediador.

Trascendencia: Se trata de que el mediado llegue al convencimiento de que la resolución de una determinada actividad no se acaba en sí misma, sino que le ha de servir para otras ocasiones de aprendizaje.

Significado: Se presentan las situaciones de aprendizaje de forma interesante y relevante para el alumno, *que signifiquen algo para él*, que penetren en su propio sistema de significados, posibilitando las relaciones entre los aprendizajes adquiridos.

Sentimiento de capacidad: Está estrechamente relacionado con la motivación y la autoestima. Se trata de provocar en el mediado el *sentimiento de ser capaz de*.

Control del comportamiento: Equivale, tanto a *dominio de la impulsividad*, controlada por sí y en sí misma, como a *inicio y a aceleración* de la actividad.

Comportamiento de compartir: Compartir y desarrollar actitudes de cooperación, solidaridad y ayuda mutua, respondiendo a un deseo primario del individuo, que puede o no estar desarrollado, si se ha mediado o no.

Individualización y diferenciación psicológica: Implica *aceptar al alumno como individuo único y diferente*, considerándolo participante activo del aprendizaje, capaz de pensar de forma independiente y *diferente respecto a los demás alumnos e, incluso, al propio profesor*.

Búsqueda, planificación y logro de objetivos: Se trata de crear en el mediado la *necesidad de trabajar según unos objetivos*, para conseguir los cuales se han de poner unos medios.

> "La Individualización y diferenciación psicológica implica aceptar al alumno como individuo único y diferente, considerándolo participante activo del aprendizaje, capaz de pensar de forma independiente y diferente respecto a los demás alumnos e, incluso, al propio profesor."
> Feuerstein

Búsqueda de novedad y complejidad: Se fomenta la curiosidad intelectual, la originalidad y el pensamiento divergente. *Se pretende hacer al alumno flexible, tanto en la aceptación como en la creación de lo nuevo en sus respuestas*.

Conocimiento del ser humano como ser cambiante: Se trata de hacer que el alumno-mediado llegue a autopercibirse como sujeto activo, *capaz de generar y procesar información*. El cambio ha de ir acompañado de la *conciencia de que se cambia*; que el mediado conozca su *potencial para el cambio*.

Optimismo: *Si el mediador es optimista, la situación de mediación lo será; y el mediado, lógicamente, también. En la misma base de la mediación está el optimismo*. El mediador ha de creer en la capacidad de cambio de las personas con las que trabaja; esto ya significa y requiere un espíritu optimista.

Sentimiento de pertenencia: Pero, no sólo pertenencia a un pequeño grupo, sino además *pertenencia a una determinada cultura*, a una sociedad concreta. *El mediado está dentro de unas determinadas coordenadas socioculturales*. El mediador ha de interponerse entre esa realidad sociocultural y la realidad personal del mediado.

Grupos y dinámica de trabajo

La experiencia se ha puesto en práctica en dos grupos de 4º ESO. El primero de ellos en el IES Roc Chabàs de Dènia, Alicante (curso 1999-2000). Se repartieron las actividades (una actividad de la primera parte y una de la segunda) en grupos de cinco o seis alumnos. Cada grupo desarrolló las respuestas (tres sesiones) y las expuso a toda la clase (dos sesiones). Además realizaron las construcciones en maquetas de cartulina.

El segundo grupo pertenece al IES Ramón Muntaner de Xirivella, Valencia (curso 2001-2002). Se suprimieron la elaboración de maquetas y el reparto por grupos. Todos los alumnos realizaron todas las actividades, una por sesión de la primera parte y dos por sesión de la segunda, dispuestos por grupos de cuatro o cinco personas y al final elaboraron una memoria con los resultados obtenidos.

En ambos grupos se reservaron dos sesiones en el aula de video para ver la película y establecer un debate posterior. En el debate se aclararon las diversas dudas, los alumnos dieron su opinión respecto al contenido de la película y se repartió todo el material dando las instrucciones precisas sobre el método de trabajo que se iba a desarrollar en el aula.

Evaluación

La evaluación se realizó en ambos cursos mediante la observación directa en el desarrollo de las actividades.

En el IES Roc Chabàs de Dènia se realizó, además, una exposición de cada grupo de trabajo en la que el resto de alumnos podía interactuar y hacer preguntas a sus propios compañeros. De esta manera, ellos mismos pudieron hacer una autoevaluación de los contenidos y procedimientos que sirvió al profesor para identificar cuáles habían sido los dificultades con las que se habían encontrado y constatar si el aprendizaje había sido significativo o no. Las dificultades surgieron principalmente en la organización de tareas dentro del grupo, sobre todo a la hora de elaborar las maquetas por lo minucioso y repetitivo del proceso, a pesar de contar con las piezas troqueladas en cartulina para facilitar la construcción. El grupo que realizó la actividad *E pur si muove*, no acabó de entender como realizar las proyecciones y optaron por un dibujo en perspectiva de las tres posiciones. Se evaluó positivamente el paso del plano al espacio y la introducción de métodos algebraicos para trabajar la geometría, así como los contenidos actitudinales y los relacionados con la resolución de problemas.

En segundo curso, en el IES Ramón Muntaner de Xirivella, elaboraron una memoria para la evaluación en lugar de realizar la exposición que se realizó en el anterior instituto. En un principio, un grupo daba con la solución y corría la voz entre

A) ¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?
Porque Worth sabe que la carcasa exterior mide 142884 pies^2, por lo tanto con la raíz cuadrada de 142884 que es 378 sale lo que miden las aristas, y dividiendo esto entre 14 pies que mide cada cubo pequeño se obtiene el número de cubos de cada arita que es 27. pero como entre la carcasa exterior y la interior hay el espacio correspondiente a un cubo, por lo tanto hay que restarle uno al número total de cubos lo que quiere decir que hay 26 cubos.

-¿Cómo es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?¿Hay otra manera de de deducir que habran 26 26 cubos?. Calcula el volumen total de cubesin contar la carcasa exterior. Busca cosas del mismo volumen.

14^3= 2744 pies^3 tienen los cubos pequeños
14^2= 196 pies^2 tienen los cubos pequeños

27 27 14 14= 142884 mide la carcasa exterior
26 26 26 14 14 14= 48228544 mide la carcasa interior
48228544 : 14^3= 17576 cubos hay en el interior

•¿Como es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?

$\sqrt{1432}$ pies

$A = l^2$ $\quad 1432 \cdot 10^2 = 143200$

$\sqrt{1432} = 37'8$ $\quad \sqrt{143200} = 378$

$378 : 27 = 14$

¿Como es posible deducir que hay 26 cubos en cada arista?
Porque saben que la carcasa exterior mide 1432 pies cuadrados y el espacio entre la carcasa y el cubo es igual al lado de un cubo pequeño con estos calculos averiguan que hay 26 cubos en cada arista.

27·27·14·14 = 142884
carcasa exterior
26·26·26·14·14·14 = 48228544 - carcasa interior
14:14:14 = 17576 = 26^3

14
14

2-¿Hay otra manera de deducir que habrán 26 cubos?
— Con la medida de la carcasa, la divides entre los pies que mide el cuadrado, ya esta

Figura 5. respuestas de diferentes grupos de aloumnos a una misma pregunta los otros grupos. Lo positivo es que, aunque la solución no fuese la propia, el esfuerzo de explicársela a sí mismos o a otros miembros de su grupo incrementaba la comprensión y el sentimiento de capacidad del alumno, hasta el punto de que al final la sensación de reto hizo que algunos de los grupos no quisiesen saber las respuestas sin encontrarlas ellos mismos. El criterio de compartir, indicado en el aprendizaje mediado de Feuerstein, se daba igualmente y a la vez también la diferenciación psicológica necesaria. Los desarrollos sobre el plano de los poliedros constituyeron la mayor dificultad (sólo dos grupos de seis intentaron el octaedro truncado), quizás debido a la complejidad de visualizar en tres dimensiones de una fotografía. De todas formas aprendieron a utilizar métodos de resolución de problemas (ensayo-error, hacer hipótesis, deducir de lo conocido a lo desconocido, inferir, generalizar...) y a verbalizar los resultados obtenidos de manera original y autónoma, no sólo numéricamente. En la figura 5 (ver página anterior) se ven tres ejemplos en la contestación de una misma respuesta.

Conclusiones y comentarios

En las dos ocasiones que ha sido puesto en marcha, el balance del proyecto ha sido muy positivo. No sólo por el desarrollo de los contenidos conceptuales y procedimentales propiamente matemáticos que subyacen y por el grado de motivación obtenido, sino también porque los alumnos han aprendido a trabajar en equipo repartiendo las tareas y debatiendo entre ellos las soluciones a los problemas; y a pensar por si mismos buscando la estrategia más interesante para lograr sus objetivos. Estas han sido las dificultades más relevantes que se han presentado durante las sesiones de clase y donde mayores logros se han obtenido.

El proyecto dispone, además, de posibilidades de utilización: se pueden desechar preguntas no adecuadas para el grupo concreto o adaptarlas. De esta forma se puede utilizar en 3º ESO, siempre que no sean menores de 13 años (no recomendada la película para menores de esa edad). La ampliación a cursos posteriores, bachiller, es otra posibilidad, dependiendo del currículo.

La actividades se pueden organizar y plantear en dinámicas diferentes como son las exposiciones, debates y memorias; los ritmos de realización individuales o en grupo; la secuenciación; el trabajo de síntesis o de introducción; en casa o en el aula... De esta forma la metodología es flexible y permite adaptarse a grupos diferentes.

Por último, los temas desarrollados en la película la hacen interesante para compartir la experiencia con otras áreas, tales como ética o tecnología, y establecer un debate más amplio que el meramente matemático. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. BURGUÉS y C. FORTUNY, J. M. (1988): *Materiales para Construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C. FORTUNY y J. M. PÉREZ, R. (1997): *¿Por qué geometría?*, Síntesis, Madrid.

DECRETO 47 /1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana, DOGV 6/4/1992.

DECRETO 39 /2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana, DOGV 8/3/2002.

GRACIA, F. (1994): Percepción e intuición espacial, *Revista UNO*, n.º 2, 120-130.

GRUPO CERO (1990): *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria*, Edelvives, Valencia.

GUILLÉN SOLER, G. (1991): *Poliedros*, Síntesis, Madrid.

MARTÍN IZARD, J. F. (2001): *Enseñanza de procesos de pensamiento: metodología, metacognición y transferencias*, Relieve, vol. 7, n.º 2, http://www.uv.es/RELIEVE/v7n2/RELIEVEv7n2_2.htm

PRAVICA, D. y W. RIES, H. L. (2002) CUBE: The Math Paper, *Matematica, arte, tecnologia, cinema*, Springer, Milán.

SERRANO, M. y TORMO, R. (2000): *Revisión de programas de desarrollo cognitivo. El Programa de Enriquecimiento Instrumental* (PEI), RELIEVE, vol. 6, n.º 1, http://www.uv.es/RELIEVE/v6n1/RELIEVEv6n1_1.htm

Otras referencias:

(7-6-2001): No busques una razón, busca una salida, *Ciberpaís*, El Pais, Madrid.

(4/10 enero 1999): CUBE "Parábola existencialista", *Cartelera Turia*, n.º 1.822 , Valencia.

En la web:

http://www.cubethemovie.com/VOX/

http://www.metrofilms.com/cube/

http://www.cubederfilm.de/

http://www.scifi.com/cube/

http://www.math.ecu.edu/~pravica/index.html

http://www.math.ecu.edu/%7Epravica/cube_pra.html

Páginas de Matemáticas y Geometría:

http://www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/index.html

http://www.korthalsaltes.com/

http://www.georgehart.com/pavilion.html

http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor/RhombicPolyhedra/Visual/SFVisual.html

http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html