SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 83-86

En el entorno del teorema Kou-Ku (I)

La nueva dirección de SUMA nos pregunta qué línea va a seguir "Desde la Historia". *Las líneas se hacen andando, que diría Machado, y esta respuesta es no sólo cierta en general sino obligada en nuestro caso para esta sección de la revista. No somos especialistas en historia de las matemáticas, sólo simples aficionados, y ello nos impide concretar mucho los contenidos.*
Sí somos especialistas -otra cosa es que seamos buenos especialistas- en animar tertulias sobre matemáticas para adolescentes y ello será, junto con lo que leamos y especulemos, la fuente de nuestra aportación a "Desde la Historia". Desde nuestro profundo convencimiento de que el quehacer didáctico es un arte más que una ciencia –y aquí nos resulta obligado el recuerdo de Paco Hernán–, y por tanto improgramable, nos dejaremos llevar también aquí de la intuición de cada momento: fiaremos a la motivación contenidos y digresiones, apasionamientos, descaros y concurrencias.
Lo que escribamos estará seguramente muy relacionado con las conexiones que nuestras clases nos motiven, de manera que lo más probable es que haya en los artículos una fuerte interdisciplinariedad, una mezcla de intereses personales sobre historia y de reflexiones sobre didáctica.
En cualquier caso intentaremos responder a la renovada confianza que SUMA nos ha mostrado y que sinceramente agradecemos. Por supuesto, nuestra dirección de correo está disponible para cualquier sugerencia, aportación o crítica que los lectores y lectoras de SUMA queráis hacer.

Entre los muchos puzzles que prueban la igualdad entre áreas que asegura el llamado teorema de Pitágoras, uno de nuestros favoritos es el que muestra la figura 1. Siempre creímos percibir un aura de antigüedad en esta prueba y así parecía desprenderse de nuestra primera referencia, una observación de Hugo Steinhaus (1986) en la que afirma que es de origen hindú, pero son mayoría quienes se la atribuyen –por ejemplo Roger B. Nelsen (2001)– al afamado inventor de pasatiempos matemáticos H. E. Dudeney (1857-1930), quien la habría publicado en 1917. Es posible, sin embargo, que se le hubiera adelantado en 1873 un tal Henry Perigal, corredor de bolsa en Londres[1]. La obsesión por la "gloria", incluso la ajena, hace siglos que persigue a los vivos[2].

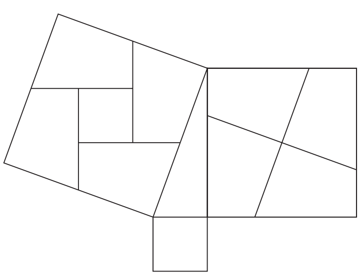

Fig. 1

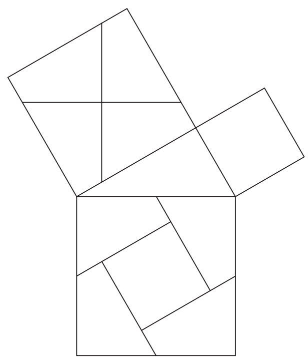

Fig. 2

Angel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
hitoria.suma@fesp.org

¡Mira!

A veces, en los textos hindúes antiguos, las figuras iban acompañadas sólo de un imperativo: ¡Mira! Pues bien: miremos la figura 1. Sí, el cuadrado sobre la hipotenusa se descompone en cinco cuadriláteros cuyas áreas equivalen a las de los otros dos cuadrados. Se supone que la construcción funcionará para cualquier triángulo rectángulo ... Cambiemos de triángulo y reconstruyamos el puzzle. Es imprescindible proponer este segundo paso en una clase de Secundaria, salvo que aceptemos sin remordimientos que todo quede en una vulgar comprobación. Cambiar el triángulo obliga a observar detenidamente el diseño del puzzle para captar sus claves y, para ello, puede ser interesante pasar a una posición como la de la figura 2.

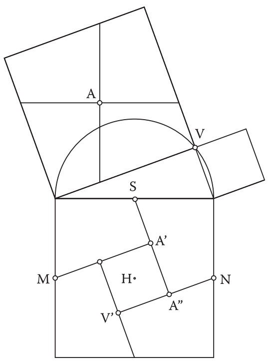

Fig. 3

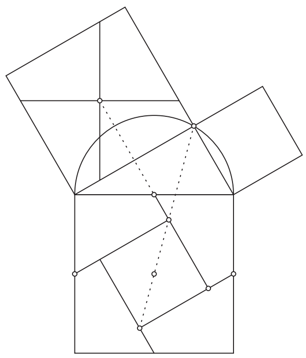

Fig. 4

Quizás ayude a intuir (Fig. 3) que A, S, A´, A´´ están alineados, así como los grupos de puntos M, H, N y V, A´, H, V´, coincidiendo S con el punto medio de la hipotenusa. La sucesión de conjeturas que elaboramos para un problema concreto está muy condicionada por el azar de las experiencias que vamos acumulando. Según cómo juguemos con CABRI (Fig. 4), desplazando V a lo largo de la semicircunferencia que circunscribe al triángulo, se afianzará el convencimiento de que esto es así para cualquier triángulo rectángulo. El estudio del puzzle parece casi terminado ... salvo que pongamos sobre la mesa la pregunta clave: ¿Cómo pudo llegar Dudeney –o Perigal– a construirlo? Quizás empezó encajando dos segmentos perpendiculares, de longitudes iguales a la de la hipotenusa, en el cuadrado del cateto grande de forma que su corte coincida con el centro de éste. Estas condiciones definen el diseño del puzzle y garantizan los alineamientos de puntos de las figuras 3 y 4. Pero precisan demasiado, de manera que permiten la duda sobre la existencia de otras posibilidades.

En realidad, la última condición no es necesaria, como muestran los dibujos de la figura 5. El punto A no tiene por qué coincidir con el centro del cuadrado. Para un mismo triángulo hay una banda horizontal y otra vertical en las que pueden situarse las “hipotenusas”. Su intersección (Fig. 6) determina la zona permitida al punto A. Observaremos entonces que, en general, fallan dos de las alineaciones de la figura 3, y que los puntos S, M y N no tienen por qué coincidir con los puntos medios de los lados del cuadrado. Siguen sin embargo en la misma recta A, S, y A´, el alineamiento clave para el funcionamiento del puzzle, que sirve como prueba del teorema de Pitágoras porque los tres triángulos coloreados en la figura 7 son iguales, independientemente de la posición en la que se localice el punto A.

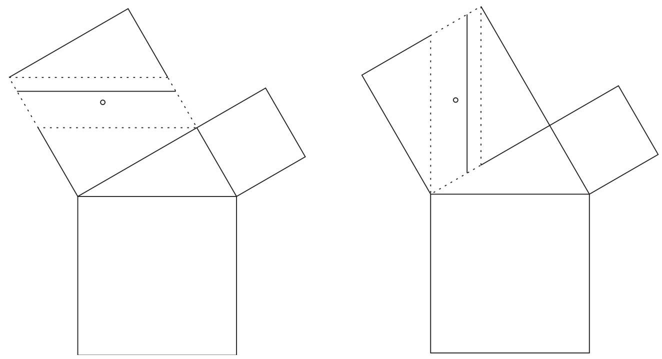

Fig. 5

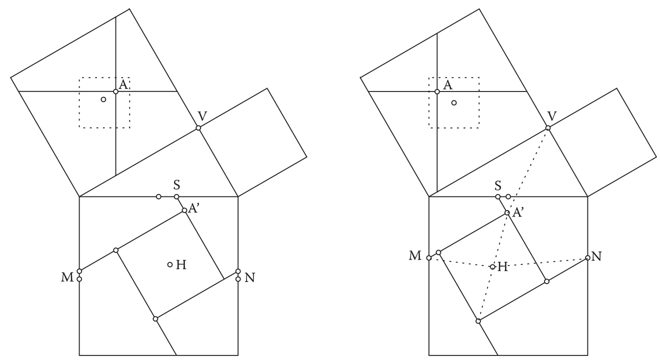

Fig. 6

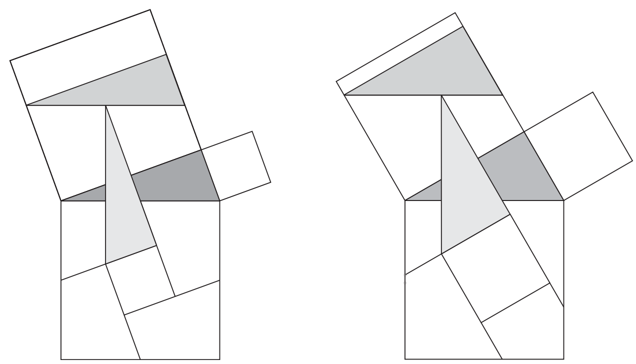

Fig. 7

Los casos límite (Fig. 8) suelen ser curiosos y muchas veces tienen interés didáctico. En el segundo podemos ver cómo se sitúan los vértices del cuadrado del cateto grande para completar el cuadrado de la hipotenusa, en un mnemotécnico giro de 90º de la serie 1234 que tiene validez general.

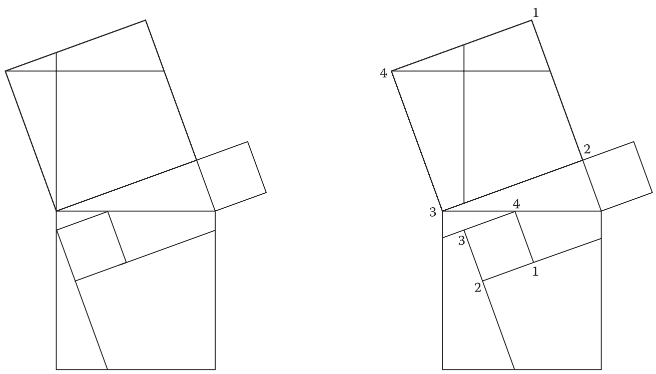

Fig. 8

Sugieren también que se puede empezar a construir el puzzle trasladando el cuadrado del cateto pequeño a cualquier posición en el interior del cuadrado de la hipotenusa (de c1 a c2) (Fig. 9) y construyendo sobre su lado un triángulo rectángulo congruente con el primero. A medida que c2 "recorre" el cuadrado en que ha sido alojado, el punto A "recorre" a su vez la zona cuadrada que vimos anteriormente. En la figura 10 puede observarse la igualdad entre JA y EK y, por tanto, entre JE y AK.

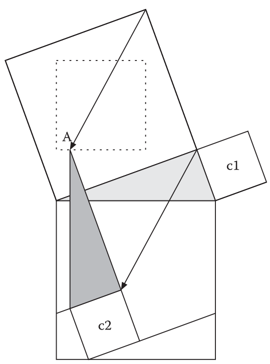

Fig. 9

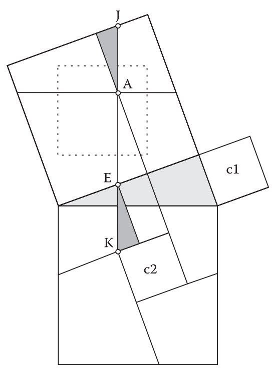

Fig. 10

El estudio comprensivo

Pasemos ahora a las figuras 11. Partimos de nuevo del puzzle de Dudeney – Perigal en el que vamos a hacer dos modificaciones. En la primera, a la que corresponde el itinerario A-B-C, borramos el cuadrado de la hipotenusa, ampliamos el cuadrado del cateto grande hasta que incluya el del pequeño, borramos uno de los segmentos de su interior y trasladamos el otro.

En la segunda –itinerario A-B´-C´-D´– borramos los segmentos del interior de los cuadrados del dibujo inicial y formamos otra vez el nuevo cuadrado de B, lo vaciamos a su vez y encajamos el cuadrado de la hipotenusa en su interior. Comparemos C y D´: en los dos hay cuatro triángulos iguales, por lo que el resto de sus correspondientes superficies deben ser también iguales. Es probablemente la prueba más sencilla y divulgada del teorema de Pitágoras. Viene recogida en el

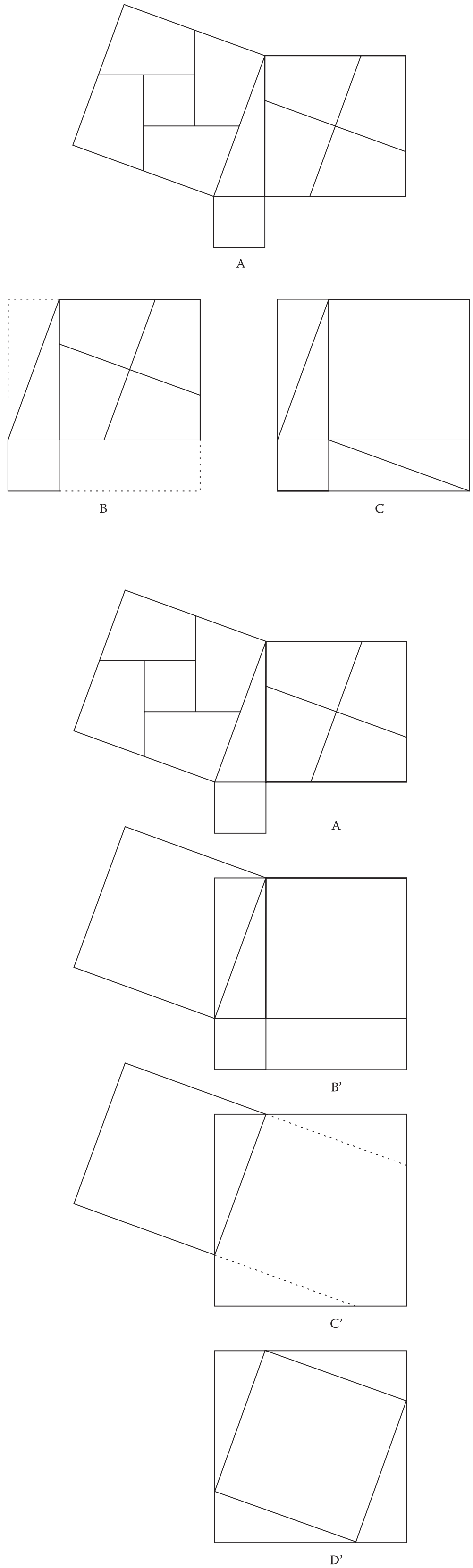

Fig. 11

comentario de Liu Hui (siglo III d. C.) al Chou Pei Suan Ching, una especie de enciclopedia aritmética, de autor anónimo, redactada entre los siglos V y III a. C. Los cuadrados construidos sobre los catetos tenían un color asignado, kou (rojo) y ku (azul), y esta pareja de colores daba nombre en China al teorema. La tradición pesaba más que los derechos de gloria del autor imperantes hoy día.

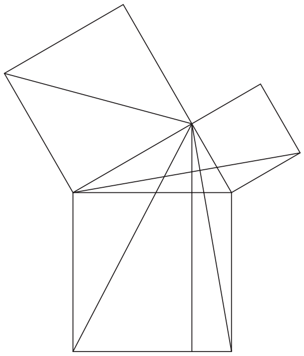

Fig. 12

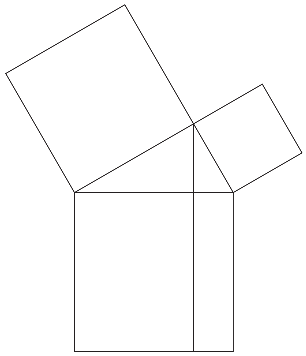

Fig. 13

De manera similar a lo que ocurre con el reto de la obtención de un número cada vez mayor de decimales de π –un problema igualmente inútil desde un punto de vista práctico–, la justificación del teorema kou-ku por un nuevo procedimiento no catalogado todavía parece continuar fascinando a los seres humanos. La afición al juego es síntoma de inteligencia y el teorema tiene además un fuerte atractivo. En Elisha Scott Loomis (1972) vienen recogidas más de 250 demostraciones.

Quizás sea menos popular que las anteriores –y si así es, no dejaría de ser sorprendente dada la importancia que se concede a su autor– la que aporta Euclides en los Elementos. Un matemático "serio" podría decir que ello es debido a que allí se desarrolla una auténtica demostración y no una mera comprobación "visual", pero lo que probablemente sucede es que el estilo del texto –muy ajustado a las exigencias del dogma deductivista– lo hace muy seco para el lector o lectora. En realidad, no es imprescindible aburrir al presentar una argumentación lógicamente consistente. Imaginemos que Euclides hubiera eliminado de su dibujo (Fig. 12) cuatro líneas y hubiera acompañado la figura resultante (Fig. 13) con el "¡Mira!" hindú.

Es más fácil entonces asociar cada uno de los cuadrados de los catetos con los rectángulos correspondientes en que queda dividida la hipotenusa. Las cuatro líneas eliminadas son necesarias para demostrar que, efectivamente, esa asociación sugerida por la figura 13 es correcta. Si se conoce previamente esta idea básica –¡una hermosa idea!– es posible leer la pesada exposición de Euclides de forma comprensiva. Si no, la probabilidad de sentirse como un ciego guiado por un lazarillo es muy alta. Haced una prueba con alguien que no conozca esta demostración y pedidle que responda a la pregunta clave: ¿cómo se le pudo ocurrir esto a Euclides?

¡El estudio–lectura comprensivo! ¡Confesemos nuestra pereza cuando el camino de un texto de matemáticas aumenta su pendiente y nos exige rellenar las inevitables lagunas argumentales! El aprendizaje inteligente requiere de nuestra creatividad. Escuchemos a Trotski (1972):

> "En el estudio, cuando no se trata de una memorización mecánica, hay también un acto creador, pero de tipo inverso. Hacer el resumen de la obra de otro significa poner al descubierto el esqueleto lógico, despojándolo de pruebas, de ilustraciones y de digresiones." ■

NOTAS

1 La duda sobre Dudeney o Perigal está tomada de www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml. Alexander Bogomolny ha recopilado en esta página 43 demostraciones del teorema de Pitágoras.

2 La lectura de Bertrand Russell (2003) es un buen ejercicio de higiene mental a propósito de este tema. El Russell logicista transformado en el Russell humanista: *"Ahora disfruto de la vida (...) En parte se debe a que he logrado prescindir de ciertos objetos de deseo –como la adquisición de conocimientos indudables sobre esto o sobre lo otro– que son absolutamente inalcanzables".*

3 Al menos, así transcribe G. Gheverghese Joseph (1996) las palabras chinas "rojo" y "azul".

4 Proposición 47, Libro I.

5 Además de en los *Elementos*, también se puede encontrar la demostración de Euclides en Davis y Hersh (1988).

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DAVIS y HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor.

EUCLIDES (1991): *Elementos*, Gredos.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide.

NELSEN, R. B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur.

RUSELL B. (2003): "La conquista de la felicidad", *El País*.

SCOTT LOOMIS, E. (1972): *The Pythagorean proposition*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.

TROSTKI, L. (1972): *El joven Lenin*, Fondo de Cultura Económica.