SUMA 46
Junio 2004, pp. 23-26

El irresistible encanto de la artesanía

La convincente fuerza de las imágenes y su belleza artesanal son habitual y lamentablemente desaprovechadas en las aulas. Las pruebas visuales no demuestran —eso dice el rigor puritano— pero asientan cimientos, aportan elegancia plástica y ayudan a la motivación. Desde Primaria hasta la Universidad, la enseñanza de las matemáticas está planificada bajo un obsesivo punto de vista que prima lo general sobre lo particular. Sin embargo, una didáctica humanista, que permita al alumnado construir y diseñar, sólo es posible desde un buen conocimiento de las propiedades individuales de los objetos matemáticos.

The convincing strength of the images and their genuine beauty are usually, regrettably, misused in the classrooms. Visuals texts don't prove –that's what puritanical narrow —mindedness claim— but they reinforce their foundations; supply plastic elegance and help pupils get motivated. From Primary to University, Maths teaching has been planned on an obsessive viewpoint that focuses on general aspects rather than on particular ones. Nonetheless, a humanist teaching practice, which allows pupils to build and design, is only possible from a good knowledge of the individual features of mathematical objects.

Abro uno de aquellos libros de tapas duras, texto apretado y de aspecto austero, y abstracto y atractivo diseño en su portada, de la editorial Mir. Encerraban mucha sabiduría matemática. En este caso se trata de V. Lidski y otros*: Problemas de matemáticas elementales.* Lo de *elementales* debe ser porque fueron propuestos a los *graduados de las escuelas secundarias* en los exámenes de ingreso al Instituto Físico–Técnico de Moscú. Leído esto, el título resulta casi ofensivo para lectores y lectoras españoles —si se pueden emplear estas expresiones a propósito de un libro de problemas de matemáticas.

I

En el capítulo de trigonometría encuentro al azar un enunciado de aspecto tolerable. El problema número 551 dice:

Demostrar que

$$cos\frac{\pi}{5}-cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

¿A quién se le ocurrirán estas cosas? Pero el caso es que tanto el $^1/_2$ como el $^\pi/_5$ resultan atractivos, así que pienso un poco: puesto que $^\pi/_5$ es 36º, estamos ante una relación entre los cosenos de 36º y 72º. Si dibujo un pentágono regular y otro estrellado con el mismo centro, tendré una abundante colección de ángulos con estos dos valores. Esto se anima.

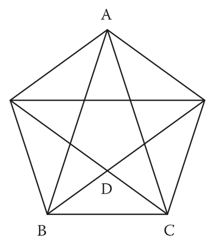

Figura 1

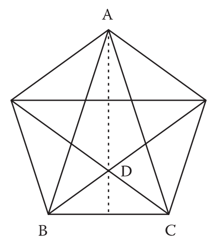

Figura 2

En la figura 1, $\widehat{DBC}$=36º y $\widehat{ABC}$ 72º. Están juntos y podría comparar sus cosenos en los triángulos que resultan al trazar

Ángel Ramírez Martínez
IES Sierra de Guara (Huesca).
Sociedad Aragonesa de Profesores Matemáticas Pedro S. Ciruelo.

la vertical *AD* (Figura 2), pero las hipotenusas son diferentes y perderé una demostración visual. ¿Será posible conseguir tanto? Para empezar, tengo que elegir una unidad. Me decido por el lado: $BC = 1$. Tiene la ventaja de que es un 1 que lo puedo colocar en muchas posiciones. *EC* y *FE*, por ejemplo, también valen 1 (Figura 3).

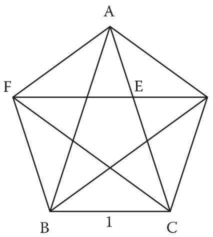

Figura 3

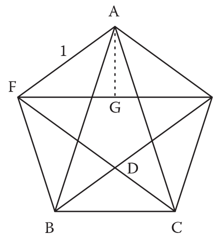

Figura 4

Se trata ahora de observar con cuidado. No creo que me sirva de mucho el 1 de *FE*. Más interesante me parece que $FA = 1$, porque $\widehat{AFE} = 36^\circ$. ¡Ya está!, ya tengo el primer sumando. En la figura 4 se puede ver que

$$FG = cos\frac{\pi}{5}$$

Para $cos\frac{2\pi}{5}$ puedo tener en cuenta que $\widehat{AFC} = 72^\circ$ y $FA = 1$, pero aparecerá $cos\frac{2\pi}{5}$ en el segmento FC. ¿Cómo compararlos? Ya veremos; de momento dibujo (Figura 5). ¡Están casi juntos! $FG = cos\frac{\pi}{5}$ y $FH = cos\frac{2\pi}{5}$.

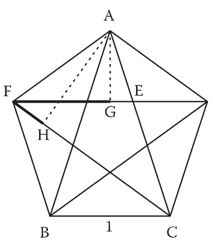

Figura 5

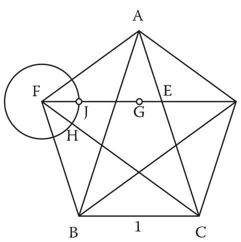

Figura 6

Bueno, no es tan difícil ponerlos sobre la misma recta. Lo puedo hacer mediante una circunferencia de centro *F* y radio FH (Figura 6). De manera que

$$cos\frac{\pi}{5} - cos\frac{2\pi}{5} = FG - FJ$$

Quiere decir esto que el segmento *JG* deberá ser $^1/_2$.

¡Y sí, ciertamente lo es! Está claro (Figura 7).

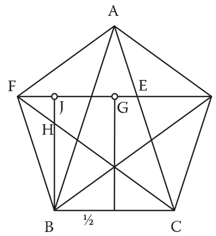

Figura 7

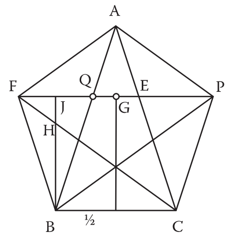

Figura 8

¿Está claro? Entran ganas de buscar alguna garantía numérica de que *JB* es realmente perpendicular a *BC*. Veamos: si el lado del pentágono regular es 1, su diagonal mide el valor del número áureo,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como $QP = 1$, entonces $FQ = \Phi - 1$ y su mitad (*FBQ* es isósceles) es justamente $cos\ 72^\circ$, como puede comprobarse con la calculadora.

II

Voy a las soluciones y miro a ver cómo demuestran los autores del libro y —supongo— los candidatos a estudiantes del Instituto Físico–Técnico de Moscú, que la diferencia entre los cosenos de 36º y 72º es justamente 0,5. No me resisto a incluir su argumentación.

Parten de la fórmula

$$cos\,x - cos\,y = -2sen\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$$

para expresar

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$$

como

$$2sen\frac{\pi}{10}sen\frac{3\pi}{10}$$

Multiplican esta expresión y la dividen por

$$2\cos\frac{\pi}{10}sen\frac{\pi}{10}$$

y emplean la fórmula de *sen* 2α para llegar a

$$cos\frac{\pi}{5} - cos\frac{2\pi}{5} = \frac{sen\frac{\pi}{5}sen\frac{3\pi}{5}}{2cos\frac{\pi}{10}cos\frac{3\pi}{10}}$$

Como

$$cos\frac{\pi}{10} = sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right) = sen\frac{3\pi}{5}$$

y

$$cos\frac{3\pi}{10} = sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right) = sen\frac{\pi}{5}$$

concluyen que el resultado es 0,5.

¡Flipante! Un ejercicio de estilo que demuestra pero no convence de nada. Puro formalismo desprovisto de significado. Me temo que no habría sido admitido en el Instituto Físico–Técnico de Moscú.

III

He ironizado al preguntarme al comienzo de este escrito a quién se le puede ocurrir que la diferencia entre los cosenos de 36º y 72º es justamente 0,5. La sorpresa, más que la ironía, me surge cada vez que abro un libro de problemas de matemáticas, motivada por esos infinitos listados de igualdades y ejercicios descontextualizados.

Pues bien: en este caso es posible saber que la igualdad en cuestión se remonta por lo menos al siglo X, en relación -como no podía ser de otra manera— con la elaboración de tablas trigonométricas. Probablemente figurara en alguna obra de Abu'l-Wafa, como una etapa en el camino hacia el valor de *sen* 1º. En el apartado que Gheverghese Joseph (1996) dedica a la trigonometría árabe se puede ver otra construcción para llegar a ella (página 459). Gheverghese incluye el dibujo en su texto sin explicar cómo se obtiene, a partir de él, el resultado. No sé si Abu'l-Wafa lo *vería* o recurrió a semejanzas de triángulos a partir de las cuales conseguir el 0,5 de la diferencia entre los cosenos, pero su triángulo (Figura 9) permite verlo.

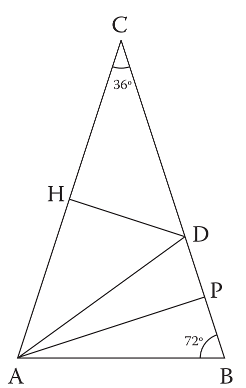

Figura 9

Si AB = 1, entonces $AD = CD$ =1, y CA =2 *cos* 36º .
Además, BD = 2 *cos* 72º, luego CB = 1+ 2 *cos* 72º.

Así pues, 2 *cos* 36 = 2 *cos* 72º +1.

Si se gira la figura de manera que el triángulo se apoye en CB, se observa que es el mismo triángulo isósceles FAE de la figura 3; pero ahora hemos tomado como unidad su lado pequeño. Todo esto, en definitiva, no son más que variaciones sobre el hecho de que Φ = 2 *cos* 36º.

No creo que Abu'l-Wafa siguiera esta argumentación, pero me temo que tampoco la del Instituto Físico-Técnico de Moscú, a pesar de su buen conocimiento de las fórmulas de la trigonometría.

¡Veo el sen 2x!

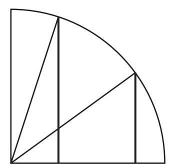

Figura 1

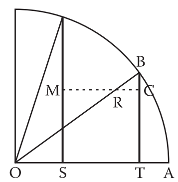

Figura 2

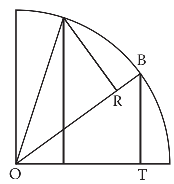

Figura 3

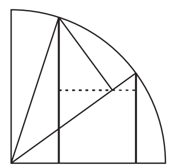

Figura 4

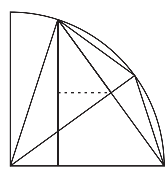

Figura 5

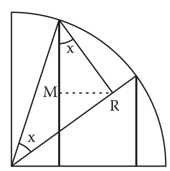

Figura 6

Figuras 1 y 2: Una tentación habitual, *sen* $2x$ = 2 *sen* x, que se puede rechazar con un simple contraejemplo numérico pero que es instructivo visualizar.

En la Figura. 2 se ve que $MS = \frac{1}{2} sen2x < BT = sen\ x$.

FIGURA 2: *sen* $2x = 2$ *sen x cos x* quiere decir que la proporción entre *OA* y *OT* = *cos x* es la misma que entre *BT* = *sen x* y *CT*. Ciertamente, a simple vista, *cos* x puede ser un 80% del radio en el ejemplo de la figura, y *CT* puede ser un 80% de *BT*. Al multiplicar *sen* x por *cos x* lo estamos reduciendo en un 80%.

FIGURAS 3 Y 4: Una intuición: si giro el triángulo *OBT* un ángulo *x*, el punto *T* coincidirá justamente con el punto *R*. ¡Cierto!

FIGURA 5: Pero es lógico que así sea.

FIGURA 6: En *PMR* se ve cómo el factor cos x proyecta *sen x* a la dirección vertical, convirtiéndolo en $^1/_2$ *sen* $2x$. Por tanto, *sen* $2x = 2$ *sen x cos x*.

Si, ya sé que no he descubierto nada nuevo. Pero hace tiempo que quería visualizar —ver con mis ojos, de la misma forma que Santo Tomás quiso sentir la llaga con sus manos— cómo el factor coseno evitaba la proporcionalidad 2 entre el seno de un ángulo y el de su doble. Había visto otras construcciones (por ejemplo, en Nelsen, 2001), pero quería una que lo probara con el cuadrante que habitualmente dibujamos en clase.

Sí, ya sé que no es más que un caso particular de la que se suele hacer para demostrar la fórmula de *sen* $(x+y)$, pero me ocurre que ahora, después de este caso particular, entiendo mejor la otra que, además, no la había particularizado. ¿Qué por qué no lo hice? Porque cedí a las tentaciones de la deducción: *sen* $2x$ no era más que un simple caso particular de *sen* $(x+y)$ que se obtenía por aritmética elemental.

¿A quién le cuento que he tardado tanto tiempo en sentir experimentalmente la fórmula del seno del ángulo doble? ¿Rebajaréis por ello mi prestigio profesional?

¿Os acordáis de Dieudonné y sus diatribas contra la trigonometría? Los globalizadores[1] actúan siempre así, despreciando la belleza de lo particular que queda anulada en sus construcciones teóricas. Pero *lo general no existe más que en lo particular, a través de lo particular* y *toda cosa particular es (de alguna manera) general*[2]. Nuestra creatividad didáctica, motivada por la ambición intelectual y el atrevimiento, necesita tanto de los esquemas generales en los que insertar nuestro trabajo como de la inesperada belleza de la artesanía. Es más: sin esta última, el riesgo de que aburramos es muy alto. ■

NOTAS

1 Ya sea en matemáticas, en didáctica o en política.

2 Lenin (con perdón).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide, Madrid.

LIDSKI, V. y otros (1978): *Problemas de matemáticas elementales*, Mir, Moscú.

NELSEN, Roger B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.