SUMA 43
junio 2003, pp. 43-45

# Una interpretación gráfica alternativa de las soluciones de la ecuación de segundo grado

Leonor Giménez Fernández
Eduardo L. Giménez-Fernández

Comúnmente, la intuición gráfica de las soluciones de la ecuación de segundo grado consiste en la intersección de una parábola con el eje horizontal. En este trabajo se presenta una interpretación gráfica alternativa. Por un lado, en el caso de que el término independiente no sea nulo, la ecuación de segundo grado se puede descomponer en dos funciones: una recta y una hipérbola equilátera. La intersección o no de ambas funciones determina la existencia de dos, una o ninguna solución. Asimismo, esta representación alternativa nos ofrece una intuición de cómo los valores que toman los coeficientes de la ecuación de segundo grado afectan a la existencia de alguna solución. Por otro lado, si el término independiente es nulo, la ecuación de segundo grado se puede descomponer en dos funciones: el producto de dos polinomios de primer orden, y la función nula. En este caso siempre existen dos soluciones reales: las intersecciones de ambas rectas con el eje de abcisas, una de las cuales toma valor cero.

ARTÍCULOS

## Las soluciones de la ecuación de segundo grado

La ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

para unos valores reales $a \neq 0$, $b$ y $c$, puede tener dos, una o ninguna solución real. Para entender intuitivamente este resultado comúnmente se representa gráficamente al polinomio como una función parabólica

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Las soluciones, o raíces de este polinomio f(x), coinciden con los puntos de corte de esta función con el eje de abcisas.[1] (Ver figura 1.)

A continuación se propone otro tipo de intuición gráfica. La ecuación de segundo grado puede transformarse en

$$x(ax + b) = -c \qquad [1]$$

A continuación estudiaremos las posibles soluciones para dos posibles casos, dependiendo si el término independiente $c$ toma valor nulo o no.

### Existencia de solución y los valores de los parámetros para $c \neq 0$

Si $c \neq 0$, entonces [1] puede representarse como

$$ax + b = -c/x$$

El primer miembro, que denominaremos función $g(x) = ax + b$, es una recta.[2] El segundo miembro, la función $h(x) = -c/x$, es una hipérbola equilátera (ver figura 3).

Cualquier solución $\lambda$ verificará $g(\lambda) = h(\lambda)$, y será una raíz del polinomio. La representación gráfica nos permite entender por qué existe alguna o ninguna solución. Si la recta corta dos veces a la hipérbola habrá dos soluciones (ver figura 4a y 4b). Si es tangente sólo habrá una solución (figura 4c), y en otro caso no existirá solución (figura 4d).

Este método gráfico alternativo nos ofrece una intuición de que los valores que toman los parámetros $a$, $b$ y $c$ afectan a la existencia de alguna solución. Para el análisis gráfico supondremos que $c > 0$, con lo que las hipérbolas siempre estarán situadas en el segundo y cuarto cuadrante. En primer lugar, si la pendiente de la función $g(x) = ax + b$ es negativa, es decir si $a < 0$, siempre van a existir dos soluciones, una raíz positiva y otra negativa, independientemente del valor que tome la ordenada en el origen $b$.

En segundo lugar, supongamos que la función $g(x)$ tiene una ordenada en el origen nula, $b = 0$, y que su pendiente

1 Un número $\lambda$ es una raíz del polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$, si cuando es sustituido en el polinomio lo anula, es decir, si $x = \lambda$ implica que $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

2 Recordemos el significado de los parámetros de la recta. Por un lado $b$ es la ordenada en el origen, es decir, el valor que toma la segunda coordenada cuando la primera toma valor 0. Por tanto, la recta corta al eje de ordenadas en $(0, b)$. Por otro lado, $a$ es la pendiente de la recta, que coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abcisas. Si $a > 0$ la recta es creciente, y si $a < 0$ la recta es decreciente (ver figura 2).

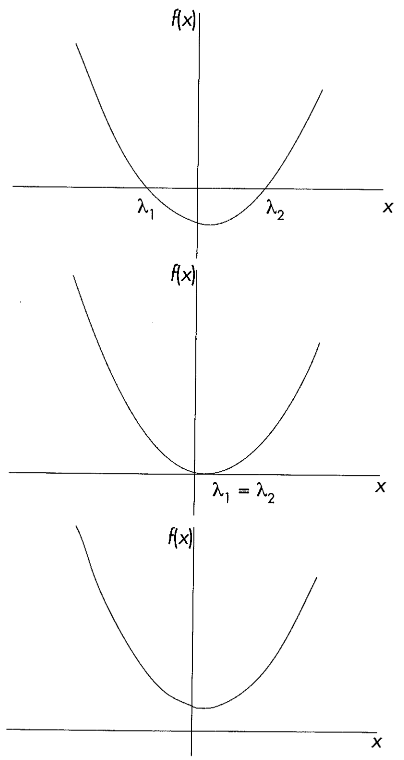


Figura 1. Solución gráfica: raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$

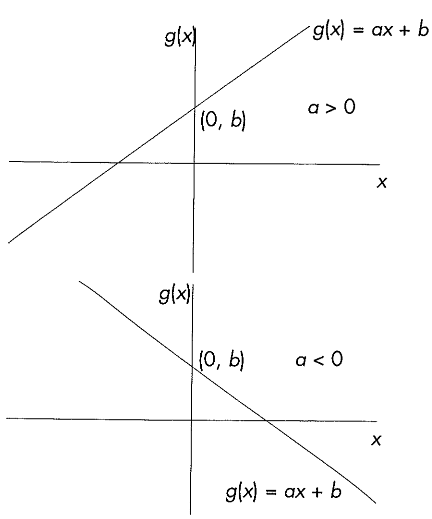


Figura 2. Representación gráfica de la recta

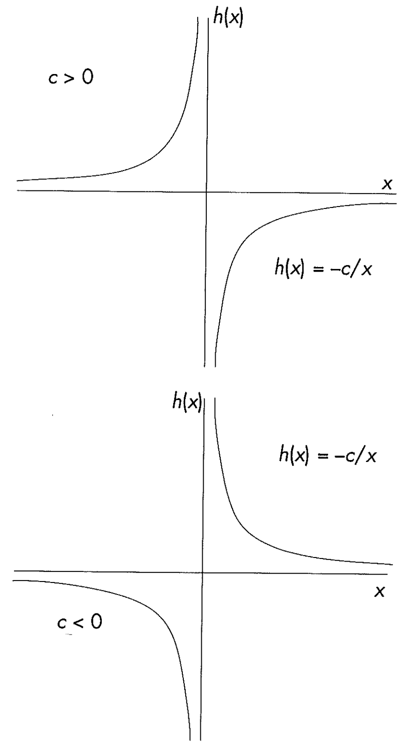


Figura 3. Representación gráfica de la hipérbola equilátera

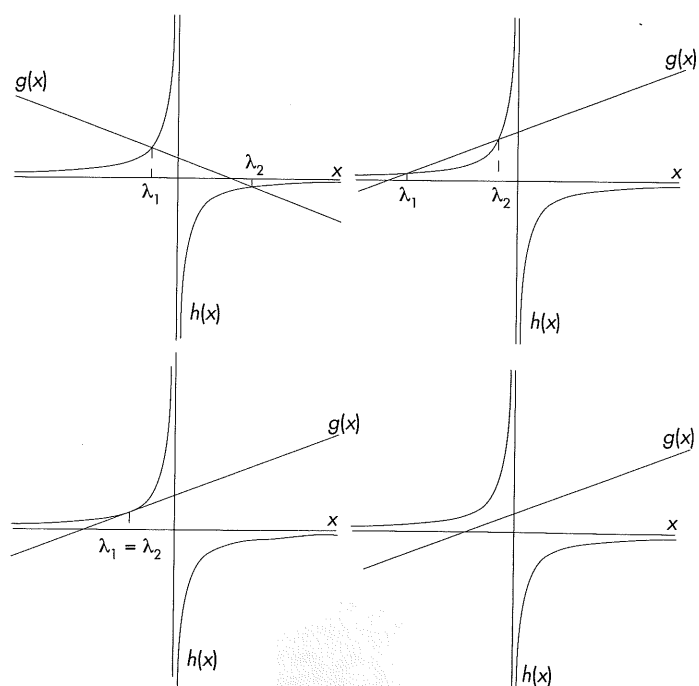


Figura 4. Solución gráfica $g(x^*) = h(x^*)$

es positiva, $a > 0$. En este caso, la función $g(x) = ax$ es creciente y nunca existirán soluciones reales (figura 5). Ésta es la razón por la que $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Finalmente, a medida que se incrementa (o disminuye) la ordenada en el origen, es decir, valores positivos (negativos) de $b$, la función $g(x)$ se va desplazando hacia arriba (abajo). En el caso de $a > 0$ existirá un valor de $b$, que denotaremos por $\bar{b}$ (análogamente $\underline{b}$) para el cual la recta representada por la función $g(x) = ax + \bar{b}$ (análogamente, $g(x) = ax + \underline{b}$) es tangente a la hipérbola representada por la función $h(x)$, por tanto existirá una única solución, que será negativa (positiva). A valores de la ordenada mayores $b > \bar{b} > 0$ (análogamente menores $b < \underline{b} < 0$) existirán dos raíces negativas (positivas). (Ver figura 6 y tabla 1.)

Los resultados serían análogos en el caso de $c < 0$, pero para dos valores críticos de b diferentes (que denotamos $\bar{\bar{b}}$ y $\underline{\underline{b}}$ en la tabla 1).

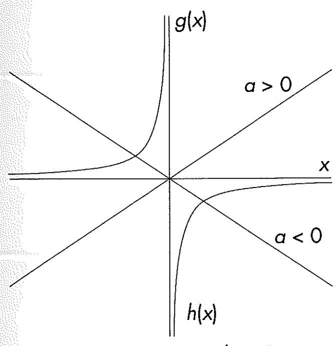


Figura 5. Caso $b = 0$

## Existencia de solución y los valores de los parámetros para c = 0

Si $c = 0$, entonces [1] puede representarse como

$$i(x)\, g(x) = H(x)$$

donde $i(x) = x$ es la función identidad cuya representación gráfica es la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero, y $H(x) = 0$ es la función nula cuya representación gráfica es el eje de abcisas. Cualquier solución $\lambda$ que verifique $i(\lambda)\, g(\lambda) = H(\lambda)$ será una raíz del polinomio. Gráficamente se obtendrán en la intersección de cada una de las funciones $i(x)$ y $g(x)$, ambas que representan dos rectas, con el eje de abcisas. Por tanto si $c = 0$, cero siempre va a ser raíz de la ecuación de segundo grado, $\lambda_1 = 0$, pues la función $i(x) = x$ siempre interseca con el eje de abcisas en el origen (0, 0). La otra raíz, $\lambda_2$, se encuentra en la intersección de la función g(x) con el eje horizontal (ver figura 2), y siempre existirá para cualquier valor de b y para un valor de $a \neq 0$. (Recuérdese que si $a = 0$ la ecuación deja de ser de segundo grado.) En conclusión, si $c = 0$ siempre existen dos soluciones reales, una de ellas nula. (Ver tabla 1.)

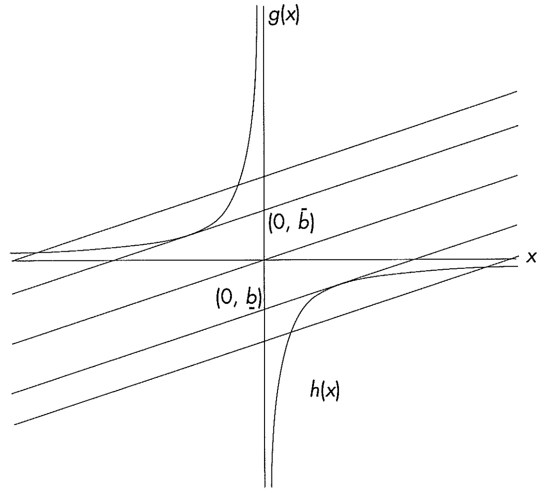


Figura 6. Casos $\bar{b} > 0$ y $\underline{b} > 0$

| *Caso c > 0* | $(-\infty, \underline{b})$ | $\underline{b} < 0$ | $(\underline{b}, \bar{b})$ | $\bar{b} > 0$ | $(\bar{b}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ | no existe solución | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ |
| $a < 0$ | Siempre existen soluciones $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ | | | | |

| *Caso c = 0* | $b < 0$ | $b = 0$ | $b > 0$ |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ | $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ | $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$ |
| $a < 0$ | $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ | $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$ |

| *Caso c < 0* | $(-\infty, \underline{\underline{b}})$ | $\underline{\underline{b}} < 0$ | $(\underline{\underline{b}}, \bar{\bar{b}})$ | $\bar{\bar{b}} > 0$ | $(\bar{b}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | Siempre existen soluciones $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ | | | | |
| $a < 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ | no existe solución | $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ |

Tabla 1. Signo de las soluciones reales para cada valor de los parámetros $a \neq 0$, $b$ y $c$

## Conclusión

Se presenta una intuición gráfica alternativa que permite entender el papel crucial de los valores de los parámetros de la ecuación de segundo grado, $a \neq 0$, $b$ y $c$ a la hora de obtener dos, una o ninguna solución. Este análisis gráfico podría extenderse a otras ecuaciones, como a la de tercer grado y entender las condiciones para la existencia de soluciones.


**Leonor Giménez**
IE.S. Escolas Proval. Nigrán
**Eduardo L. Giménez**
Universidade de Vigo