SUMA 46
Junio 2004, pp. 37-44

Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones

El trabajo presentado es un resumen de una investigación realizada con alumnos de primero de Bachillerato con el objetivo de describir y analizar algunos de sus errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones y así mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas. Hemos partido de trabajos desarrollados sobre iniciación al álgebra y, específicamente, sobre dificultades y errores observados en torno a las competencias algebraicas. Dado que nuestro objetivo era fundamentalmente descriptivo, hemos utilizado dos intrumentos propios de la metodología cualitativa, como son los cuestionarios y entrevistas.

This essay is a summary of a piece of research carried out with students in their first year of Baccalaureate. The aim is to describe and analyse some of the common mistakes made by students when working with inequations and the difficulties involved in their learning in order to improve the process of teaching and learning them. We have started from some essays on initiation to algebra and specifically on difficulties and mistakes observed around algebraic competencies. Since our objective was mainly descriptive we have used two instruments characteristic of qualitative methodology such as questionnaires and interviews.

Nuestra experiencia docente nos ha permitido observar los errores y dificultades que los alumnos de Bachillerato presentan en el estudio de las desigualdades e inecuaciones, muchos de los cuales se repiten año tras año. Ello nos ha motivado a estudiar cuáles podrían ser las causas de algunos de ellos, para intentar paliarlos, o al menos reconducir nuestra labor educativa.

El trabajo presentado se ha desarrollado dentro del Programa de Doctorado ofrecido por el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura (Bienio 1999-2001), en el que se desarrolla una línea de investigación sobre *errores y dificultades en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas* durante el segundo año del programa.

En este marco elaboramos un proyecto cuyo objetivo principal era: *Describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud en el aprendizaje de las inecuaciones con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas*. El trabajo que ahora presentamos quiere mostrar y divulgar algunos de los resultados obtenidos, no siendo nuestro objetivo presentar un informe de investigación.

Como referente hemos considerado el concepto de obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997), caracterizado como aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija a la mente del estudiante, pero que posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas. Y cuyo origen puede ser, siguiendo a G. Brousseau, de origen ontológico o psicológico, didáctico o epistemológico.

Igualmente, hemos partido de trabajos desarrollados sobre iniciación al álgebra (Grupo Azarquiel, 1991 y Socas y otros, 1989) y, específicamente, sobre dificultades y errores obser-

> *Hemos observado los errores y dificultades que los alumnos de Bachillerato presentan en el estudio de las desigualdades e inecuaciones.*

Manuel Garrote Sánchez
Colegio Ntra Sra del Carmen (Badajoz).
Mª José Hidalgo Carranza
IES Eugenio Hermoso (Fregenal de la Sierra - Badajoz).
Lorenzo J. Blanco Nieto
Universidad de Extremadura (Badajoz).

vados en torno a las competencias algebraicas de los alumnos de Secundaria y Bachillerato, por ser éste el campo en el que quedan inmersos los contenidos matemáticos de esta investigación.

Pretendemos describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud en el aprendizaje de las inecuaciones con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas.

En esta línea, Socas (1997) y Palarea (1999) hacen un recorrido por las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra en particular, agrupando las dificultades en cinco grupos: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra que operan en sentidos: semántico y sintáctico; asociadas a los procesos de pensamiento y que surgen debido a la naturaleza lógica del álgebra; asociadas a los procesos de enseñanza, que se derivan del propio currículum de matemáticas, de la institución escolar y de los métodos de enseñanza; asociadas a los procesos de desarrollo de los alumnos y, por último, asociadas a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra.

De manera parecida, Socas (1997), clasifica en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra:

1. Errores que tienen su origen en un obstáculo, tales como la falta de clausura, es decir, los estudiantes ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos.

2. Errores que tienen su origen en una ausencia de significado; éstos pueden tener dos procedencias distintas:

   2.1. Complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico, tales como:

   – Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética

   – Errores de procedimiento

   – Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

   2.2 Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra; son de naturaleza diversa tales como: falta de concentración, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

Diferentes autores han trabajado aspectos de la enseñanza/aprendizaje del álgebra que conforman diversos obstáculos para su aprendizaje. Así, Collis, (1975) hace consideraciones sobre el uso y significado que los alumnos hacen y atribuyen a las letras. Collis (1975), Behr (1980), Kieran (1981) y Palarea y Socas (1999) hacen aportaciones sobre el valor que los alumnos atribuyen al signo igual, encontrando la prevalencia de la aritmética sobre el álgebra. O respecto al uso de paréntesis (Kieran, 1979).

Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de los antiguos 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP en Barcelona, aportando algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en álgebra para disminuir los errores en la misma, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y poder en definitiva mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997), caracterizado como aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija a la mente del estudiante, pero que posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) diseñan un cuestionario de diagnóstico del manejo del concepto de variable en el álgebra. Para ellos, el concepto de variable se usa con significados diversos en diferentes contextos y dependiendo de ello se maneja de distinta manera. Esta variedad en las formas de empleo hace que el concepto de variable sea difícil de definir y puede ser causa de muchas de las dificultades para los estudiantes. Consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

Dado que no pretendíamos un estudio exhaustivo y que era un primer acercamiento al tema nos pareció oportuno utilizar el cuestionario y la entrevista, como instrumentos de recogida de datos, asumiendo en su realización diferentes recomendaciones propias de la metodología cualitativa.

De esta manera y, tras un proceso de validación adecuado, pasamos un cuestionario (anexo 1) a 91 alumnos procedentes de 4 Centros Educativos distintos, matriculados en el primer curso de Bachillerato de las opciones Tecnología o Ciencias de la Naturaleza y la Salud. Todos ellos ya habían sido instruídos en el concepto y uso de desigualdades e inecuaciones. Para la mayoría de ellos eran conceptos completamente nuevos y sólo algunos contaban con ciertas ideas previas sobre los objetos de estudio. El cuestionario fue pasado a los alumnos tras la instrucción en los temas abordados en el mismo. Y tras su posterior análisis se realizaron algunas entrevistas para profundizar las respuestas dadas.

En los resultados que damos a continuación mostramos algunos errores y dificultades detectados en la revisión del cuestionario pasado a los alumnos e intentar acercarnos a las causas de los mismos. En ningún momento, nos planteamos hacer un análisis estadístico exhaustivo de los datos recogidos aunque en el anexo 2 mostramos algunos resultados globales.

Según Socas (1997), las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra se clasifican en errores con origen en un obstáculo y errores con origen en una ausencia de significado.

Algunos resultados del análisis

En los dos primeros items se plantea el paso del lenguaje habitual al lenguaje algebraico en términos de una inecuación, así como el significado que los alumnos atribuyen a dichas expresiones y el uso que hacen de diferentes sistemas de representación.

Es elevado el número de alumnos que dan correctamente las expresiones pedidas, sin embargo, podríamos destacar de las respuestas obtenidas algunos aspectos. A pesar de llevar varios años trabajando con números reales, son pocos los alumnos que asumen este conjunto como el de referencia para sus operaciones, limitándose a los números naturales, lo que representa una dificultad para comprender el significado de intervalo. Es esta una constante en la resolución de diferentes items. De igual manera aunque se usa la variable como recurso para dar la expresión pedida, su significado no está suficientemente claro.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

En el segundo ítem hay alumnos que entienden la relación de orden pedida, dando incluso ejemplos, pero en el paso a la expresión algebraica escriben la relación al revés, problema que se hace mayor al intentar dar la doble desigualdad en un única expresión. Tienen dificultades para entender conjuntamente las dos desigualdades, aun escribiéndose juntas, su comprensión se hace por separado, lo cual trae consigo expresiones incoherentes como $n < -2 > -11$ (Una situación similar aparece en la resolución del ítem 11).

En el tercer ítem se pretende ver las competencias operatorias a la hora de resolver una inecuación sencilla, y la capacidad de interpretar la solución de la misma, a partir de una inecuación lineal de primer grado $[5 - 3(2 - x) > 4 - 3(1 - x)]$. Las respuestas las podríamos enmarcar en tres grupos distintos: los que resuelven correctamente la inecuación interpretando el resultado obtenido, es decir llegan a una expresión de la forma $0 > 2$ o $-1 > 1$, añadiendo que la inecuación no se verifica para ningún valor de la incógnita; los que resuelven la inecuación pero no son capaces de interpretar el resultado obtenido y por último los que ni siquiera resuelve correctamente la inecuación dada.

Estos resultados muestran las dificultades de interpretación puesto que aún cuando resuelven la inecuación no son capaces de sacar conclusiones. Esta situación se vislumbra, también, en algunos de los ejercicios inconclusos de los alumnos. En la resolución se aprecian también errores en la operatoria, en el uso de los paréntesis, de los sinos < y >, de la propiedad distributiva, al operar con números enteros y en el paso de una inecuación a otra equivalente.

En este ejercicio empezamos a considerar que no encuentran diferencias conceptuales entre ecuación e inecuación, ya que se usan ambos términos para referirse al segundo.

Con esto, podemos apreciar que son muchos los problemas y dificultades que los alumnos presentan a la hora de resolver una inecuación. Algunos de ellos vienen de problemas no superados de álgebra elemental y otros son propios del tratamiento con inecuaciones. Muchos alumnos entienden los signos mayor y menor como nexos entre dos expresiones algebraicas que arrastran en los diferentes pasos de la resolución de una inecuación y que no aportan significado a la misma, hasta el punto que no les supone ningún problema sustituirlo por un signo igual. Pocos alumnos le dan contenido semántico a la inecuación, poniéndolo de manifiesto en el momento de interpretar el resultado al que llegan tras aplicar el algoritmo de resolución.

Muchos alumnos entienden los signos mayor y menor como nexos entre dos expresiones algebraicas que arrastran en los diferentes pasos de la resolución de una inecuación y que no aportan significado a la misma, hasta el punto que no les supone ningún problema sustituirlo por un signo igual.

Las dificultades para manejar expresiones que impliquen el signo menos en las inecuaciones y la relación de orden en los números reales es puesta de manifiesto en la resolución de los items 4 y 6. Son pocos los alumnos que seleccionan la respuesta correcta dando argumentos. En este caso, la mayoría de los alumnos se limitan a despejar usando las mismas técnicas que para las ecuaciones, poniendo de manifiesto de nuevo que el signo tiene poco contenido semántico y que el objetivo es operar y despejar la incógnita sin tener en cuenta el sentido que pueda o no tener el resultado obtenido.

Además, el ítem 6 nos muestra la dificultad de los alumnos para asimilar diferentes usos de las letras dentro del álgebra (también se muestra en los items 7 y 10). A este respecto, señalamos lo arraigado en los alumnos el pensar que a representa un número positivo y $-a$ un número negativo.

En el ítem 5, donde se pretendía ver en qué medida el alumno es capaz de interpretar la solución de dicha inecuación, se pone de manifiesto de nuevo la dificultad que para algunos alumnos supone leer una desigualdad, así como entender que el resultado de una inecuación no es un valor de la incógnita sino que es un intervalo. Ponemos algunos ejemplos de los errores cometidos:

– Se resuelve correctamente la inecuación, pero no se responde a la cuestión planteada por no saber qué hacer con los valores comprendidos entre 3 y 5.

– Una vez se ha llegado a $x > 3$, se tacha $x > 5$ ya que se cree que debería haber aparecido en el enunciado de la cuestión la primera expresión y no la segunda.

– Tras sustituir por 5 y 6 en la inecuación, se argumenta *Sí es cierta porque hay ejemplos que lo demuestran*.

Esta última solución nos confirma que muchos alumnos consideran que para justificar el enunciado pedido es suficiente con que el enunciado se verifique para un valor.

En el ìtem 8 los alumnos nos muestran la dificultad de conexión entre los lenguajes geométrico y algebraico. Es muy reducido el número de alumnos que usan el diagrama para justificar su respuesta, es decir, comparan el área del cuadrado de lado $a + b$ con las áreas de los cuadrados de lados a y b respectivamente. Para muchos alumnos el diagrama es un dibujo que en ningún momento relacionan con la cuestión planteada y del que no entienden su presencia. Es obvio que en su trabajo en álgebra no están acostumbrados a usar otras herramientas que no sean las propias del lenguaje algebraico para abordar cuestiones como la planteada y que esto puede tener su origen no en los propios alumnos, sino en los docentes y en los métodos que utilizamos en el aula. La mayoría de los alumnos intentan responder desarrollando el binomio suma y comparando las expresiones obtenidas.

También en el ìtem 9 los alumnos podrían haber utilizado el diagrama del ítem anterior, pero no fue así. El resultado de este ítem muestra la dificultad de los alumnos para este tipo de cuestiones. Tan sólo un alumno consigue demostrar el resultado pedido, siete obtienen el resultado tras comprobar su validez para varios casos y los demás no consiguen dar ningún argumento que justifique el enunciado.

Muchos alumnos consideran que para justificar el enunciado pedido es suficiente con que el enunciado se verifique para un valor.

En este ejercicio se muestran algunos errores comunes como considerar que: *si* $a^2 > b^2$*, se llega a que* $a > b$ *sin más que hacer la raíz cuadrada en ambos términos de la desigualdad*.

En otro sentido manifiestan dificultades para considerar la tesis e hipótesis. Es decir, se intenta demuestrar que $a^2 > b^2$ cuando $a > b$.

En el ítem 10 aparecen letras usadas de diferente manera, como incógnita y como número generalizado. No se pretende que el alumno dé el rango completo de valores para 'm', sino que consiga algún valor para el cual se cumplan las condiciones. El principal objetivo, no obstante, del ítem es ver cómo los alumnos entienden e interpretan lo que es una solución de una inecuación.

Las respuestas dadas se pueden agrupar de la siguiente manera: respuestas que encuentran un valor para m en las condiciones del enunciado, es decir, que encuentran un valor para m tal que al sustituirlo la inecuación resultante se verifique para $x = 0$ y no lo haga para $x = 2$; respuestas incorrectas y alumnos que dejan en blanco esta pregunta.

Un grupo de alumnos no diferencian el uso de las dos letras que aparecen en la inecuación planteada lo que conlleva una deficiente comprensión del enunciado dado. Por otro lado, parece como si en el momento que a un alumno se le plantea calcular el valor de una letra éste sólo contara con las ecuaciones para la obtención del mismo, hasta el punto de cambiar el signo de la expresión dada sin necesidad de justificación.

Esto último también se puede llevar al ámbito de interpretación de las soluciones de una inecuación, ya que llegar a una expresión de la forma $m < 1$, no es determinar la incógnita y se necesita dar una expresión en términos de igualdad, es decir, m tiene que ser igual a un único valor.

En los ítems 11 y 12 se pretende ver en qué medida el alumno percibe una relación funcional entre dos letras para establecer el rango de variabilidad de una letra en términos del rango de variabilidad de la otra.

En el ítem 11, una vez mas, el intento de dar una única expresión para una doble desigualdad, se muestra como una dificultad para muchos alumnos, aún habiendo asimilado la información aportada por la misma. Así, del enunciado *m es mayor que 3, pero más pequeño que 10* se obtiene la expresión $3 < m > 10$.

Los alumnos establecen diferencias sustanciales a la hora de dar significado a la relación funcional entre las dos letras. Obtener los valores de m a partir de los de n no supone gran dificultad, sin embargo el proceso contrario supone ciertas dificultades conceptuales que derivan de los conceptos creados de variable dependiente e independiente.

Los intervalos son calculados sustituyendo el menor y el mayor valor de una de las letras en la relación dada y obteniendo los correspondientes valores para la otra letra, es decir, *si* $3 < m < 10$ *como* $m = 3 + n$, *entonces* $10 = 3 + n$ *y* $3 = 3 + n$, *de donde se tiene que* $n = 0$ *y* $n = 7$ *y el resultado sería (0,7).*

En el ítem 12 las respuestas se pueden clasificar en: resultados correcto, es decir, c debe tomar valores menores que 5; se da como resultado tan sólo algún valor para c; se responden incorrectamente y por último destacar el notable número de alumnos que no dan respuesta alguna.

De nuevo podemos comprobar que los alumnos, en general, no ven las inecuaciones como una herramienta que puede ser utilizada para resolver determinado tipo de problemas puesto que son pocos los que hacen uso de ellas para responder este ítem. Son muchos los que intentan por todos los medios llevar la cuestión al campo de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas para poder responder y en ausencia de una segunda ecuación renuncian a contestar.

La relación $c + d = 0$ es vista como una ecuación con dos incógnitas y como no encuentran otra ecuación con dos incógnitas, se argumenta que el problema no puede resolverse porque falta una ecuación.

Por otro lado, está la comprobación de los resultados obtenidos. Obtener un resultado coherente con las condiciones de un problema es el objetivo fundamental de la resolución del mismo, sin embargo para muchos de nuestros alumnos el objetivo es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que en ningún momento es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.

> *Para muchos de nuestros alumnos el objetivo de la resolución de un problema es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que en ningún momento es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.*

Conclusiones

Antes de terminar, quisiéramos señalar algunas de las conclusiones del estudio:

1. La comprensión del concepto de inecuación es deficiente en una parte importante de nuestros alumnos. Muchos de ellos no establecen diferencias significativas entre este con-

cepto y el de ecuación, es decir, la diferencia entre unas y otras es el signo que se escribe entre los dos miembros que forman parte de las mismas, mientras que en las ecuaciones utilizamos el signo =, en las inecuaciones utilizamos los signos <, > (y estos dos últimos con igualdades). Además, este signo carece de valor semántico ya que se utiliza como un nexo entre los dos miembros de la inecuación.

2. Siguiendo con la interpretación que los alumnos hacen de los signos utilizados en el trabajo con inecuaciones, añadir que esa ausencia de significado también se manifiesta en dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$.

3. Aparecen serias dificultades a la hora de pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica, sobre todo si ésta incluye una doble desigualdad. Quizás lo anterior se derive de una introducción excesivamente rápida de este tipo de expresiones, así como de lo expresado en el punto anterior.

4. Teniendo en cuenta que muchos alumnos no establecen diferencias semánticas entre ecuación e inecuación, así como algunas de las concepciones que los alumnos muestran de intervalo –conjunto de números naturales o a lo más enteros comprendidos entre otros dos–, la interpretación que de la solución de una inecuación se hace, tampoco parece ser la más apropiada si lo que pretendemos es dotar de contenido semántico al objeto de nuestro estudio.

Los alumnos manifiestan dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$.

5. Para buena parte de nuestros alumnos, el álgebra es *operar* con números y letras, sin otro objetivo que el de obtener valores para las mismas aplicando algoritmos de resolución. Así, cuando se tiene una expresión de la forma $-7x < 5$, el objetivo es dejar sola la incógnita y para ello *se pasa el –7 dividiendo al otro lado de la inecuación* como si se tratase de una ecuación, pasando a un segundo plano la pretensión de encontrar valores para la incógnita que hagan cierta la desigualdad.

6. Llama la atención la diferencia en los resultados de los ítems 4 y 6 teniendo en cuenta que en los dos se plantea la misma cuestión, parece que la redacción del segundo facilita la aplicación de lo que los alumnos llaman *regla para inecuaciones* —si multiplicamos o dividimos una inecuación por un número negativo, cambia el signo de dicha inecuación— , ya que la comprensión de la misma se muestra insuficiente.

En relación a los diferentes sistemas de representación debemos decir que nuestros alumnos no usan más que el lenguaje algebraico para abordar las diferentes cuestiones planteadas.

7. También se pone de manifiesto que son muchos los alumnos que aún no han superado ciertas dificultades propias de la aritmética, como son la aplicación de la propiedad distributiva o el uso de la regla de los signos, lo cual dificulta aún más la adquisición de un concepto que requiere un manejo adecuado de las mismas.

8. El uso que los alumnos hacen de las letras no siempre responde a una necesidad de las mismas, llegándose a utilizarlas sin atribuirles significado alguno. Corroborando los resultados obtenidos en investigaciones anteriores en torno a los diferentes usos que de las letras se hacen en álgebra se tiene:

- Las letras como números generalizados encuentran como dominio el conjunto de números naturales —a lo sumo los números enteros— , con las limitaciones que ello supone, sobre todo al trabajar con inecuaciones cuyos resultados son intervalos de números reales.

- La letra entendida como incógnita es la que tiene mayor significado y reconocimiento por parte de nuestros alumnos, sin embargo la necesidad de encontrar valores concretos para la misma derivado de su uso en ecuaciones, suponen un obstáculo importante en la interpretación de la solución de una inecuación.

- Por último, cuando las letras son utilizadas en relaciones funcionales, adquiere gran importancia la forma en la que se da esta relación, puesto que están muy arraigadas en los alumnos las ideas de variable dependiente e independiente con lo que ello supone para la reversibilidad de la relación.

9. En relación a los diferentes sistemas de representación y entendiendo que el uso de más de un sistema favorece la comprensión del álgebra ya que proporcionan estrategias alternativas y complementarias (Palarea y Socas, 1999), debemos decir que nuestros alumnos no usan más que el lenguaje algebraico para abordar las diferentes cuestiones planteadas. En la mayoría de los casos, lo anterior es consecuencia de la forma en la que muchos de nosotros, los docentes, entendemos y llevamos a nuestras aulas la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, es decir, sólo hacemos uso del lenguaje algebraico para desarrollar los contenidos de álgebra, sin proporcionar otras herramientas para representar conceptos y favorecer así el aprendizaje de los mismos.

10. La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones y si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje de inecuaciones a meras tareas mecánicas, es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución.

11. En relación a las dificultades derivadas de la complejidad de los elementos del álgebra, los docentes deberíamos tener en cuenta en la enseñanza de las inecuaciones aspectos como: no introducir el concepto, así como las técnicas de resolución demasiado rápido; asegurarnos de que los símbolos utilizados están claramente diferenciados y que tienen valor semántico para los alumnos; establecer con claridad las diferencias entre los conceptos de ecuación e inecuación; no introducir la notación formal hasta que el concepto de inecuación, así como las técnicas de resolución, estén claramente adquiridas; en la medida de lo posible, evitar la complejidad notacional que en ocasiones resulta innecesaria.

La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones por lo que es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución.

Anexo 1

Responde las siguientes cuestiones en el folio en blanco, intentando en todas ellas justificar la respuesta dada.

1. Escribe la fórmula que expresa: “un número desconocido es mayor que 5” e indica los números a los que corresponde.

2. Expresa mediante una fórmula: “n es menor que -2 y mayor o igual que -11”

3.¿Qué números reales verifican la siguiente desigualdad:

$$5 - 3(2 - x) > 4 - 3(1 - x)?$$

4. Dada la inecuación $-7x < 5$, ¿cuál de los siguientes conjuntos sería su solución?:

Los números reales mayores que $-5/7$
Los números reales menores que $-5/7$

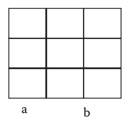
5. Justifica que la inecuación $4x + 1 > 3x + 4$ es cierta cuando $x > 5$.

6. a) Sabiendo que $a < b$, ¿qué relación habría entre $-a$ y $-b$?
b) Sabiendo que $-c \geq -d$, ¿qué relación habría entre c y d?

7. Dadas las expresiones $2a$ y $2 + a$, ¿cuál de ellas crees que es mayor y por qué?

8. Observa el siguiente diagrama:

Un cuadrado de lado $a + b$



A partir del mismo justifica si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

$$(a + b)^2 < a^2 + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$
$$(a + b)^2 > a^2 + b^2$$

9. Si $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 > b^2$, explica por qué implica que $a > b$.

10. Consideramos la expresión $mx + 1 - m > 0$, donde m puede ser cualquier número real. Encuentra algún valor de m para que la inecuación resultante se cumpla en $x = 0$ y no se cumpla en $x = 2$

11. Consideramos la expresión $m = 3 + n$.
a) Si queremos que los valores de m sean mayores que 3 y más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar n?
b) Si n toma valores entre 8 y 15, ¿qué valores tomará m?

12. Indica, justificando tu respuesta, los valores que toma c si $c + d = 10$ y c es inferior a d.

Item	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	No responde
1	43,9	(a) 54,9	1,2	0
2	87,9		12,1	0
3	29,7	(b) 23,1	38,4	8,8
4	19,8	(c) 19,8	60,4	0
5	25,3	(d) 40,6	29,7	4,4
6	59,3		33	7,7
7	9,9		85,7	4,4
8	(e) 14,3 (f) 9,9		74,4	4,4
9	1,1	(g) 7,7	80,2	11
10	17,5		62,7	19,8
11	31,9		53,8	14,3
12	31,9		45	23,1

Tabla 1. Resultados en porcentajes

Anexo 2

Tabla resumen de los porcentajes —de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas y presentadas en blanco— obtenidos:

(a) Se da la fórmula pedida pero no se indican los números con los que se corresponde dicha fórmula.

(b) Se resuelve la inecuación pero no se interpreta el resultado obtenido.

(c) Se señala la opción correcta pero sin justificar.

(d) Sólo se justifica considerando valores concretos por encima del 5.

(e) Respuestas correctas usando el diagrama proporcionado en el ítem.

(f) Respuestas correctas sin usar el diagrama.

(g) Justifica la implicación haciendo uso de varios ejemplos válidos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M. ET ALL. (1980): "How children view the equal sign", *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.

BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

COLLIS, K.F. (1975): *A study of concrete and formal perations in school mathemtics: a Piagetian view point*, Australian Council for educational research, Melbourne.

ENFEDAQUE, J. (1990): "De los números a las letras", *Suma*, n.º 5. pp. 23-34.

GRUPO AZARQUIEL (1991): *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Síntesis, Madrid.

KIERAN, C. (1981): Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in mathematics*, 12. pp. 317-326.

PALAREA, M.M.(1999): La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación, *Números*, n.º 40. 3-28.

PALAREA, M.M y SOCAS, M.M.(1999-2000): "Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico, Un estudio biográfico", *El Guiniguada*, n.º 8/9, pp. 319-336.

SANTOS, M.A.(1992): "Problemas algebraicos de los egresados de educación secundaria", *Educación matemática*, n.º 4(3). pp. 43-51.

SOCAS, M.M. (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", en Rico, L. y otros: *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, ICE/Horsori, pp. 125-154.

SOCAS, M.M., CAMACHO, M. Y HERNÁNDEZ, J.(1998): "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria", *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado*, n.º 32. pp. 73-86.

SOCAS, M.M., CAMACHO, M., PALAREA, M. Y HERNÁNDEZ, J. (1989): *Iniciación al álgebra, Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*, Ed. Síntesis, n.º 23, Madrid.

TRIGUEROS, M., REYES, A., URSINI, S. y QUINTERO, R.(1996): "Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra", *Enseñanza de las ciencias*, n.º 14(3). pp. 351-363.