SUMA 45
Febrero 2004, pp. 97-104

iMÁTgenes 4, 5 y 6

¿Dónde están las cosas? ¿Dónde estoy yo? Aquí. Estoy aquí y ahora. Doy un paso y ya no estoy, ni aquí ni ahora, sino más lejos, y después.

¿Qué distancia me separa de mí mismo? Ninguna, cero, nada.O cuarenta mil kilómetros, la cintura del planeta. O pi multiplicado por veinte mil millones de años luz, el perímetro del Universo, más o menos. O la longitud de la trayectoria de un vuelo imaginario y arbitrario que partiendo de mi, aquí y ahora, volviera a mí, aquí, pero después: ¿Un dedo? ¿Un metro? ¿El infinito?

¿Qué determina la distancia entre las cosas? La distancia no es entre cosas, es entre dos cosas. No se mide entre tres, cuatro, cinco o mil objetos, sino entre uno y otro. Fundamental es considerarlos al unísono, como una pareja. Una pareja en la que no importa quién es primero porque en la distancia no cabe el orden en la consideración: P *dista de* Q *tanto como* Q *dista de* P. *Tampoco es necesario que los objetos de la medida sean de la misma naturaleza. Pueden medirse distancias entre las cosas más extrañas: entre un gato y un coco, entre una pulga y un zapatilla, entre un cojinete de la rueda de un camión y la cola de una sardina en alta mar...*

Y Barcelona, ¿dónde está? Aquí mismo, a cero kilómetros, para un barcelonés. A veinte mil kilómetros, casi al otro lado del mundo, para un pescador de las islas Tonga. A quince kilómetros de Sabadell, para un sabadellense. Pero a quince kilómetros de Sabadell está Terrassa. Sí, Barcelona está a quince kilómetros, pero al sudeste, según el sabadellense. Entonces, la distancia no nos dice dónde están las cosas, crea una circunferencia de ambigüedad alrededor del sujeto. Precisarla significa darle un sentido.

¿Y con el sentido ya sabe uno localizar las cosas? Un barcelonés no dista nada de su ciudad. Puede pasearse por ella arriba y abajo, kilómetros arriba y kilómetros abajo, hacia el este, hacia el oeste, y aún así sigue estando en Barcelona.
Yo lo sé bien: ahí es donde vivo. ¿Cómo es posible? ¿Acaso el cero es capaz de incluir algo? ¿Un lazo inmenso en el cual todas las cosas encerradas no distan nada de cualquier otra? ¿Un pacto secreto entre el espacio y la materia?
Y los geógrafos, ¿qué opinan de la distancia? Barcelona, ciudad con latitud y longitud determinadas con precisión de grados desde Tonga: 175ºE, 21ºN. Pero más difícil de concretar desde Sabadell. ¿Quizá 0º2'E, 0º12'S? Con precisión de ... ¿Hasta dónde llega la precisión de un barcelonés? Sus ciudadanos no necesitan situar la ciudad, ya están en ella. Pero tendrá un centro. ¿Dónde está el centro de Barcelona? ¿En la Plaça de Catalunya? ¿En la de Sant Jaume? Sea en un sitio o en otro, ¿qué adoquín o baldosa lo representa? ¿Qué fragmento de baldosa? ¿Qué punto? Lo busco, pero no lo encuentro. Cuanto más me acerco, menos lo veo. Se me escurre de la mirada como un pez de entre las manos. ¿Será que Barcelona no tiene centro? ¿Será que su centro está en todas partes?

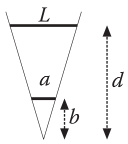
Sólo hay un modo de saber dónde está Barcelona: Alejarse de ella, cuanto más lejos, mejor. Hasta que la lejanía la transforme toda entera en el punto que antes buscaba. Barcelona transfigurada en algo sin partes. Barcelona entera en un punto euclidiano. Sólo entonces podré afirmar que se encuentra a la distancia que la separa de mí.

Tal vez debería visitar las islas Tonga.

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

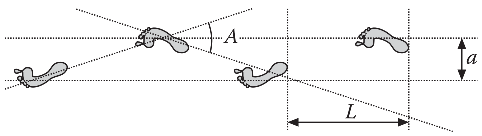
El concepto de distancia es fundamental en Matemáticas. En ¡Altius, lentius, longius! hablé acerca de la aparente disminución del tamaño de las cosas según la distancia que nos separa de ellas. Esto hace que la distancia determine la forma en que percibimos las cosas. A mis ojos, el planeta que piso es un plano, una bola de superficie esférica desde la Luna o un puntito diminuto desde Saturno.

Un aspecto muy interesante relacionado con la distancia no fue considerado en la iMATgen nº1. Supongamos que conocemos la longitud L de un objeto que está lejos de nosotros. Extendemos el brazo hasta una distancia b de nuestro ojo, justo cuando el ancho a del pulgar cubre por completo el objeto. ¿A qué distancia d se encuentra este?



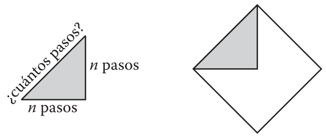
Basándonos en la semejanza de triángulos, d=aL/b. Por ejemplo, si con el brazo extendido (b=70 cm) nuestra pulgada (a=2,5 cm) coincide con la longitud aparente de un automóvil (L=4 m), sabemos que se encuentra a unos 14,3 m.

En *El vacío que habla* se vio cómo una huella puede decir bastante, tanto del pie que la produce como del pie de quien la mira. Dos huellas de distinto pie de la misma persona hacen un paso, pero del pie al paso hay mucho más que la longitud de este. Es una nueva entidad en la que pueden considerarse nuevas medidas y proporciones. En el paso pueden observarse tres magnitudes principales: su longitud, la distancia entre la huella de uno y otro pie; su anchura, la distancia que separa el pie izquierdo del derecho; y la apertura, el ángulo con el que los pies se abren al caminar:



Comparando las medidas y proporciones de un paso ajeno con las nuestras sabremos si es relativamente corto, largo, exageradamente largo, como en un salto, o imposible. Incluso podríamos conjeturar la estatura de quien lo dio.

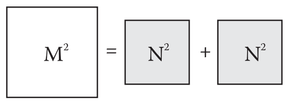
Cuantificar la distancia significa establecer una unidad con qué medirla. Tanto el pie como el paso han jugado ese papel a lo largo de la Historia. En Stairway to heaven hablé de las escaleras y de cómo éstas adaptaban su forma a la pendiente a superar. De entre todas las pendientes que los matemáticos han tenido que superar, ninguna resultó tan difícil como la determinada por un ángulo de 45º. Su medición supuso la primera gran crisis del conocimiento matemático. Supongamos que se necesitan n pasos para recorrer la base de una rampa en forma de triángulo rectángulo isósceles. ¿Con cuántos pasos salvaremos su pendiente? Si m es el número de pasos necesarios para ascender hasta arriba, m y n se relacionan según $2n^2=m^2$, ya que se forman dos cuadrados, uno doble del otro:



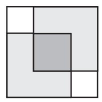
Busquemos un número de pasos que permita esta relación:

$n=1$ $2\cdot1^2=2$ no es un cuadrado,
$n=2$ $2\cdot2^2=8$ tampoco,
$n=3$ $2\cdot3^2=18$ tampoco,
......
$n=100$ $2\cdot100^2=20000$ tampoco,
......

¿Etcétera? No podemos escribir etcétera. ¿Podemos afirmar que $2n^2$ nunca será un cuadrado sea cual sea n? Supongamos que continuando la serie anterior llegásemos a encontrar un número natural N para el cual $2N^2$ fuera un cuadrado. Entonces, este número N sería el más pequeño que posee la propiedad de que $2N^2=M^2$. Por tanto, un cuadrado de lado M sería equivalente a la suma de otros dos de lado N:



Sobreponiéndolos así:



Vemos que la intersección de los cuadrados grises de lado N produce un nuevo cuadrado más oscuro de lado menor que debe ser equivalente a la suma de los dos cuadrados blancos de las esquinas. Hemos hallado un cuadrado menor que el de lado N equivalente a la suma de otros dos. Esto contradice que el de lado N fuera el más pequeño.

Dos pisadas, un paso. Dos pasos, un paseo. Dos paseos, una compañía. A quien le guste caminar sabrá que no hay camino, como dijo el poeta, que el camino, como las Matemáticas, se hace al andar. Quien quiera realizar andaduras matemáticas que lo haga en compañía. Llegará más lejos, aprenderá más deprisa y lo pasará mejor. Aunque no sea olímpico, también este es un buen lema. ■

iMATgen 4

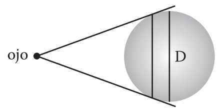
Un contraluz, pero no un atardecer, ni un amanecer. Más bien hacia el mediodía. En primer plano el perfil oscuro de una persona sobre un escollo marino. Un escollo cualquiera junto a una costa cualquiera. ¿Un adulto? No, comparada con los otros miembros de su cuerpo, la cabeza tiene un tamaño desproporcionado para tratarse de un adulto. Este rasgo es propio de los niños. ¿Alguien de otro continente? Quizá sí, quizá no. Tanto da. Puede que sea un niño. También podría ser una niña, pero si lo fuera probablemente llevaría el cabello mucho más largo. Aunque no tendría por qué ser así. Por el perfil de su figura nos figuramos que no lleva ropa. Al fondo, también a contraluz, una embarcación pequeña con la vela henchida y una persona a bordo. ¿Está muy lejos? ¿Cómo saberlo? ¿Cómo calcularlo? ¿Acaso importa?

Detrás de la barca acaba todo. Acaba el mar y empieza el cielo. Hasta hace pocos siglos también ahí acababa el mundo. Es lo más lejos que se ve, el distintivo más característico del planeta: el horizonte. Conocer el mundo significa rebasarlo, ir más allá aunque sepamos que cualquier horizonte es inalcanzable porque no es fijo. Movernos es mover el horizonte. Cuando avanzo hacia él o cuando retrocedo, cuando me pongo de puntillas o cuando me agacho, cuando salto, así cambia mi horizonte. Pero no del mismo modo. En unas ocasiones tan solo se aleja o acerca, en otras se amplia o reduce. Desde niño el horizonte mediterráneo me ha parecido un modelo de línea recta, nítida y firme pese estar hecha de agua. Es esta línea la que da carácter a la fotografía. Sin ella, la imagen perdería toda su fuerza.

Comprender esta imagen significa entender el horizonte, saber cómo se forma, cómo es y cómo se percibe. Si no es rectilíneo, ¿por qué lo parece? He ahí las preguntas que transforman esta imagen en iMATgen.

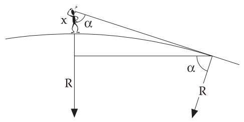
Empecemos modelizando la superficie del planeta en una esfera perfecta. Cada punto del horizonte viene determinado por la intersección de nuestra mirada, una recta de luz, con ella. Una línea luminosa tangente a la esfera en el lejano perfil del mundo. Girando sobre nuestros pies sin separar la mirada del confín de la esfera que es el mundo, nos damos cuenta de que el horizonte es una circunferencia, el perfil de la base del cono que nuestra mirada acaba de trazar mediante este giro.

Aún cuando la altitud sea suficiente como para ver de golpe todo el horizonte, su diámetro nunca igualará el del planeta. La Luna y el Sol son un poco mayores de como los vemos. Lo mismo vale para todas las cosas esféricas por pequeñas que sean: naranjas, bolas de billar, canicas, etcétera:



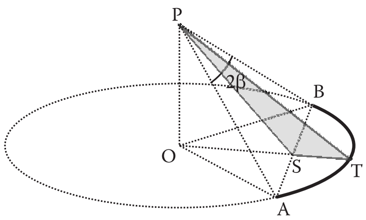
Pese a que el horizonte visible es un arco circular tampoco lo percibimos así. La luz que llega de este arco hasta el ojo forma un cono de visión. El estudio de las secciones cónicas nos dice que lo que percibimos es el resultado de la intersección de este cono con el plano horizontal, es decir, un arco elíptico.

¿Y por qué el horizonte de la fotografía se ve rectilíneo si no lo es? Se debe a que desde estaturas oculares x tan pequeñas el ángulo de incidencia de la visual con el plano horizontal es minúsculo:

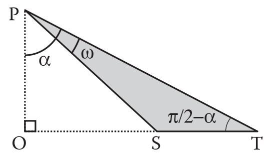


$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arcsen}\left(\frac{R}{R+x}\right)\xrightarrow[x\to o]{}0$$

En la figura siguiente se ha resaltado el fragmento visible del horizonte circular observable desde P con una amplitud o ángulo de visión igual a 2β. El triángulo APB viene determinado por este ángulo de visión que nos permite ver el arco ATB del horizonte:



Desde P, el 'grosor' del horizonte se aprecia con un ángulo ω en el vértice P del triángulo sombreado PST:



Aplicando trigonometría elemental a los triángulos PST, OSB y PSB:

$$\frac{\overline{ST}}{\mathrm{sen}\,\omega}=\frac{\overline{PS}}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Tomando R=6367500 m como radio medio terrestre, x=1 m (más o menos como en la fotografía) y β=13.25º (la imagen fue tomada con un objetivo de 80 mm, lo que equivale a una abertura de unos 26,5º), se obtiene $\omega \approx 0{,}0008782^{\circ}$. ¡Menos de una milésima de grado! Que la visión humana adolece de una capacidad semejante se confirma recordando algo de lo expuesto en la iMATgen nº. 1 sobre lo pequeñas que se ven las cosas al aumentar la distancia que nos separa de ellas. Si el ojo fuese capaz de distinguir lo que ve con un ángulo tan diminuto seríamos capaces de distinguir una manchita circular de 1 milímetro de diámetro desde una distancia d=0,5·cot($\omega/2$). O sea, desde ¡¡¡65,242 metros!!!

El ciego pregunta a quien contempla el horizonte:
—Explícame eso del horizonte.
—¿Cómo hacerlo? Lo siento, pero tu no puedes verlo.
—Ya, pero cuéntame cómo es. Para mí horizonte es sinónimo de lejano. Que algo esté en el horizonte, ¿no quiere decir que está muy lejos?
—Sí. En el límite del mundo. El horizonte es un arco de circunferencia enorme.
—¿Si miraras una plaza de toros desde muy lejos sería un horizonte?
—No hombre, no.
—¿Entonces?
—No sé, tendrías que verlo. No sé cómo explicártelo.
—Tú, ¿con qué ves?
—Con los ojos.
—¿Y yo? ¿Sabes con qué veo yo?
—No puedes ver. Creo que te haces una idea de las cosas cuando las tocas.
—¡Eso es! Llévame hasta el horizonte y lo tocaré.
—Imposible. Si te llevo, el horizonte se va.
—¿Cómo que se va? ¿Acaso es un bicho? ¡Anda ya! Te lo estás inventando todo.
—No me lo invento. El alcance de la vista determina el horizonte. La luz que llega a mis ojos desde allí lo hace en línea recta. Si te mueves, el horizonte se mueve contigo.
—Cada vez lo entiendo menos.
—Ya sé lo que haremos. Agáchate.
—¿Para qué voy a agacharme?
—Tu agáchate y verás.
—¿Cómo qué veré? No te cachondees, ¿eh?
—No es cachondeo. Agáchate y verás.
—¿Así?
—Muy bien. Ahora extiende bien los brazos, todo lo que puedas, y ábrelos hasta que sólo las puntas de tus dedos toquen el suelo.
—¿Así?
—Perfecto. Ahora gira sobre el punto donde estás hasta dar una vuelta entera, pero manteniendo siempre los dedos en contacto con el suelo.
—¿Así?
—Eso es. ¿Qué percibes? ¿Qué forma has descrito?
—Percibo el suelo con las yemas de mis dedos y he trazado una circunferencia sobre él. Si abro más los brazos, ya no lo toco.
—Ahí lo tienes, ¡este es tu horizonte!
—¡Ya lo veo! Si mis brazos fueran más largos, podría abrirlos más y ampliar mi horizonte, es decir, su radio. Si me pongo de pie, el horizonte desaparece porque ya no lo toco, no lo percibo.
—Exacto, pero puedes recuperarlo con el bastón.
—Ah, claro. Entonces tanteo el horizonte.
—¡Formidable! Lo has pillado.
—Entonces, mi horizonte es de tierra y puedo tocarlo, pero el tuyo, si está en el mar, será de agua, ¿no?
—¿De agua? ¡Ah, Claro! En el mar el límite de la vista está en el agua. Mi horizonte es líquido. Nunca había reparado en ello.
—Y no puedes tocarlo como yo. El tuyo es visual, el mío es táctil.
—Tienes razón. ¡Qué envidia me das!

El título de esta iMATgen será ***El horizonte del ciego***. Este diálogo es una ficción basada en la conversación que mantuve con Manasés Baeza, ciego de nacimiento y alumno de 1º de bachillerato del IES Vallès de Sabadell. Mientras preparaba este trabajo me pregunté sobre la idea que pueden tener las personas ciegas del horizonte. Hablé de ello con Pilar Estivill, de la ONCE y profesora de apoyo de Manasés. Me propuso que se lo preguntara a él mismo. Así lo hice. Manasés respondió que no lo tenía muy claro, que relacionaba esta palabra con la idea de algo muy lejano, que la había leído en textos literarios, pero que no se hacía una idea precisa de lo que era. Para él horizonte venía a ser un sinónimo de lejanía. Le hablé del horizonte del modo referido en el diálogo. Si Manasés veía mediante el tacto, su tacto determinaba su horizonte. Confesó no haberlo pensado así y que se había hecho una idea más clara de lo que era. Con el título de esta iMATgen quiero agradecerle lo que me enseñó. ■

iMATgen 5

El molino de esta imagen muy bien podría ser uno de los gigantes contra los que peleó don Quijote. Según cuenta Cervantes, el ataque del caballero de la triste figura acabó mal. El viento puso en movimiento las aspas del molino, éstas zarandearon al caballero y a su corcel quedando ambos maltrechos. El viento es invisible. No sale en las fotos. Sólo un vestigio indica su presencia. Pero es lo que anima el molino. Al girar sus aspas un mecanismo hace girar también una gran rueda de piedra que tritura el grano. El de la fotografía está en un lugar de la Mancha que nunca olvidaré. Forma parte de un grupo de siete gigantes que se yerguen imponentes junto al castillo de Consuegra, en la provincia de Toledo.

Hoy en día vuelven a construirse molinos de viento en todas partes. No sólo en la Mancha. Y también son blancos, pero ya no se hacen de piedra y madera. Su apariencia estilizada es consecuencia de su gran estatura. Vistos de cerca, habrían parecido gigantes a los que así le parecieron al caballero andante. Su función ya no es moler grano, consiste en transformar el viento en corriente eléctrica, un invisible en otro invisible.

Los matemáticos nos parecemos bastante al Quijote en el sentido de que nos complicamos la vida en aventuras que más a menudo de lo que desearíamos no importan a nadie ni comportan, a corto plazo, beneficio alguno. A veces nos resulta difícil decir si los objetos a los que nos enfrentamos son reales o fruto de nuestra imaginación, si son gigantes o molinos. No suelen faltar multitudes de Sancho Panzas, generalmente quienes más nos quieren, insistiendo en que recobremos el sentido y toquemos la tierra con los pies. Pero al fin y al cabo, no hacemos mal a nadie peleando contra molinos. Y salimos del lance mucho mejor de lo que salió Don Quijote. ¿O tal vez no?

La imagen muestra un cielo azul con algunas nubes, unos campos hacia el horizonte, el molino plantado en un suelo pedregoso, con sus aspas desnudas, sin tela, y unas sombras en su pared. Sombras tan precisas indican que la fotografía fue tomada en un día soleado. Y las formas de estas sombras, ¿por qué son las que son? Al concluir la escritura de esta pregunta hemos pasado de imagen a iMATgen. Estas sombras en la pared convexa de la construcción recuerdan formas parabólicas, ¿pero lo son?

El molino es un cilindro encalado. Las aspas son segmentos de madera cuya sombra traza curvas espectaculares en el cuerpo del gigante. La sombra de un segmento es un plano. La línea de sombra sobre el molino surge de la intersección de este plano con el cilindro. ¿De qué curva se trata?

Desde la perspectiva de la geometría analítica, habría que ver qué tipo de curva obtenemos al resolver un sistema de ecuaciones formado por un cilindro y un plano secante. Tomemos un caso de lo más sencillo, el cilindro de radio 1 del espacio tridimensional cuyas generatrices son paralelas al eje z ($x^2+y^2=1$) y el plano $x+y+z=1$ que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1):

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

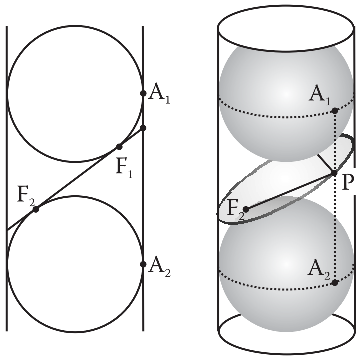
La resolución de este sistema nos conduce a $2x^2+z^2-2x-2z-2xz=0$. ¿Qué curva del espacio representa esta ecuación? En base a los valores de los coeficientes de x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz y del término independiente de esta expresión, la geometría analítica nos dice que se trata de una elipse. ¿Pero entendemos que esto sea así? Este es un ejemplo extraordinario del juego matemático. Un objeto queda determinado al conocer los valores numéricos de una serie de parámetros mediante los cuáles cuantificamos su fisonomía. Pero yo no hallo consuelo en esta justificación. Para comprender que las sombras de la pared del molino son elípticas necesito relacionar más directamente con la realidad que las produce. Si son elipses, ¿dónde están sus focos?

Beskin (1977, pp. 80-83) demuestra la cuestión partiendo de una concepción de la elipse no relacionada con los focos, sino con la circunferencia. En efecto, una elipse es una circunferencia achatada contra uno de sus diámetros, lo que determina su excentricidad. Su razonamiento es demasiado largo para incluirlo aquí. Primero prueba que la proyección de la circunferencia en un plano no perpendicular al que la contiene es una elipse. Luego se basa en este resultado para demostrar que la sección del cilindro circular que se obtiene mediante un plano no paralelo a las generatrices es una elipse cuya excentricidad está relacionada con el coseno del ángulo formado por ambos planos.

Apostol (1977) incluye en su *Calculus* (pp. 611-612) una demostración que considera preciosa y elegante de que la intersección de un plano con un cono es una elipse:

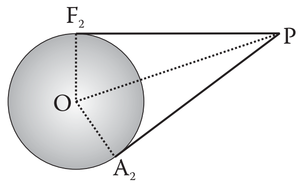
> *... fue descubierta en 1822 por el matemático belga G. P. Dandelin (1794-1847) utilizando dos esferas que son tangentes al cono y al plano secante...*

Estoy de acuerdo con Apostol en que la idea de Dandelin es maravillosa. Además es breve y fácilmente adaptable al caso del cilindro. Consiste en demostrar que los dos puntos de intersección del plano de corte con las esferas inscritas en el cilindro y tangentes a este plano determinan los focos de la elipse. La figura de más abajo muestra la situación. Primero aparece el cilindro visto de costado, la elipse se ve como si fuese un segmento, el corte del plano con el cilindro, y ambas esferas aparecen como círculos tangentes a las generatrices del cilindro. F_1 y F_2 son los puntos de intersección de este plano con cada esfera. Junto a esta figura se reproduce la situación con mayor perspectiva para poder apreciarla con más claridad.



Tomemos un punto P cualquiera sobre la curva que surge de la intersección del plano con el cilindro. La cuestión es demostrar que la suma de distancias a los puntos F_1 y F_2, intersecciones del plano secante con cada esfera, es siempre constante. Esta es la propiedad que caracteriza los focos de la elipse.

En efecto, para cualquier punto P de la curva, será $PF_1=PA_1$ y $PF_2=PA_2$ puesto que tanto PF_1 como PA_1 son tangentes trazadas a una esfera desde el mismo punto P:



Lo mismo para PF_2 y PA_2. Entonces, $PF_1+ PF_2=PA_1+PA_2=D$, siendo D la distancia constante que separa ambas esferas. Por tanto, la suma de distancias de cada punto de la sección curva a F_1 y F_2 también es constante y esta curva es una elipse con focos en dichos puntos.

Las sombras son manchas pasajeras, de quita y pon. Una parte importante del conocimiento matemático se fraguó contemplando las sombras. Aún hoy en día el análisis de las sombras supone un recurso educativo de primer orden para comprender el mundo e introducir al estudiante en el estudio de las matemáticas. En la época en que Miguel de Cervantes hacía recorrer a Don Quijote los campos de La Mancha, la luz de la noche era la luz de una vela. ¿Quién le iba a decir que siglos más tarde otros molinos, aunque no muy distintos, servirían para iluminar la noche y los rincones más oscuros?

Al contemplar un círculo desde un punto sobre la perpendicular que pasa por su centro y suficientemente alejado como para verlo entero, lo percibimos tal como es, con forma circular. Si nos apartamos de esta perpendicular percibimos con forma elíptica algo que en realidad no lo es. Después del planteamiento matemático desarrollado, sabemos que las sombras que el Sol recorta en el molino son elípticas.

Pero, ¿se percibe una elipse como tal cuando se contempla desde cualquier punto? Sólo cuando se observa desde un punto situado en el plano ortogonal al semieje mayor y ortogonal también al plano de la elipse. En tal caso, nuestra visual la comprime más aún, acentuando el achatamiento de la circunferencia de la que procede. Si la elipse se observa desde un punto situado en el plano ortogonal al semieje menor y ortogonal al plano de la elipse, nuestra visual la descomprime y puede llegar a hacerlo hasta el punto de percibirla como una circunferencia.

También los segadores, leñadores, charcuteros, lampistas y pasteleros recortan cilindros, el objeto geométrico más característico de la región manchega. Las de los molinos son ***Elipses para ver de día***. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T.M. (1977): *Calculus*. Editorial Reverté.

BESKIN, N.M. (1977): *Representación de Figuras Espaciales*. Editorial MIR. Moscú.

iMATgen 6

La forma del obsequio que nos ofrece este señor nos es tan familiar que sin saber para qué sirve somos capaces de ponerle nombre. Su tamaño puede recordarnos una pelota de balonmano, pero ésta suele ser de cuero. Es demasiado pequeña para ser una de baloncesto o un balón de fútbol o de voleibol. Por el contrario, resultaría demasiado grande para jugar al tenis o a pelota vasca. Sin tener en cuenta su aparente fragilidad. ¿Resistiría un golpe de *drive*, un manotazo de *pelotari* o un puntapié?

Quien sostiene esta pelota es también quien la construyó. Yo fui testigo de su trabajo. No realizó ningún esquema, diseño o cálculo, aunque viendo la perfección de su trabajo nos cueste creer que pueda llegar a existir. A los matemáticos no sólo nos cuesta creerlo, a menudo tampoco nos agrada que algo tan bello y bien hecho sea factible sin utilizar matemáticas.

No es raro que nos equivoquemos en esta apreciación porque incluso hay animales capaces de hacer objetos geométricos tan maravillosos como este. Un animalito hábil construyendo esferas es el escarabajo pelotero. Este bichito empuja con sus patitas traseras masas de excrementos que dirige a un lugar específico donde las comerá. Al empujarlas, la masa rueda y rueda por el suelo hasta llegar a su destino. Durante el recorrido la masa adquiere poco a poco una forma cada vez más redondeada que puede calificarse de bola o esfera maciza al llegar a su ubicación definitiva. Este objeto geométrico, la bola, modeliza matemáticamente el objeto resultante del arduo trabajo del coleóptero.

Una bola se caracteriza por la relación que guardan los puntos que la forman, esto es, que todos distan de un punto particular (llamado centro) como mucho una distancia determinada (llamada radio). La esfera, la superficie de una bola, consta sólo de aquellos que se encuentran a idéntica distancia a este centro.

Pero esta definición no refleja el modo en que el escarabajo construyó su bola. No la hizo colocando puntos a la misma distancia de uno primigenio. Su realidad es muy distinta. La bola surge de la interacción entre el contacto de la masa con el suelo y de rodar en muchas direcciones. Su superficie se va redondeando, suavizando, hasta que todos los puntos que la forman comparten una curvatura casi idéntica. Esto se corresponde con otra definición de esfera y de bola: aquel objeto macizo cuyos puntos de su superficie poseen idéntica curvatura. Estas concepciones de bola y esfera reflejan con mayor fidelidad el origen del objeto. Constituyen por tanto un modelo matemático mucho más apropiado.

Se trata de un modelo válido también en casos extremos como los de un plano y un punto porque la curvatura de una esfera puede cuantificarse en relación a su tamaño. Una superficie muy llana, apenas curvada, tendrá curvatura muy pequeña, casi nula. Es el caso del planeta que pisamos. Mientras que la de una superficie muy curvada, muy convexa, deberá ser muy grande, casi infinita. Esto es algo precisamente inverso al valor del radio de una esfera. A mayor radio, más llana su superficie. A menor radio, más convexa. La curvatura del plano, considerado como superficie de una bola de radio infinito, será nula. Considerando el punto como una bola de radio nulo, su curvatura será infinita.

Esta perspectiva resulta muy interesante porque, partiendo de la idea de esfera sugerida por un objeto tangible y real, dos objetos geométricos fundamentales como son el punto y el plano aparecen como casos límite. No debe sorprendernos que esto no sea así en la concepción euclidiana. La tierra que pisamos nos parece llana porque el radio del planeta es demasiado grande como para percibir una curvatura infinitesimal desde nuestra estatura. Vivimos demasiado cerca del límite.

El personaje de la fotografía siguió un método muy preciso para lograr una bola casi perfecta si despreciamos las imperfecciones propias que la realidad impone, tanto desde la perspectiva de la realización del trabajo como de las características de material utilizado. Ahí se fragua la metamorfosis de esta imagen en iMATgen. ¿Cómo se construyó esta esfera?

¿Cuál es su intríngulis, matemático o no? ¿Puede hacerse sin matemáticas o tal vez se construyó de modo parecido a las bolitas del escarabajo pelotero?

En esta ocasión quiero que la iMÁTgen sea explicada por otras imágenes, sin fórmulas, sin letras, sin números. Dicen que más vale una imagen que mil palabras. A ver si ahora pueden valer más unas pocas imágenes que mil números. Te invito, apreciado lector o apreciada lectora, a que realices tus propias conjeturas y análisis a partir de la siguiente serie de imágenes, las predecesoras de la que inicia este artículo:

Con la pelota de esta iMATgen se practica un deporte llamado *Sepak Takrow*, una especie de voleibol que se juega con los pies. Es muy popular en países del sudeste asiático, sobre todo en Malaysia, Tailandia e Indonesia. La red está a la altura de la cabeza de los jugadores, tres por cada equipo. La pelota se puede golpear con la cabeza y con los pies, pero no con las manos. Hay jugadas muy espectaculares. A menudo un jugador efectúa un salto acrobático, una voltereta en la que sus pies se levantan por encima de la red mientras su cabeza se aproxima al suelo. Así puede chutar hacia el campo contrario. Algo parecido a lo que en fútbol se llama chilena, pero con algo más de genio y rabia.

La pelota está hecha de ratán, una fibra vegetal flexible parecida al mimbre, pero de sección más llana, no tan redondeada. Aunque, más que hacer, la verdadera tarea del artesano consiste en ***Tejer la esfera***. ■