SUMA 46
Junio 2004, pp. 99-106

iMÁTgenes 7, 8 y 9

Una vez acordado el precio nos ponemos en camino. Son las ocho de la mañana y hace un día espléndido. El cielo es una sábana azul sin mácula y el verdor intenso que nos rodea justo al abandonar las bulliciosas calles de Ternate refleja la luz del astro en multitud de tonalidades deslumbrantes. La carretera serpentea arriba y abajo perfilando la costa con el mar a la derecha. Después de pasar por diversos pueblos y atravesar un bosque espeso la vegetación desaparece de repente al llegar a Batu Angus (roca abrasada), una cicatriz colosal e imborrable, un río pétreo vestigio de la erupción del Gamalama en el siglo XVIII.

Dejando el mar siempre a mano derecha llegamos a Suamadaha desde cuya playa de arenas negras la isla Hiri parece fácilmente alcanzable a nado. Más adelante, Takome, con su par de lagunas, Tolire kecil y Tolire besar, de origen volcánico. La primera no es más que un charco de agua dulce entre la playa y la carretera. La otra es un lago esmeralda formado en la boca por la que el volcán vomitó su mala leche en tiempos remotos. Según los nativos al formarse la laguna esta cubrió para siempre el poblado que entonces ocupaba su sitio, lo que provocó muchas víctimas y dejó en los corazones de los supervivientes un sentimiento de temor y misterio. Muchos creen todavía que Tolire besar es un sitio mágico habitado por criaturas invisibles que los aviones evitan sobrevolar por miedo a ser abducidos hasta el fondo de sus aguas. La mera sugerencia de zambullirse en ellas provoca el espanto. Una propuesta digna de locos y suicidas.

Cuando retomamos la marcha, con el mar siempre a la derecha, el Sol ya ha subido lo suficiente como para salpicar de destellos el asfalto. Es la hora de poner a secar los clavos, el cultivo mayoritario en la província. Hombres y mujeres extienden con sumo cuidado montones de clavos sobre esteras rectangulares. Cuando ya no queda sitio en las cunetas, también se ocupa el centro de la calzada. Nuestro vehículo los sobrevuela a horcajadas sin tocarlos y a poca velocidad. Su aroma impregna el aire que respiramos.

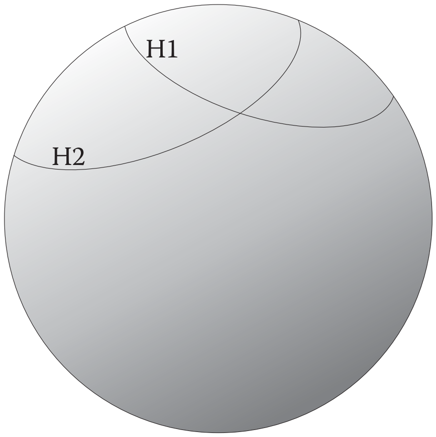
Continuando adelante, con el mar siempre a la derecha, damos con otro lago cuyo nombre, Danau Laguna, constituye una simbiosis verbal la mar de curiosa. En bahasa, danau significa lago y Laguna es su nombre propio, el nombre del lago. Pero lo cierto es que esta palabra es castellana. Un recuerdo de la presencia española en la región allá por el siglo XVI. Una presencia nada pacífica disputada con portugueses y holandeses.

Pasado mediodía entramos en una población grande. El calor es tan sofocante que apenas se ven transeúntes en la calle que recorremos. Todos parecen buscar refugio en las sombras. Entre las fachadas de las casas hay una que me resulta familiar. Sus formas geométricas me recuerdan la arquitectura de Ternate, la ciudad de la que partimos esta mañana temprano. Y no es la única. Sin duda debe tratarse de localidades emparentadas por una cultura común. De hecho, diría que conozco la calle entera. Mas aún, tengo la impresión de haber pasado antes por aquí, de haber vivido ya lo que vivo ahora. A eso lo llaman 'deja vu'. Pero este es especialmente intenso porque no se mitiga, sino todo lo contrario. No solo las casas, también el mercado me parece familiar. Incluso algunas caras me parecen reconocibles. Aquel tipo se parece un montón al que ayer por la tarde nos vendió un par de bolsas con lenguas de plátano frito. Y aquella mujer es idéntica a la vieja que nos invitó a comer algunos rambutanes. ¡No puede ser! Nunca había experimentado cosa igual. ¿Habré entrado en un mundo paralelo? Desconcertado, pregunto al conductor el nombre de la localidad a la que acabamos de llegar. Él, sin dejar de conducir, me dirige una sonrisa pícara, propia de quién sabe que otra víctima ha caído en la trampa, y pronuncia una sola palabra: ¡Ternate!

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

A esto se le llama vivir el círculo. La carretera que perfila la base circular de la isla cónica que es Ternate, en el archipiélago de las Molucas, puede completarse en pocas horas. Tomando como referencia la costa, uno cree avanzar hacia delante porque el mar queda siempre al mismo lado del camino cuando realmente da una vuelta entera a la isla regresando al punto de partida. En este planeta podemos vivir el círculo y la circunferencia, pero no la recta.

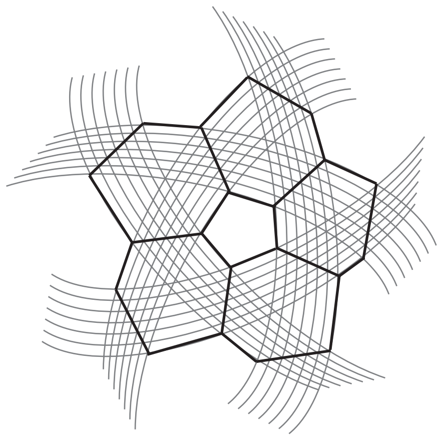
El horizonte no puede compartirse. Imposible superponer los ojos de dos personas. Como mucho compartirán los dos puntos de intersección de sus horizontes siempre y cuando sus estaturas oculares lo permitan:



La iMATgen n.º 6, publicada en SUMA n.º 45, merece consideración especial puesto que invité al lector a reflexionar sobre ella. La fotografía mostraba a un hombre ofreciendo una pelota urdida con fibras vegetales. Observando la urdimbre de esa esfera que una serie de ocho imágenes ilustraba (especialmente las imágenes 1 y 8) vemos que su esencia geométrica es la misma que la de un balón de fútbol. El trabajo empieza entrelazando 5 cintas de ratán formando un pentágono lo más regular posible (imagen 1). Después, seleccionando algunos de sus extremos (imagen 2) el artesano introduce otra cinta en el proceso. Uno de sus extremos ya ha sido anudado en una circunferrencia que determinará el diámetro de la pelota. Por eso en la imagen 3 pueden contarse tan solo 11 extremos en lugar de 12.

Siguiendo el rastro de las cintas se observa que las caras pentagonales aparecen en un principio como vacíos de la urdimbre (imágenes 1, 6 y 7) que serán colmados con los extremos restantes de cada cinta a medida que el trabajo avanza. Se trata de un objeto geométrico similar al que resulta de recortar los vértices de un icosaedro hecho de cartón. Los vértices del icosaedro son pirámides de base pentagonal. Cortándolos a media altura creamos en el icosaedro 20 orificios pentagonales que al ser tapados por una cara dan lugar a un poliedro semirregular llamado icosaedro truncado. Este cuerpo geométrico es lo que el artesano teje realmente, un icosaedro truncado de 60 vértices, 90 aristas y 32 caras, de las cuales 20 son hexagonales y 12 pentagonales. Las intersecciones triples de los seis haces de fibras resultantes (imágenes 6 y 7), cada haz procedente de una fibra utilizadas, determinan

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20 \text{ caras hexagonales:}$$

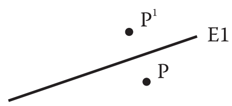


Por último, los extremos de las cintas de ratán (imagen 8) se ocultan entre las otras fibras. La flexibilidad del ratán y su empeño en recobrar la rectitud dan al icosaedro truncado una forma mucho más esférica de lo que su urdimbre indica. ■

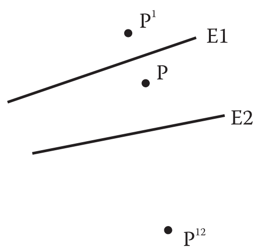
No resulta nada fácil arreglarse aquellas partes del cuerpo que uno no tiene al alcance de la mano o de la vista. Podemos tocarnos cualquier punto de la cabeza y recorrer con dos dedos un cabello desde su raíz hasta la punta, pero no podemos verlo entero. Por eso y porque se requiere una habilidad especial acostumbran a ser otros quienes nos cortan el pelo. Acabado el trabajo, realizado siempre ante un espejo, la peluquera, como en esta fotografía, encara otro al que tenemos enfrente por detrás de nuestra cabeza, y nos pregunta: *¿Qué tal?*

Todos sabemos lo que ve la mujer sentada. Lo hemos visto muchas veces y nos ha fascinado siempre: una sucesión de copias nuestras que se alejan en fila hacia un fondo insondable. Comprender esta imagen significa comprender lo que ve quien la protagoniza. ¿Son realmente infinitas esas imágenes virtuales? ¿Es esa fila que forman una línea recta? Estamos de nuevo al otro lado del espejo cuya virtud es reflejar imágenes en iMÁTgenes.

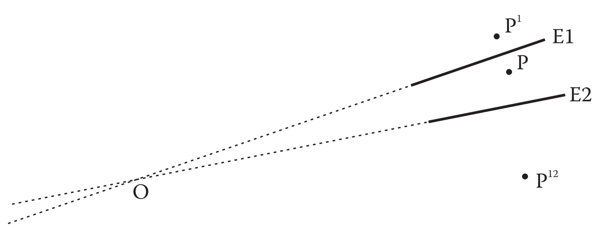
Un espejo es un trocito de plano que ahora observaremos desde su filo para verlo como un segmento rectilíneo. Supongamos pues que E1 es un espejo en el que se mira un punto P. Su reflejo es un punto virtual P^1 situado al otro lado de *E1*, concretamente sobre la recta perpendicular a *E1* que pasa por *P* y que además se halla a la misma distancia de E1 que *P*. Se le llama simétrico de P respecto del segmento *E1*:



Añadiendo otro espejo *E2* encarado con *E1*, pero no paralelo con él, P^1 será reflejado por *E2* en su simétrico P^{12}:

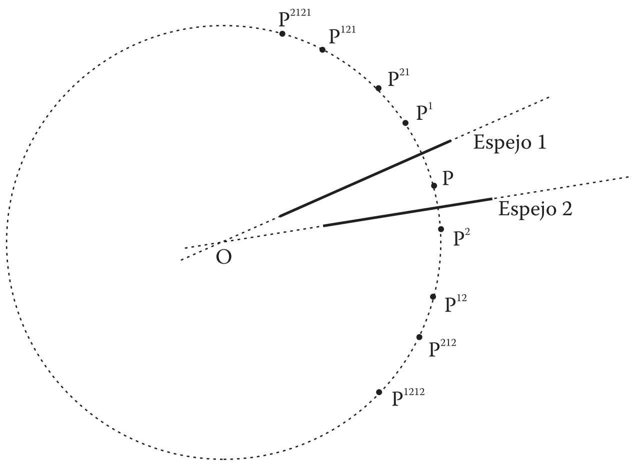


Dado que *E1* y *E2* no son paralelos, sus prolongaciones se cortan en un punto *O*:



Sea M^1 el punto medio del segmento PP^1. Entonces los triángulos OM^1P y OM^1P^1 son iguales, ya que tienen un ángulo igual (ángulos rectos en el vértice M^1), tienen un lado igual (OM^1) y tienen otro lado igual ($M^1P=M^1P^1$). Por tanto, también tendrán igual el lado restante: $OP=OP^1$. Esto significa que P y P^1 están a la misma distancia de O. Aplicando el mismo razonamiento a los triángulos OM^2P^1 y OM^2P^{12}, siendo M^2 el punto medio del segmento P^1P^{12}, llegamos a la conclusión de que $OP^1=OP^{12}$ y los puntos P^1 y P^{12} también distan lo mismo de O. Repitiendo el mismo razonamiento para las demás reflexiones, vemos que todas se encuentran a la misma distancia de O: $OP=OP^1=OP^{12}=OP^{121}=...$

Luego los reflejos de P, ya sean por $E1$ o por $E2$, están todos sobre la circunferencia de centro O y radio OP y forman un arco de circunferencia en el que se alternan caras (P^1, P^{12}, P^{121}, P^{1212}...) y espaldas (P^2, P^{21}, P^{212}, P^{2121}...):



Los reflejos visibles nunca serán infinitos ni estarán alineados según una recta. El único caso en que esto sería posible no puede verse porque para ello los espejos deben ser paralelos y entonces nuestro primer reflejo oculta todos los restantes que se dispondrían sobre una circunferencia de radio infinito (recta).

La realidad física impide que las reflexiones visibles entre dos espejos sean infinitas. El límite lo ponen la posición y el tamaño de los espejos. Si un simétrico cae fuera de la banda determinada por las perpendiculares trazadas en los extremos de, pongamos por caso, *E1*, su reflexión en *E2* será imposible. En cambio, en el ámbito matemático las simetrizaciones pueden continuar indefinidamente. Un análisis más detallado de la cuestión (Albertí, 2000) pone de manifiesto que, desde esta perspectiva puramente geométrica y matemática irreal, la sucesión de simétricos alternados de *P* (respecto de *E1* y *E2*) no acaba nunca y puede continuar hasta completar una vuelta sobre la circunferencia en la que se disponen. De hecho, si el ángulo formado por los espejos es múltiplo racional de π, la sucesión de simétricos constituye un itinerario cerrado, es decir, existe algún simétrico que vuelve a coincidir con *P*, el punto de partida. Si el ángulo no es un múltiplo racional de π, el itinerario es abierto y ningún simétrico vuelve a coincidir con *P*.

Mi agradecimiento a la peluquería *Estel* de la Rambla Fabra i Puig en Barcelona por la amabilidad mostrada y permitirme realizar la fotografía de esta ***iMATgen virtual***. ■

REFERENCIA CITADA

ALBERTÍ, M. (2000): “Simétricos cautivos”, *Épsilon* n.º 48 de la S.A.E.M. “Thales”, Facultad de Matemáticas, Sevilla.

iMATgen 8

No es raro que mientras despieza un pollo la carnicera pregunte: *¿Quieres las vísceras?, ¿También te pongo las patas?* Una respuesta negativa suscita en ella reacciones como: Te las cambio por dos cuellos, En su lugar te pondré un ala. Luego, ya en casa, uno abre la bolsa y se encuentra con una cabeza, tres cuellos, tres alas, cero patas y un torso vacío. Uno espera que su familia, al ver los restos descuartizados, pregunte: *¿Pero qué demonios es esto?* Pero no pasa nada, no les importa, y nadie se inmuta cuando encima de la mesa aparecen miembros de pollo en cantidades nada acordes con su anatomía. Intentad dibujar un pollo como el que acabo de describir y sabréis de qué hablo.

En las pescaderías es distinto. Lo extraño en ellas son los precios. Tan raros como los de esta fotografía: *Sardinas (1 kilo entero 2.90€; 1 kilo 3.90€), Mairas (1 kilo entero 1.95€; 1 kilo 2.95€).* Si entenderlos es fundamental para comprar el producto, también lo es para comprender la imagen.

Un cliente matemático aplica, a la hora de comprar, su educación y conocimiento. No sólo para calcular el importe sino también para interpretar los precios de las cosas. No es de extrañar pues que eche mano de una función como $\mathbf{E}(x)$, la *Parte Entera de un Número Real x*, para elaborar la fórmula del importe $f(x)$ a pagar por x kilos de sardinas a partir del precio del producto:

$$f(x)=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot[x-\mathbf{E}(x)]$$

Luego desarrolla esta expresión para obtener algo más simplificado (según él):

$$f(x)=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot[x-\mathbf{E}(x)]=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot x-3{,}9\cdot\mathbf{E}(x)=3{,}9\cdot x-1\cdot\mathbf{E}(x)$$

Al ver el resultado piensa que esto mismo es lo que hace la pescadera. Se imagina entonces que va a comprar y en su representación mental ve como la vendedora deposita el producto en la balanza electrónica, como se ilumina el peso x en la pantalla y como ella teclea el precio del producto (3,9 si son sardinas). La calculadora de la báscula muestra el resultado de multiplicar 3,9 por x. Es una calculadora sin función parte entera, piensa el matemático mientras se imagina la escena, pero esto no impide su cálculo. Basta con restar mentalmente 1 euro (la diferencia entre 3,9 y 2,9) al importe total por cada kilo entero de pescado porque esto es lo que indica la fórmula obtenida: $3{,}9\cdot x-1\cdot\mathbf{E}(x)$. Está convencido incluso de que los precios son los que son precisamente para facilitar dicha operación mental, ya que si la diferencia entre los precios fuese otra, un número decimal por ejemplo, el cálculo se haría demasiado difícil. Hace unos años la diferencia solía ser de 100 pesetas. ¿No era así para hacer más fácil la resta? ¡Seguro! En conclusión, se alegra de que una vez más las Matemáticas y la práctica se den otra vez la mano y se felicita por haber encontrado una situación cotidiana donde contextualizar una función tan extraña como la parte entera de un número decimal. La representación mental acaba con la sonrisa triunfante y silenciosa del matemático. ¡Eureka!

¿Es la realidad cotidiana tal y como le parece al matemático? Debe serlo, se dice, porque los precios están escritos de forma bien clara. Pese a todo, para que no haya ninguna duda y en contra de lo que es habitual, el matemático decide poner los pies en el suelo y se va a comprar. En el momento de hacer efectivo el importe le pregunta a la pescadera cómo lo calcula. No lo demuestra, pero se siente ufano de conocer la respuesta y prevé lo que sus oídos van a oír. Por eso se queda de una pieza cuando ella responde:

— *¡Uy!, lo hace todo la máquina.*

¿Cómo? ¿Acaso las calculadoras de las balanzas llevan ahora función parte entera? La sorpresa le obliga a indagar más:

— *Usted pone el pescado en la bandeja de la balanza y luego teclea el precio, ¿no?*
— *Exacto. Y la máquina ya me dice el total, sino sería muy complicado.*

El matemático no la entiende:

— *¿Pero qué precio teclea usted en la calculadora?*
— *Pues este que está marcado, tres noventa.*
— *¿Y si el peso es superior al kilo?*
— *Entonces, dos noventa.*
— *¿No teclea tres noventa y luego le resta al total ....*
— *¡Que va! El precio del kilo es tres noventa, pero si pasa, entonces es a dos noventa.*
— *Entonces el precio de dos noventa no es por kilo completo, sino a partir del kilo.*
— *Eso mismo.*

La expresión del matemático se parece mucho a la de un besugo tieso que, fuera del encuadre de la fotografía, disfruta del descanso eterno sobre un lecho de hielo picado. Su decepción es tremenda. La flamante contextualización de la función parte entera se ha ido al carajo y maldice a quien escribió el cartel. En lugar de kilo entero debió escribir a partir del kilo. De nuevo la realidad se impone:

$$f(x)=\begin{cases} 3{,}90\cdot x & 0\le x<1 \\ 2{,}90\cdot x & 1\le x \end{cases}$$

Aunque no tan rara como la parte entera, por lo menos es una función definida a trozos. Y además discontinua en x=1. Algo es algo, ¿no? Conviene comprar un kilo entero de sardinas cuando el importe a pagar calculado con 3,9€ supere el importe a pagar calculado con 3,9€. Es decir, 0,796 kg.

Titularé esta iMATgen ***¡Llévate un kilo por lo menos, reina!,*** aunque *Mea culpa* tampoco le vendría mal. Que sirva de ejemplo sobre lo arriesgadas que pueden resultar a veces algunas interpretaciones matemáticas de la realidad.

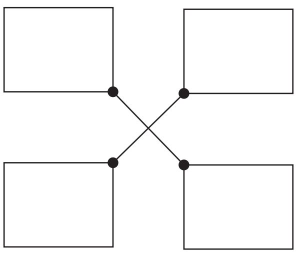
Siempre nos quedará como consuelo la contextualización de la función parte entera en las ofertas *3×2* tan corrientes en los supermercados. Al comprar n unidades de un producto cuyo precio por unidad es p, pagamos solamente $2{\cdot}p$ por cada trío que nos llevamos. Dividiendo n entre 3 hallamos la cantidad m de tríos: $n=3{\cdot}m+r$. El precio de cada trío es $2{\cdot}p$, mientras que el de cada unidad restante es p. El importe total será $f(n)=2{\cdot}p{\cdot}m+p{\cdot}r=p{\cdot}(2m+r)=p{\cdot}(n-m)$. Dado que m es precisamente la parte entera de $^n/_3$:

$$f(n)=p\cdot\left[n-\mathbf{E}\left(\frac{n}{3}\right)\right]$$

Si compras sardinas en la pescadería, llévate un kilo por lo menos; si compras latas de atún de oferta *3×2* en el súper, coge tríos. No te preocupes por las sobras, el felino te lo agradecerá. ■

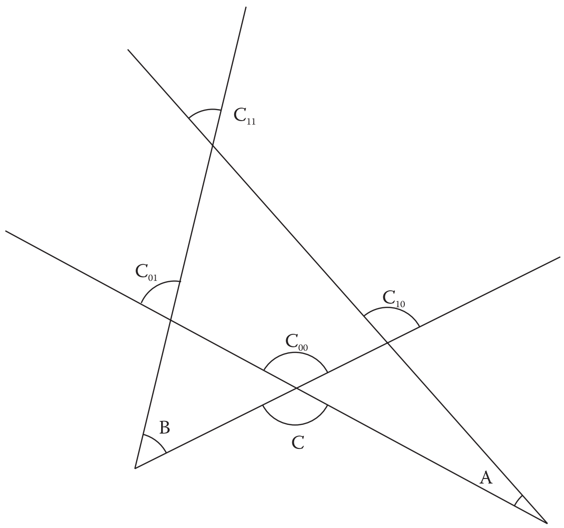
iMATgen 9

Una red formada por ocho rectas negras, o casi rectas, cortándose en medio de un rectángulo que en realidad son ocho cables eléctricos cruzándose en el espacio. Ocho cables distribuidos en dos haces de cuatro cables cada uno, abriéndose o cerrándose, según se mire, en abanico. Un haz desciende en la imagen de izquierda a derecha, con sus cuatro integrantes casi paralelas. El otro asciende veloz en el centro de la fotografía, con sus cables bastante paralelos, pero no tanto. En la ficción visual se crea una retícula de cuadriláteros casi rectángulos matizada por jirones de nubes. Los cables estaban tendidos entre las fachadas de casas opuestas de una intersección:



La estrechez de las calles facilitaba la tensión de los cables y su aspecto rectilíneo. Y, como consecuencia de ello, su paralelismo que la perspectiva de la foto impide apreciar. Cada haz era una banda vertical suspendida. Ambas cruzándose, una por encima de la otra, en una recta invisible perpendicular al suelo. De ahí ese espejismo reticulado. El modo en que los ángulos varían en la imagen permite intuir desde qué punto de la calzada se hizo la fotografía. ¿Alguna sugerencia? Esto es fundamental para comprender la imagen, pero también lo es conocer la esencia de la red, es decir, saber cómo varían los ángulos que la determinan en relación a los haces que la producen. De este modo una red virtual produce una iMATgen verdadera.

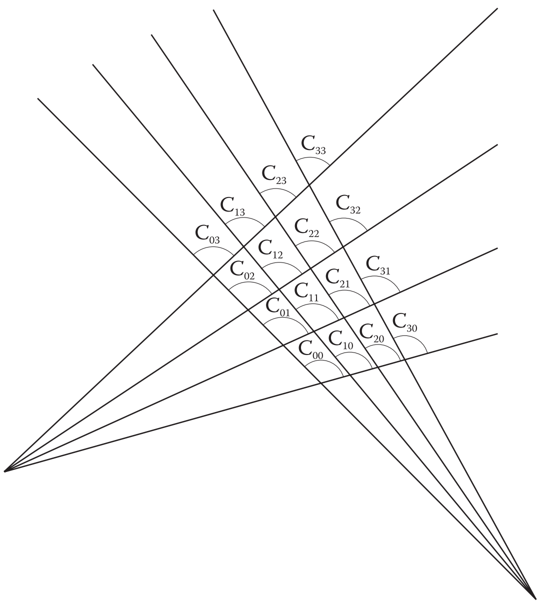
Empecemos por un caso simple, aquel en que cada haz está formado por un par de segmentos. La cuestión es determinar los ángulos C_{00}, C_{10}, C_{01} y C_{11} de la figura siguiente a partir de los valores conocidos A, B y C:

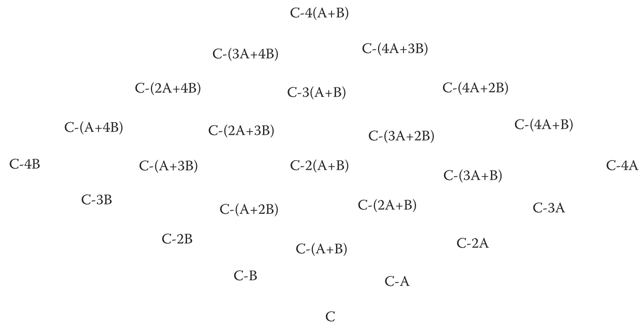


Puesto que los ángulos opuestos en la intersección de dos rectas son iguales, ya tenemos el valor de $C_{00}=C$. En el triángulo con vértice de ángulo A más pequeño de la figura anterior debe cumplirse que $180º=A+(180º–C)+C_{10}$, con lo que hallamos $C_{10}=C–A$. Un razonamiento idéntico nos conduce a $C_{01}=C–B$. Finalmente, como la suma de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero ha de ser 360º obtenemos C_{11}:

$$360º=C_{00}+(180º-C_{10})+(180º–C_{01})+C_{11}$$
$$360º=C+180º–(C–A)+180º–(C-B)+C_{11}$$
$$C_{11}=C–(A+B)$$

Volviendo a la fotografía supongamos que cada haz está formado por cuatro rectas que se abren en abanico y entre las que media siempre un mismo ángulo. Sean A y B esos ángulos en el haz derecho e izquierdo respectivamente y sea C el ángulo entre ambos. Reiterando el proceso aplicado antes se obtienen los ángulos de la red de intersecciones:





Es decir, $C_{MN}=C-(M·A+N·B)$. Estableciendo en la malla un origen de coordenadas (0,0) en el vértice de ángulo C, conocemos el ángulo en cualquier otro vértice (M, N). Para $A=B=0$ las rectas de cada haz son paralelas y todos los ángulos de la red son iguales: $C_{MN}=C$. Y si, además, $C=90º$, los cuadriláteros serán rectángulos.

La situación general es aquella en la que las rectas se despliegan en abanico con ángulos distintos. En tal caso, sean A_1, A_2, A_3, ..., A_M los ángulos entre dos rectas consecutivas del haz izquierdo y B_1, B_2, B_3, ..., B_N los del derecho. El ángulo en el vértice (M, N) de la red será:

$$C_{MN} = C - \left(\sum_{i=1}^{M} A_i + \sum_{i=1}^{N} B_i \right)$$

Si tienes la oportunidad de verlas en tu pueblo o ciudad, míralas bien porque a esas redes les queda poco tiempo de vida. Corren serio peligro de ser enterradas bajo el asfalto y de ser reemplazadas por curvas tubulares anudadas en la fría oscuridad del subsuelo urbano. Dentro de unos años esta iMATgen sobre ***Ángulos y redes en peligro de extinción*** será sólo un recuerdo. ■