

Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local

En el contexto del modelo de Van Hiele, se ha llevado a cabo un estudio comparativo de dos colecciones de descriptores para el mismo concepto: El de aproximación local en su manifestación de la recta tangente a la gráfica de una curva en un punto. A partir de las visualizaciones que se obtienen de los mecanismos llamados "haz de secantes" y del "zoom", se concluye que, en efecto, el nivel de razonamiento es independiente de la forma de abordar el concepto, de ese mecanismo particular usado para acercarse al mismo.

In the context of van Hiele's model, a comparative survey of two descriptor collections has been carried out for the same concept: that of local approximation under the aspect of tangent straight line to a curve graph at a certain point. From the visualizations obtained from the so-called "secant beam" and "zoom" procedures, it can be concluded that, in fact, the level of reasoning is unrelated to the way of dealing with the concept, to that particular procedure used to approach it.

El modelo de *van Hiele* proporciona una descripción de los procesos de aprendizaje postulando la existencia de unos **niveles de pensamiento**, que no se identifican con destrezas de cálculos computacionales o habilidades de conocimientos académicos. En este trabajo los nombraremos como: Nivel 0 (*predescriptivo*), Nivel 1 (*de reconocimiento visual*), Nivel II (*de análisis*), Nivel III (*de clasificación y relación*) y Nivel IV (*de deducción formal*), aunque, como es sabido, de este último nivel es conocida la dificultad para su detección y su estudio sólo tiene un interés teórico (cfr. VAN HIELE, 1986). Sin embargo, lo deseable es que los estudiantes alcancen el nivel III (como mínimo), en el que se puede considerar que, propiamente, se dan todos los elementos que garantizan la comprensión de un concepto.

La aplicación del modelo a un concepto matemático significa el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles, es decir, la descripción de unos comportamientos que permitan clasificar a cada estudiante en el nivel en que se encuentra. Tanto para obtenerlos como para comprobar que se ajustan a las exigencias del modelo, se suele utilizar como instrumento la entrevista (abierta o, como en nuestro caso, semi-estructurada y con carácter socrático, esto es, en la que se usan las propias respuestas para tratar de contribuir a que la entrevista sea en sí misma una experiencia de aprendizaje).

La extensión del modelo a un concepto propio del análisis matemático, fuera del ámbito de la geometría y de los primeros

niveles educativos de la enseñanza, constituía un “problema abierto”, que fue resuelto por Llorens (1996). En aquel trabajo se estudió la manifestación más geométrica y visual del concepto de aproximación local, esto es, el concepto de recta tangente a una curva en un punto, precisamente porque, dadas las

La extensión del modelo de Van Heile a un concepto propio del análisis matemático, fuera del ámbito de la geometría y de los primeros niveles educativos de la enseñanza, constituía un “problema abierto”, que fue resuelto por Llorens (1996).

Pedro Vicente Esteban Duarte

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

José Luis Llorens Fuster

Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

características del modelo, no parecía oportuno -ni quizá viable- huir por completo del ámbito de lo geométrico y visual.

Por otra parte, en ese mismo trabajo se estableció la relación entre el modelo de Van Hiele y los postulados de Vinner relativos a las dualidades conceptuales: El posible conflicto entre el concepto-imagen -la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados- y el concepto-definición -la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto- explica muy bien muchas de las dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos básicos del Análisis Matemático, que se manifiestan en los primeros años de la enseñanza universitaria y en los últimos de la preuniversitaria. Ahora, en el contexto del modelo de Van Hiele, podemos asegurar (ib., p.15) que la existencia de conflictos entre la imagen y la definición de un concepto imposibilita el progreso hacia los niveles de razonamiento superiores (niveles III y IV).

El concepto de aproximación local es un “concepto dinámico”, en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable. Por lo mismo, su comprensión sólo puede darse a partir del nivel III de razonamiento. En particular, el concepto de recta tangente a una curva en un punto de su gráfica, tiene todas esas características.

Sin embargo, en la mayoría de las manifestaciones del concepto de aproximación local, es posible presentar “acercamientos” al mismo concepto que ayudan a comprender ese *dinamismo*. Eso es lo que llamamos *primera fase* del concep-

El concepto de aproximación local es un “concepto dinámico”, en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable.

to. Si, además, esa “primera fase” tiene carácter visual y geométrico, con escasa o nula formalización y escasos conocimientos previos, tanto mejor porque de alguna manera estamos en condiciones óptimas para extender el modelo de Van Hiele. Así, en el trabajo mencionado, se usaba como aproximación visual a la definición de tangente la *magnificación* local de la gráfica. En el trabajo que presentamos se ha utilizado *otra aproximación visual*: La del límite del *haz de secantes*, que tiene la ventaja añadida de ser más parecida a la conocida “interpretación geométrica de la derivada” (que sólo puede hacerse cuando a su vez ya se ha definido la recta tangente), más cercana por tanto a lo que habitualmente se estudia en la introducción de ese concepto básico del Análisis.

A este respecto conviene recordar que la definición de recta tangente a una circunferencia, que suele hacerse en los primeros años de la enseñanza primaria, es la *excepción estática* del concepto, en el sentido de que no requiere el paso al límite, pues en ese caso *la tangente es la recta que “toca” a la circunferencia en un punto*. Vinner (1982) ya había probado que esa imagen conceptual estática prevalecía, en muchos casos, aun cuando se hubiese estudiado el concepto de derivada y aun cuando el estudiante fuese capaz, en el contexto adecuado, de calcular la ecuación de la recta tangente a una función derivable en un punto de su dominio usando el concepto de derivada. Es decir que, a pesar de esas habilidades algebraicas, muchos estudiantes seguían pensando que la tangente es una recta que “toca” a la curva en un punto. A la luz de lo aportado por Llorens (1996 y 1997), ese comportamiento es casi inequívoco de no haber captado el dinamismo del concepto, afirmación equivalente a decir que su nivel de razonamiento en el concepto de aproximación local no pasa de los preliminares (I ó II) y, por tanto, no hay propiamente una comprensión del concepto ni una incorporación de esa *forma de razonamiento* que significa el concepto de límite.

En los trabajos mencionados se sugería la posibilidad de estudiar otra manifestación del concepto de aproximación local y, en consecuencia, establecer el oportuno estudio comparativo. La conjetura es que el nivel de razonamiento en el concepto debe ser el mismo, de modo que el contexto en el que se estudie debe ser más o menos indiferente. Ello es así por cuanto estamos hablando de una habilidad del pensamiento, de una forma de razonar, que parece independiente del aspecto concreto al que se aplique.

En el presente trabajo no sólo se aborda ese estudio comparativo sino que se da un paso más ya que el estudio se hace sin variar el concepto, cambiándose únicamente la forma de acercarse al mismo, es decir, modificamos el ambiente en el que se desarrolla lo que hemos llamado antes la fase-1 del concepto. En esa fase se establece un mecanismo intuitivo que sirve al estudiante para elaborar sus propios razonamientos. Ciertamente, la segunda fase es la de la formalización algebraica de ese mecanismo, pero la primera es la auténtica fase *creativa* en el proceso de aprehensión de un concepto matemático. Señalemos, además, que esos mecanismos de aproximación al concepto siguen siendo “estáticos” en el sentido de que no pueden reproducir algo abstracto como el paso al límite. Sin embargo, gracias a la tecnología, la visualización contribuye a que podamos aproximarnos mucho al dinamismo intrínseco del concepto.

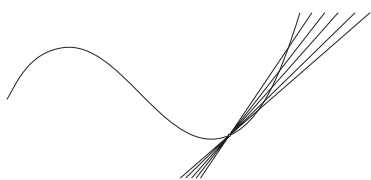
Tanto es así que cabía preguntarse por la influencia real de ese mecanismo por si, en lugar de facilitar la comprensión, la enmascaraba y la condicionaba. La obtención de resultados semejantes independientemente del mecanismo utilizado significa no sólo que los descriptores de los niveles son correctos

sino que, en efecto, se corrobora una vez más la posibilidad de detectar dichos niveles, disponiendo ahora de dos formas diferentes.

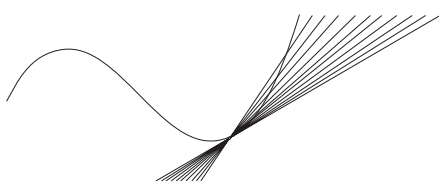
Así pues, en nuestro estudio comparamos la forma de razonamiento de los estudiantes a partir de lo que hemos denominado mecanismo del “haz de secantes” (que es, a su vez, una aportación del trabajo) respecto del mecanismo del “zoom” (ya utilizado por Llorens). Esta comparación se hace a partir de las entrevistas socráticas diseñadas con cada uno de los mecanismos y de los resultados estadísticos obtenidos en la aplicación de las pruebas escritas que se diseñaron teniendo como base los guiones de las entrevistas. Asimismo, se muestran resultados de la aplicación del mismo test que aparece en Vinner (1991), al concepto de recta tangente.

Visualizaciones para el concepto de tangente

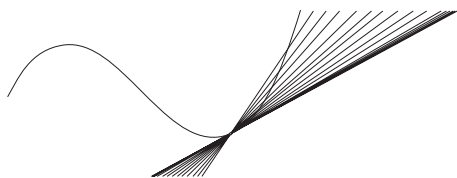
Lo que venimos llamando “*mecanismo del haz de secantes*” para la recta tangente a una curva en un punto de su gráfica, parte de la gráfica de una curva y de un punto fijo P sobre ella. Fijado otro punto de la curva, trazamos secantes que se apoyan en P y en puntos de la curva sucesivamente más próximos a P. Cuantas más secantes trazamos, más se aproximan entre sí y parecen converger en una recta, tal como se muestra en las siguientes ilustraciones:



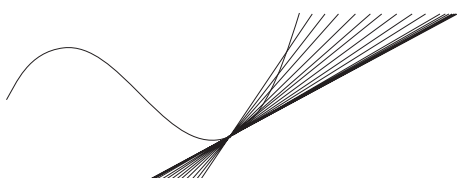
Gráfica 1



Gráfica 2

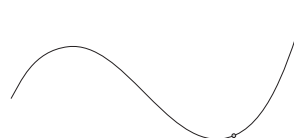


Gráfica 3

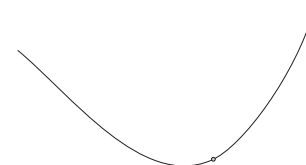


Gráfica 4

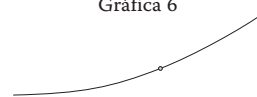
Cuando este proceso se estabiliza en una recta, la identificamos con la *recta tangente a la curva en el punto P*. Los conceptos previos requeridos para comprender este proceso son los de *curva*, *punto*, *recta*, *segmento* y “*puntos móviles que se deslizan sobre la curva para acercarse cada vez más al punto dado*”, además de tener la capacidad de imaginar lo que significa la estabilización del proceso infinito del haz de secantes... Para la misma curva y el mismo punto, el mecanismo del “*zoom*” permite visualizar la recta tangente a una curva plana en un punto P como la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica la gráfica de la curva en un entorno de P, tal como se muestra en las siguientes ilustraciones:



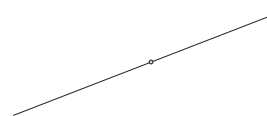
Gráfica 5



Gráfica 6



Gráfica 7



Gráfica 8

Los conceptos previos requeridos para comprender este proceso son los de *curva*, *punto*, *recta* y *segmento*, además de tener la capacidad de imaginar lo que significa magnificar indefinidamente una curva.

Principales características de los niveles de razonamiento

Para el concepto de aproximación local, en su manifestación de tangente a una curva plana a partir del mecanismo del “haz de secantes”, las principales características de los Niveles de razonamiento estudiados son las siguientes: En el Nivel 0, el

estudiante reconoce los elementos básicos del estudio (punto, recta y curva) con sus propiedades matemáticas elementales. En el Nivel I, relaciona esos elementos básicos: punto con recta, recta con curva y punto con curva. Además, se familiariza con el uso del mecanismo del haz de secantes. El ascenso del Nivel I al Nivel II se produce cuando entiende que el mecanismo puede estabilizarse. En el Nivel II, relaciona la estabilización del mecanismo con la tangente, entendiéndola como el final de un proceso *finito*. El ascenso del Nivel II al Nivel III se produce cuando entiende que la tangente es el final de un proceso *infinito*. Además, en el Nivel III, integra el concepto imagen con el concepto definición y es capaz de formular la definición de tangente a partir del mecanismo del “haz de secantes”.

Usando el mecanismo del “zoom” los niveles se caracterizan de forma semejante (LLORENS,1996, p. 16). Los estudiantes que se encuentren en el nivel III de razonamiento, a partir del mecanismo con el cual trabajan, pueden analizar la existencia de la tangente en situaciones donde la curva presenta situaciones “irregulares” (en puntos de inflexión, en una línea recta o en el vértice de un ángulo), y son capaces de prever las limitaciones del mecanismo para encontrar la tangente en los casos donde la curva presenta un número indefinido de oscilaciones alrededor del punto especificado.

El alumno en el Nivel I, relaciona punto con recta, recta con curva y punto con curva; en el Nivel II, relaciona la estabilización del mecanismo con la tangente; en el Nivel III, integra el concepto imagen con el concepto definición.

Al hacer distintas entrevistas con los guiones diseñados a partir de los mecanismos del “haz de secantes” y del “zoom”, los estudiantes detectados en un Nivel III de razonamiento contestaban las preguntas en periodos de tiempo similares (de unos 20 a 30 minutos). Uno de nuestros intereses era poder determinar si los estudiantes que podían definir correctamente la tangente por un mecanismo, también lo podían hacer partiendo del otro mecanismo. Para comprobarlo, a los estudiantes detectados en el Nivel III, entrevistados con el guión del “haz de secantes”, se les entrevistó después con el guión del “zoom” y viceversa, comprobándose que todos los entrevistados reconocieron la tangente obtenida por uno u otro mecanismo como la misma (y única) tangente a la curva en el punto.

Una prueba escrita

Como es sabido, la interacción entrevistador-alumno es la mejor manera para determinar el nivel de razonamiento de un estudiante. A partir de las entrevistas se puede captar el lenguaje empleado por el alumno y observar cómo evoluciona en su nivel de razonamiento, pero al pretender tratar otros aspectos se presentan algunos inconvenientes:

El ascenso del Nivel II al Nivel III se produce cuando entiende que la tangente es el final de un proceso infinito.

- a. **La cantidad de datos cualitativos:** Permite hacer un análisis pormenorizado de cada individuo, pero dificulta la traducción a datos numéricos.
- b. **Reducido número de entrevistas efectuadas:** El hecho de realizar cada entrevista en condiciones especiales y su posterior análisis implica que el tiempo invertido para cada entrevista sea considerable; esto hace que el número de entrevistados sea reducido.
- c. **Difícil generalización:** El número reducido de entrevistados no permite generalizar los resultados obtenidos a conjuntos amplios de estudiantes que tengan las mismas características de los estudiantes entrevistados.
- d. **Subjetividad del proceso:** En el análisis de las entrevistas nos enfrentamos a la posible subjetividad en la toma de los datos y en el análisis de los resultados, pues el diálogo, los gestos y el tono de la voz pueden ser interpretados de distintas formas.

Para complementar el estudio efectuado mediante entrevistas socráticas, llevamos a cabo un segundo estudio experimental complementario con las siguientes características:

- a. Que pueda realizarse en un gran número de individuos.
- b. Que los datos obtenidos sean cuantitativos de tal forma que permitan el posterior tratamiento estadístico.
- c. Que reproduzca la evolución en el razonamiento con respecto al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se diseñó una prueba escrita teniendo como base el guión de entrevista obtenido a partir del mecanismo del “haz de secantes”. Esta prueba y la del “zoom” se pasaron a grupos numerosos de estudiantes. Estos *test* son abiertos, de respuesta múltiple con cinco opciones de respuesta en cada pregunta. Las cuatro primeras opciones que se ofrecían fueron las respuestas más escuchadas a los estudiantes entrevistados previamente, es

decir, las respuestas más habituales. De ellas, una se consideraba la “mejor”, la que fue dada por los estudiantes clasificados en el Nivel III. La última opción de cada pregunta (“*Ninguna de las anteriores*”) se dejó abierta con el fin de captar el lenguaje en aquellos estudiantes que tenían otra alternativa distinta de la ofrecida o la expresaban de manera equivalente (ello obliga a procesar los test uno por uno, siempre que se elija esa alternativa en la respuesta).

Otra característica de los *test* escritos es el carácter socrático que se procuró mantener en su planteamiento general, manifestado en la entrega de información que se hace en determinados momentos, más o menos coincidentes con los de las entrevistas, de modo que podemos decir que los *test* escritos, en muchos aspectos, son una transcripción de las entrevistas socráticas.

Las muestras

Los test del “haz de secantes” y del “zoom” se pasaron a estudiantes del último año de Bachillerato en colegios de la ciudad de Medellín (Colombia) y a estudiantes de los dos primeros años en la Universidad de EAFIT de la misma ciudad. En la siguiente tabla se detallan los distintos grupos de la muestra:

Muestra	Test secantes	Test zoom	Total
Bachillerato	89	80	169
Cálculo Integral	57	49	106
Cálculo Diferencial	98	76	174
Cálculo en V. Variables	16	22	38
Clase de Visualización	25	30	55
Total	285	257	542

Los estudiantes universitarios estaban matriculados en carreras relacionadas con ingeniería o con ciencias administrativas.

Las respuestas obtenidas para cada test fueron codificadas con 0 ó 1, obteniéndose así un vector con 25 componentes para cada test de las secantes y un vector de 22 componentes para cada test del *zoom*.

Para determinar que era posible diferenciar conglomerados de estudiantes identificados con los Niveles del modelo, se empleó el algoritmo *K-medias* implementándolo directamente del programa SPSS (v. 8.0 para Windows). El algoritmo asigna cada caso al centro del conglomerado más próximo (de acuerdo con la distancia euclídea entre el vector y el centro del conglomerado calculado hasta ese momento). La localización del centro, en el caso de que hayamos seleccionado la opción de medias actualizadas, se actualiza después de analizar un nuevo dato. Se analizan todos los datos y el proceso se va repitiendo hasta que la solución converja de modo que se maximice la distancia entre los centros de los conglomerados.

Debido a que los niveles de razonamiento estudiados son tres, entonces seleccionamos este mismo número de conglomerados al implementar el algoritmo *K-medias*. Para iniciar la clasificación se requiere de unos centros iniciales, que fueron obtenidos de acuerdo con una primera preclasificación de las pruebas realizadas de aquellos test, a los que de acuerdo con nuestra experiencia, podíamos asignarle claramente un Nivel, que no sería definitivo, sino útil para encontrar los centros iniciales.

Aplicación del algoritmo para el test del haz de secantes

Para poder realizar esta preclasificación agrupamos las preguntas de los *test* en tres bloques: Bloque 1, desde la pregunta 1 a la 7; bloque 2, desde la pregunta 8 a la 16 y bloque 3, desde la pregunta 17 a la 25. Aplicamos el siguiente criterio de clasificación:

Criterio A	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥5	≥6	≥3
Nivel II	<5	≥6	≥3
Nivel I	<2	<4	≤3

De acuerdo con este criterio, un test se considera en el Nivel III de razonamiento si coincide con el “patrón ideal” en 5 o más preguntas del bloque 3, en 6 o más preguntas del bloque 2 y en 3 o más preguntas del bloque 1. Conseguimos con este criterio clasificar 56 de los 285 test con los siguientes resultados: 7 de Nivel I, 25 de Nivel 2 y 24 de Nivel III. Calculamos el promedio de respuestas correctas para cada pregunta de acuerdo con el Nivel asignado y utilizamos estos promedios como centros iniciales.

Los resultados obtenidos al implementar el algoritmo y poner en correspondencia los conglomerados finales con los niveles de razonamiento estudiados son los siguientes: 89 test en el Nivel III, 66 en el Nivel II y 130 en el Nivel I. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en las entrevistas socráticas, en las cuales los estudiantes clasificados en el Nivel III son pocos con relación a los otros dos niveles.

Aplicación del algoritmo para el test del zoom

La preclasificación inicial se obtuvo al agrupar las 22 preguntas del test en tres bloques: Bloque 1, desde la pregunta 1 a la 6, bloque 2, desde la pregunta 7 a la 15 y el bloque 3 desde la pregunta 16 a la 22, y aplicamos el siguiente criterio de clasificación (cfr. Llorens, 1996):

Criterio A	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥4	≥5	≥3
Nivel II	<4	≥5	≥3
Nivel I	<2	<4	≤3

Al aplicarlo a la muestra recogida en Medellín, conseguimos clasificar 48 de los 257 test con los siguientes resultados: 13 de Nivel I, 21 de Nivel 2 y 14 de Nivel III. Procediendo como antes, obtuvimos finalmente 52 test en el Nivel III, 125 en el Nivel II y 80 en el Nivel I.

Robustez del análisis

Para comprobar que los resultados son robustos, se introducen pequeños cambios en los criterios iniciales. Si los resultados obtenidos al aplicar nuevamente el algoritmo de K-medias con los centros iniciales obtenidos a partir de la nueva clasificación son similares, concluimos que la existencia de los niveles identificados como los conglomerados de respuestas, es independiente de la preclasificación que se hace. Naturalmente, los criterios de clasificación no pueden ser “radicalmente” diferentes (porque eso no sería coherente con el análisis) pero sí que pueden introducirse pequeñas variaciones. Por ejemplo, en el test de las secantes se fija el siguiente:

Criterio B	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥6	≥6	≥3
Nivel II	<6	≥6	≥3
Nivel I	<2	<5	<3

Al aplicar el algoritmo con las mismas especificaciones anteriores y comparar los resultados obtenidos a partir de la aplicación de los criterios A y B, llegamos a la siguiente tabla:

Nivel	Criterio A	Criterio B
III	89	90
II	66	66
I	130	129

Observando cada caso, uno por uno, comprobamos que coinciden en 284 de los 285 casos. El vector en el que no coinciden, es clasificado por el Criterio A como de Nivel I y por el Criterio B como de Nivel III. Analizando este caso en detalle, de acuerdo con nuestra experiencia obtenida en las entrevistas, lo clasificamos en el Nivel I, corroborando de esa forma la similitud de los resultados obtenidos con cada uno de los criterios tratados. La estabilidad del análisis con el test del zoom ya era conocida (aunque la confirmamos de nuevo).

Así pues, la estabilidad del análisis estadístico confirma la existencia de tres esquemas diferenciados de respuestas, que se corresponden con los niveles de razonamiento cuya existencia postulamos. Además, confirma que los descriptores dados para detectar estos niveles de razonamiento, a partir de

cada mecanismo, son adecuados y que pueden ser detectados mediante la aplicación de pruebas escritas.

Correspondencia de los descriptores del mecanismo del “haz de secantes” con los resultados obtenidos

Al observar qué preguntas del test del “haz de secantes” permiten detectar cada descriptor, se puede definir una variable y estudiar la media de esta variable por niveles asignados. Así, por ejemplo, el descriptor 3.3 puede ser discriminado si el alumno contesta “correctamente” las preguntas 20, 21 y 22. Definimos la variable $M33 = (P20 + P21 + P22)/3$. La tabla siguiente muestra algunos de los descriptores estudiados y su correspondiente variable:

La tabla siguiente muestra las medias de las variables así defi-

Descriptor	Variable
1.1	$M11=(P4+P5+P6)/3$
2.1	$M21=(P6+P7)/2$
2.5	$M25=(P10+P11+P12+P13+P14+P15+P16)/7$
3.1	$M31=(P17+P18+P19+P23)/4$
3.3	$M35=(P20+P21+P22)/3$

nidas, según los Niveles en que fueron clasificadas las encuestas a partir del Criterio A.

La información contenida en esta tabla corrobora nuestro

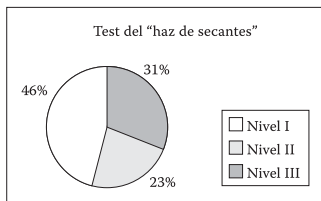
	M11	M21	M25	M31
Nivel 1	0,836	0,558	0,256	0,162
Nivel 2	0,742	0,530	0,329	0,356
Nivel 3	0,861	0,691	0,494	0,626

aserto de que existe una clara relación entre los descriptores y los resultados obtenidos mediante el tratamiento estadístico del test de las secantes. Los estudiantes asignados al Nivel III tienen una media de aciertos mayor para cada descriptor y se diferencian claramente de los Niveles inferiores.

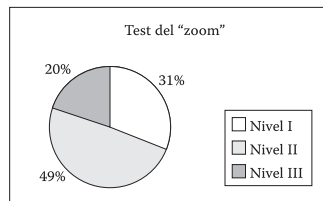
Análisis comparativo de los resultados

Para comparar los test frente a otras variables tales como la edad, el curso en el que estaban matriculados al momento de pasar las pruebas, la última vez que recordaba que le habían explicado el concepto de tangente, la derivada y su interpretación geométrica, la utilización de programas de cálculo simbólico, la influencia de la prueba en el cambio del concepto de tangente, etc., se incluyeron preguntas relacionadas con estos temas. Las conclusiones fueron las siguientes:

El test de las secantes facilita que un porcentaje mayor de estudiantes manifiesten el Nivel III de razonamiento.



Gráfica 9



Gráfica 10

Discriminación de los resultados:

De acuerdo con la edad. Los estudiantes entrevistados estaban en edades comprendidas entre los 16 y 22 años. El mayor porcentaje de estudiantes que está en el Nivel III, tiene una edad de 18 años, el 10% de ellos contestaron el test del "haz de secantes" y el 5% el test del "zoom". En este nivel, la siguiente edad con un porcentaje inferior es la de 17 años, seguida por la de 19 años, confirmándose que el *nivel de razonamiento mostrado por un alumno es independiente de su edad.*

De acuerdo con las materias que estaban cursando. Como era de esperar, los estudiantes que estaban viendo el curso de Cálculo Diferencial, el 20% para el test de las secantes y el 14% para el test del zoom, estaban en el Nivel III de los totales de estudiantes detectados en este Nivel. Para este mismo Nivel, el siguiente grupo de estudiantes con un mayor porcentaje fue el de los estudiantes de Bachillerato que comenzaban a estudiar el concepto de derivada de una función. Los estudiantes de los otros cursos –Cálculo Integral y Cálculo en Varias Variables– los porcentajes fueron menores, confirmando el hecho de que *el nivel de razonamiento, respecto de un concepto matemático, no depende del nivel de escolaridad en el cual se encuentra un estudiante.*

De acuerdo con la última vez que le explicaron el concepto de tangente. Del total de alumnos detectados en el Nivel III, el 22% de los que contestaron el test de las secantes y el 12% de los que contestaron el test del zoom, escogieron esta opción. Es decir, el hecho de estar estudiando el concepto de derivada de una función permite que los estudiantes a quienes se les aplicó el test de las secantes lleguen, en un mayor porcentaje, a un nivel superior de razonamiento. Por otra parte, los estudiantes parecen olvidar la relación derivada-tangente que se hace en cursos anteriores. Es notable el bajo porcentaje –en los dos test– del número de alumnos que respondieron la opción 3 en esta pregunta, que hace referencia al curso anterior en relación con la derivada.

De acuerdo con el concepto de derivada y su interpretación geométrica. La opción 5 de esta pregunta era la siguiente: "He

dado las dos cosas y sabría hallar la pendiente de la recta tangente a una función en un punto si conozco la derivada de la función en ese punto". De los estudiantes clasificados en el Nivel III, el 19% de los que contestaron el test de las secantes y el 16% de los que contestaron el test del zoom eligieron esta opción. Esta opción tiene que ver directamente con la formalización del concepto de tangente, pues comprenden el concepto de tangente y lo manifiestan de forma explícita.

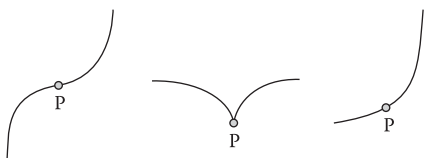
De acuerdo con la utilización de programas de cálculo simbólico. En las respuestas a estas preguntas se hace evidente la escasa utilización de estos programas en algunos ámbitos y su escasa integración en los aspectos cotidianos de la enseñanza de los conceptos matemáticos. El 48% de los estudiantes que contestaron el test de las secantes y el 54% de los que respondieron el test del zoom dijeron no conocer ninguno de estos programas; de estos estudiantes el 10% y el 6% respectivamente estaban en Nivel III. El 21% en el test de las secantes y el 19% en el test del zoom, habían tenido prácticas ocasionales y de ellos la mitad y la tercera parte estaban en Nivel III. De este último resultado, se evidencia la importancia que tienen los programas de cálculo simbólico para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Impresión sobre el cambio de concepto. La pregunta que tenía que ver con esta parte se formuló de la siguiente manera: "¿Consideras que, como resultado de la prueba, ha cambiado en algo tu idea de lo que es la tangente a una curva en un punto?". La opción de respuesta que fue seleccionada mayoritariamente en los dos test fue la siguiente: "Sí, porque lo que antes pensaba me he dado cuenta que no es del todo correcto, no sirve para todas las situaciones". Para el test de las secantes la seleccionaron el 28% del total de la muestra y para el test del zoom el 32%, de ellos el 12% y el 7% estaban en Nivel III respectivamente. Esto muestra que *los test en sí mismos, son experiencias de aprendizaje* y esto es bien importante si se tiene en cuenta que los dos test fueron resueltos en periodos similares de tiempo (de 30 a 50 minutos).

Visualización y recta tangente

"En la ilustración siguiente, se presentan tres curvas. Para cada una de ellas, se proponen tres afirmaciones. Señala la afirmación que crees correcta y sigue la instrucción que aparece entre paréntesis:

- Es posible dibujar en P exactamente una tangente a la curva (dibújala).
- Es posible dibujar en P más de una tangente (especifica cuántas, una, dos, tres ó infinitas más. Dibújalas todas en caso de que el número sea finito y unas cuantas en el caso de que sea infinito).
- Es imposible dibujar en P una tangente a la curva.



Gráfica 11

¿Cuál es la definición de tangente que recuerdas de este curso o de cursos anteriores? Si no recuerdas la definición de tangente, trata de definirla por ti mismo". (Vinner, 1982; 1991, p.78-80).

El test diseñado por Vinner para estudiar el concepto de tangente en alumnos de primer año de universidad, cuya eficacia y validez parecen fuera de toda duda, nos pareció una prueba interesante para comparar los dos mecanismos objeto de nuestro estudio. Así pues, elegimos tres grupos de alumnos del curso de Cálculo Diferencial. A dos de estos grupos les dimos previamente una hora de clase usando el ordenador y el programa informático Derive; en uno de ellos utilizamos la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del "haz de secantes" y en el otro la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del "zoom" para el concepto de tangente a una curva en un punto. Al tercer grupo no se le dio ninguna de estas dos visualizaciones. Al pasarles el test de Vinner, obtuvimos los siguientes resultados: En promedio, el 43% y el 60% de los estudiantes que se les dio la visualización a través del haz de secantes y del zoom, respectivamente, dibujaron correctamente la tangente a las tres curvas dadas. Mientras que sólo el 20%, en promedio, de los estudiantes que no tuvieron ningún entrenamiento, dibujaron correctamente la tangente a las tres curvas dadas.

El 50% de los alumnos a los se entrenó con las visualizaciones del "haz de secantes" y del "zoom", definieron correctamente la tangente a una curva, partiendo de los respectivos mecanismos. Los estudiantes a quienes no se les dio ninguna visualización, definieron la tangente a una curva en un punto como "la recta que toca (corta) a la curva en un solo punto", haciendo evidente el concepto-imagen de tangente a una circunferencia, comprobándose que la interpretación que se hace de la derivada en los cursos de análisis matemático no cambia el concepto imagen de tangente a una curva, haciendo evidente el hecho de la necesidad de buscar visualizaciones que ayuden a los alumnos a entender los conceptos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ESTEBAN, P., LLORENS, J. L. (2000): "Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a través del 'Haz de Secantes'". *Matemáticas y Educación*, v. 3, n. 1 y 2, p.49-60.

LLORENS, J. L. (1996). "Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local". *SUMA*, n.º. 22, 91-98.

LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. (1997). "An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation". *Int. J. Maht. Educ. Sci. Technol.* Vol. 28, n.º. 5, 713-726.

Conclusiones

Nuestro trabajo cumplió todos y cada uno de los pasos que permiten afirmar que se ha aplicado el modelo de Van Hiele a un concepto. El cambio de "mecanismo", de forma de aproximarse al concepto no iba a significar, como cabía esperar, una dificultad grave para cubrir ese objetivo. Así pues, se han dado los descriptores para los niveles de razonamiento 0, I, II y III obtenidos del diseño de una entrevista socrática y se han comprobado estadísticamente a partir de los datos recogidos de la aplicación de un test escrito que, en su esencia, guarda las principales características del guión de la entrevista.

La interpretación que se hace de la derivada en los cursos de análisis matemático no cambia el concepto imagen de tangente a una curva. Es evidente la necesidad de buscar visualizaciones que ayuden a los alumnos a entender los conceptos matemáticos.

La visualización que se obtiene con del mecanismo del "haz de secantes", que es un proceso infinito, deja a los alumnos a las puertas de la formalización del concepto de tangente y del de derivada de una función en un punto, pues al encontrar el límite de las pendientes de la sucesión de secantes obtenidas a partir del mecanismo del "haz de secantes" se define la derivada de la función en ese punto.

Por lo demás, no existen diferencias relevantes entre las dos formas de abordar la primera fase del concepto, lo que constituye en sí mismo otro de los resultados principales obtenidos. La existencia de los niveles se refiere, de manera exclusiva, a la propia capacidad de razonamiento acerca del concepto y no a la forma en la que se introduzca éste o al método en el que se estudie. Otra cuestión, claro está, es favorecer las experiencias de aprendizaje que contribuyan a un progreso hacia el nivel III más generalizado. En ese contexto, se refuerza la conclusión de que ello es posible (y relativamente fácil gracias a la tecnología actual) usando la visualización. ■

VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press. New York.

VINNER, S. (1982). "Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent". *Proc. of PME6*. p. 24-28. Antwerp.

VINNER, S. (1991). "The Role of Definition in Teaching and Learning of Mathematics", en *Advanced Mathematical Thinking*, Cap. 5, pp. 65-81. Kluber Ac. Pub. New York.