SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 53-64

# El juego-rey y la ciencia de los números

*El ajedrez puede constituir un excelente recurso didáctico en el aula de matemáticas. El presente trabajo trata sobre algunas de las conexiones que se pueden establecer entre estas dos disciplinas, y sobre la posibilidad de plantear problemas matemáticos tomando como soporte el tablero y las piezas de ajedrez. Los contenidos de los problemas son muy variados, manejando diversas cuestiones -algebraicas, combinatorias, geométricas, cálculo de probabilidades, de lógica, etc.-, que resultan especialmente motivadoras por el carácter lúdico y manipulativo que posee el juego de los 64 escaques.*

*Chess can be an excellent didactic resource in the Maths class. This piece of work is about some of the connections that can be established between these two disciplines, and about the possibility of setting out mathematical problems involving the use of the chessboard and the chess pieces. The contents of the problems are very varied. Students need to use concepts related to algebra, combinatorial analysis, geometry, calculation of probabilities, logic etc... These activities are especially motivating due to the playful and manipulative nature of chess.*

Las relaciones entre el ajedrez y las matemáticas son muy diversas. Al ajedrez se le suele llamar el juego ciencia por lo que tiene de recreativo y de pseudocientífico. Stefan Zweig, en su obra *"El jugador de ajedrez"*, lo define como *"un pensamiento que no conduce a ninguna parte, una matemática que no establece nada, un arte que no deja tras de sí obra alguna, una arquitectura sin materia..."*.

Las únicas disciplinas intelectuales que producen con frecuencia niños prodigio, además de la música, son el ajedrez y las matemáticas.

El ajedrez es, sin lugar a dudas, el juego ideal para una mente matemática. Entre los matemáticos se suelen encontrar buenos ajedrecistas. *Euler*, *Gauss*, *Legendre* y *De Moivre* fueron grandes aficionados, y resolvieron problemas matemáticos basados en este juego. Por otro lado, no son pocos los ajedrecistas de elite que fueron amantes de las matemáticas. *Adolf Anderssen* (1818-1879), profesor de matemáticas en su ciudad natal, Breslau (Alemania), es el autor de dos partidas memorables: *"La Inmortal"*, jugada en 1851 contra Kieseritzky, y *"La Siempreviva"*, contra Dufresne en 1852. *Wilhelm Steinitz* (1836-1900), campeón del mundo entre 1866 y 1894, al que algunos comentaristas califican como el padre del ajedrez moderno, también fue profesor de matemáticas. *Emmanuel Lasker* (1868-1941), campeón del mundo de 1894 a 1921, estaba especialmente dotado para los números. Doctor en matemáticas por la universidad de Erlanguen (Alemania), crea el concepto de ideal primario en su tesis doctoral "Los módulos ideales", en 1902. *Max Euwe* (1901-1981), gran maestro holandés, campeón del mundo de 1935 a 1937, fue profesor de matemáticas y su estilo ajedrecístico se caracterizaba por la precisión matemática en el tratamiento de todas las fases del juego. *Mijail Botvinnik*, del que es famosa su frase *"El ajedrez es a las matemáticas lo que la música a la acústica"*, fue un gran maestro ruso campeón del mundo en tres ocasiones, entre 1948 y 1963. Como ejemplo actual, el gran maestro inglés *Nunn* es doctor en Topología Algebraica por la universidad de Oxford.

En el IES Diego Tortosa de Cieza (Murcia), en el que desarrollo mi labor docente, se ha introducido un Taller de Ajedrez como materia optativa en el cuarto curso de la ESO, tras la autorización por parte del MEC de un currículo propio.

Por otro lado, entre las materias optativas de la ESO se encuentra el Taller de Matemáticas. Esta asignatura no se concibe como una clase más de Matemáticas, ni de ampliación ni de recuperación de conocimientos; se trata más bien de trabajar los conceptos ya adquiridos dándoles una dimen-

**José Ángel Ortega Dato**
*I.E.S. "Diego Tortosa"*
*Cieza (Murcia).*
*Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia.*

sión práctica y prestando especial atención a los contenidos de carácter procedimental y actitudinal. El profesorado tiene gran libertad a la hora de seleccionar los contenidos a impartir, y de adecuarlos a las motivaciones, intereses y características de los alumnos que elijan esta materia. Entre los objetivos del Taller de Matemáticas destacan el desarrollar capacidades para la resolución de problemas, fomentar la imaginación y creatividad, poner de manifiesto el aspecto utilitario de las matemáticas, potenciar el trabajo en equipo, favorecer una actitud positiva hacia las matemáticas, y descubrir que se puede llegar a disfrutar "haciendo matemáticas".

Es fácil, pues, que surgiera la idea de relacionar estas dos materias, Taller de Matemáticas y Taller de Ajedrez, encuadradas ambas en el departamento de Matemáticas. De esta forma, en el Taller de Matemáticas, comenzamos a elaborar y recopilar problemas de contenido matemático tomando como base al ajedrez.

La introducción en el aula de materiales manipulativos suele ser en sí mismo un estímulo para los alumnos. En particular, el ajedrez puede constituir un recurso didáctico especialmente motivador en el aula de matemáticas por su carácter lúdico.

## Conocimientos previos y materiales didácticos

Para abordar los problemas no es necesario tener conocimientos muy amplios sobre ajedrez, bastará que los alumnos conozcan el tablero y el movimiento de las piezas (gráfico 1).

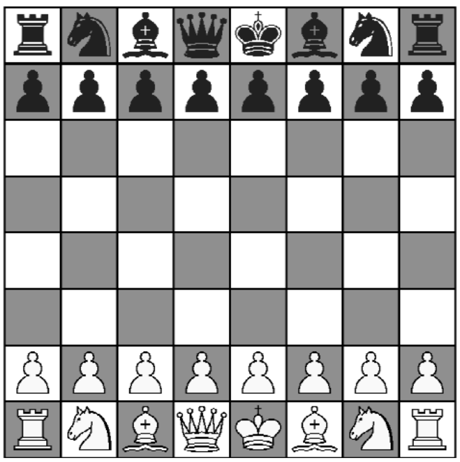


Gráfico 1

La resolución de los problemas se realiza fundamentalmente en trabajo en grupo. Los alumnos deberán manejar tableros y fichas de ajedrez, y también puede serles útil en algún momento la calculadora. Para explicar una cuestión a todos los alumnos se usa un tablero mural de ajedrez con fichas magnéticas. La dinámica de la clase suele ser la siguiente. Se reparte una fotocopia del problema por alumno, y otra extra para la respuesta del grupo. En primer lugar el problema se estudia individualmente, a continuación se produce un intercambio de opiniones entre los miembros del grupo para llegar a un consenso, y se redacta la solución del grupo. Finalmente hay una exposición de cada grupo, intentando llegar a una conclusión para toda la clase, valorando las distintas estrategias seguidas.

## Resolución de problemas

Los problemas que se proponen son apropiados para los alumnos del segundo ciclo de la ESO, y pueden servir para reforzar conocimientos ya adquiridos e introducir otros nuevos.

Los contenidos son muy variados, tratándose cuestiones geométricas, algebraicas, combinatorias, de lógica, etc. Situándonos en el campo de la resolución de problemas, se pide el establecimiento de fórmulas, el paso a la generalización partiendo de situaciones concretas, el recuento sistemático de casos, eligiendo en cada situación la estrategia más adecuada.

Se potencian en los alumnos las capacidades de análisis de situaciones, creatividad, pensamiento lógico e imaginación. Por otro lado, al ser el ajedrez un juego, es mayor la participación y la motivación de los alumnos, eliminando el recelo hacia los problemas de contenido matemático.

Tendríamos que puntualizar que un *"problema"* no es un ejercicio; es decir, no se puede resolver de forma automática, sino que requiere una investigación previa para elegir la estrategia adecuada. Muchas veces no se sabe muy bien cómo comenzar, ni tampoco cómo seguir. De manera que resolver problemas es una actividad mental compleja, que requiere ciertos conocimientos y poner en escena una buena dosis de talento y creatividad, por esto, habitualmente habrá muchas formas de resolverlos, y también habrá varios métodos o estrategias en las que se podrá basar la resolución. Se requiere de un entrenamiento y, por lo tanto, el mejor método para llegar a ser un experto en resolución de problemas es el esfuerzo.

*Tendríamos que puntualizar que un "problema" no es un ejercicio; es decir, no se puede resolver de forma automática, sino que requiere una investigación previa para elegir la estrategia adecuada.*

## Los problemas

La mayoría de los problemas que siguen constituyen una sucinta selección de los más interesantes que se encuentran en la literatura, completados con cuestiones que he elaborado teniendo presente que resultaran asequibles para los alumnos. También aparecen algunos "de mi propia cosecha", como resultado de la adaptación al ajedrez de problemas de todo tipo con contenido matemático.

## Para comenzar, tres problemas históricos

Se conocen varios problemas clásicos en los que la ciencia de los números y el rey de los juegos parecen unirse con mayor fuerza. Tres de los más famosos son la *"Leyenda sobre la invención del ajedrez"*, el *"Problema de las ocho damas"*, y el *"Problema de Guarini"*. La primera de estas cuestiones está considerada como el primer problema de ajedrez de contenido matemático.

**Leyenda sobre la invención del ajedrez**

Existen varias historias que intentan explicar la invención del ajedrez que, según los estudiosos del tema, tuvo lugar en el lejano oriente, y más concretamente en la India hace más de 2000 años, donde se conocía con el nombre de *Chaturanga* (*"chatur"* = cuatro, *"anga"* = miembros), que hace alusión a las cuatro clases de fuerzas de que estaba compuesto el ejército hindú: infantería (los peones), caballería (los caballos), elefantes (las torres), y carros (los alfiles).

Una de las más conocidas es la leyenda del brahmán Sissa Ben Dahir, a quien se le atribuye su invención con el motivo de distraer a su soberano, Schirham rey de la India, de sus ansias bélicas. El monarca decide recompensarle por haber creado el considerado, sin lugar a dudas, mejor juego ideado por el hombre. Sissa pide un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, etc., y así hasta llegar a la última casilla (gráfico 2).

El rey se asombra de la escasa ambición de Sissa y pide a sus mas grandes sabios que realicen el cálculo para pagarle lo que solicita. Una vez obtenido el total, el sabio anuncia que la cantidad pedida es enorme, pues supera los 18 trillones de granos de trigo.

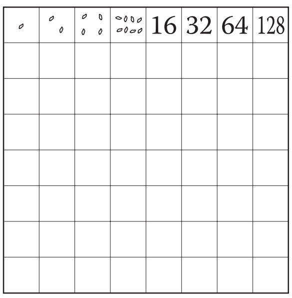



Gráfico 2

Este problema aparece en muchos libros de texto como introducción de las secuencias numéricas y, en particular, las progresiones geométricas.

La cantidad de granos de trigo es $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$

Utilizando la fórmula de la suma de las progresiones geométricas se tiene:

$$S_{64} = a_1 \frac{r^{64} - 1}{r - 1} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18.446.774.073.709.551.615$$

Pero esto no es necesario, pues el cálculo se puede realizar de forma ingeniosa sumando una unidad:

$$1 + (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}) = 2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$$

Y ahora:

$$2 + 2 = 2\,(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$2 + 2 + 4 = 2^2 + 2^2 = 2^2\,(1 + 1) = 2^2 \cdot 2 = 2^3$$
$$2 + 2 + 4 + 8 = 2^3 + 2^3 = 2^3\,(1 + 1) = 2^3 \cdot 2 = 2^4$$

Entonces:

$$2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} = 2^{64}$$

Luego la cantidad pedida es $2^{64} - 1$.

Un cálculo aproximado del número de granos de trigo se obtiene haciendo:

$$2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot (2^{10})^6 = 16 \cdot (1024)^6 \sim 16 \cdot (10^3)^6 = 1'6 \cdot 10^{19}$$

Pueden resultar cuestiones interesantes para los alumnos calcular el volumen y el peso del trigo, las dimensiones del granero necesario para almacenarlo, y el tiempo que se tardaría en contar uno a uno los granos de trigo (Ifrah, 1987).

Otra de las versiones de la leyenda nos cuenta que un matemático de la corte del rey Schirham, que era más generoso, realizó los cálculos suponiendo un tablero de infinitas casillas. Según él, la suma de los granos de trigo se puede calcular de la siguiente manera:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) = 1 + 2 \cdot S$, de donde $S = -1$.

¿Será posible que Sissa tuviera al final que pagar un grano de trigo al rey?

**Problema de las ocho damas**

Otro tema clásico de conexión entre las matemáticas y el ajedrez es el "Problema de las ocho damas", formulado por el alemán Max Bezzel en 1848. Consiste en hallar todas las formas posibles de colocar en el tablero de ajedrez ocho damas, de manera que dominen todas las casillas y no se protejan mutuamente, es decir, sin que ninguna de ellas esté amenazada por otra. En el gráfico 3 se representa una de las soluciones.

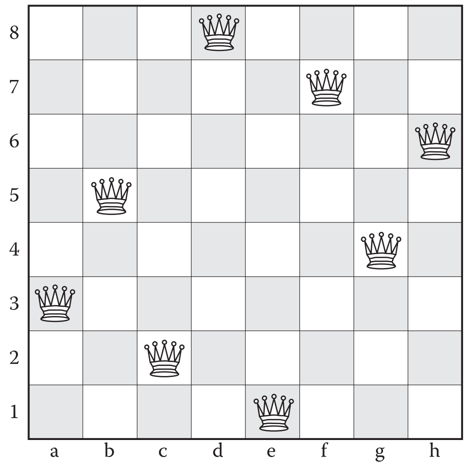



Gráfico 3

El problema fue estudiado por C. F. Gauss, el príncipe de los matemáticos, que halló 76 de las 92 soluciones posibles. Pero fue en 1850 un amigo suyo, el matemático ciego Franz Nauck, el primero en encontrar todas las coordinaciones posibles (Frabetti, 1995).

Siguiendo el consejo de Miguel de Guzmán (*"Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil"*), el problema lo deben abordar los alumnos en tableros más pequeños: Situar 4 damas en un tablero de 4x4 casillas, situar 5 damas en uno 5x5, etc., teniendo siempre en cuenta que no puede haber dos damas en la misma fila, columna o diagonal. Es significativo que no exista ningún algoritmo que relacione el número de soluciones posibles con las dimensiones del tablero.

Las 92 soluciones en el tablero normal de 8x8 casillas se obtienen por giros y simetrías a partir de 12 soluciones básicas (gráfico 4).

Un procedimiento muy laborioso consiste en considerar que el movimiento de la dama es una combinación de torre y alfil. Partiendo del problema con el mismo enunciado pero para ocho torres, que es mucho más sencillo de resolver, basta considerar que el movimiento de la torre se produce por filas y columnas, entonces cada torre deberá estar en una columna distinta. La torre de la primera columna se puede situar en cualquiera de sus 8 casillas, la segunda torre se podrá situar en 7 casillas, y así sucesivamente hasta llegar a la octava torre que sólo dispone de una casilla. Luego el número total de coordinaciones es 8! = 40320. De éstas, tendremos que eliminar las 40228 coordinaciones en las que dos torres se encuentren en una misma diagonal (movimiento del alfil), para llegar a las 92 coordinaciones diferentes para las ocho damas.

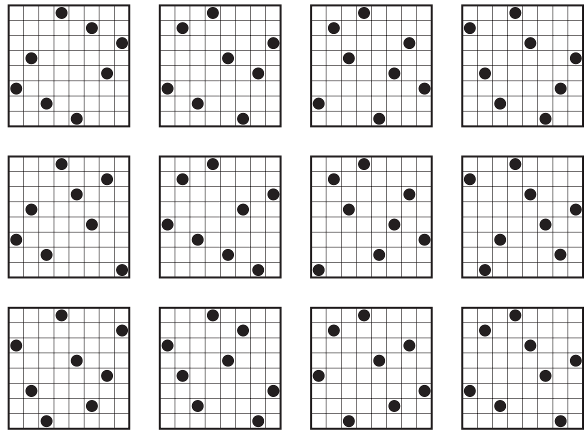


Gráfico 4

La búsqueda de las soluciones se puede realizar mediante un programa de ordenador. Asignando a cada dama el número de la fila que ocupa, y tomando las columnas de izquierda a derecha, cada posición se puede cifrar con un número de 8 dígitos. Por ejemplo, la posición del gráfico 3 se anotaría 35281746. La condición que debe cumplir una permutación para ser solución válida es que la diferencia entre dos cualesquiera de los dígitos no sea igual a su distancia, pues en caso contrario dos damas estarían en la misma diagonal. Por ejemplo, la permutación 46851372 no será válida pues el 5 y el 3 están a dos lugares de distancia y se diferencian en dos unidades (las damas situadas en la cuarta y sexta columnas estarían en la misma diagonal).

Una aplicación interesante del problema de las ocho damas a los algoritmos genéticos se desarrolla en el artículo reseñado en la bibliografía (Corzo, 2000).

Este problema se puede ampliar a cualquiera de las demás

*El ajedrez es, sin lugar a dudas, el juego ideal para una mente matemática. Euler, Gauss, Legendre y De Moivre fueron grandes aficionados, y resolvieron problemas matemáticos basados en este juego. Por otro lado, no son pocos los ajedrecistas de elite que fueron amantes de las matemáticas.*

piezas, enunciando los problemas de coordinaciones de piezas idénticas (Bonsdorff, 1974):

"Hallar el máximo número de piezas iguales que se pueden colocar en un tablero de ciertas dimensiones, de modo que no se amenacen entre sí, y determinar todas las combinaciones posibles".

O también; "hallar el mínimo número de piezas de cierta clase que es necesario y suficiente para abarcar todas las casillas de un tablero de cierto orden".

E incluso el problema inverso: "¿Cuántas piezas iguales se pueden colocar como máximo en el tablero de forma que no dominen todas las casillas?".

**Problema de Guarini**
El siguiente problema fue propuesto por el italiano Guarini di Forli en el año 1512, por lo que es uno de los problemas más antiguos relacionados con el ajedrez.

En un tablero de ajedrez de dimensión 3x3 se colocan los dos caballos blancos en las esquinas inferiores y los dos caballos negros en las superiores (gráfico 5). Se trata de intercambiar las posiciones de los caballos blancos y negros en el mínimo número de movimientos, considerando que de forma alternativa se mueve un caballo negro y uno blanco siguiendo las reglas del ajedrez.
Manipulando los caballos en el tablero, los alumnos pueden

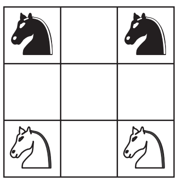


Gráfico 5

llegar a la solución. El objetivo se logra en 16 movimientos, haciendo girar los caballos alrededor del tablero en cuatro etapas (gráfico 6).
Este problema se puede transformar en otro isomorfo de

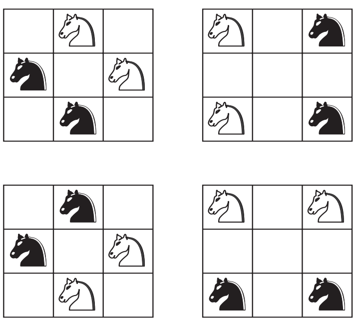


Gráfico 6

carácter topológico de teoría de grafos. Se traza un diagrama donde se representa por una línea recta cada uno de los posibles saltos de los caballos. "Desatascando" el grafo se llega rápidamente a la solución (Gardner, 1981).

## Problemas sobre el tablero de ajedrez

Tomando como soporte el tablero de ajedrez se pueden plantear numerosos problemas. A continuación se exponen algunos de ellos.

**Cuadrados en el tablero de ajedrez**
¿Cuántos cuadrados existen en el tablero de ajedrez? (Fernández, 1991).

Considerando las casillas del tablero tendremos 64 cuadraditos, pero también se pueden construir cuadrados tomando de lado dos casillas del tablero (orden 2), tres casillas (orden 3), etc., y hasta ocho casillas de lado que constituiría el cuadrado del tablero completo (gráfico 7).

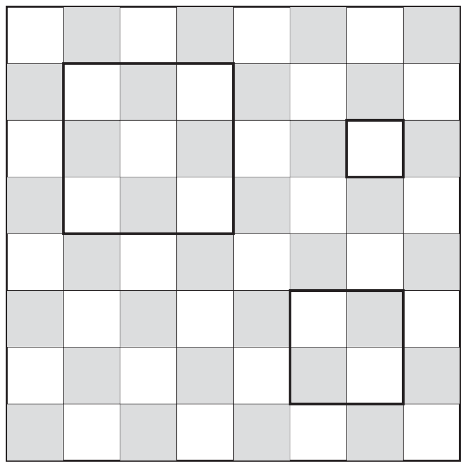


Gráfico 7

El cálculo del número de cuadrados que hay de cada orden se realiza mediante recuento sistemático y ordenado. La solución se recoge en la siguiente tabla:

| Orden | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº Cuadrados | 64 | 49 | 36 | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 |

El número total de cuadrados es:

$$1+4+9+16+25+36+49+64=\sum_{i=1}^{8} i^2=204$$

Los alumnos pueden llegar a la fórmula que relaciona el número de cuadrados según su orden:

NºCuadrados(orden) = (9 - orden)$^2$

Generalizando a un tablero de nxn casillas:

NºCuadrados(orden) = ((n+1) - orden)$^2$

Al calcular el número total de cuadrados para un tablero n·n llegamos a la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales, que se obtiene por inducción:

$$1+4+9+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Rectángulos en el tablero de ajedrez**

También es posible hallar una fórmula que nos dé el número de rectángulos, de unas dimensiones determinadas, que existen en el tablero de ajedrez (gráfico 8).

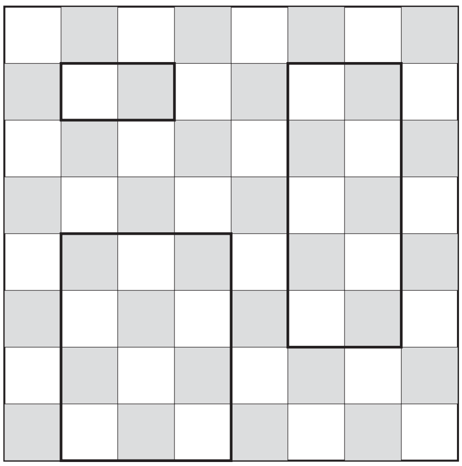


Gráfico 8

Para determinar un rectángulo basta con fijar una horizontal y una vertical de las líneas que dividen las casillas del tablero (Alayo, 1991). Como en el tablero normal de 8x8 casillas hay 9 líneas horizontales y 9 líneas verticales se obtienen: Nº rectángulos = $C_{9,2} \cdot C_{9,2}$ = 1296.

Entonces, el número de rectángulos (no-cuadrados) es: 1296-204 = 1092.

Para una base y altura determinadas, se obtiene:

Nº rectángulos de base b casillas y altura h casillas = (9 - b) · (9 - h)

Generalizando para un tablero de nxn casillas:

$$N\text{”rectÆngulos}=C_{n+1,2}\cdot C_{n+1,2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

*Nº rectángulos (no-cuadrados) =*

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(3n+2)(n^2-1)}{12}$$

**El problema de los diez peones**

En un tablero de ajedrez de 4x4 casillas se han situado 10 peones de manera que en todas las filas, columnas y diagonales principales (diagonales de 4 casillas) hay un número par de peones (gráfico 9). Busca otras formas.

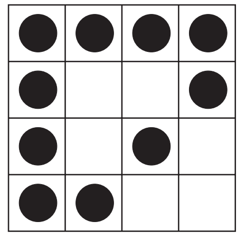


Gráfico 9

Tras la manipulación de los peones en el tablero, el alumno puede llegar a la siguiente conclusión: “Por filas y columnas los peones deben repartirse de la forma 2 + 2 + 2 + 4, luego siempre habrá una fila y una columna con 4 peones y las otras con 2 peones”. De esta forma se obtienen, salvo giros y simetrías, doce posiciones diferentes.

**Filas de piezas**

Un niño juega con 19 piezas de ajedrez. ¿Cómo podrá situarlas en un tablero de 5x5 casillas para formar 7 filas de 5 piezas cada una?

Los alumnos se pueden animar a plantear y resolver problemas análogos variando las dimensiones del tablero, el número de piezas, de filas y de piezas por fila.

**Paradoja geométrica**

Cortando el tablero de ajedrez por las tres líneas de trazo grueso marcadas, se puede reagrupar los cuatro trozos resultantes en un rectángulo (gráfico 10).

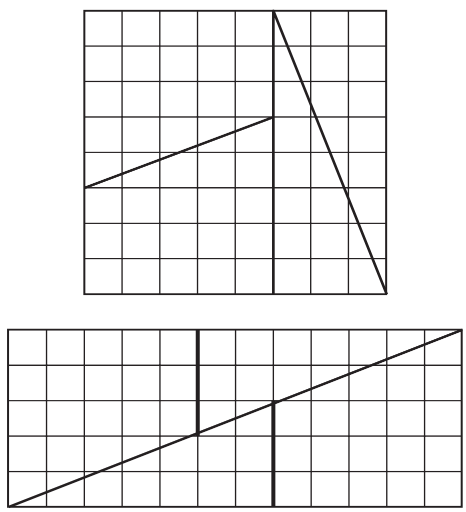


Gráfico 10

Pero, ¿qué es lo que ocurre? ¿Nos habéis hecho trampa?. El tablero de ajedrez tiene 64 casillas y el rectángulo obtenido 65. ¿Dónde está la casilla que sobra?

Si los cuatro trozos se reagrupan como en el gráfico 11 en vez de ganar una casilla, lo que ocurre es que se pierde, ya que la figura tiene sólo 63 casillas. ¿Dónde está el truco? (Frabetti, 1995).

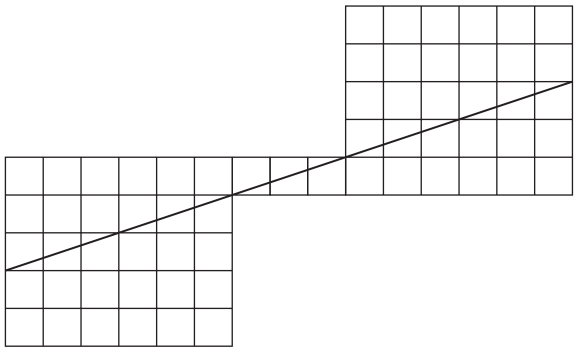


Gráfico 11

**Dominó en el tablero de ajedrez**
Desde luego que se puede recubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó, suponiendo que cada ficha ocupa dos cuadraditos del tablero. Pero ¿es posible recubrir el tablero de ajedrez si se suprimen las dos casillas de esquinas opuestas? (gráfico 12) ¿Qué casillas se pueden quitar para que sea posible recubrir todo el tablero? La coloración de las casillas del tablero da una solución inmediata (Frabetti, 1995).

De las cuestiones anteriores puede enunciarse un "juego". Dos jugadores disponen de fichas de dominó, se trata de rellenar un tablero de ajedrez de manera que el último que ponga una ficha gana, juegan alternativamente y no está permitido salir fuera del contorno del tablero ni poner una ficha encima de otra ya existente (Alayo, 1991). ¿Cuál es la estrategia ganadora?

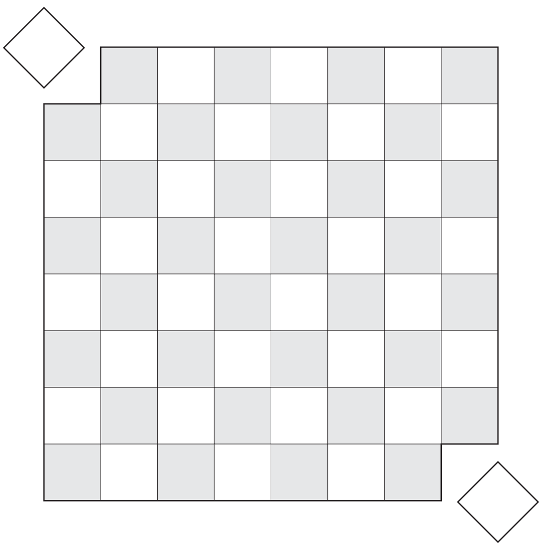


Gráfico 12

## Problemas sobre el movimiento de las piezas

Los siguientes problemas se basan en el movimiento de las piezas sobre un tablero de ajedrez.

**Valor de las piezas de ajedrez**
Se pueden resolver las siguientes cuestiones para relacionar la movilidad propia de cada una de las piezas del ajedrez con el valor relativo que se le atribuye en una partida.

a) Calcular el número máximo de casillas que domina cada pieza de ajedrez. Es decir, en un tablero vacío elegir una casilla para situar la pieza y ver a cuántas casillas se puede mover como máximo (gráfico 13).

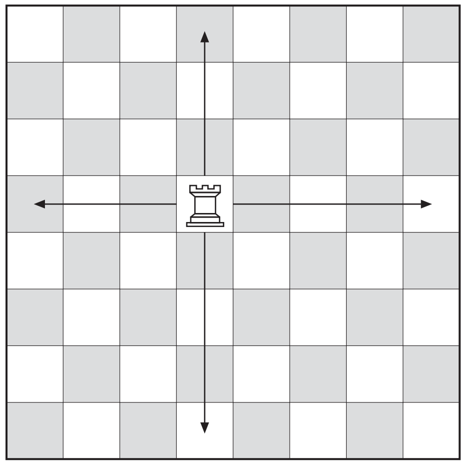


Gráfico 13

b) Relacionar el resultado obtenido en el apartado anterior con el valor que en el juego del ajedrez se le asigna a cada pieza (ver tabla).

| Piezas | Nº puntos |
|---|---|
| Peón | 1 |
| Caballo | 3 |
| Alfil | 3 |
| Torre | 5 |
| Dama | 10 |
| Rey | No se le atribuye ningún valor |

c) Con dos alfiles y dos caballos. ¿Cuál es el número máximo de casillas que se pueden dominar? ¿Y cuántas con una torre y dos alfiles?

**El salto del caballo**
¿Cuántos saltos de caballo distintos se pueden imaginar sobre el tablero de ajedrez?

La estrategia a seguir es contar sistemática y ordenadamente, teniendo en cuenta la simetría. Se realiza el recuento de los saltos de caballo desde los vértices del tablero, casillas laterales al lado del vértice, otras casillas laterales, casillas centrales, etc., llegándose a contabilizar 336 saltos distintos (gráfico 14). También se puede considerar un tablero de 2x3 casillas en el que hay 4 saltos de caballo, y como existen 84 tableros de estas dimensiones en el de 8x8 se llega a la solución.

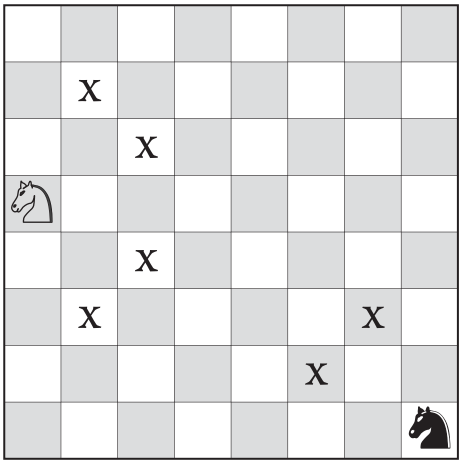



Gráfico 14

**Los dos reyes**
En un tablero de ajedrez se colocan los dos reyes, uno blanco y uno negro.

¿De cuántos modos diferentes pueden disponerse los reyes? (Frabetti, 1995).

¿Y si consideramos sólo las posiciones legales en ajedrez, es decir, aquellas en las que un rey no pueda capturar al otro? (gráfico 15).

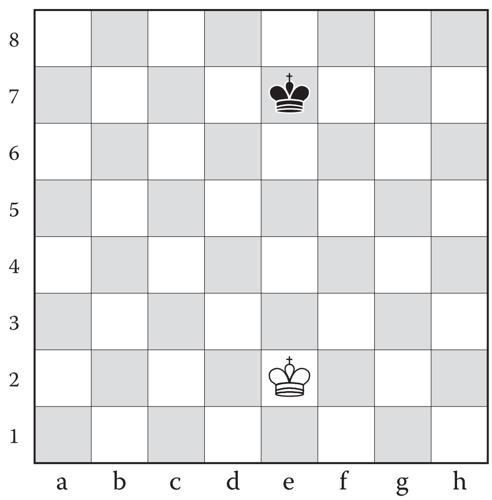



Gráfico 15

**Localización de las casillas del tablero de ajedrez**
Se propone a los alumnos que piensen un sistema para identificar cada casilla del tablero (Fernández, 1991).

Una de las respuestas más comunes será numerar las columnas y las filas del 1 al 8, de forma que cada casilla se denomina por su columna - fila. Con este código se pueden trabajar las coordenadas cartesianas. Por ejemplo, se elige una pieza determinada, se sitúa en una casilla cualquiera (x, y) y se identifican por sus coordenadas las casillas a las que se puede mover la pieza.

Otra forma sería numerar las filas del 1 al 8 y las columnas con letras en orden alfabético de "a" a "h" (gráfico 16), lo que lleva al sistema oficial de anotación de las jugadas en las competiciones de ajedrez, llamado *sistema algebraico*, que consiste en escribir la inicial de la pieza seguida de la columna y la fila a la que se mueve. Por ejemplo Dg4 significa que la Dama se sitúa en la casilla g4.

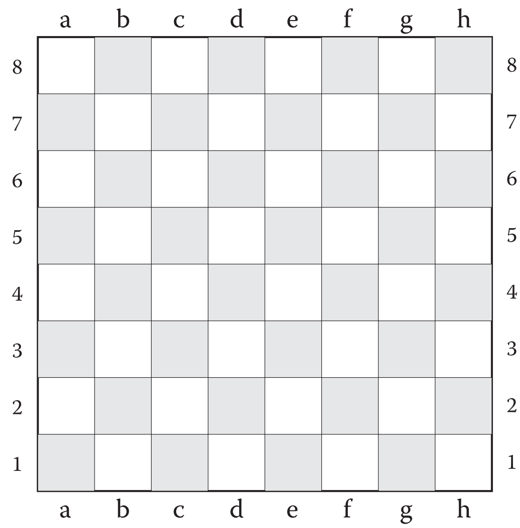



Gráfico 16

**Poligrafías**
Se denominan *poligrafías* a los recorridos de una pieza por todo el tablero de ajedrez sin pasar dos veces por la misma casilla (Frabetti, 1995). La poligrafía es *cerrada* si desde la casilla final con un movimiento más se alcanza la casilla inicial. Es *simétrica* si el dibujo del recorrido es simétrico respecto del eje vertical del tablero. Y es *con o sin cruces* según que en la trayectoria se produzcan cruces dentro de una casilla.

> *Desde luego que se puede recubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó, suponiendo que cada ficha ocupa dos cuadraditos del tablero. Pero ¿es posible recubrir el tablero de ajedrez si se suprimen las dos casillas de esquinas opuestas?*
> Frabetti

La casilla de salida de la pieza puede ser su casilla inicial al comienzo de la partida de ajedrez (*poligrafías ortodoxas*), o una casilla cualquiera.

En el caso del rey, se consiguen fácilmente poligrafías. La dificultad, y la belleza, puede aumentar si se pide que la poligrafía real sea cerrada y simétrica (gráfico 17).

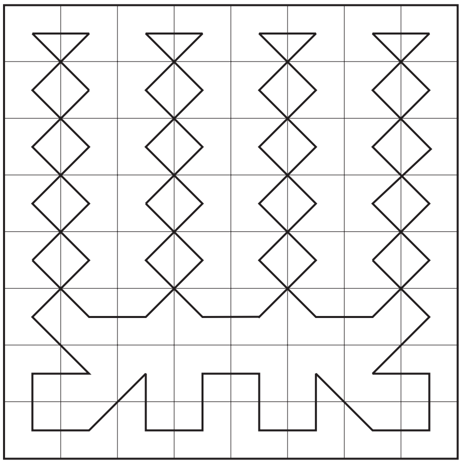


Gráfico 17

La dama, por su gran movilidad, hace que sus poligrafías sean más variadas y fáciles de hallar que las de rey. En el gráfico 18 se muestra una cerrada y simétrica respecto del centro del tablero. Además, todas las poligrafías de rey, torre o alfil también se pueden realizar con la dama.

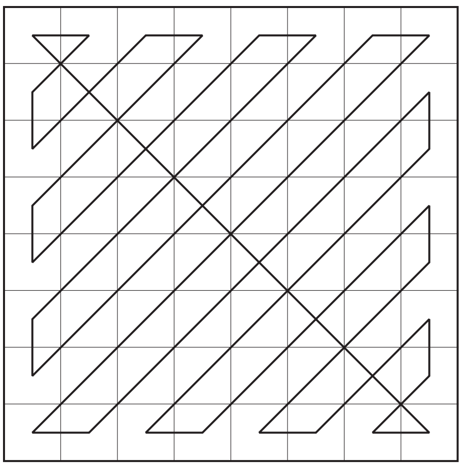


Gráfico 18

Las poligrafías de torre son triviales. En el gráfico 19 se representa una cerrada y simétrica respecto de los dos ejes.

En el caso del alfil, evidentemente sólo podemos pedirle que recorra las casillas de su color de origen. En el gráfico 20 se representa una poligrafía en la que el alfil parte de una esquina y termina en la otra, recorriendo todo el tablero en un mínimo de 17 movimientos.

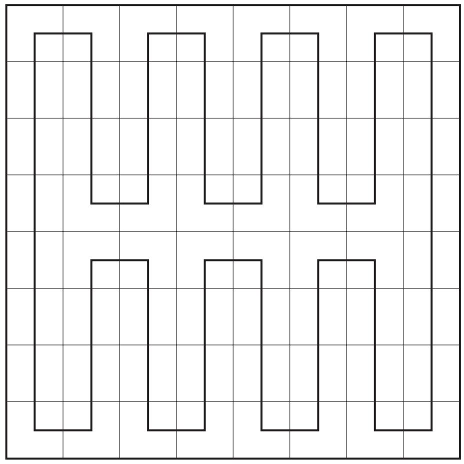


Gráfico 19

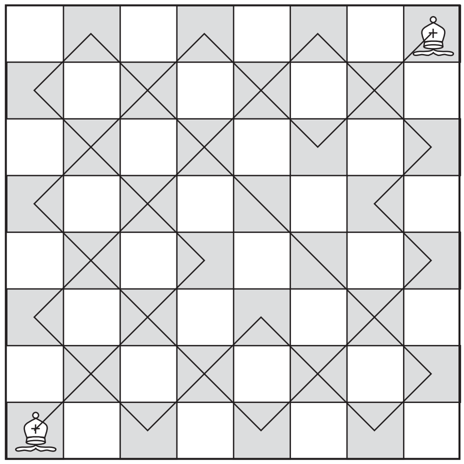


Gráfico 20

*La dama, por su gran movilidad, hace que sus poligrafías sean más variadas y fáciles de hallar que las de rey. Además, todas las poligrafías de rey, torre o alfil también se pueden realizar con la dama.*

Por último están las poligrafías de caballo que, según afirma la Enciclopedia de Diderot y D'Alembert, ya se conocían antiguamente en la India. En el siglo XVIII fueron objeto de estudio de matemáticos de la talla de Euler y De Moivre. En el gráfico 21 vemos, incompleta, una poligrafía hallada por De Moivre en 1722. Animamos al lector a deducir la pauta seguida y completar el recorrido (Frabetti, 1995).

También se pueden considerar poligrafías de caballo sobre tableros irregulares (Bolt, 1998).

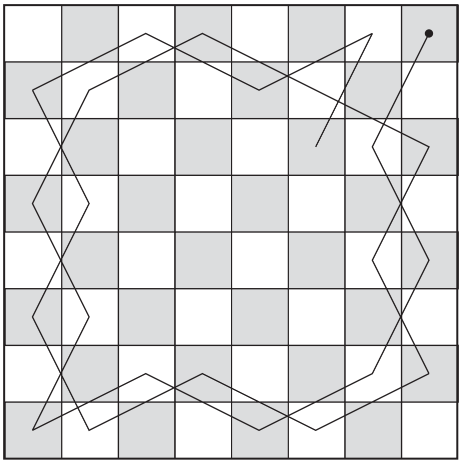


Gráfico 21

**Al galope**
Comenzando en la casilla marcada, y siguiendo a salto de caballo, descubrirá una cita y el nombre de su autor (gráfico 22).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DIOS | ♘ | BE | ♘ | ♘ | ♘ | AL |
| ♘ | ♘ | QUE | ES | FA | ♘ | ♘ |
| ♘ | ES | ♘ | TO | ♘ | EL | TI |
| ♘ | CON | BiÓ | ♘ | CA | **LA** | ♘ |
| CRI | MUN | ♘ | LEO. | ♘ | MÁ | ♘ |
| ♘ | ♘ | GA | EL | MA | ♘ | ♘ |
| DO. | ♘ | ♘ | ♘ | LI | ♘ | TE |

Gráfico 22

Además el recorrido del caballo es una poligrafía sin cruces simétrica de longitud máxima en un tablero 7x7.

## Otros problemas

El ajedrez es una fuente inagotable de problemas de contenido matemático. Se exponen a continuación algunos más donde el ajedrez sirve de excusa para plantear problemas de todo tipo.

**Campeonato del mundo**
En el campeonato del mundo de ajedrez han participado 101 grandes maestros. El torneo se ha disputado por el sistema de eliminatorias a una sola partida.

¿Cuántas partidas se jugaron en total antes de coronar al campeón definitivo?

> *El taller de matemáticas no se concibe como una clase más de Matemáticas, ni de ampliación ni de recuperación de conocimientos; se trata más bien de trabajar los conceptos ya adquiridos dándoles una dimensión práctica y prestando especial atención a los contenidos de carácter procedimental y actitudinal.*

**Peón envenenado**
Es un juego para 2 jugadores. Disponemos 15 peones en fila india. El juego consiste en tomar en cada turno 1, o 2, o 3 peones. Pierde el que tome el último peón. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

**Un torneo de ajedrez**
Siete chicos participan en un torneo de ajedrez por el sistema de liga a una vuelta, es decir, cada uno de ellos tiene que jugar una partida con todos los demás. ¿Cuántas partidas se jugarán en total? ¿Y en el caso de que el torneo se dispute a doble vuelta, jugando con cada contrincante una partida con piezas blancas y otra con negras?

**Sumapiezas**
Sabiendo que se trata de sumas horizontales y verticales, averiguar qué dígito del 0 al 5 le corresponde a cada pieza del ajedrez (gráfico 23).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ♔ | ♝ | ♕ | ♟ | ♔ | 13 |
| ♕ | ♖ | ♕ | ♟ | ♟ | 21 |
| ♞ | ♝ | ♞ | ♟ | ♝ | 8 |
| ♖ | ♞ | ♕ | ♟ | ♞ | 12 |
| ♟ | ♖ | ♖ | ♟ | ♖ | 17 |
| 13 | 10 | 18 | 20 | 10 | |

Gráfico 23

**Cuadrado mágico**
Extraer de la caja 16 piezas de ajedrez: 4 alfiles, 4 caballos, 4 torres y 4 peones (dos de cada color). Situarlas en un tablero de 4x4 casillas de manera que:

a) En cada fila y en cada columna se encuentren las cuatro piezas distintas.

b) Ampliar la misma condición a las dos diagonales principales (de 4 casillas).

c) Añadir a las condiciones anteriores la de que cada pieza ocupe casilla de su color.

Una solución se refleja en el gráfico 24.

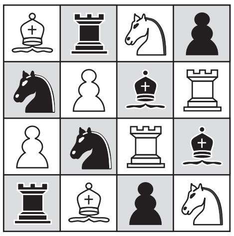


Gráfico 24

*En un tablero de ajedrez se colocan los dos reyes, uno blanco y uno negro. ¿De cuántos modos diferentes pueden disponerse los reyes? ¿Y si consideramos sólo las posiciones legales en ajedrez, es decir, aquellas en las que un rey no pueda capturar al otro?*
Frabetti

**Problemas de probabilidad**
Tomando como base el juego del ajedrez también se pueden plantear problemas dentro del campo de la probabilidad.

a) Tenemos todas las piezas del juego en su caja de madera, introducimos la mano sin mirar al interior y extraemos la primera pieza que nos tropezamos. Qué probabilidad hay de que la pieza extraída sea:
i) De color negro.
ii) Un caballo.
iii) El rey blanco.
iv) Cualquiera pero que no sea una torre.

b) En las condiciones de la cuestión anterior, sacamos dos piezas al mismo tiempo. Qué probabilidad hay de que sean:
i) Del mismo color.
ii) De distinto color.
iii) Un alfil y una dama.
iv) Cualesquiera que no sean peones.

c) Responder a las preguntas de la cuestión anterior, pero suponiendo que después de extraída la primera pieza, ésta se devuelve a la caja antes de extraer la segunda.

d) Lanzamos un dardo sobre el tablero de ajedrez. ¿Qué probabilidad tenemos de alcanzar una casilla negra? ¿Y una blanca?
e) El mismo dardo se lanza ahora dos veces sobre el tablero. ¿Qué probabilidad hay de introducirlo en dos casillas del mismo color? ¿Y de una misma columna?

f) Se tira una moneda sobre el tablero de ajedrez. ¿Qué probabilidad hay de que caiga justamente dentro de una casilla sin cortar sus bordes? Se toma como diámetro de la moneda la cuarta parte de la longitud de una de las 64 casillas. Representar gráficamente la función que nos da la probabilidad pedida dependiendo del diámetro de la moneda y suponiendo fijo el lado de la casilla.

g) Dos jugadores de ajedrez, A y B, juegan un torneo que se termina al ganar uno de ellos dos partidas. A tiene una probabilidad de ganar de 2/10, y B de 3/10, siendo la probabilidad de tablas 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A el torneo?

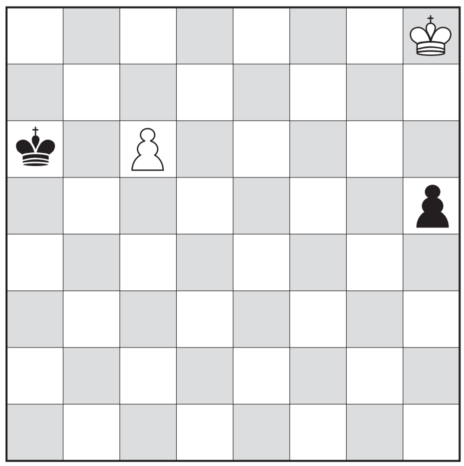


Gráfico 25
Juegan blancas y tablas

**Geometría del tablero de ajedrez**
Veamos para terminar un problema de ajedrez que se basa en la particular geometría del tablero.

En la posición del gráfico 25, perteneciente a un estudio de Richard Réti (Pachman, 1982), parece que las piezas blancas

están perdidas, porque aparentemente su rey no puede alcanzar al peón negro en su camino hacia la coronación, mientras que el peón blanco está a merced del rey contrario.
La solución es de una genial simplicidad y se basa en que en el tablero de ajedrez la menor distancia entre dos casillas no siempre es la línea recta. Para anotar las jugadas emplearemos el sistema algebraico.

Según la regla del cuadrado de coronación de un peón, las blancas tendrían que abandonar; aparentemente, su rey no puede alcanzar al peón de h5, y el peón blanco de c6 puede ser capturado con una única jugada del rey negro (Rb6). A pesar de ello, las blancas consiguen tablas en este sensacional final de juego: 1. Rg7, h4; 2. Rf6, Rb6; 3. Re5, Rxc6; 4. Rf4 y el cuadrado de coronación se ha alcanzado. La clave del problema es que al circular el rey por la diagonal se acerca al mismo tiempo a los dos peones. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALAYO, F.; FERNANDEZ, S.; BASARRATE, A.; FOUZ, F. (1991): "La resolución de problemas", *Sigma*, nº10, 2-89.

BOLT, B. (1998): "¿Qué es la geometría?", *SUMA*, nº 29, 5-16.

BONSDORFF, E.; FABEL, K.; RIIHIMAA, O. (1974): *"Ajedrez y Matemáticas"*, Martínez Roca, Colección Escaques nº 48, Barcelona.

CORBALÁN, F. y GAIRÍN, J. M. (1988): *"Problemas a mí"*, Edinumen, Madrid.

CORZO, R. Y PAREDES, F.J. (2000): "Algoritmos genéticos: la evolución como modelo matemático", *SUMA*, nº 35, 15-20.

FERNANDEZ, S. (1991): "El ajedrez, un recurso en el aula de Matemáticas", *SUMA*, nº 7, 53-60.

FRABETTI, C. (1995): *"El tablero mágico"*, Gedisa, Colección juegos nº 20, Barcelona.

GARDNER, M. (1972): *"Nuevos pasatiempos matemáticos"*, Alianza, Madrid.

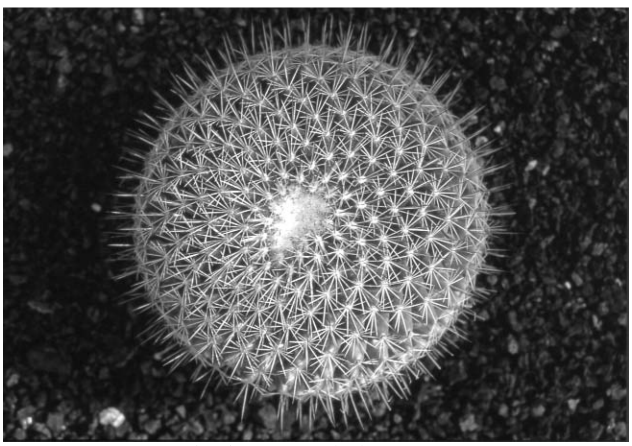
GARDNER, M. (1981): *"¡Ajá!"*, Labor, Barcelona.

IFRAH, G (1987): *"Las cifras. Historia de una gran invención"*, Alianza, Madrid.

PACHMAN, L. (1982): *"Práctica de los finales en el ajedrez"*, Martínez Roca, Colección Escaques, nº 69, Barcelona.

PERELMAN, Y. (1968): *"Matemáticas recreativas"*, Martínez Roca, Barcelona.

SEGARRA, L. (2001): *"Problemates"*, Graó, Barcelona.



Jardín de Cáctus. Isla de Lanzarote.
Foto FMC