SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 91-98

iMÁTgenes 1, 2 y 3

Esta sección encontrará sus lectores más inmediatos entre las personas vinculadas al mundo académico y matemático, pero lo ideal sería que estas páginas pudieran llegar más allá. Tú, lector, podrías ser quien concretara el sentido educativo de la sección invitando a tus alumnos, familiares y amigos a relacionar lo que ven con las matemáticas. Por el nivel de matemáticas necesario no deberían preocuparse, ya que se restringirá al de la E.S.O. y el Bachillerato.
Todo lo que vemos son imágenes. Pensando en ellas buscamos en nuestro conocimiento modos de interpretarlas y entenderlas. Ahora se propone la reflexión sobre imágenes no con la intención de efectuar una descripción matemática gratuita de lo que se ve mediante la aplicación de conocimiento matemático, sino más bien al contrario: observar cómo las matemáticas pueden resultar imprescindibles para comprender lo que vemos. La idea es desvelar el trasfondo matemático subyacente en las imágenes, de ahí el título de la sección: imátgenes. Una iMATgen será una imagen portadora de matemáticas esenciales para su comprensión. Nada impide realizar un juego de palabras con un cariz biológico.
Puesto que ante una misma imagen dos personas pueden dar interpretaciones diferentes, una imagen puede admitir dos iMÁTgenes distintas. Por eso ofrecemos la posibilidad de participar en la sección mediante el correo electrónico: "imatgenes.suma@fespm.org". Cualquier comentario, sugerencia o ayuda será bien recibida. Muchas gracias. ¡Que lo veáis bien!

El pasado verano, durante una agradable velada en los jardines del Casino Taoro, sede de las últimas Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (J.A.E.M) celebradas en Canarias, la dirección de SUMA me propuso la realización de una sección para la revista. Recibí la propuesta con alegría, aunque reconozco que a la mañana siguiente, como suele ocurrir con lo que me agrada y halaga, dudé. ¿Y si hubiera sido un sueño?

Por eso, una vez terminadas las XI JAEM y confirmada la propuesta, la acepté encantado y es para mi un verdadero honor que le agradezco a la nueva dirección y, muy especialmente, a Emilio Palacián y a Julio Sancho, quienes han sumado mucho estos últimos años.

Tras estudiar varias temáticas posibles, acordamos con la nueva dirección de la revista optar por la que ahora se inicia y cuya idea original se remonta a un par de años atrás, cuando yo aún era profesor del Instituto de Educación Secundaria *Pau Vila*, en Sabadell. Allí, el Departamento de Matemáticas vio con buenos ojos la idea de colgar dos fotografías, una junto a la puerta del Departamento y otra, su réplica, en la página web del centro. Estas imágenes iban a relacionarse con las matemáticas de la forma que más tarde describiré. La iniciativa se vio interrumpida cuando fui desplazado forzosamente del centro. Ahora que va a resucitar agradezco a mis compañeros de entonces, Anna, Consuelo, Lluís, Quim y Rosa, la buena acogida que le dieron.

> *Toda imagen se ve según el ojo de quien la mira, pero algunas poseen tanta fuerza que obligan a una interpretación de carácter universal y única que remite al ámbito social, filosófico y humano.*

Aquella idea se tituló "iMATges". Destacando la sílaba "mat" incluída en la palabra catalana se pretendía dar a entender que todas las imágenes albergan matemáticas y que el asunto consistiría en enfatizar este aspecto. Para esta sección se pensaron diversas opciones (*El alimento del π-ojo* fue una de

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

ellas), pero al final se optó por la presente porque nos pareció más fácilmente adaptable a otras lenguas y la que mejor refleja el espíritu de la sección:

imágenes
imágenes
imátgenes
imátgenes
iMÁTgenes

Toda imagen se ve según el ojo de quien la mira, pero algunas poseen tanta fuerza que obligan a una interpretación de carácter universal y única que remite al ámbito social, filosófico y humano (un montón de cuerpos destrozados por una explosión). Otras se han convertido en iconos de la ciencia (un primer plano de un espermatozoide vigoroso) o del romanticismo (dos perfiles humanos al contraluz de un atardecer). El factor cultural afecta lo que observamos. La cultura matemática también. Afecta, pero no perjudica, todo lo contrario. La diversidad cultural puede ser un factor estupendo para estimular y generar nuevas perspectivas, para ver más y con mayor claridad. Siendo así, no sorprenderá que algunas de las imágenes a estudiar procedan de ámbitos sociales y culturales muy diversos.

El concepto de esta sección no se corresponde con el de la fotografía matemática. Tampoco pretende defender la idea de que toda imagen conlleva matemáticas. Como ya se dijo, el objetivo es darnos cuenta de que muchas de las cosas que vemos son como son, se ven como se ven o se perciben como se perciben gracias a las matemáticas. Eso sí, sin olvidar que una imagen se hace visible mediante la combinación de un proceso físico, como es la visión, con uno psicológico, como es la percepción. Algunas de las iMÁTgenes se basarán en uno o ambos procesos, mientras que otras se fundamentarán en cuestiones independientes de la visión y de la percepción.

> *Cada iMATgen se desarrollará en un artículo que empezará mostrando una fotografía, la imagen a tratar. Primero se describirá ésta con relación a los aspectos más alejados del ámbito matemático.A continuación, se desarrollará la metamorfosis de imagen a iMATgen.*

Cada iMATgen se desarrollará en un artículo que empezará mostrando una fotografía, la imagen a tratar. Primero se describirá ésta con relación a los aspectos más alejados del ámbito matemático, como pueden ser su localización, contenido cultural y social a los que remite, etc. A continuación, se desarrollará la metamorfosis de imagen a iMATgen. Ésta será titulada, pero al final. Se pretende evitar así que el lector advierta desde el principio cuál va a ser el intríngulis matemático central y arrebatarle la posibilidad de realizar libremente sus propias cábalas.

Quiero dejar claro que las fotografías que aparecerán aquí no fueron tomadas con una intención predeterminada que facilitara su relación con las matemáticas. De hecho, muchas de ellas tienen ya bastantes años. En este sentido, las iMÁTgenes serán sinceras. Si en alguna ocasión esto no es así, prometo decirlo. Estás son las tres primeras iMÁTgenes:

iMATgen 1

iMATgen 3

iMATgen 2

El año 1992 sucedió algo extraordinario en Barcelona. Algo iniciado ya varios años antes, cuando la ciudad fue elegida sede de la vigesimoquinta Olimpiada. Pero lo extraordinario no fue la propia celebración de la Olimpiada, sino todo lo que la organización del acontecimiento provocó, tanto en la arquitectura de la ciudad como en quienes vivíamos en ella. Barcelona se transformó. Creció y miró más lejos, en muchas y diferentes direcciones. Su crecimiento, al contrario de lo que ha ocurrido en otros sitios, ha acentuado y destacado aún más sus hasta entonces rasgos más característicos. La ciudad se ha hecho mucho más diversa, humana y arquitectónicamente, y mucho más habitable que otras de tamaño similar.

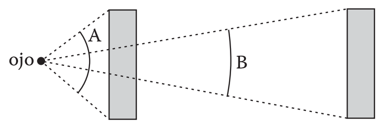
La fotografía muestra el *Passeig Marítim del Port Olímpic* (Paseo Marítimo del Puerto Olímpico) uno de los paseos que perfilan las ahora limpias playas de Barcelona. De hecho, la frase más oída en la última década ha sido que Barcelona se ha abierto definitivamente al mar. Es cierto. También lo es que hay quienes opinan que la transformación es solo de fachada y que obedece al eslogan: *Barcelona, posa't guapa!* (¡Barcelona, ponte bonita!) con el que se ha invitado a sus ciudadanos a la restauración de fachadas, edificios y espacios públicos. La iniciativa consiguió su objetivo y la ciudad está de muy buen ver.

Volviendo a la imagen veremos que muestra un fenómeno al que estamos muy acostumbrados y sobre el cual formular alguna pregunta puede parecer hasta una tontería. Pero como también quienes escucharon a Newton preguntar por primera vez por qué se caen las manzanas debieron tacharle de estúpido, voy a plantear la cuestión de todos modos: ¿Por qué las cosas más lejanas se ven más pequeñas? Es más, si se le formula la pregunta a un niño, ¿la considerará merecedora de alguna explicación? ¿No ha visto él las cosas siempre así, cuanto más lejos más y más pequeñitas, hasta que desaparecen?

Estamos tan acostumbrados a esta disminución del tamaño con la distancia que puede resultarnos difícil dar una respuesta inmediata a semejante pregunta. No es raro que al formulársela a alguien extraño al mundo de la física y de las matemáticas se sienta perplejo. "¡Es algo tan corriente que no necesita explicación!", o "toda la vida ha sido así" pueden ser algunas reacciones.

Pero desde el punto de vista matemático y físico sí que es necesaria una explicación, un porqué. Un porqué sin el cual no veríamos como vemos, sin el cual la imagen del paseo junto al mar no tiene sentido ni puede comprenderse del todo. Un porqué que determina la idea de la perspectiva: vemos así porque la luz viaja en línea recta.

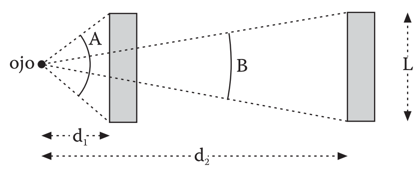
El tamaño aparente de un objeto viene determinado por el ángulo de visión que se forma en el ojo a partir de los rayos de luz rectilíneos procedentes de los extremos del objeto que estamos mirando. La figura muestra como este ángulo será menor cuanto más lejos se halle el objeto:



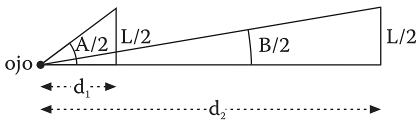
Incluso puede llegar a ser tan pequeño que se haga imperceptible al ojo. Entonces el objeto desaparece. Como también desaparece un objeto próximo pero muy pequeño si lo es tanto que el ángulo que lo abarca nos resulta imperceptible.

Desde la perspectiva matemática la cuestión fundamental es cuantificar esta disminución. Esto es algo fundamental en la imagen, sin esta perspectiva no se comprende lo que vemos: Conocer cómo disminuyen las cosas en la distancia resulta esencial para ver. Así es como la imagen se transforma en iMATgen.

Por ejemplo, situando dos objetos idénticos, uno a una distancia doble del otro, ¿se verán también uno el doble del otro? Sea L la longitud de dos objetos iguales, sean d_1 y d_2 las distancias que nos separan de ellos y sean A y B, como en el dibujo anterior, los ángulos de visión correspondientes a cada uno. Entonces:



Obtenemos dos triángulos rectángulos:



En estos triángulos: $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{L/2}{d_1}$, $\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{L/2}{d_2}$

Luego:

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}}=\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Por tanto, no son los ángulos los que mantienen la misma proporción que la distancia, sino sus tangentes. En el caso mencionado en que $d_2=2{\cdot}d_1$, será:

$$B=2\ \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)$$

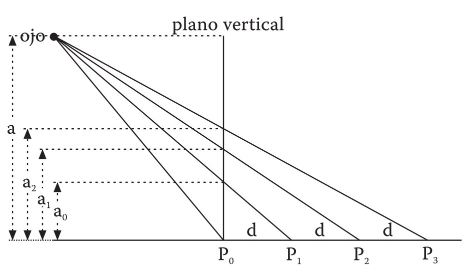
Si hacemos variable la proporción entre las distancias al ojo, $x=d_2/d_1$, hallamos cómo disminuye el ángulo de visión con relación a dicha proporción en general:

$$B=2\ \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\ \mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)$$

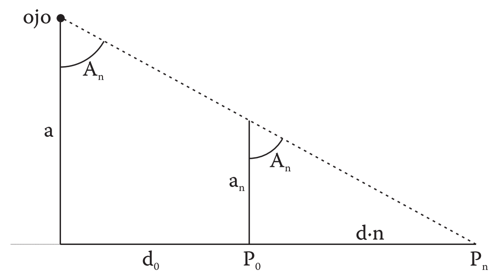
Para $A=\dfrac{\pi}{2}$, resulta: $B(x)=2\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pero aún hay otra razón por la que la imagen es iMATgen. Además de apreciarse cómo disminuyen de tamaño con la distancia diversos elementos presentes en la fotografía, se ve también como van ascendiendo hacia el horizonte que el punto de fuga en perspectiva determina. ¿Cómo es este ascenso?

Para cuantificarlo tomemos como referencia los puntos de luz P_0, P_1, P_2, P_3, ... alineados en el suelo. Son equidistantes. Sea d la distancia entre dos de ellos y sea a la altura de la visual, nuestro ojo, sobre el suelo. Entonces el ascenso sobre el plano vertical de la visual con el que los percibimos, es decir, el del propio papel de la fotografía si la imagen hubiera sido tomada con el objetivo realmente perpendicular al suelo, viene determinado por las sucesivas intersecciones de dicha vertical trazada por el primero de ellos, P_0:



Fijándonos en uno de los elementos:



Con relación a los dos triángulos semejantes que aparecen, podemos escribir:

$$\frac{a-a_n}{d_0}=\frac{a_n}{d\cdot n}\Leftrightarrow a_n=\frac{a\cdot d\cdot n}{d\cdot n+d_0}$$

El límite de esta sucesión es precisamente a, la estatura ocular del observador o, en su caso, la altura del punto de observación:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot d\cdot n}{n\cdot d+d_0}=\frac{a\cdot d}{d}=a$$

Pero por muy larga que fuera la hilera de luces nunca llegaríamos a ver este límite a causa de la curvatura de la superficie del planeta. Para $a=d_0=d=1$ metro:

$$\boxed{a_n=\frac{n}{n+1}}$$

Hallamos un contexto tangible excelente para visualizar (nunca mejor dicho) una de las sucesiones de números racionales más populares cuyo límite es la unidad. Un límite para el cual también vale el contexto, pues está a la altura del horizonte. De este modo, vemos la sucesión de farolillos, cada vez más lejanos, ascender cada vez más despacio. Una sucesión que, junto con el lema olímpico, inspira el título de esta primera iMATgen: ***¡Altius, lentius, longius!***

El atleta velocista sabe mucho de todo esto. Agazapado en los tacos del impulso, mira al suelo mientras espera el disparo. Desde ahí abajo la meta es un horizonte inalcanzable en un tiempo finito. Durante los instantes previos al disparo de salida se conjuran en su mente las bestias de sus pesadillas: las tortugas. Pesadas y torpes en la realidad de la vigilia, se ríen de él cuando no consigue alcanzarlas en el sueño. Un estallido le libera de estos pensamientos, se yergue de un latigazo del que no se siente responsable, una reacción al sobresalto. Desde su estatura la meta ya no es el horizonte. Se ha tornado alcanzable y corre hacia ella en un tiempo que desearía infinitesimal. ■

Qizá nos sintamos un poco intimidados por la mirada de la fotografía. la imagen muestra una construcción inusual en nuestro país y los de nuestro entorno, pero corriente en Nepal: una stupa. Este en concreto es uno de los más grandes y se halla en la localidad de Bodhnath, al este de Kathmandú. Los recortes de tela que penden de los cordeles que parten de su pináculo no son banderines de adorno, sino pañuelos en los que hay escritas plegarias y oraciones dirigidas a los dioses. El viento se encargará de recitarlas mientras los fieles esperan su cumplimiento girando y girando, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor del cuerpo orondo de la construcción.

Las stupas vienen a ser colinas artificiales destinadas a albergar reliquias de Buda, aunque ignoro si la de Bodhnath contiene alguna del *Iluminado*. "Esta es una estructura simbólica ... y constituye un diagrama artquitectónico del cosmos, intencionadamente orientado y diseñado de acuerdo a un elaborado sistema de relaciones proporcionales con significado místico" (Honour y Fleming, 1991). Sobre la base en forma de mandala se asienta la cúpula semiesférica. Encima de ésta se construye la aguja, de planta cuadrada, encima de ella la sombrilla y, finalmente, el pináculo. Cada uno de estos niveles se asocia con una significación mística y cosmogónica.

Los fieles no entran en las stupas. En Nepal la religión gira siempre en torno a un eje. El de Bodnath es inmenso, pero no hace falta acudir a la stupa, pues en sus alrededores y en muchas calles de los pueblos nepalíes hay hileras enteras de molinillos que a un toque del paseante iniciarán un giro veloz mediante el cual el mantra escrito en su superficie será recitado vuelta tras vuelta. También hay molinillos de mano portátiles cuya cabeza aloja un rollo de pergamino en el que están escritos los mantras. Sacudiéndolos con destreza se hace rotar su cabeza y los mantras son recitados.

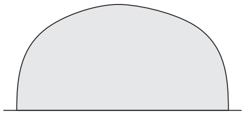
Pero no va a ser la rotación la que va a transformar en iMATgen esta imagen, sino otra cosa presente en la fotografía y que quizá no llame mucho la atención a primera vista. A la derecha aparece una escalera de mano apoyada en el cuerpo del Stupa. Justo cuando termina ésta, la ascensión continua por una escalera de peldaños tallada en la superfície oblonga. La imagen no permite ver lo que hay más arriba, pero no es difícil imaginarlo. Para llegar hasta los ojos que todo lo ven el camino se hace liso y llano. Para acceder al pináculo habría que tomar nuevamente una escalera de peldaños, esta vez encajados en la pared de piedra describiendo una curva sinuosa.

¿Para qué tanto cambio de escalera? ¿No habría valido con labrar peldaños desde la base hasta arriba? ¿O será acaso que a cada pendiente a superar le conviene una escalera determinada?

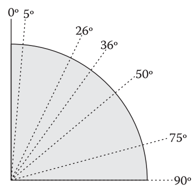
Cuando la pared de la stupa es muy empinada, como sucede cerca de su base, resulta prácticamente imposible tallar escalones. Sencillamente no hay espacio físico suficiente para nuestros pies y, aunque lo hubiera, la pendiente sería demasiado grande y se haría muy difícil mantener el equilibrio. La escalera de mano resuelve el problema porque su base se apoya lejos de la de la stupa. Luego sí, durante un tramo se pueden labrar escalones cuya pendiente se asemeja más a las escaleras convencionales. Para terminar, la pendiente se hace tan suave que con la superfície lisa, una rampa, es suficiente. Labrar escalones aquí arriba sería tan absurdo como hacerlo junto a la base, aunque mucho menos peligroso pues su altura llegaría a reducirse a la nada.

¿Qué opinan los arquitectos? Fundamentales en la comodidad y seguridad de cualquier escalera son las dimensiones de la huella y la contrahuella. La huella es la profundidad del peldaño sobre la que se apoya el pie, la contrahuella es la altura del peldaño. "La relación más favorable entre las medidas de la huella (H) y la contrahuella (CH) son 61cm≤H+2CH≤63cm" (Ching, 1998). Las características de una escalera se relacionan con el valor de la pendiente a superar. Así, "las rampas son aconsejables para pendientes que no superen los 5º; para un tramo de escalera corriente se aconsejan pendientes de entre 26º y 36º; por encima de 50º una escalera se considera incómoda e insegura; para pendientes superiores a 75º ya se aconsejan escalas o escalerillas" (Ching, op. cit.).

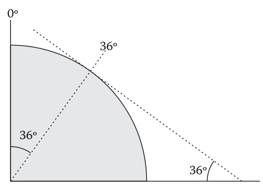
La stupa de Bodhnath no es una semiesfera pefecta. Aunque la fotografía no permite apreciarlo, su perfil es algo así:



La semiesfera sería un modelo ideal de la forma de la stupa. Quizá quienes lo construyeron quisieron darle forma semiesférica, quizá no. De todos modos, la relación entre el tipo de escalera y el perfil de una semiesfera puede visualizarse teniendo en cuenta que en matemáticas llamamos pendiente al valor de la tangente del ángulo que un segmento o recta forma con la horizontal o eje de abcisas, mientras que Ching valora la pendiente con el ángulo mismo. La figura siguiente muestra un cuadrante de círculo correspondiente a la sección de una semiesfera. Su perfil sería el de la stupa si ésta fuera perfectamente semiesférica.



Se ha tomado el origen de los ángulos en el eje vertical y su sentido positivo como el de las agujas del reloj porque así el punto de intersección de la recta con la circunferencia posee una pendiente matemática igual a la descrita por el arquitecto. Por ejemplo, la recta tangente a la circunferencia en el punto de intersección de ésta con la recta correspondiente a 36º forma a su vez un ángulo de 36º con la horizontal:

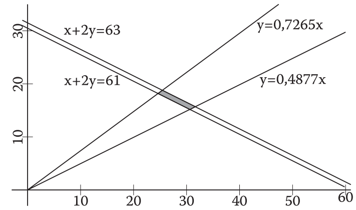


Resulta pues que la distribución de escaleras en cada tramo de la stupa se hace de acuerdo a las exigencias de la pendiente. El ascenso se inicia con una escalera de mano que permite salvar pendientes casi verticales. Le sigue después un tramo de escalones cuya altura o contrahuella disminuye con la ascensión. Finalmente, aunque invisible en la foto, una rampa cada vez más tendida conduce a los ojos del Buda.

Las condiciones arquitectónicas conducen al planteamiento de un sistema de inecuaciones que respondería a la pregunta de entre qué valores pueden variar las dimensiones de los peldaños de una escalera cómoda y segura:

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ 61 \leq x + 2y \leq 63 \\ \text{tg}26'' \leq \dfrac{y}{x} \leq \text{tg}36'' \end{cases}$$

Este sistema se relaciona con un problema de Programación Lineal cuya función objetivo a minimizar, f(x)=ax+by (a,b>0), podría ser la del coste de construcción de la escalera. Muchas de ellas, no hablo ahora de las escaleras de la stupa, sino de las que hay por aquí, tienen huellas de madera y contrahuellas de cemento o baldosa, un rasgo que sin duda afecta al precio de su construcción. La región solución del anterior sistema de inecuaciones tiene cuatro vértices sobre los que recaerá la responsabilidad de este coste:



Región de valores para una escalera cómoda y segura.

Para 2a>b, el vértice solución será (24,87 cm,18,07 cm); para 2a<b, (30,88 cm,15,06 cm); para 2a=b, cualquier punto del segmento que ambos vértices determinan.

Quienes construyeron la gran stupa en Bodhnath dispusieron también diferentes tipos de escalera de acuerdo con la pendiente a superar. Primero, en forma de escala o escalerilla; después, en forma de escalera corriente de peldaños; finalmente, acabaron con una rampa. Así se llega a los ojos del iluminado, al cielo.

En la década de los setenta se hizo muy famosa una canción que hablaba de una escalera que también ascendía al cielo. Sus primeros versos eran:

There's a lady who's sure all that glitters is gold
And she's buying a stairway to heaven.
And when she gets there she knows if the stories are closed
With a word she can get what she came for ...

Desconozco si Jimmy Page y Robert Plant se inspiraron en las stupas cuando la compusieron, pero el tema se desarrolla también en tres secciones principales. Empieza con los suaves arpegios de Jimmy Page a la guitarra acústica y la voz de Robert Plant. Luego se incorporan el bajo y la batería al tiempo que la guitarra acústica cede el protagonismo a la eléctrica de sonido adornado con pedal. El tema culmina con otro cambio de ritmo y de timbre, los de la distorsión en la eléctrica y la vocalización desgarrada, características ambas del que se llamaría más tarde *heavy* y *heavy metal*. ¿Qué mejor título para esta iMATgen que el de ***Stairway to heaven***? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHING, F.D.K. (1997): *Diccionario Visual de Aqruitectura*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

HONOUR, H. y FLEMING, J. (1991): *A World History of Art*. Laurence King. London.

iMATgen 3

He aquí la huella de un hombre. El barro en el que quedó impresa no era casual. Entonces era la época de lluvias, periodo equivalente a nuestro otoño e invierno juntos. Esparcidos a su alrededor se ven algunos granos y cáscaras de arroz. El hombre sacudía con fuerza e insistencia un manojo de brotes de arroz contra un ingenio de madera para que los granos se desprendieran de sus tallos. Así, un montón de arroz medio descascarillado iba llenando poco a poco el fondo del ingenio. Junto a él, una mujer se encargaba de recogerlo y meterlo a puñados en una bandeja circular de rottan trenzado, la levantaba por encima de su cabeza hasta donde podía y, desde allí arriba, vertía su contenido sobre un saco abierto extendido en el suelo. De este modo alargaba la caída del cereal y facilitaba al viento su tarea. La mayoría de las cáscaras, mucho más ligeras, volaban hasta caer lejos del saco. El viento se llevaba lo que no importaba a nadie. En el saco quedaba el alimento básico de todo un continente.

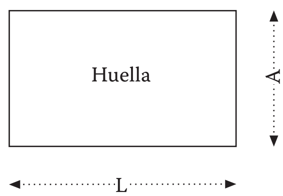
La huella no impresiona (visualmente) por su tamaño. Pero hay algo en ella que llama mucho la atención. El día que mostré esta fotografía a mis alumnos de tercer curso de la E.S.O.

He aquí la huella de un hombre. La huella no impresiona, visualmente, por su tamaño. Pero hay algo en ella que llama mucho la atención.

reaccionaron diciendo que era de un gorila o de un simio. Yo les dije que no, que era la pisada de un hombre, y les pregunté por qué habían pensado que no era humana. Alguien respondió: "es muy ancha". ¿Muy ancha? Si queréis podemos hacer una foto a una huella nuestra y luego ampliarla tanto como queramos. También será muy ancha, ¿no? Alguien replicó: "es mucho más ancha que larga". ¿Seguro? ¿O quieres decir que es muy ancha para lo larga que es?

Esto es lo que impresiona. Estoy seguro de que no hay hombre ni mujer en toda la península, para no irme más lejos, que podría, cuya huella sea comparable a ésta. Una huella mía, por ejemplo, se vería más fina y estilizada. La relación entre su longitud y anchura sería mucho menor que la de esta imagen. La huella impresiona por su proporción.

Midamos pues la huella y calculemos la proporción entre su longitud y anchura. Al efectuar la medición hay que tener en cuenta que la pisada no es del mismo tamaño que el pie y que parte del barro que perfila la forma del pie ha sido desplazado:

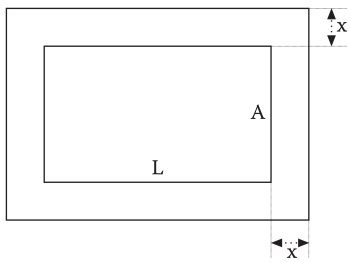


Quizá el cociente obtenido, L/A aproximadamete igual a 2,1, no nos diga mucho de entrada, pero si hacemos lo mismo con nuestro propio pie nos daremos cuenta de la diferencia. El valor del cociente L/A de la imagen será bastante menor que el nuestro. En mi caso, L/A=2,7. Es esa diferencia de proporción y no de tamaño la que transforma esta imagen en iMATgen.

El tema puede dar mucho de sí porque hay dos aspectos de la proporción involucrados aquí. Uno es el ya mencionado. El otro es que no importa que la fotografía sea de un tamaño u otro. El resultado del cociente L/A será siempre el mismo mientras la imagen sea consecuencia de una ampliación o reducción.

Mis alumnos de tercero de la E.S.O. también calcularon las proporciones de sus pies. Les encargué que en casa se midieran su longitud y anchura y trajeran los resultados a clase. Vieron que la proporción de la huella era mucho más pequeña, es decir, más ancha. También observaron que las de las chicas eran menores que las de los chicos. Incluso hubo una alumna cuya proporción era 3,14. Ella sí que caminaba con buen "πe". Cuando les pregunté cómo habían medido sus pies aparecieron cosas interesantes. La mayoría se midió el pie levantándolo del suelo y aplicándole a la planta una regla. Otros habían puesto la regla en el suelo y luego la habían pisado a lo largo y a lo ancho, buscando el mayor ancho posible. Pero hubo quien en lugar de efectuar una medida directa perfiló con lápiz la silueta de su pie sobre un folio y midió después el resultado. La acción de esta alumna me invitó a que planteara a toda la clase un problema que ahora repito de un modo más formal:

Al perfilar una figura, aunque poco, la estamos agrandando porque siempre queda una cierta separación entre la punta del lápiz o bolígrafo que perfila y el objeto perfilado. ¿Se conserva entonces la proporción entre su longitud y anchura?

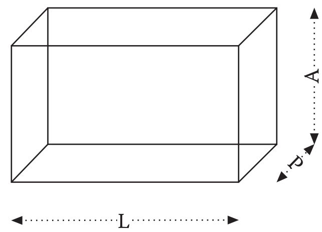


Entre el rectángulo original y su perfilado[1] se mantendrá la proporción de sus lados, es decir, serán semejantes si:

$$\frac{L}{A}=\frac{L+2x}{A+2x} \Leftrightarrow Lx = Ax \Leftrightarrow L = A \vee x = 0$$

Las soluciones L=A y x=0 indican solamente dos posibilidades: o bien el rectángulo original es un cuadrado (L=A), o bien la perfilación del rectángulo no cuadrado debe tener amplitud nula (x=0), es inexistente. Este resultado vale tanto para el perfilado exterior (x>0), como se ha realizado aquí, como para el interior (x<0).

Podemos plantear también la cuestión en el caso de que el objeto sea tridimensional. Pasaríamos entonces de perfilar un objeto a envolverlo. En el caso bidimensional obtenemos un valor para la proporción como resultado de dividir dos números, la medida de la longitud y de la anchura. En tres dimensiones, tenemos tres magnitudes: longitud, anchura y altura. ¿Cómo adaptar entonces la idea de proporción al caso tridimensional? Y una vez conseguido esto, ¿conservará el envoltorio la proporción del objeto desnudo?



Con relación a cada cara bidimensional, en principio disponemos ahora de tres proporciones:

$$k_1 = \frac{L}{P},\; k_2 = \frac{P}{A},\; k_3 = \frac{L}{A}$$

Pero solo en principio porque $k_3/k_1=k_2$. Por tanto, si en dos dimensiones bastaba con una proporción, en el caso tridimensional dos serán necesarias para decidir cuando dos prismas rectos rectangulares, dos cajas, son semejantes. Lo serán si lo son cada una de sus caras. Si en el caso bidimensional solamente el cuadrado conservaba su proporción mediante el perfilado, ahora será el cubo el único que lo hará tras ser envuelto.

Mis alumnos consideraron que el ser cuyo pie originó esta iMATgen era de otro mundo. Aquel hombre vive en un mundo que aquí, en occidente, llamamos diferente, pero que está en este mismo planeta. Un mundo donde todavía hoy gran parte de la población camina descalza, donde incluso hay gente que no se ha calzado nunca. Gente a quienes con los años se les han ido ensanchando los pies hasta el punto que muestra la fotografía. Viven en una región montañosa llamada Tana Toraja, en la isla de Sulawesi, Indonesia. Un lugar donde las mujeres y los hombres caminan sintiendo en sus pies el calor o frescor, la humedad o aspereza de la tierra que pisan. ¿Quién sabe si antes de lo que creemos las pisadas de sus hijos no se unirán a las que resuenan en nuestras aulas?

Una huella es un vacío. ***El vacío que habla*** será el título de esta iMATgen. Quien la escucha necesita hablar matemáticas para comprender bien lo que dice. ■

NOTA

1 Soy consciente de que a diferencia del perfilado interior, el perfilado exterior a lápiz o bolígrafo de un rectángulo no produce esquinas puntiagudas, sino que las suaviza en arcos de circunferencia. Así que, en realidad, el perfilado cambia la forma original, pero esto no lo voy a tener en cuenta aquí. Quizá vuelva sobre ello en una iMATgen futura.