SUMA 45
Febrero 2004, pp. 87-91

En el entorno del teorema Kou-Ku (II)

Nos son tan habituales algunas cosas que no nos sorprendemos ante ellas ni nos paramos a pensar acerca de su significado profundo o sobre la maravilla de su gestación, perdida a veces en la noche de los tiempos. Considerado en abstracto, como una relación entre superficies de figuras descontextualizadas, ¡no es nada evidente el teorema de Pitágoras!, pero hay muchos problemas de tipo práctico que obligan a pasar obligatoriamente por el ángulo recto. ¿Cómo construir si no, por ejemplo, un edificio de una mínima prestancia? Las divulgaciones al uso han justificado siempre su origen en la necesidad de medir terrenos después de las crecidas de los grandes ríos en cuyas orillas se asentaron las primeras civilizaciones sedentarias. Se supone también que habría que definir retículas ortogonales y que ello llevaría a catalogar ternas de números que permitieran construir ángulos rectos. Cuando se contempla desde un montículo la hermosa anarquía distributiva que el devenir de los tiempos ha producido en nuestros campos, parece claro que ese afán regulador sólo puede darse bajo un fuerte poder centralizado. Así pues, quizás haya que incluir el teorema Kou-Ku —junto, por ejemplo, el monoteísmo y los primeros códigos legislativos— entre las primeras consecuencias de la aparición del Estado (con mayúsculas, claro).

Sea como fuere, la acumulación de conocimiento empírico sobre las características de los triángulos con un ángulo recto, condujo a las tres situaciones heurísticas posibles:

- Catálogo de casos particulares para la resolución de problemas prácticos. Probablemente sea lo que ocurrió en Egipto.

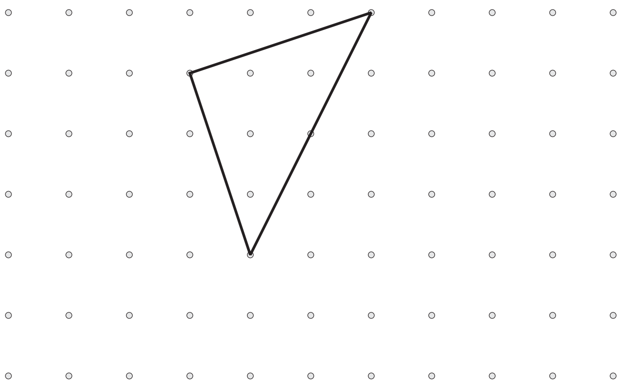
- Elaboración de métodos generales, pero no necesariamente exhaustivos, de búsqueda de soluciones. A este planteamiento —un programa de trabajo muy actual, pero desarrollado sin ordenadores— responde la famosa tablilla nº 322 de la colección de Plimpton[1]. Cinco columnas por quince filas de números cuneiformes tallados en arcilla. Tres de las columnas contienen ternas racionales pitagóricas. Si se sigue el método de Diofanto [para cualquier par de enteros m y n, los números $2mn$, m^2-n^2 y m^2+n^2 cumplen la relación de Pitágoras], sólo hay 16 ternas pitagóricas con las condiciones $n\leq 60$ y $30^\circ\leq \alpha\leq 45^\circ$, siendo α uno de los ángulos agudos del triángulo. A la luz de la información que proporciona la tablilla, no está nada claro cuál fue el procedimiento seguido por los matemáticos babilonios para generarlas, pero ¡15 de esas 16 ternas están en la tablilla de Plimpton![2] ¿Casualidad? En cualquier caso es obligado recordar que fue fabricada entre el 1800 y el 1650 a. de C., que Diofanto trabajó en el s. III de nuestra era y que su producción se inserta mejor en la tradición matemática de Mesopotamia que en la griega.

- Resolución teórica del problema. La opción más apreciada por la especulación que busca alejarse de necesidades prácticas. Sin ella no habría matemáticas, pero sin el ejercicio de diseño de la anterior no serían útiles.

Un teorema difícil

Nuestros alumnos y alumnas no sienten ninguna necesidad vital de inventar nada sobre los triángulos rectángulos, y en estos casos la didáctica tradicional recurre a la revelación descendida desde la tarima: planteamiento y resolución en abstracto sin tanteos empíricos previos. Ello dificulta que el teorema —sin haber pasado por un período en el que sólo haya sido conjetura— pueda ser vivido como un problema interesante. Si no se quiere recurrir a esto, ¿qué otra cosa se puede hacer sino iniciar un proceso que motive a buscar relaciones numéricas entre los catetos y la hipotenusa? Ocurre que los adolescentes de nuestras aulas no están al servicio de ningún faraón ni tienen terrenos de contornos borrados por río alguno. Siempre queda la posibilidad de una simulación: empezar midiendo superficies en tramas cuadradas y, a partir de ahí, calcular sus perímetros. Veamos un ejemplo.

Angel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fesp.org



- *Describe este triángulo justificando tus afirmaciones.*
- *¿Cuánto mide su superficie?*
- *¿Y cuánto su perímetro? Piensa - recuerda un poco: hemos sido capaces de calcular la longitud de algunas distancias difíciles.*

"Habíamos sido capaces" —estamos hablando de grupos de 1º ó 2º de ESO— por el procedimiento de construir el cuadrado cuyo lado es la longitud a medir y contar el número de cuadraditos que caben en su interior (figura 1), así que se esperaba que llegaran a $2\sqrt{10}+\sqrt{20}$.

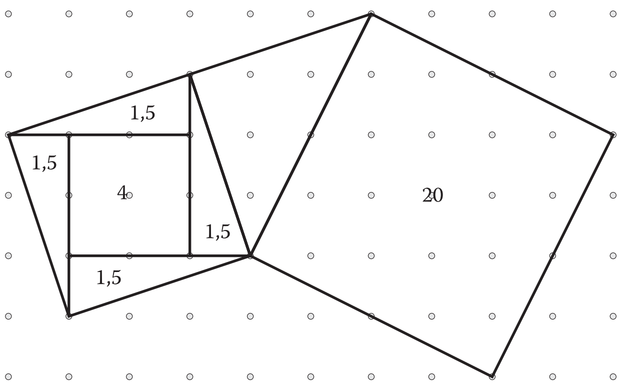


Figura 1

Pero hay algunas cuestiones, habitualmente desatendidas, que complican este tipo de ejercicios. En primer lugar, el dibujo de los cuadrados: pasad la trama en 3º ó 4º ESO y comprobaréis que bastantes más alumnos y alumnas de los esperados tienen dificultades para trazar la perpendicular a un segmento desde un punto dado, sea exterior o no al propio segmento. No digamos nada si proponemos hacerlo en papel sin cuadricular. Pero, ¡atención!, hay que recordar que esto no es así porque sean especialmente malvados/as o inútiles (no añadimos el porqué, ya sabéis lo que diríamos). Una segunda dificultad —¿cómo superarla?— está en la conexión entre la superficie y la longitud. El hecho de que el lado de un cuadrado de área 25 mide 5, es algo que se comprueba a simple vista en la trama. Pero que si el área es 2, el lado mide $\sqrt{2}$, esto roza lo esotérico. ¡No exageramos! No hay ningún apoyo tangible para un número tan extraño como *1,414213567...* salvo la calculadora y el hecho de que si $5 \times 5 = 25$, "algo tiene que haber que dé 2".

¿El resultado de todo esto? Como tantas otras veces será imposible saberlo, porque el Sistema (el educativo y el Otro) tiene prisa y además, por lo general, impedirá continuar el trabajo y por lo tanto hacer las comprobaciones oportunas el curso próximo. Por nuestra parte, detectamos ya algunas dificultades no previstas. Por ejemplo: para calcular el perímetro de un rectángulo muchos alumnos y alumnas (¡demasiados!) contaban los cuadritos de su superficie y extraían con su calculadora la raíz cuadrada. ¿Había que haberlo previsto? Bueno... se aprende probando pero, sobre todo, se les están cruzando en el camino indeseables actitudes asumidas después de tantos años de adoctrinamiento procedimental: ¡qué bien aprendido queda aquello de que si repites se te premia! ¿Deberían estar alerta y no aplicar mecánicamente métodos anteriores a situaciones nuevas? Puede uno desesperarse pero, analizando en perspectiva, no hay más remedio que intentar desactivar estas bombas lapa adheridas al librepensamiento. Además, la utilización inconsciente de este tipo de actitudes depende mucho del grupo y de las relaciones entre sus individualidades.

Cuando forzamos el salto y propusimos elaborar un cuadro en la pizarra con datos recogidos sobre medidas de los lados de triángulos de los tres tipos,

Acutángulos			Rectángulos			Obtusángulos		
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*

hubo bastantes que no intentaron conjetura alguna... o no se atrevieron a verbalizarla. Es verdad que el puzzle de Liu Hui[3] aclaró bastante una conexión que había resultado —así nos lo pareció— excesivamente inesperada, pero ante la petición, unos días después, de buscar grupos de tres números que permitieran dibujar triángulos rectángulos, reaparecieron las dificultades: sumaban los lados en lugar de sus cuadrados.

Nada de esto es grave si no se pretende saltar deprisa obstáculos epistemológicos que son muy naturales. En realidad, hay que admitir que el proceso fue quizás un tanto artificial, forzado a destiempo para que el profesor, al no atreverse a recomendar a su departamento que volviera a trabajar el teorema kou-ku el curso próximo con este grupo, pudiera escribir en su resumen final que sí, que Pitágoras había sobrevolado el aula como la Programación había previsto. Acostumbrados a que lo hiciera sin ser nosotros los responsables del primer contacto, la experiencia de estos años nos indica que el teorema kou-ku es difícil. Mucho más difícil de lo que parece suponer una práctica docente que lo reduce a las primeras de cambio a una simple, abstracta y descontextualizada relación numérica, independiente incluso —como nos demuestra el trato con alumnos y alumnas año tras año— de la particular relación entre áreas que estuvo en su origen.

Extensiones del contexto de aplicación del teorema

I

Hay algunas cosas que casi nuca se hacen en las aulas de Secundaria, no sólo con el teorema Kou-Ku sino con casi todos. Una de ellas es generalizarlo, ampliando su contexto de aplicación y modificando para ello su enunciado en función de los datos que hayamos decidido cambiar en la situación inicial. Sí que hemos visto en algún texto escolar —y siempre en una de esas notas a las que habitualmente no se hace caso— dibujos parecidos al de la figura 2, pero ninguno como el de la figura 3.

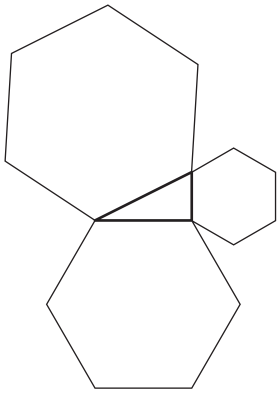


Figura 2

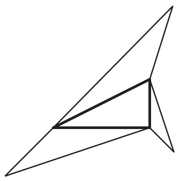


Figura 3

Llamando *a*, *b*, *c* a los lados del triángulo rectángulo, las áreas de las figuras construidas sobre cada uno de ellos serán proporcionales, con el mismo factor de proporcionalidad (k) puesto que se trata de figuras semejantes, a las de los cuadrados construidos sobre cada uno de ellos. Es decir, las áreas de las tres figuras serán ka^2, kb^2 y kc^2, y puesto que el teorema es válido para cuadrados queda también demostrado para figuras semejantes. Una argumentación de este tipo, tan contundente, es demasiado abstracta, poco tangible, y quizás deberemos dejar tiempo en clase para alguna comprobación experimental previa, tanto sobre las superficies de las figuras como sobre la relación entre éstas y sus cuadrados. Estamos pensando, en cualquier caso, en 4º de ESO. Es cierto que el primer contacto con el teorema Kou-Ku se ha producido dos años antes, pero no es bueno que termine la reflexión en el caso particular de los cuadrados ni se puede pretender generalizar inmediatamente, porque es necesario disponer de tiempo para asimilar ideas y porque la ampliación a un nuevo contexto requiere controlar las características de éste.

Pero detengámonos un poco en el razonamiento anterior. Es obvio que no lo hemos recogido aquí por su novedad, sino para comentar la elegante vuelta de tuerca que le permite a Polya utilizarlo en sentido contrario para demostrar el teorema inicial de Pitágoras. Primero advierte que la relación de igualdad entre áreas se cumple trivialmente para un grupo particular de figuras semejantes: los dos triángulos rectángulos en que la altura sobre la hipotenusa divide a cualquier triángulo rectángulo, y él mismo (figura 4).

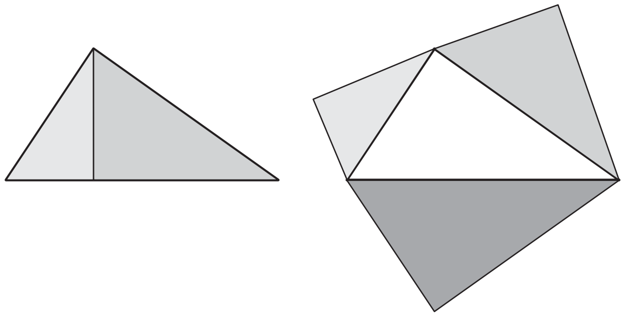


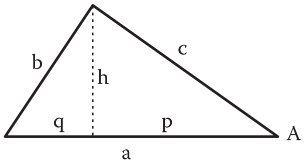
Figura 4

Pero, puesto que los tres son figuras semejantes, sus áreas se podrán expresar en función de los cuadrados construidos sobre sus hipotenusas con el mismo factor de proporcionalidad. Así pues, $ka^2 = kb^2 + kc^2$, de donde $a^2 = b^2 + c^2$.

Si el puzzle de Perigal con el que empezamos esta serie de artículos es nuestra prueba favorita desde la Geometría para el teorema Kou-Ku, la de Polya es nuestra preferida desde la Lógica. ¿Ante qué maravillarnos más? ¿Ante la sutileza del maestro de la Resolución de Problemas o ante la infinita variedad de matices encerrados en una figura de aspecto tan ingenuo?

II

De momento hemos ampliado el campo de figuras que podemos dibujar sobre los lados del triángulo, pero hay otras cosas que pueden variar. La generalización más natural es sin duda la extensión del teorema a triángulos de cualquier tipo, lo que nos lleva, al menos en la enseñanza secundaria, al llamado teorema del coseno. De nuevo, un resultado reducido a una fórmula numérica y al que se le suele quitar gran parte de su carga interpretativa sobre la forma de los triángulos. ¿Acaso una demostración aritmética del tipo de la sugerida en la figura 5 aporta claridad sobre el porqué del resultado que afirma el teorema? ¿Dónde está la superficie que hay que añadir o restar para igualar el cuadrado de un lado con la suma de los de los otros dos?



$$b^2 = h^2 + q^2 = h^2 + (a-p)^2 = etc.$$

Figura 5

Antes de ver cómo describe Euclides esa reducción o incremento de áreas, recordemos su demostración del teorema de Pitágoras. Ya comentamos en el artículo anterior que se basa en que el cuadrado de la hipotenusa queda dividido por la altura que cae sobre ella en dos rectángulos, que son iguales respectivamente a los cuadrados de sus catetos correspondientes, tal y como muestran los colores de la figura 6. Habitualmente nos referimos a este hecho llamándolo Teorema del cateto (figura 7).

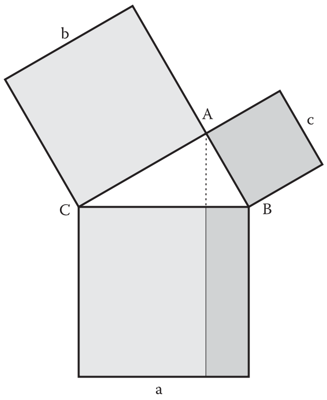
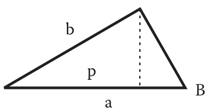
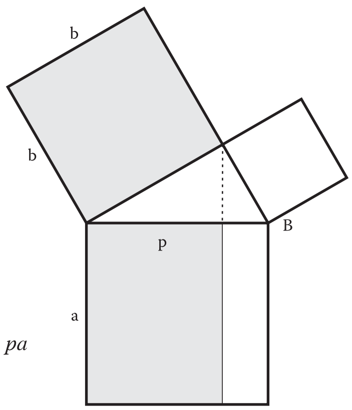


Figura 6



$$\frac{p}{b} = \frac{b}{a}$$



$$b^2 = pa$$

Figura 7

En las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos*, Euclides afirma:

> En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso.
>
> En un triángulo acutángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo agudo en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular desde el otro ángulo.

Se acompañan estos dos párrafos con un dibujo que no "retrata" la situación que describe. Se podía haber esperado que así fuera, visto el carácter tan figurativo de los enunciados, pero sólo es el punto de partida para su habitual argumentación deductiva. Seguramente, un hindú de su misma época habría añadido un *¡Mira!* al dibujo—fotografía y habría evitado la descripción escrita. Si queremos comprender el porqué "físico" de la relación entre áreas asegurada por las proposiciones 12 y 13, necesitamos esa "fotografía". Lo que afirma Euclides es que si el triángulo es acutángulo hay que restar a los cuadrados de los catetos los rectángulos en blanco de la figura 8. Obsérvese (figura 9), que $AQ = c \cos A$ y que $AR = b \cos A$.

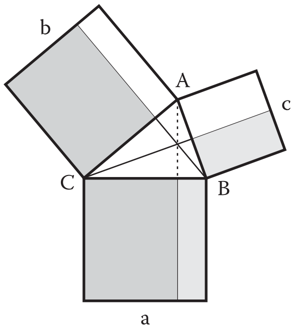


Figura 8

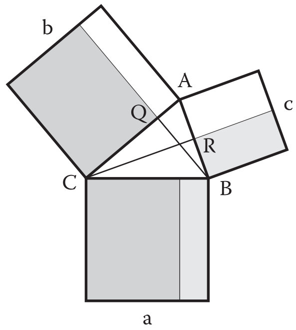


Figura 9

Si el triángulo es obtusángulo, hay que añadir a los cuadrados de los catetos los dos rectángulos más oscuros de las figuras 10 y 11. Ahora, $AQ = -c \cos A$ y $AR = -b \cos A$.

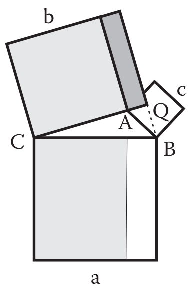


Figura 10

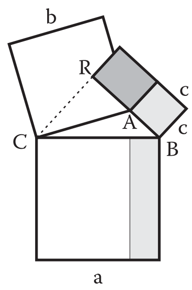


Figura 11

Si cambiamos de posición las dos superficies añadidas (figura 12) podemos verlas en el mismo dibujo sin que se superpongan.

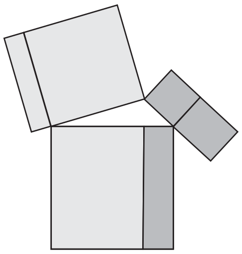


Figura 12

Uno de los más interesantes traductores y matemáticos del Bagdad del siglo IX, Thabit ibn Qurra, generalizó de una manera distinta el teorema Kou-Ku a triángulos cualesquiera. Pero de esto nos ocuparemos en el siguiente artículo. ■

Notas sobre el artículo anterior

Convertida "la red" en el archivo por excelencia, en el Archivo —machaconamente recomendado por el Poder—, la tentación de creer (¡atención!, no hemos escrito pensar sino creer) que allí está todo[4] y en mayor cantidad que en ningún otro archivo, se ha vuelto muy fuerte. Así que "mira qué bien que encontramos al Perigal en Internet". Pero lo cierto es que el nombre de Henry Perigal dormía en nuestras estanterías en varias publicaciones que asocian a su inventiva el "puzzle de Dudeney" para demostrar el teorema Kou-Ku. Lo hace Bruno Munari (1999), que afirma que Perigal era astrónomo aficionado. Greg N. Frederickson (2000) aporta además el intervalo de su vida (1801-1899), y prefiere fijarse en que era corredor de bolsa, como la página web que habíamos consultado. Se ve que fue las dos cosas, astrónomo y corredor de bolsa. A saber. Lo sorprendente es que nos preocupemos de estas minucias. Quizás nos estén sentando mal las colaboraciones en SUMA.

Más nos interesa la conexión que establece Frederickson entre el puzzle de Perigal y dos mosaicos superpuestos de cuadrados (figura 13). Uno de ellos, con figuras de dos tamaños, nos será fácilmente reconocible por haberlo pisado en muchos suelos de casas antiguas.

NOTAS

1 Hubo un tiempo en que las potencias coloniales rapiñaban a la vez recursos naturales y producción artística o intelectual de los países colonizados. Quizás a veces se intentaran guardar las formas "legales". La colección Plimpton se conserva en la Universidad de Columbia.

2 Véase G. Gheverghese Joseph (1996)

3 Véase la figura 11 del artículo anterior de esta Sección, en el número 44 de SUMA.

4 ¿Qué quiere decir esta palabra?, todo. ¿Qué debería querer decir?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EUCLIDES (1991): *Elementos*. Gredos, Madrid.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*. Pirámide, Madrid.

FREDERICKSON, G. N. (2000): "L'art des dissections géometrique". *En Jeux mathématiques*, número especial de *La Recherche*, mayo-junio 2000, págs. 44-46.

MUNARI, B. (1999): *El cuadrado*. Gustavo Gili, México. (la edición italiana es de 1978).