SUMA 45
Febrero 2004, pp.59-67

Una caracterización de π obtenida al resolver un problema en clase

La resolución de auténticos problemas, lamentablemente, no es frecuente en clases de matemáticas; sin embargo, su práctica proporciona un efecto muy beneficioso para los alumnos y constituye una buena fuente de información para el profesor sobre los procesos de aprendizaje. Se relata la experiencia realizada por el autor al proponer a alumnos universitarios de primer ciclo un problema -que generó otros- en el que se pedía analizar una suma infinita de radicales superpuestos. Como consecuencia se obtuvo una nueva expresión de la fórmula de Viète para el cálculo de π, así como una caracterización de dicho número.

The resolution of authentic problems, regrettably, is not frequent in classes of mathematics; however, its practice provides a very beneficial effect for the pupils, and constitutes a good source of information for the teacher on the learning processes.In the present article is reported the experience accomplished by the author upon proposing to first cycle university pupils a problem - which at the same time generated others - where it wasrequested to analyze an infinite sum of superposed radicals. As a result it was obtained a new expression of the formulation of Viète for the calculation of π, as well as a characterization of such a number.

En la amplia literatura existente sobre resolución de problemas matemáticos, el concepto de problema se identifica con el planteamiento de situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas (no mecánicas) del conocimiento matemático. Se entiende, por tanto, que para resolver verdaderos problemas se precisan procedimientos matemáticos creativos, esto es, no reducibles a la práctica de meras rutinas; lo que les diferencia de los ejercicios, que se solucionan sin más que reproducir y aplicar métodos y algoritmos rutinarios.

Por otro lado, la actividad matemática desarrollada en la resolución de un problema, puede verse enriquecida si éste es capaz de generar a su vez otros problemas (Bouvier *et al.* 1986, p. 308) o se presenta mediante una formulación algo vaga que permita realizar nuevas conjeturas (Blanco 1993, p. 40). En este último caso se trataría de problemas próximos a pequeños trabajos de investigación, que estarían en sintonía con los denominados problemas abiertos, en los que la descripción de las situaciones de partida y/o de llegada no son expresadas con total exactitud (Penhkonen 1995, p. 95).

Aun así, a pesar de la potencialidad que conlleva la práctica de la resolución de problemas, hasta el punto de que el National Council of Supervisors of Mathematics, por ejemplo, ha situado a aquélla como la primera de las doce componentes esenciales de la enseñanza de las matemáticas del siglo XXI, no obstante, su planteamiento es poco común en las clases de matemáticas. De esta manera, no suele tenerse en cuenta la utilidad de ese recurso para que los propios alumnos puedan detectar determinados errores, superen bloqueos, sientan la necesidad de demostrar sus conclusiones, desarrollen en forma constructiva el espíritu crítico, adquieran la impresión de hacer de verdad algo creativo en matemáticas...; como tampoco, que resulta ser una buena fuente de información para el profesor sobre los métodos de razo-

> *El concepto de problema se identifica con el planteamiento de situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas.*

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid

namiento empleados por los alumnos y acerca de cuáles son los errores, estrategias y obstáculos más comunes.

Por supuesto, estos argumentos siguen siendo válidos en el ámbito de la enseñanza universitaria, donde pueden estimularse, de igual modo, la imaginación y la intuición, además de favorecerse los procedimientos de investigación usuales en matemáticas (inducción, generalización, analogía, establecimiento de conjeturas, técnicas de demostración, etc.). Y es en ese marco donde tuvo lugar la experiencia a la que me voy a referir; concretamente con ocasión del desarrollo de un curso sobre historia de la matemática para estudiantes universitarios de ciencias de primer ciclo. La metodología de trabajo consistía en exponer cada tema y posteriormente proponer uno o varios problemas -en el sentido mencionado- relacionados con el mismo, que debían resolver los alumnos -era una clase poco numerosa- distribuidos en grupos de tres. He de decir además que yo casi nunca había resuelto totalmente con anterioridad tales problemas, con el propósito de poder observar con mayor libertad las dificultades y los progresos de los estudiantes.

Debido a esta última circunstancia, sobre todo al principio tenía una cierta sensación de inseguridad, pues se suscitaban conjeturas o problemas colaterales inesperados y se formulaban preguntas a las que no sabía responder en el acto. Con el tiempo, sin embargo, pude ir apreciando cuáles eran algunas de las consecuencias de esta práctica, como la riqueza de ideas que surge del trabajo en grupo o que quedara constancia delante de los alumnos que el profesor no tenía por qué saber "todo"; además, claro está, me permitió conocer mejor su forma de razonar. A cambio, ciertamente, tuve que trabajar mucho más que si se tratara de una clase organizada de manera tradicional, lo que sin duda redundó en que todos -estudiantes y profesor- aprendiéramos. En cualquier caso, hay que añadir que hubo que dedicar asimismo un tiempo adicional a la búsqueda de dichos problemas, que no siempre fui capaz de encontrar.

Propuesta de un problema

Distintos algoritmos infinitos utilizados en el siglo XVI, como las fracciones continuas y las sumas y productos infinitos, suelen ser considerados los precursores del cálculo infinitesimal; si bien, los razonamientos de índole infinitesimal son casi tan antiguos como la propia matemática, y ya se encuentran rasgos de ello en el método exhaustivo de Eudoxo (s. IV a. C.), puesto en práctica por Arquímedes (s. III a. C.).

Precisamente, a raíz de la obtención de las conocidas expresiones de π de Leibniz, Wallis, Viète ... , observé que, así como en las dos primeras π se presenta de forma relativamente sencilla (como suma infinita y producto infinito, respectivamente, de fracciones elementales), en cambio, en la fórmula de Viète aparecen productos de expresiones radicales ciertamente incómodas de manejar. Aunque, claro está, no me parecía que pudieran suprimirse las raíces, sí creía posible eliminar sus denominadores; toda vez que, a simple vista, lo consideraba factible con sus primeros factores.

La idea inicial para el planteamiento del correspondiente problema –que enseguida enunciaré- fue, por tanto, tratar de hacer una modificación en la fórmula de Viète, cambiando las expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},\ldots$$

por otras del tipo

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots$$

En relación con ello, se me ocurrió entonces, también, intentar la generalización de estas últimas expresiones; esto es, estudiar la suma infinita:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}},\quad a>0$$

teniendo en cuenta su aparente presencia en dos casos particulares (parece ser que si a=2 intervendrá en la obtención de π y, si a=1, en una expresión del número áureo, ϕ).

Fue a partir de tales reflexiones como ideé el siguiente problema, que deliberadamente -la razón ya ha sido indicada en la introducción- no quise enunciar en forma cerrada:

Estudia la expresión: (1)

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}},\quad a>0$$

¿En algún caso particular podría utilizarse para el cálculo de π?

Resolución del problema

Estudio de una suma infinita

En virtud de una de las sugerencias didácticas de más frecuente uso en la resolución de problemas, como es comenzar por casos particulares, y con mayor razón aún en este ejemplo concreto, en el que, como se indica, será preciso tener presente alguno de ellos, los alumnos empezaron enseguida observando qué sucedía si a tomaba el valor 1. Con una calculadora fueron obteniendo:

$$\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1}}=1{,}414213562\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1{,}553773974...$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1{,}598053182...$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} = 1{,}611847754...$$

...

es decir, "parecía ser" que se tratara de una sucesión monótona creciente.

Aunque algunos alumnos creían suficiente esa sospecha para poder afirmarlo, otros opinaban que era precisa una demostración formal; si bien -como requerían los primeros- no disponían de ejemplos concretos en los que, verificándose un aserto en casos particulares sucesivos, fallara en cambio en el caso general. Me ví obligado entonces a hacer un largo paréntesis para proponer el siguiente ejemplo -ciertamente, muy alejado del problema en cuestión- : *el valor numérico del polinomio* $p(x)=x^2-x+41$ *para* $x=0,1,2,...$, *¿es siempre un número primo?* Una vez resuelto (como es sabido, la respuesta es afirmativa si $x=0,1...,40$, pero no lo es para $x=41$), fue admitido unánimemente que en matemáticas no basta con "fiarse de las apariencias".

Y, ¿cómo probar formalmente entonces que la anterior sucesión (r_n), $n=1,2,...$, es, en efecto, una sucesión monótona creciente?

Después de varios intentos, algunos grupos quedaron bloqueados, y fue preciso, en primer lugar, hacer las siguientes indicaciones: ¿cuál es la expresión de la sucesión? ¿es posible definir una sucesión mediante una relación entre sus términos? Ello fue suficiente para que consiguieran expresar (r_n) por recurrencia: (2)

$$r_n = \sqrt{1+r_{n-1}},\, r_1 = \sqrt{1}$$

y así definida no les fue difícil demostrar su monotonía.

A continuación, pregunté: ¿la sucesión es divergente? ¿tiene límite?, y, en caso afirmativo: ¿cómo se calcula? ¿conocéis alguna otra sucesión en la que se hayan tenido que realizar razonamientos de este estilo? Aunque estas preguntas bastaron para la mayoría de grupos, hubo uno en que no se recordaba casi nada de las propiedades de las sucesiones ni de la construcción del número e, por lo que se les propuso su estudio, mientras los demás grupos trabajaban en silencio.

Finalmente, todos fueron capaces de demostrar por inducción que la sucesión estaba acotada superiormente por 2 (a la vista de los valores de sus primeros términos) y todos, menos el grupo mencionado anteriormente -a pesar del estudio complementario que acababan de realizar, su conocimiento y manejo de las sucesiones seguía siendo insuficiente- calcularon su límite l resolviendo la ecuación: (3)

$$l = \sqrt{1+l}$$

lo que condujo a que $l=\phi$ (la otra solución,

$$\phi' = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$$

carece obviamente de sentido).

Así pues: (4)

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} = \phi$$

Para estudiar el caso siguiente, correspondiente a a=2, los alumnos consideraron de modo análogo la sucesión (s_n), n=1,2,..., siguiente: (5)

$$s_n = \sqrt{2+s_{n-1}},\, s_1 = \sqrt{2}$$

que ya no tuvieron dificultad en probar que es monótona creciente y está acotada superiormente por 2. Procediendo de manera similar a la anterior, esto es, razonando por analogía (buscando similitudes entre el método o la solución de un problema conocido ya resuelto y el que tratamos de resolver), llegaron a que su límite es 2: (6)

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2$$

Los dos casos particulares dieron la pauta para abordar el general con $a>0$ arbitrario, y los alumnos construyeron la sucesión (t_n), $n=1,2,...$, siguiente: (7)

$$t_n = \sqrt{a+t_{n-1}},\, t_1 = \sqrt{a}$$

Así como les fue sencillo probar que se trata de una sucesión monótona creciente, no lo fue tanto hallar una cota superior. Tras alguna reflexión, los diversos grupos propusieron como posibles cotas superiores: 2, a, $2a$, y $a+1$ (nótese que la primera posibilidad fue fruto de un incorrecto razonamiento por analogía -la búsqueda de regularidades con los dos casos particulares anteriores, en los que 2 era una cota superior, les indujo a pensar que también lo sería en el caso general- ; en las otras tres, sin embargo, se admitía que las cotas debían depender de a, aunque me daba la impresión de que se habían limitado a buscar apresuradamente tales expresiones simples, sin comprobar que fueran cotas). No obstante, en cuanto hicieron los cálculos oportunos, probaron por inducción que, de las cuatro propuestas, sólo $a+1$ era cota superior (tuve ocasión de percibir entonces que existían problemas en la resolución de inecuaciones, tales como :

$$\sqrt{a} < a \text{ o } \sqrt{a} < 2a$$

y, en general, con el uso de desigualdades).

Como consecuencia, quedó demostrado que si $a>0$, la sucesión es convergente y, repitiendo el proceso seguido anteriormente para calcular el límite, comprobaron de igual modo que el límite de la sucesión (t_n) es

$$\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$$

esto es: (8)

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = \left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}25+\ldots}}} = \left(1+\sqrt{2}\right)/2$$

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}} = 3, \sqrt{11+\sqrt{11+\sqrt{11+\ldots}}} = \left(1+3\sqrt{5}\right)/2, \ldots$$

Relación con la fórmula de Viète

Tras un largo debate previo, se llegó finalmente a la conclusión de que, de las fórmulas conocidas para el cálculo de π, solamente en la de Viète: (9)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

sus factores guardan cierta analogía con un caso particular de (1): el correspondiente a $a=2$.

Habría entonces que tratar de transformar expresiones de la forma:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}}}$$

en otras del tipo:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Comparando tales expresiones en casos particulares:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots$$

parece ser que cada suma parcial de la primera es la mitad de la correspondiente a la segunda.

Pregunté si ello era suficiente para poder afirmar que la igualdad era válida en el caso general; y ahora todos los grupos ya estuvieron de acuerdo en que no, pues era necesario probarlo formalmente. Les invité entonces a que así lo hicieran, sin ninguna otra indicación por mi parte.

Me di cuenta entonces de que la comparación de ambas sucesiones les resultaba difícil sin crear previamente una "organización" conveniente en el problema. Solamente un grupo avanzaba en la dirección adecuada, pero los demás necesitaban una ayuda para concebir un plan; por lo que me vi obligado a decirles que trataran de poner en práctica las ideas de Polya.

Todos los grupos se dieron cuenta poco después de que ya habían estudiado algo relacionado con este problema, pues la segunda sucesión era la (s_n) vista antes e, igualmente, casi todos entendieron que era necesario introducir una notación adecuada para manejar la primera sucesión, extremo que hube de sugerir explícitamente a dos grupos que no habían caido en ello. Con este planteamiento, todos definieron la sucesión (s'_n) del siguiente modo: (10)

$$s'_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s'_{n-1}}, s'_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

que había que comparar con (s_n) de (5).

Procedieron luego por el método de inducción, y como $s'_1=s_1/2$, y si $s'_{n-1}=s_{n-1}/2$, de la misma forma:

$$s'_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s'_{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}s_{n-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+s_{n-1}} = \frac{1}{2}s_n$$

con lo que quedó demostrado realmente que: (11)

$$s'_n=s_n/2$$

Entonces, la fórmula de Viète, que puede expresarse: (12)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s'_1\ldots s'_n}$$

igualmente cabe ser presentada de esta forma: (13)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{s_1\ldots s_n}$$

o bien: (14)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} u_n$$

siendo (u_n), $n=1,2,\ldots$, la sucesión de término general: (15)

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{s_1\ldots s_n}$$

Finalmente, la forma (9), que es como habitualmente se expresa la fórmula de Viète, puede también presentarse, por tanto, del siguiente modo: (16)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}{2}\cdots$$

Análisis de la solución
Algunos alumnos mostraron en este momento la conveniencia de examinar la solución obtenida, tal como sugiere Polya (1986, p. 53), y ya habíamos hecho en otros casos. Esta visión retrospectiva, consistente en "reexaminar el resultado y el camino que les indujo a ella" (*ibid.*, p. 35), es fundamental en el proceso de descubrimiento, pues, además de permitir la detección de errores o la sustitución de una hipotética vía larga y complicada por otra más corta y simple, puede abrir nuevas líneas de investigación en el problema planteado o, acaso, una vez sintetizados los pasos realizados, ser de utilidad en otras ocasiones al volver a ponerlos en práctica.

En el problema que nos ocupa, recordemos que partiendo de la expresión (1), el razonamiento por analogía nos ha llevado a la fórmula de Viète, que finalmente hemos sido capaces de expresar de otra forma equivalente al considerar en aquélla el caso particular a=2. Pero, dejando momentáneamente de lado la analogía algebraica -o analítica- con la fórmula de Viète, ¿qué significado tiene ésta? ¿de dónde surge?

En la revisión del proceso de deducción de la mencionada fórmula -véase por ejemplo Peralta (1996, pp. 92-93)-, se observa que se ha obtenido al pretender hallar las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia unidad, a los que, partiendo del cuadrado, se les va duplicando sucesivamente el número de lados. De este modo, el área del polígono "tiende" al área del círculo; o sea, a π. Por tanto, la fórmula de Viète se sustenta en las ideas del método exhaustivo de Eudoxo.

Aunque mayoritariamente los alumnos realizaban bien los cálculos, algunos no designaban de forma conveniente los elementos del problema para la posterior generalización de los resultados.

El hecho de haber llegado a este punto me parece crucial, pues es a partir de esta reflexión como puede plantearse una nueva línea de investigación en el aula, es decir, el problema enunciado era a su vez generador de otros problemas (lo que -he de confesar- yo no había pensado al proponerlo, pero sin embargo ahora ofrecía otras posibilidades). Con todo, para establecer una conclusión y concebir un camino a seguir, hubo que hacer un debate entre los distintos grupos y realizar alguna insinuación sobre una posible dirección. Finalmente, algunos alumnos sugirieron volver a utilizar el método de Eudoxo, pero calculando ahora perímetros en vez de áreas, para ver si existía o no analogía con la expresión (16) [o (9)]; lo que les pareció bien a los restantes.

Otra línea de investigación

Cálculo de perímetros
Se procedió entonces a hallar los perímetros de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia unidad, a los que se les duplica reiteradamente el número de lados, empezando por el cuadrado. Lógicamente, los estudiantes comenzaron a trabajar por los casos más sencillos: cuadrado, octógono regular ...

Observé entonces que, aunque mayoritariamente los alumnos realizaban bien los cálculos, algunos no designaban de forma conveniente los elementos del problema para la posterior generalización de los resultados. En realidad, ya había comprobado algo parecido en problemas de modelización, esto es, cuando se trata de dotar a un sistema de esquemas estructurados con una organización matemática; pero no pensé que en casos como éste, en que la situación de partida es indudablemente matemática, el hecho de tener que adoptar una notación adecuada fuera un auténtico obstáculo para su resolución. No obstante, una pequeña sugerencia en este sentido y, posteriormente, las ideas que algún alumno transmitió a sus compañeros de grupo, fueron suficientes para desatascar la situación de los diferentes grupos.

Designando por l_n y P'_n, respectivamente, el lado y al semiperímetro del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia, obtuvieron:

$$l_4=\sqrt{2},\ P'_4=2\sqrt{2};$$
$$l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}},\ P'_8=4\sqrt{2-\sqrt{2}};$$
$$l_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ P'_{16}=8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};\ldots$$

Y probaron después por inducción que: (17)

$$l_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$$

Por otra parte, los índices de la sucesión de semiperímetros (4, 8, 16 ...) se correspondían con el número de lados de sus respectivos polígonos, pero indiqué que parecía más conveniente ordenar sus términos de la forma habitual (1, 2, 3 ...), y no hubo problemas en realizar el cambio de notación:

$$P_n = P'_{2^{n+1}}$$

Así, la sucesión (P_n) de semiperímetros convergía a π, como era de esperar: (18)

$$P_1 = 2\sqrt{2} = 2{,}82847125...;$$

$$P_2 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = 3{,}061467459...;$$

$$P_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}121445152...;$$

$$...$$

$$P_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\dots}+\sqrt{2}}}}$$

Esto es: (19)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\dots}+\sqrt{2}}}}$$

Dos nuevas ideas

A continuación, se suscitaron dos ideas, que animé a que desarrollaran de forma independiente los grupos en los que había surgido cada una de ellas, a lo que se dedicaron -a una y otra- los restantes equipos:

1) Comparar el valor de los términos de las dos sucesiones convergentes a π: (P_n) obtenida en (18), y (u_n) definida en (15). Calculando estos últimos:

$$u_1 = \frac{4}{s_1} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}828427125...;$$

$$u_2 = \frac{8}{s_1 s_2} = \frac{8}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}061467459...;$$

$$u_3 = \frac{16}{s_1 s_2 s_3} = \frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 3{,}121445152...$$

$$...$$

parece que se deduce que las sucesiones (P_n) y (u_n) son coincidentes.

2) Hubo un grupo de alumnos que no se limitó a hallar los perímetros, sino que, a la vista de las reflexiones hechas más arriba, fue calculando simultáneamente las áreas, para tratar de establecer asimismo relaciones entre ambas expresiones.

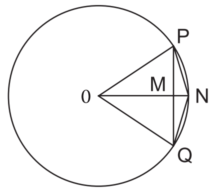
Empezando el estudio por casos particulares, llegaron en esa tentativa a una conclusión que me comunicaron (en voz baja), y me sorprendió: "el área del octógono regular coincide con el semiperímetro del cuadrado inscrito". Pregunté si estaban absolutamente seguros de ello, con lo que volvieron a repasar sus cálculos sin prestar atención a nada más, y poco después, probablemente cegados por su "descubrimiento", se reafirmaban en su aserto.

Les invité entonces a que dijeran a los demás grupos su resultado, esperaran un poco a que entendieran su contenido, y luego trataran de convencerles de ello. Como transcurrido un tiempo nadie planteó objeción alguna, comenzaron a hacer los cálculos oportunos para probar su tesis.

He de decir al respecto que no era la primera vez que escuchaba aseveraciones de este estilo; así por ejemplo, en cierta ocasión en una clase de Educación Secundaria, al estudiar la inecuación $x^2>x$, donde x representaba la medida de la longitud del lado de un cuadrado, un alumno preguntó si siempre que $x>1$ el área de un cuadrado era mayor que su perímetro; pero no esperaba encontrarme con este tipo de confusiones en la universidad [según se dice en Bouvier et al. (1996, p. 200), matemáticos de cierto renombre, como Anatolius (s. III a. C.), también han incurrido en errores similares]. Siendo así, me pareció que debía intervenir, pues sería difícil que sin una indicación por mi parte llegaran a detectar su equívoco.

Formulé entonces la siguiente pregunta: ¿qué es mayor, la distancia de Madrid a Sevilla o la superficie del estadio de fútbol del Real Madrid? ... Aunque casi sin pensarlo hubo quien respondió que la primera, enseguida se dieron cuenta de lo absurdo de la afirmación, así como de aquella que comparaba el área del octógono con el semiperímetro del cuadrado. En consecuencia, hube de proceder a revisar los conceptos de cantidad, magnitud y unidades de longitud y de superficie, que no todos tenían claros.

Reflexionando sobre la proposición anterior, una vez que los alumnos la enunciaron correctamente, esto es, en términos de medidas de cantidad de longitud y de superficie, he de reconocer que no conocía ese resultado; que, por otra parte, parecía poder ser generalizado. Los alumnos no tuvieron entonces grandes dificultades en proceder a su demostración, toda vez que ya habían realizado antes razonamientos de este estilo [identidad (17)]. Y, en efecto:



si

$$l_n = \overline{QP} \quad \text{y} \quad l_{2n} = \overline{QN} = \overline{NP}$$

designando por A_n el área del polígono regular inscrito de n lados, se tiene:

$$A'_{2n} = 2n \cdot area(OPN) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{MP} = n \cdot \frac{1}{2} l_n = P'_n$$

Por tanto, $A'_{2n} = P'_n$; o también, llamando

$$A_k = A'_{2^{k+1}},$$

$$A_{n+1}=P_n \qquad (20)$$

Puesta en común

Llegados a este punto, hubo una puesta en común de las dos conclusiones a las que se había llegado. De su confrontación y posterior debate parecía deducirse que ambos resultados eran en realidad el mismo: al primero de ellos se había llegado aritméticamente (tan solo operando con los términos de las dos sucesiones implicadas), mientras que el segundo se había conseguido geométricamente (comparando las medidas de las cantidades de longitud y superficie de los semiperímetros y las áreas, respectivamente).

Su coincidencia, en efecto, queda en evidencia al revisar la demostración de la fórmula de Viète, pues el área del polígono regular inscrito de 2^{n+1} lados es:

$$A_{n+1} = A_{2^{n+2}} = \frac{2}{s'_1 \ldots s'_n}$$

lo que en virtud de (11) y (15), significa que: (21)

$$A_{n+1} = u_n$$

Como consecuencia de (20), se tiene finalmente: (22)

$$u_n = P_n$$

En resumen, casi todos los grupos habían llegado, tan solo con pequeñas sugerencias mías a que: (23)

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}} =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}} =$$

$$= 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

Por tanto, la fórmula de Viète puede expresarse indistintamente de las siguientes formas: (24)

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

Una visión retrospectiva

Al realizar de nuevo una visión retrospectiva de todo el proceso seguido en la resolución del problema (recordemos que fue muy productivo este análisis cuando obtuvimos el primer resultado), una vez obtenido que: (25)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

y teniendo en cuenta que hemos partido de la expresión (1), cabía preguntarse si la sucesión (v_n) que se definirá a continuación sería o no convergente y, en caso afirmativo, cuánto valdría su límite (se supone que $a > 0$): (26)

$$v_n = a^n\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{a}}}}$$

Para poder manejar esta expresión, y tal como se hizo en otros momentos, fueron algunos los que sugirieron que también ahora sería oportuno introducir una notación adecuada. Si definimos la sucesión auxiliar (t'_n) en función de la sucesión (t_n) de (7), (27)

$$t'_n = \sqrt{a - t_{n-1}},\ n \geq 2;\ t'_1 = \sqrt{a}$$

los términos de (v_n) resultan ser: (28)

$$v_n = a_n \times t'_n \quad , \quad n=1,2, \ldots$$

Una vez ordenadas así las cosas, ¿qué hicieron los alumnos para hallar el límite de la sucesión (v_n)?:

- Aquellos que habían mostrado un peor dominio de las sucesiones, no pudieron casi ni comenzar a calcularlo, debido a la profusión de sucesiones involucradas.

- La mayoría afirmaba que el límite era 0 si $a<1$, infinito si $a>1$ (debido en ambos casos a la influencia del primer factor de v_n) y dudaban qué sucedía si $a=1$.

- Tan solo un grupo -por iniciativa de uno de sus componentes- se dedicó a estudiar cuál era el límite del segundo factor de v_n . En virtud de (8), llegó a que:

$$\lim_{n\to\infty} t'_n = \sqrt{a - \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

pero no sabía como seguir.

Pedí que explicaran a los demás lo que habían conseguido, y que todos estudiaran la existencia de este último límite (se entiende que perteneciente a **R**).

No costó mucho probar que debía ser

$$a - \frac{\left(1+\sqrt{1+4a}\right)}{2} \geq 0$$

de donde dedujeron que $a \geq 2$. Por el contrario, si $a<2$ la sucesión (t'_n) no tiene límite y, en consecuencia, tampoco la (v_n)

(en realidad -precisé yo-, en tal caso, la sucesión ni siquiera está definida; así, puede comprobarse que si a=1, v_n no es un número real si $n \geq 3$; si a=1,9, v_n no es un número real si $n \geq 4$ etc.).

Por otro lado, si $a \geq 2$ la sucesión (a^n) es divergente [también lo es si a>1, aunque, como ya se ha estudiado, si a<2 no existe el límite de la sucesión (v_n)]; pero al ser (v_n) producto de dos funciones, si la otra tendiera a un número k distinto de 0, (v_n) sería divergente. ¿Cuál es entonces la única posibilidad de que (v_n) sea convergente?, pregunté.

Casi todos los grupos contestaron correctamente -salvo aquel que se manejaba peor con las sucesiones, que en toda esta parte no le resultó fácil presentar iniciativas: la única posibilidad de que (t'_n) tienda a cero es que:

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Como la solución válida de esta ecuación es a=2, todo ello significa que (v_n) sólo puede ser convergente en este caso. Se ha visto, además, que efectivamente en ese supuesto el límite de v_n es π.

Se ha demostrado, por consiguiente, que:

“Si a>0,

$$\lim_{n\to\infty} a^n \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\overset{n}{\dots}}}}$$

es finito si y sólo si a=2; en tal caso, dicho límite es π. La sucesión es divergente o no tiene límite si y sólo si a>2 ó 0<a<2, respectivamente”.

Por otro lado hice ver a los alumnos que esta propiedad tan especial del número π puede considerarse que en cierto modo guarda un cierto parecido con la siguiente, bien conocida, exclusiva asimismo del número e, el otro número equiparable en importancia a π:

“Si a>0,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$$

es finito y distinto de cero si y sólo si a=1; en tal caso, dicho límite es e. La sucesión es divergente o su límite es cero si y sólo si a>1 ó 0<a<1, respectivamente”.

Aunque, como es sabido, existen otras analogías entre dichos números, más claras sin duda que la anterior: la denominación de los dos corresponde a Euler; Lambert probó en 1767 la irracionalidad de π, y también de e^m para m racional; las demostraciones de la trascendencia de ambos tuvieron lugar en la misma época (en 1873 la de e y en 1882 la de π, debidas a Hermite y Lindemann, respectivamente) y con técnicas muy similares; en la expresión decimal de ninguno de ellos se ha encontrado regularidad alguna; los dos surgen de manera natural: π al hallar el área de un círculo y e al acumular continuamente el interés producido por un capital etc.

> *La resolución de problemas en grupos bajo guía del profesor y el debate posterior, puede favorecer en los alumnos el desarrollo del espíritu crítico y el convencimiento de que es necesario justificar las respuestas.*

Reflexión final

Recordemos, sin embargo, que cuando planteé el problema había previsto tan solo llegar a una nueva presentación de la fórmula de Viète: la reflejada en (16); no sospeché, en cambio, que pudiera conducirnos también a otra expresión diferente: la que aparece en (19) y en la última parte de (24). Mucho menos supuse que se hiciera patente la singular propiedad de π mencionada más arriba que, en cierto modo, se asemeja a otra correspondiente al número e.

Hay que tener en cuenta que, como se ha visto, los resultados se consiguieron a raíz de la propuesta de un problema – que a su vez generó otros- con todo su potencial creativo; aunque no fue un problema del todo abierto, al menos en el sentido de Bouvier *et al.* (1986, p. 341). Sin embargo, el enfoque que en ese texto y otros muchos se da a los problemas abiertos está dirigido fundamentalmente a alumnos de enseñanza secundaria, y su planteamiento suele realizarse en un dominio conceptual más familiar a aquéllos; mientras que en este caso se ha tratado de estudiantes universitarios y se ha desarrollado en un contexto de nociones esencialmente matemáticas, y con recursos más técnicos. A pesar de lo cual, y con independencia de los resultados obtenidos, la metodología heurística empleada creo que dio sus frutos, y los alumnos realmente trabajaron en matemáticas de forma creativa; además, yo tuve información de primera mano sobre sus errores y modos de razonamiento.

Puedo decir que obtuve las siguientes conclusiones:

- El problema, en realidad, la cadena de problemas originada a raíz del primero, constituyó un entorno adecuado para el aprendizaje y el uso de conceptos matemáticos (radicales, sucesiones, límites...) y de la historia de la matemática (método exhaustivo, diversas expresiones de π a lo largo de la historia...). Además permitió relacionar distintas nociones de la matemática, lo que en algún momento pudo permitir apreciar su unidad intrínseca.

- Los alumnos que no habían adquirido un dominio suficiente de las sucesiones no fueron capaces, en términos generales, de aprovechar activamente las posibilidades que ofrecía el problema, a pesar de haber tenido la ocasión de repasar, en el transcurso del mismo, cuestiones referentes a aquéllas. En mi opinión, este hecho sirve para corroborar dos ideas: el hecho de la jerarquización y carácter acumulativo de las matemáticas y la necesidad de contar con un período de tiempo de asimilación, interiorización y manipulación de los conceptos antes de profundizar en los mismos.

- Existen lagunas en el uso de desigualdades y en la resolución de inecuaciones estudiados en el bachillerato, incluso en alumnos universitarios de ciencias. También las hay en los conceptos de cantidades, magnitudes y medidas.

- La analogía y la generalización son dos de los recursos más eficaces en la resolución de problemas (al menos así ha sucedido con el aquí planteado). Con todo, a veces no siempre resulta evidente discernir qué elementos son transferibles por analogía o generalización de un problema a otro [así ocurrió al tratar de hallar una cota superior de la sucesión (t_n) definida en (7)].

- La resolución de problemas en grupos bajo guía del profesor y el debate posterior -como el del ejemplo que hemos estudiado-, puede favorecer en los alumnos el desarrollo del espíritu crítico y el convencimiento de que es necesario justificar las respuestas. Así sucedió en este caso en los distintos momentos en que se convino que era preciso probar formalmente las predicciones -generalmente por el método de inducción- que "parecían" ciertas. Por otro lado, cabe decir que, una vez suscitada la preocupación por la demostración rigurosa en los asertos iniciales, los alumnos que antes no eran conscientes de ello, asumieron por sí solos esa necesidad en los procesos siguientes. A todo ello hay que añadir, obviamente, que los estudiantes reforzaron sus técnicas de demostración.

- Debo hacer constar la importancia que me parece tiene el saber organizar un problema matemáticamente con una notación adecuada, y lo beneficioso que puede ser para los alumnos las indicaciones que en ese sentido haga el profesor. El poco *coste* que supondría a éste fomentar esa aptitud, creo que en cambio redundaría muy favorablemente en los estudiantes, hasta el punto de ser suficiente para desbloquear no pocas situaciones.

  Hay que recalcar el alcance del análisis retrospectivo de un problema (también, como en este caso, para generar otros); y, más en general, la validez del método de Polya de resolución de problemas que, a pesar de sus muchos años de vigencia, sigue -en mi opinión- teniendo actualmente una innegable importancia.

- La tarea desarrollada por algún alumno destacado fue realmente inestimable para el trabajo de sus compañeros de grupo. Su cercanía intelectual a los demás –mismo lenguaje, mayor confianza, parecidos intereses ...- seguramente fuera más beneficiosa para los otros –y para él mismo, al tener que afianzar sus conocimientos y mejorar su expresión para hacerse entender- que la labor que en ese sentido pudiera realizar el propio profesor, indudablemente más alejado de la forma de ser de los estudiantes. El trabajo en grupo, por tanto, fue muy provechoso.

- Por último, debo manifestar que, como consecuencia del trabajo desplegado a lo largo del problema: organización matemática de la situación, concepción de un plan -fruto de una metodología heurística-, realización correcta de los cálculos necesarios y empleo de las técnicas de demostración adecuadas (como respuesta a la necesidad de justificar rigurosamente las predicciones), los alumnos tuvieron la impresión de que la actividad matemática desarrollada había sido creativa; opinión que yo también comparto. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLANCO, L. J. (1993): *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Universitas, Badajoz.

BOUVIER A. et al. (1986): *Didactique des Mathématiques*. Le dire et le faire. Cedic/Nathan, Paris.

PENHKONEN, E. (1995): *Introduction: Use of open-ended problems*. ZDM, 95(2), 55-57.

PERALTA, F. J. (1996): *Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones de los mismos*. Universidad Autónoma de Madrid (Cuadernos del ICE), Madrid.

POLYA, G. (1986): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.