SUMA 46
Junio 2004, pp. 51-57

Actividades sobre el número π con calculadora gráfica

En este artículo presentamos una actividad dirigida a las aulas de Secundaria y de Bachillerato: el estudio del número π en momentos clave de la historia*. En ella se abordan varios frentes: primero afrontamos la enseñanza de contenidos y procedimientos matemáticos de esos niveles educativos mediante el uso de la tecnología suministrada por calculadoras gráficas. Después, vinculamos al alumno con procesos propios del quehacer matemático, proponiéndole tareas de indagación y descubrimiento. Por último, utilizamos elementos de la historia de la matemática como hilo conductor que articula todo el proceso.*

In this article we present a maths activity meant for students at Secondary Education (compulsory and not compulsory) : The study of number π in key moments in history. In this activity several aspects are taken into account: Firstly, we face the teaching of mathematical contents and procedures at those educational levels by using the technology made available by graphic calculators. Then, we put the student in touch with characteristic processes of the mathematical doing, setting for him some tasks of inquiry and discovery. Finally, we use some elements in the history of Maths as the thread that draws together the whole process.

En las recomendaciones del MEC en los documentos del Diseño Curricular base de Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989) encontramos directrices genéricas sobre el uso de nuevas tecnologías en el área de Matemáticas, sin que se especifique de forma precisa cuál debe ser su uso ni en qué parcelas concretas de las matemáticas puede ser útil. Sin embargo se reconoce que los nuevos medios tecnológicos han de tener repercusiones en la manera de enseñar las matemáticas y en la selección de contenidos. Por lo que respecta a los nuevos Decretos de Enseñanzas Mínimas de ESO y Bachillerato, se han eliminado en ellos los contenidos relativos al uso de la calculadora (que aparecían en el decreto anterior), pero se sigue aludiendo a esta herramienta de forma explícita, reconociendo su utilidad para desarrollar procedimientos rutinarios, como recurso investigador que facilita la interpretación y análisis de situaciones en los distintos dominios de las matemáticas, o para resolver situaciones problemáticas diversas.

En la actualidad, las calculadoras gráficas (como la TI-89, la TI-92, etc.) proporcionan posibilidades de producir cambios valiosos en la forma en que los profesores enseñan y los estudiantes aprenden matemáticas en secundaria. Se trata de calculadoras 'de bolsillo' que poseen cuatro amplias áreas de funcionalidad (Demana y Waits, 1998):

- Realizan aritmética exacta con números racionales, reales y complejos,
- realizan cálculo simbólico,
- obtienen soluciones numéricas,
- dibujan gráficas y superficies.

Además, algunos modelos incorporan software de geometría dinámica. El hecho de integrar en un mismo ambiente estos diferentes ámbitos las hace adecuadas, en particular, como soportes de representación y manipulación de conceptos matemáticos variados.

Desde un punto de vista educativo, determinados usos de la calculadora se consideran adecuados para promover el desarrollo de habilidades cognitivas, producir aprendizajes significativos, facilitar el aprendizaje de conceptos, ayudar a resolver problemas, etc. Todo ello inmerso en una metodología de enseñanza de carácter constructivista, basada en la participa-

Jose Luis Lupiáñez Gómez
Facultad Ciencias de la Educación (Granada).
María José González López
Facultad de Ciencias (Santander).

ción activa del alumno mediante la exploración y el desarrollo de proyectos.

Así pues, nuestro interés, lejos de resaltar las cualidades técnicas de las calculadoras, está en considerarlas como herramientas integradas en un conjunto de prácticas matemáticas que permitan al alumno abordar, globalmente y desde distintos frentes, el tratamiento de algunos conceptos matemáticos significativos, relacionarlos entre sí y analizarlos de forma no compartimentada. En ese sentido consideramos fundamental el desarrollo de actividades con la calculadora que respondan a las siguientes características (extraídas de lo que Gorgorió y otros (2000, p. 61) denominan *actividades ricas*):

- permiten establecer relaciones entre distintas áreas del currículo,

- sirven como introducción y motivación para contenidos básicos,

- suponen un reto para la mayoría de los alumnos ya que incluyen una gradación de dificultades para diferentes ritmos de aprendizaje,

- son flexibles, permitiendo al alumno que establezca relaciones entre sus conocimientos para poder aplicarlos,

- pretenden no únicamente la búsqueda de respuestas correctas sino también que los alumnos generen buenas e interesantes preguntas.

Bajo el planteamiento aquí expuesto, en este trabajo mostramos una actividad que responde a estas características que puede llevarse a cabo con las calculadoras citadas: el estudio del número π en momentos clave de la historia. Utilizando este hilo conductor, en la actividad se abordan distintos conocimientos como:

- la noción de número irracional,

- la medición de magnitudes geométricas (longitud y área),

- la naturaleza geométrica de π y sus distintas representaciones (serie numérica, expresión decimal),

- los conceptos de sucesión y límite,

- la idea de algoritmo.

Y se ejercitan prácticas variadas de carácter matemático como:

- la interpretación de resultados obtenidos en ámbitos numérico y geométrico,

- el uso de procedimientos de aproximación,

- la determinación de la bondad de un procedimiento y su comparación con otros,

- la búsqueda de precisión en los cálculos (realizados mecánicamente por una calculadora),

- los modos de justificación de los resultados obtenidos,

- la valoración de la utilidad de los instrumentos y técnicas usados.

Además, el hecho de presentar a los alumnos una perspectiva del desarrollo de contenidos y procesos matemáticos en distintos momentos históricos, así como el abordar los mismos desde los conocimientos y con los instrumentos que poseemos en la actualidad, les permite adquirir una visión novedosa sobre la matemática, que no se presenta como un compendio de conceptos y técnicas acabadas que hay que aprender, sino resaltando características propias del modo de hacer matemático.

> *Desde un punto de vista educativo, determinados usos de la calculadora se consideran adecuados para promover el desarrollo de habilidades cognitivas, producir aprendizajes significativos, facilitar el aprendizaje de conceptos, ayudar a resolver problemas, etc.*

Actividad: El número π en la Historia de la Matemática

Observaciones preliminares

La actividad que propondremos a continuación se puede llevar a cabo con distintos grados de dificultad, puesto que en ella se parte de conocimientos básicos y elementales que van desarrollándose gradualmente hasta evolucionar hacia conceptos más avanzados. Por ello pensamos que puede ser usada con alumnos desde el segundo ciclo de la ESO hasta el Bachillera-to. Dependiendo del nivel de los alumnos, en el desarrollo de la actividad se podrán obviar aquellos conocimientos que el profesor considere inoportunos o profundizar más en otros.

El hecho de utilizar la calculadora en determinadas fases de la actividad hace que algunos conocimientos avanzados se hagan accesibles a un nivel no previsto (más bajo), dado que se pueden realizar cálculos o comprobaciones difíciles de abordar en un contexto sin calculadora (elaboración de gráficas, cálculo de aproximaciones, límites, etc.). Por otro lado, el uso de la calculadora incorpora elementos novedosos a la reflexión (por ejemplo, el análisis de los errores de redondeo en los cálculos numéricos).

La actividad está secuenciada en tres momentos históricos: la civilización egipcia, la civilización griega y los siglos XVI y XVII, que terminamos entrelazando con un trabajo realizado ya en el siglo XX.

Presuponemos que los alumnos ya conocen el manejo técnico básico de la calculadora, aunque también podría completarse la actividad intercalando, donde corresponda, los conocimientos técnicos necesarios que se requieran.

La actividad está secuenciada en tres momentos históricos: la civilización egipcia, la civilización griega (Arquímedes) y los siglos XVI y XVII (Vieta y Wallis), que terminamos entrelazando con un trabajo realizado ya en el siglo XX (Osler). A lo largo de la actividad sugerimos distintos momentos en que el profesor interviene haciendo presentaciones de distinto tipo. Para algunas de ellas aportamos información, otras quedan abiertas para que el profesor las aborde según las necesidades de su grupo de alumnos. El estilo de presentación que seguiremos para exponer cada uno de los momentos históricos es el siguiente:

- Comienzan con la presentación de una breve reseña histórica, que puede ser utilizada por el profesor como introducción del tema.

- A continución señalamos, en recuadros con fondo sombreado, las preguntas que forman parte de la ficha de cada alumno. La resolución de tales preguntas tendrá que ser guiada por el profesor de la actividad, dependiendo de las reacciones de cada alumno ante cada una de ellas.

- Mostramos algunas resoluciones posibles que pueden desarollarse con la calculadora, y que complementan los resultados obtenidos por los propios estudiantes.

- Finalmente, dejamos abiertas algunas posibilidades de trabajo en las que el profesor puede profundizar.

Presentación de la actividad

La actividad comienza recapitulando los conocimientos que los alumnos poseen sobre π, para lo cual el profesor puede servirse de las siguientes preguntas:

¿Qué sabemos de π?
¿Qué es?
¿En qué contextos lo usamos?
¿Cómo lo definirías?
¿De dónde proviene el nombre?
¿Desde cuando se representa así?
¿Qué tipo de número es?
¿Cuál es su valor exacto?

A continuación el profesor puede hacer una presentación breve de la actividad informando a los alumnos del hilo conductor básico: el estudio del número π en momentos clave de la historia, a saber, la civilización egipcia, la civilización griega (a través de los trabajos de Arquímedes), los siglos XVI y XVII (Vieta y Wallis) y la actualidad (Osler).

Primera Parte: Civilización Egipcia

Reseña histórica

Nuestros conocimientos sobre las matemáticas del Antiguo Egipto se basan en dos fuentes principales: el Papiro de Rhind, nombre que proviene del científico que lo descubrió (también llamado Papiro de Ahmes, por el escriba que lo compuso), alrededor del año 1650 ac, y el papiro de Moscú, escrito por el año 1850 ac; que se encuentra en el Museo de Bellas Artes de esa ciudad. Entre los papiros de Rhind y de Moscú se reúne una colección de 112 problemas matemáticos resueltos.

El desarrollo de la matemática egipcia gira en torno a las necesidades de una civilización compleja preocupada por organizar tareas agrícolas como el drenaje, los riegos y el control de las inundaciones del Nilo, así como la

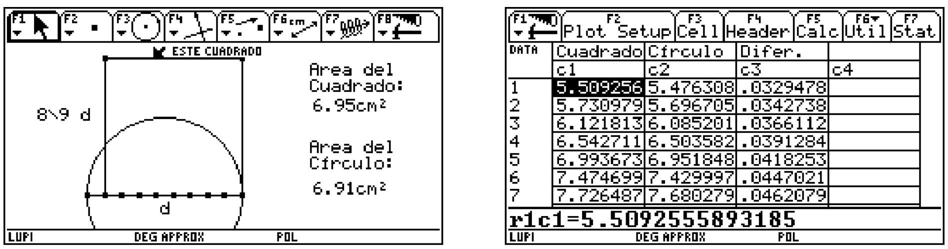

Figura I. Aproximación egipcia a la cuadratura del círculo distribución de parcelas entre los campesinos o la construcción de silos para almacenar productos. Por ello los egipcios desarrollan, en particular, técnicas geométricas que les permiten calcular áreas de triángulos, rectángulos y trapecios. No tienen fórmula para el círculo, por lo que se preocupan por encontrar figuras poligonales (por ejemplo, cuadrados) de área equivalente.

Actividades propuestas a los alumnos:

En el problema 50 del Papiro de Rhind, el escriba Ahmes escribió lo siguiente:

> Si se señala 1/9 del diámetro de un círculo, y se construye un cuadrado que tenga de lado el resto, el área de cuadrado es la misma que la del círculo.

- Utiliza el ambiente Cabri de la calculadora para dibujar una circunferencia y dividir su diámetro en 9 partes iguales.

- Dibuja un cuadrado que tenga por lado 8 de dichas partes.

- Calcula el área del círculo y el del cuadrado. ¿Son iguales?

- Si has encontrado diferencias, ¿crees que se deben a posibles errores de aproximación que ha realizado la calculadora?

- Modifica el tamaño de la circunferencia original y registra las áreas correspondientes en una tabla, así como su diferencia (Figura I). ¿Qué observas?

- Los egipcios no conocían una fórmula para calcular el área del círculo. Pero, dado que hoy conocemos que el área del círculo es πr^2 y que, según lo citado en el Papiro, esa área es igual a la del cuadrado contruido, $(8/9\ r)^2$, ¿puedes deducir que valor asignaban, sin saberlo, los egipcios a π? ¿Qué tipo de número has obtenido?

- ¿Depende dicho valor del tamaño del círculo? Justifica tu respuesta.

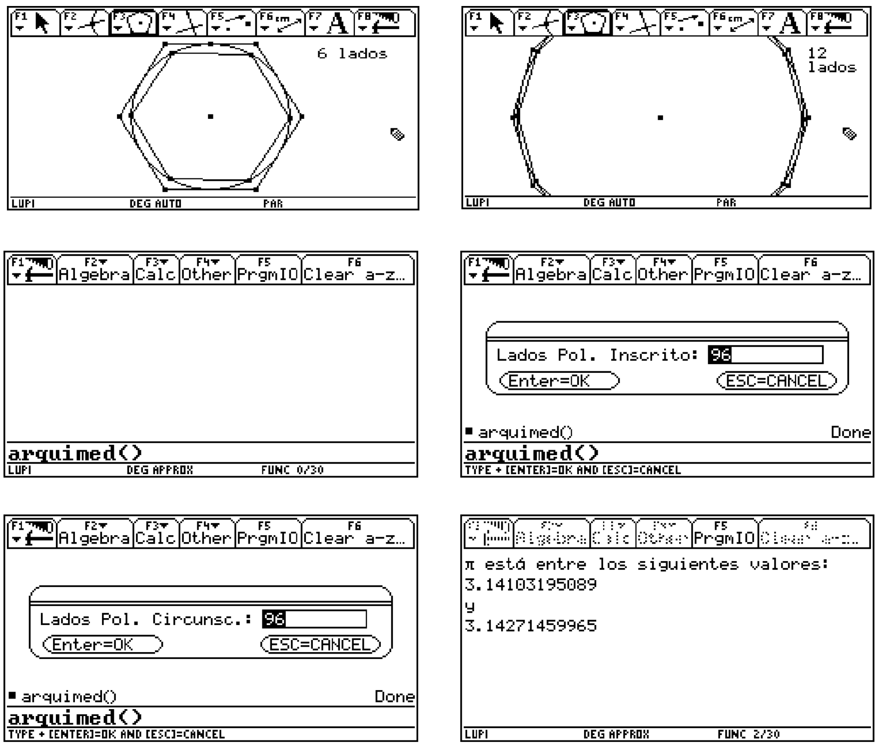

Figura II. Simulación del método arquimediano para acotar π

- Indica ahora si la afirmación encontrada en el Papiro de Rhind es correcta o no y justifica por escrito tu respuesta. Si encuentras distintas razones, ponlas todas.

El profesor puede terminar esta fase de la actividad recogiendo las conclusiones más significativas. El hecho de *identificar* π con el número racional 256/81 permite introducir una reflexión interesante sobre la irracionalidad de π.

Segunda parte: Civilización griega. Arquímedes
Reseña histórica

La civilización griega produjo un significativo avance en la matemática, sentando algunas de las bases que caracterizan a esta disciplina en la actualidad. Gracias a la evolución de la escritura, los griegos registraron textos no sólo con interés recopilatorio sino, además, para hacer de ellos objeto de reflexión, lo que supuso el inicio de lo que hoy conocemos como demostración matemática. Son numerosos los autores griegos cuyos resultados es-tudiamos aún en la actualidad (Pitágoras, Euclides, Tha-les). En relación con el número π es de destacar el gran trabajo de Arquíme-des, quien en su tratado De la Medida del Círculo, estableció los siguientes resultados:

Proposición 1. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos es igual al radio y el otro es igual a la circunferencia del círculo.

Proposición 2. El área de un círculo es a un cuadrado sobre su diámetro como 11 es a 14.

Proposición 3. La razón de la circunferencia de cualquier círculo con respecto a su diámetro está comprendido entre 3 1/7 y 3 10/71.

(Observa la forma de enunciar los resultados, sin hacer mención del símbolo π)

Arquímedes, para conseguur su tercer resultado, utilizó lo que hoy se conoce como Método Arquimediano, el cual se basa en el Principio de Exhausción, esto es: inscribió y circunscribió a un círculo (de diámetro unidad) polígonos regulares, considerando los perímetros de tales polígonos como cotas inferiores y superiores de la longitud de la circunferencia (valor que coincide con π si consideramos una circunferencia con un diámetro unitario). Comenzó con hexágonos y, a continuación, fue repetidamente duplicando el número de lados en cada polígono, llegando así hasta polígonos de 96 lados después de realizar 4 duplicaciones.

Actividades propuestas a los alumnos:

- ¿Crees que el primer resultado de Arquímedes es co-rrecto o, por el contrario, el área del círculo será *parecida* a la del triángulo (al igual que ocurría en el resultado egipcio? Si lo deseas puedes valerte de la calculadora para realizar algunas comprobaciones.

- ¿Y será cierto el segundo resultado de Arquímedes? Justifica tu respuesta.

- Utiliza el entorno Cabri de la calculadora para dibujar una circunferencia y circunscribe e inscribe en ella sendos hexágonos.

- Calcula y compara los perímetros de las figuras obtenidas. Relaciona asímismo el número π con los perímetros de los hexágonos.

- Duplica los lados de los hexágonos y repite los cálculos del apartado anterior. Sigue duplicando y calculando… ¿Obtienes el tercer resultado de Arquímedes?

- ¿Puedes mejorar la acotación obtenida para π?

- ¿Qué ocurre si en lugar de comenzar con hexágonos en el proceso de Arquímedes utilizas cualquier otro polígono?

- ¿Qué ocurre si, en lugar de duplicar los lados de los polígonos en cada caso, aumentamos el número de lados de 1 en 1, o de dos en dos, etc.?

- ¿Por qué crees que Arquímedes comenzó con hexágonos? (Intenta obtener relaciones entre el área de un círculo y las áreas de sus hexágonos inscrito y circunscrito).

- Realiza un programa en la calculadora que acote el valor de π a partir de los perímetros de polígonos inscritos/circunscritos a una circunferencia (véase la Figura II página anterior).

- ¿Qué ocurre si pones polígonos con muchos lados? ¿se modifica la acotación obtenida?

- ¿Crees que es posible obtener, poniendo polígonos con tantos lados como desees, el valor de π?

El profesor puede concluir esta fase recapitulando, nuevamente, las conclusiones más significativas. El hecho de abordar un proceso infinito para acotar π permite retomar nuevamente la idea de irracionalidad. Por otro lado, dependiendo del número de lados de los polígonos que utilicemos, el número de cifras decimales que se obtienen en la calculadora en la acotación puede llegar a saturarse, lo que permite introducir una reflexión sobre la precisión de los cálculos que realiza una máquina.

Tercera parte: Vieta (1592), Wallis (1655), Osler (1999)
Reseña histórica

Los siglos XVI y XVII pueden considerarse siglos de oro en la matemática. Basta mencionar a algunos de los protagonistas científicos de esta época: Galileo, Napier, Stevin, Kepler, Cavalieri , Torricelli , Descartes, Fermat, Desargues, Pascal, Vieta y Wallis. Los logaritmos, las ecuaciones, el cálculo diferencial e integral o la geometría analítica constituyen áreas fundamentales en la matemática actual que tuvieron su origen en esta época. Por la relevancia de sus trabajos sobre el número π, nos ocuparemos especialmente de los trabajos de Vieta y Wallis. En el siglo XX Osler conjuga los trabajos de estos dos autores.

Actividades propuestas a los alumnos

Considera las dos sucesiones de números siguientes, la de Vieta:

$$Vieta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Vieta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$Vieta_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$Vieta_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

...

Y la de Wallis:

$$Wallis_1 = \frac{1*3}{2*2}$$

$$Wallis_2 = \frac{1*3}{2*2}\,\frac{3*5}{4*4}$$

$$Wallis_3 = \frac{1*3}{2*2}\,\frac{3*5}{4*4}\,\frac{5*7}{6*6}$$

$$Wallis_4 = \frac{1*3}{2*2}\,\frac{3*5}{4*4}\,\frac{5*7}{6*6}\,\frac{7*9}{8*8}\ \ldots$$

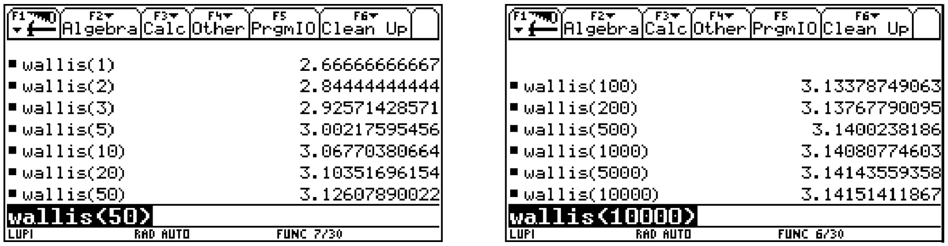

Figura III. Algunos valores de la sucesión de Wallis

- ¿Qué regularidades observas en cada caso?

- Realiza en la calculadora sendos procedimientos para calcular el valor de un término cualquiera de estas sucesiones (Figura III).

- Calcula el valor decimal de unos cuantos términos de estas sucesiones. ¿Qué observas?

- ¿Crees que estas sucesiones son convergentes?

- En caso afirmativo, ¿convergen al mismo valor?

- ¿Cómo describirías el término general de cada sucesión? ¿Puede la calculadora ayudarte a obtenerlo?

- Calcula el límite de las expresiones obtenidas en la calculadora. ¿Qué valores obtienes?

Tras este bloque de actividades, el profesor puede hacer hincapié en las peculiaridades que ha presentado el proceso de obtención del término general de las sucesiones de Vieta y Wallis, el análisis de su convergencia y el distinto carácter de los dos algoritmos correspondientes (recursivo en el caso de Vieta e iterativo en el de Wallis), aspecto que se refleja en el distinto tratamiento que han de tener en la calculadora. También se pueden comparar los dos métodos según su velocidad de convergencia: el producto de Vieta converge tan rápidamente que hace que la capacidad de algunas calculadoras para proporcionar cifras decimales exactas de π se agote a partir de multiplicar 19 factores de la sucesión, mientras que el producto de Wallis necesita más de 1000 iteraciones para obtener la tercera cifra decimal de dicho número. El resumen de los resultados obtenidos por Vieta y Wallis se puede presentar en los dos cuadros de la parte inferior de esta página.

Se introducen, a continuación, las aportaciones de T. J. Osler (1999).

> Los trabajos sobre π de Vieta y Wallis no parecen presentar ninguna simulitud, salvo que ambos se dirigen al objetivo de describir el número π mediante un producto infinito. Sin embargo, Thomas J. Osler, en 1999, logra conjugar ambos métodos de una manera sorprendente, al obtener la expresión siguiente:

Françoise Vieta (1540-1603)

Vieta adaptó el método general de Arquímedes de polígonos inscritos en una circunferencia, pero comenzando con un cuadrado y utilizando el área, en lugar del perímetro. A partir de la relación entre el área de un polígono de *n* lados y el de *2n* lados, obtuvo el llamado *Producto de Vieta*, publicado en su *Variorum de Rebus Mathematicis Liber V. III* (1593):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \ldots$$

El carácter recursivo de este producto permite expresarlo como:

$$\frac{2}{\pi} = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

donde

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n}\,,\ n \in N$$

John Wallis (1616-1703)

En su Aritmética Infinitorum (1695), Wallis dedujo una expresión ya conocida por Fermat, para la integral de una potencia fraccionaria de *x*. Usando esta expresión halló el área de un cuarto de círculo y, de una manera formalmente poco rigurosa, desarrolló otro producto muy conocido para el cálculo de π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2}\,\frac{3.5}{4.4}\,\frac{5.7}{6.6}\,\frac{7.9}{8.8}\ldots$$

El carácter iterativo de este producto permite escribirlo de forma abreviada:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\,(2k+1)}{(2k)\,(2k)}$$

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{p}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\times\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2^{p+1}n-1}{2^{p+1}n}\cdot\frac{2^{p+1}n+1}{2^{p+1}n}$$

Actividades para los alumnos

- En la expresión de Osler aparecen dos parámetros, n y p. ¿Qué ocurre cuando p es 0? ¿y cuando p tiende a infinito?

- ¿Qué sucesión asocias al producto de Osler?

- Realiza un programa en la calculadora para obtener distintos términos de dicha sucesión (debes poder modificar los valores de p y n).

n	F. Vieta	J. Wallis	Osler (p=1)	Osler (p=5)	Osler (p=15)
1	2,82842712475	2,66666666667	3,01698893306	3,14109802659	3,14159265312
2	3,06146745892	2,84444444444	3,06487764629	3,14128975570	3,14159265330
3	3,12144515226	2,92571428571	3,08631035710	3,14137497095	3,14159265338
5	3,14033115695	3,00217595456	3,10617898243	3,14145358352	3,14159265346
10	3,14159114215	3,06770380664	3,12296049923	3,14151966275	3,14159265352
15	3,14159265239	3,09133688860	3,12895427067	3,14154318786	3,14159265354
20	3,14159265359	3,10351696154	3,13203086853	3,14155524706	3,14159265355
35	3,14159265359	3,11954720631	3,13606686593	3,14157104973	3,14159265357
50	3,14159265359	3,12607890022	3,13770705990	3,14157746619	3,14159265357

Figura IV. Comparación de los métodos de Vieta, Wallis y Osler para el cálculo de π

- Compara valores que obtengas de la sucesión de Osler con los correspondientes de Vieta y Wallis (Figura IV).

- ¿Cuál de los tres procedimientos vistos utilizarías para calcular aproximaciones decimales al número π? Razona tu respuesta.

Con estas actividades el alumno se acerca de una manera intuitiva a conceptos complejos, como la velocidad de convergencia de sucesiones, el carácter recursivo o iterativo de un algoritmo, la cantidad y tipo de operaciones realizadas, etc., aspectos que pueden ser formalizados posteriormente. De la misma manera, el bloque de actividades puede completarse con otras, de nivel más avanzado, conducentes a la justificación de las fórmulas de Vieta, Wallis y Osler. En ellas, el alumno podría ser guiado a lo largo de los razonamientos que siguieron estos autores para obtener sus productos infinitos. En Lupiáñez (2000) puede encontrarse el detalle de estas justificaciones apoyado en el uso de la calculadora.

Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto actividades que nos han permitido seguir parte del trabajo llevado a cabo por algunos matemáticos a lo largo de la historia para abordar el estudio del número π. El uso de la calculadora sirve de apoyo para ejecutar tanto operaciones variadas como para apoyar la reflexión de los alumnos en la interpretación de resultados. Las actividades propuestas pueden suministrar a los alumnos de Secundaria y de Bachillerato una ventana al pensamiento e ideas que conducían los descubrimientos de cada época, al tiempo que les permiten profundizar en el co-nocimiento de conceptos variados del currículo actual (número irracional, sucesión, convergencia, límite) que aparecen integrados bajo un hilo conductor común. Todo ello a partir de la ejecución, por parte del alumno, de tareas y procesos de reflexión propios del quehacer matemático.

Al mismo tiempo hemos presentado una forma integradora de usar la calculadora, lo que nos ha permitido aprovechar el potencial de esta tecnología para, por un lado, trabajar los problemas de matemáticas coordinando diferentes registros de representación (gráfico, numérico, simbólico) y, por otro lado, proporcionar información a partir de la cual los alumnos pueden interpretar, conjeturar o validar determinados resultados matemáticos. Hemos contemplado así la calculadora como un instrumento de justificación de resultados en el aula de matemáticas, donde difícilmente se podrían desarrollar demostraciones formales de las conclusiones manejadas.

La consideración conjunta de conceptos y procedimientos matemáticos variados, el uso de la calculadora para tratarlos y la incorporación de elementos históricos al proceso, todo ello desde una perspectiva en la que el alumno es el protagonista de su actividad, son las cualidades que consideramos más destacables en las actividades propuestas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DEMANA F., WAITS B. (1998): *El papel de la calculadora portátil. El álgebra simbólica en la educación matemática del siglo XXI: un llamado para la acción*, Documento electrónico en la página Web http://www.ti.com/calc/latinoamerica/papel.htm.

GORGORIÓ N., ARTIGUES F., BANYULS F., MOYANO D., PLANAS N., ROCA M., XIFRÉ A. (2000): "Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones", *Suma*, n.º 33, pp. 59-71.

LUPIÁÑEZ J. L. (2000). "Nuevos acercamientos a la historia de la matemática a través de la calculadora TI-92", *Memoria de Tercer Ciclo*, Universidad de Granada.

MEC (1989): Diseño Curricular Base, Enseñanza Secundaria Obligatoria, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

OSLER T. J. (1999): "The unión of Vieta's and Wallis' products", *American Mathematical Monthly*, pp. 774-776.