

La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias

Joan Gómez i Urgellés

ANALIZANDO la situación curricular de la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Universitarias (EU) en estas últimas décadas, se observa una falta de aplicaciones y un excesivo formalismo en los currículos de matemáticas. En este contexto, destaca la insatisfacción en la enseñanza tradicional mostrada por los estudiantes y una desmotivación hacia las áreas de matemáticas. Estos aspectos ya fueron apuntados por conocidos matemáticos y educadores. Destacamos a Julio Rey Pastor, Pedro Puig Adam y John Perry, que ya manifestaron su preocupación por mejorar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas. En esta línea, Rey Pastor afirma:

Este artículo presenta el proceso de modelización matemática como herramienta innovadora en la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Universitarias (EU). Se relata la eficacia de la metodología a partir de la experimentación en escuelas técnicas con alumnos de primer curso de ingeniería. El objetivo de la experiencia es estudiar la viabilidad y eficiencia de implantar técnicas de modelización en las EU, a través del diseño de unidades didácticas y trabajos por proyectos. Como principales resultados se destacan las aportaciones metodológicas referentes a aspectos cognitivos (producciones matemáticas), epistemológicos y heurísticos del aprendizaje de los alumnos.

La ausencia de aplicaciones nos hace incapaces de inspirar amor a esta ciencia. (Citado en Lusa, 1982).

John Perry añade:

Es preciso desarrollar la intuición para que el ingeniero aprenda las relaciones entre el mundo real y la abstracción de la ciencia. (Citado en Lusa, 1982).

y Pedro Puig Adam comenta en el prólogo de *Cálculo Integral* (1979):

En la enseñanza de las matemáticas es necesario substituir el formalismo por el pensamiento intuitivo y las matemáticas han de estar en contacto con situaciones de la realidad.

A partir de las afirmaciones apuntadas y de la propia experiencia docente podemos afirmar que todavía hoy, a las puertas del siglo XXI, la intuición y las aplicaciones quedan en segundo plano. La aportación presentada está focalizada en la innovación docente, fundamentada en la modelización matemática. De una manera breve, la modelización matemática consiste en presentar un problema real y a continuación formularlo en términos matemáticos. El tema es totalmente innovador y está poco desarrollado en

escuelas universitarias, lo cual provoca un fuerte atractivo de investigación pedagógica que puede considerarse como una experiencia pionera en este ámbito. Para desarrollar la investigación es preciso definir y clasificar unos estadios de trabajo:

1. Inicial. Reflexionar sobre el estado actual de la enseñanza y establecer las hipótesis de trabajo. La principal hipótesis es destacar que formamos a futuros ingenieros y no a futuros matemáticos.
2. Intermedio. La búsqueda de un espacio de trabajo para desarrollar la experimentación y la investigación sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos.
3. Final. Establecer la validez y eficacia de la metodología experimentada y la viabilidad de la inclusión del modelaje en los currículums de matemáticas.

Es importante destacar dos aspectos: por un lado el proceso de innovación docente del profesor –el cual se caracteriza en el diseño de actividades extraídas de la realidad– y, posteriormente, el proceso de investigación didáctica del profesor actuando como investigador del proceso de aprendizaje de los alumnos y de la validez del método.

En esta investigación sobre innovación docente, el contexto de trabajo escogido ha sido la Escuela Universitaria Politécnica de Vilanova i la Geltrú (EUPVG), centro dependiente de la Universitat Politècnica de Catalunya. El dominio curricular está configurado por alumnos de primeros cursos de ingeniería industrial en las áreas de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales. La experiencia expuesta en el presente artículo se basa en la experimentación de la metodología con alumnos de los cursos 1994-1995 hasta el curso 2001-2002, y el análisis de los correspondientes resultados. Los resultados expuestos validan la metodología de la modelización matemática como herramienta de enseñanza/aprendizaje.

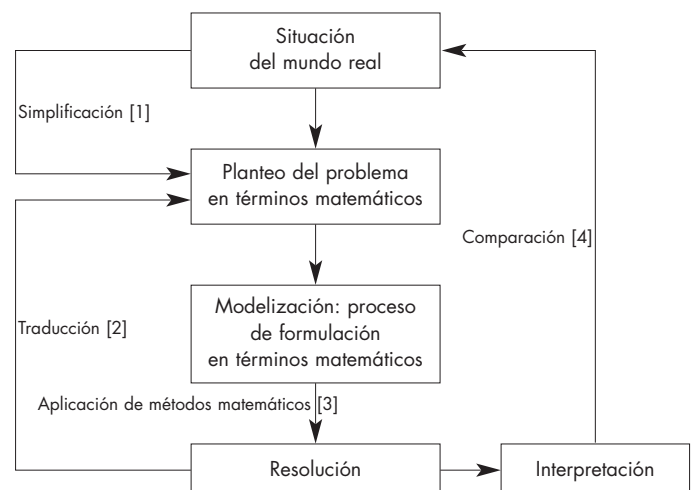
El marco teórico en que se apoya la experiencia está constituido por tres ejes. El primer eje es el sociocultural-político. Este eje marca las connotaciones sociales de la matemática y su influencia en la vida cotidiana de los ciudadanos. Para la adquisición de una competencia crítica y una ciudadanía inteligente es preciso que los alumnos y ciudadanos en general adquieran conocimientos suficientes de matemáticas que les proporcionen criterios de comprensión y decisión (Skovsmose, 1997; Valero, 1994). Por citar un ejemplo, la prensa diaria muestra situaciones usuales fuertemente matematizadas: desde los indicadores económicos de la bolsa, hasta la interpretación de los esquemas y gráficos que establecen los pronósticos meteorológicos. Las dos situaciones mencionadas se gestionan por modelos matemáticos. En el ámbito de la ingeniería encontramos ejemplos en sistemas mecánicos (engranajes, resortes...) y, principalmente, en el estudio de circuitos –tanto eléctricos como electrónicos–. Los sondeos electo-

rales y su interpretación es otro ejemplo sutil.

El segundo de los ejes es el epistemológico-educativo, el cual marca la metodología docente seguida, basada en el proceso de modelización (esquema 1).

En [1] simplificación: la situación real puede manipularse de manera que cuando obtengamos el modelo real, tengamos que suponer diversas hipótesis. Por ejemplo, en situaciones de caída de cuerpos no se obtiene el mismo modelo real si consideramos la situación con rozamiento o sin él. En [2] traducción: no es lo mismo proporcionar el modelo que construirlo. A menudo la tarea de construcción es laboriosa. En este caso lo que se realiza es sustituir palabras por símbolos matemáticos (por ejemplo: ecuaciones, matrices, funciones, etc.). De esta forma, se consigue una formulación matemática del problema y de una manera natural se establece el problema en términos matemáticos. En [3] aplicación de métodos matemáticos: en este paso aparecen los algoritmos apropiados para la resolución del problema matemático que se deriva de la situación real. Es preciso resolver el modelo usando las herramientas adecuadas. En este punto, el profesor juega un papel importante, ya que los estudiantes a menudo no saben resolver el modelo, y es en este estadio donde en el aula o

El marco teórico en que se apoya la experiencia está constituido por tres ejes.



Esquema 1. Organigrama del proceso de modelización

tutorías se muestran los métodos de resolución. Uno de los objetivos consiste en que el estudiante se dé cuenta de que para llegar a resolver un caso usual del ámbito de su especialidad necesita el aprendizaje de ciertos conceptos y técnicas matemáticas que proporcionen respuestas al problema establecido (aparece lo que podríamos llamar motivación). De esta manera, el alumno alcanza un grado fuertemente elevado de interés por el aprendizaje de las matemáticas, ya que visualiza su utilidad. Este hecho ya marca una diferencia en relación con la enseñanza tradicional. En [4] comparación: el objetivo es reescribir los resultados numéricos obtenidos en términos del problema propuesto, interpretarlos y, a su vez, saber escoger, si hay diversas soluciones, la adecuada a la situación.

Seguidamente explicitaremos las definiciones y terminología involucrada en la investigación. Entenderemos por *matematización* la definición aportada por Jan de Lange (1993): «Transformación mental en términos matemáticos de situaciones de la realidad»; en esta definición se considera el proceso de abstracción mental como paso previo a la modelización escrita. Es decir, el esquema mental realizado como fase anterior a la implementación escrita en lenguaje matemático. Asumimos como *modelización* la definición aportada dos años más tarde por Niss (1989): «El arte de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real»; en este sentido, consideramos la interpretación como el conjunto de habilidades que nos permiten plasmar el modelo de forma escrita. Finalmente aceptamos por modelo la terna (A, M, f) , donde A representa un conjunto de objetos del mundo real, M un conjunto de expresiones matemáticas y f una correspondencia entre A y M .

En el tercer eje situamos el pragmático-actual. Este eje se nutre del estado actual del tema. En la actualidad existen diversas experiencias de modelización en niveles educativos inferiores a los universitarios, a pesar de ello es de destacar la experiencia de la Universidad

*La estructura
estándar
de una unidad
didáctica
se configura
en dos fases.
La primera de ellas
presenta
la situación
y construye
el modelo
de dicha
situación;
la segunda
consiste en
la interpretación
de los resultados
y establecer
analogías.*

de Aalborg de Dinamarca (Vithal, 1995), en la cual se realizan trabajos en proyectos. Entre las aportaciones más relevantes destacan las efectuadas en los Países Bajos por Jan de Lange (experiencia *Matemática A*, de Lange, 1993) y la contribución al trabajo en grupo y realización de proyectos efectuada en Lisboa por Paulo Abrantes (1994). Esta última, a pesar de ser de distinto nivel educativo, ha servido de patrón para el diseño de actividades en la EUPVG. Para visualizar el estado actual de la investigación, es de destacar que una simple ojeada a Internet, Alta Vista nos facilita 13004 entradas (con las palabras clave *modelling, educational, mathematical*, junio de 1998). Entre ellas destaca la web de Matskills (<http://www.hull.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest.htm>), la cual nos proporciona una base de datos de expertos en modelización a nivel mundial y las recientes aportaciones sobre el tema.

En síntesis, hemos establecido los cimientos teóricos de la investigación presentando los ejes en los que se desarrolla. Seguidamente expondremos el desarrollo de la experiencia.

Desarrollo de la experiencia

La experiencia está focalizada en la innovación docente, y se ha desarrollado en lo que denominamos unidades didácticas y proyectos. El objetivo consiste en implementar las técnicas de modelización y estudiar su viabilidad y eficacia en las escuelas universitarias. Para alcanzar este objetivo es necesario establecer unos instrumentos de investigación válidos y fiables. Los instrumentos utilizados, tanto en el ámbito de la investigación didáctica como en el proceso de innovación docente, los podemos agrupar en cinco grupos:

- I. Diseño de las unidades didácticas.
- II. Implementación de proyectos.
- III. Registro y selección de una muestra de estudiantes. Hoja de valoraciones de los interlocutores. Ficha personal del alumno. Diario de sesiones. Registros en vídeo. Audio.
- IV. Autoinstrucción del profesor/investigador. Diario del profesor.
- V. Cuestionario cognitivo metodológico. Encuesta oficial. El examen.

Veamos a continuación algunos aspectos destacados de la experiencia. En primer lugar presentaremos el diseño de las *unidades didácticas* y sus principales características. La estructura estándar de una unidad didáctica se configura en dos fases. La primera de ellas presenta la situación y construye el modelo de dicha situación; la segunda consiste en la interpretación de los resultados y establecer analogías. Las dos fases se enlazan a través de la resolu-

ción de las expresiones matemáticas involucradas de una forma guiada. Las unidades didácticas se cumplimentan en las aulas. En la experiencia se desarrollan dos unidades didácticas: *Modelización de un sistema de resortes* y *Los astronautas y las ecuaciones diferenciales*. A continuación mostramos la descripción del trabajo en una de las unidades didácticas mencionadas.

Unidad didáctica. Modelización de un sistema de resortes

El objetivo principal es, inicialmente, que a partir de situaciones reguladas por la ley de Hooke, con un único resorte y una sola masa, los estudiantes descubran dicha ley como una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento. En una segunda fase se añaden más resortes y nuevas masas; el objetivo a medio plazo es conseguir que se modelice la ley de Hooke en varias variables como un modelo lineal análogo al anterior. De esta forma descubren el concepto de matriz y las operaciones y propiedades típicas del cálculo matricial como modelo de la ley de Hooke. En este proceso se involucran los conceptos de matriz de elasticidad y rigidez (inversas entre sí). Se pretende con ello que los alumnos produzcan la matriz inversa y obviamente su utilidad en la mecánica. En una tercera fase se presenta una situación usual simplificada en el área de mecánica técnica para el estudio y posterior interpretación del comportamiento físico de la situación. En la figura 1 se detalla el esquema presentado.

El objetivo final se centra en que reconozcan e interpreten situaciones distintas a las estudiadas, que compartan el mismo modelo. Entre ellas destacan las aplicaciones a circuitos eléctricos. El esquema de la figura 2 se ha extraído de la mencionada unidad.

Con esta unidad se pretende que los estudiantes aprendan la necesidad y existencia del cálculo matricial como modelo matemático de situaciones usuales en las áreas propias de su especialidad, y que, a su vez, obtengan una motivación a través de las aplicaciones.

La unidad presentada se refuerza en soporte informático. Disponemos de un programa de simulación realizado en *Visual Basic 4.0*, en el cual los alumnos pueden definir a

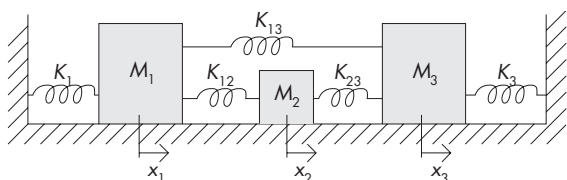


Figura 1. Esquema usual de mecánica técnica

voluntad las unidades deseadas del movimiento de la masa involucradas. En la figura 3 observamos el diseño de una de las pantallas.

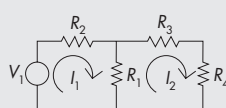
Las principales características diferenciales del trabajo en unidades didácticas, con respecto a los métodos tradicionales, consisten en presentar los contenidos de matemáticas en el contexto técnico. Como aportación destaca el hecho de que los alumnos descubren

Existe un paralelismo entre la ley de Ohm y la ley de Hooke. Las dos son expresiones del tipo

$$A = B \cdot C, \text{ en el caso que } \begin{cases} A = V; C = I \text{ fi Ley de Ohm} \\ A = F; C = x \text{ fi Ley de Hooke} \end{cases}$$

Podemos verlo en un ejemplo paralelo:

Suponer el siguiente circuito:



Si planteamos las ecuaciones:

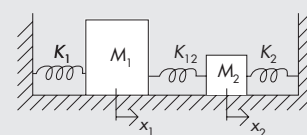
$$V = (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2$$

$$0 = -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_2$$

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Suponer el siguiente gráfico:



Planteamos las ecuaciones:

$$f_1 = -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f_2 = -K_{12} \cdot (x_2 - x_1) - K_2 \cdot x_2$$

Expresándolo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Observar la similitud entre ambos problemas. También tenemos que darnos cuenta de que en estos problemas obtenemos siempre matrices simétricas.

Figura 2. Esquema de modelos de situaciones análogas

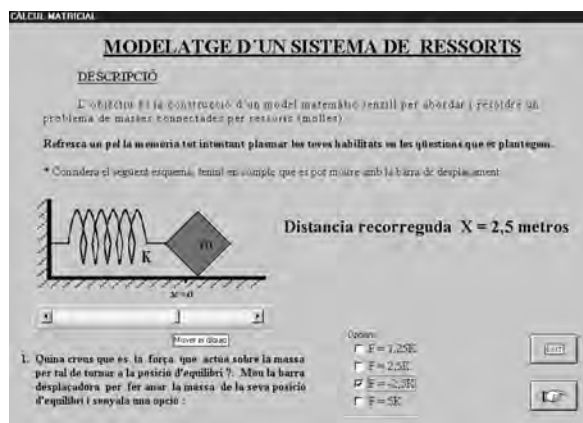


Figura 3

los conceptos matemáticos involucrados, y simultáneamente aprenden la utilidad de los elementos matemáticos construidos.

Los proyectos

En las unidades didácticas, los alumnos trabajan guiados en las aulas y construyen modelos locales.

En los proyectos tienen que identificar el modelo global y trabajar sobre el modelo. Para ello, es imprescindible el trabajo fuera de las aulas y en grupo, ya que este tipo de práctica requiere la búsqueda de información: desde distintas áreas de conocimiento que se encuentran involucradas pasando por consultas de libros de texto y tutorías.

Los proyectos tienen, por consiguiente, una componente pedagógica distinta a las unidades didácticas: una componente de investigación global.

Los proyectos propuestos en el dominio del álgebra lineal corresponden a los contenidos de diagonalización y se presentan a partir de problemas reales. Una vez realizados los proyectos, éstos son defendidos públicamente en el aula siendo valorados por los compañeros. La valoración se realiza en unos formularios donde se recogen principalmente aspectos de presentación, adquisición de conocimientos, claridad en la exposición y material aportado. A continuación citaremos los principales proyectos desarrollados.

Proyecto 1. Estudio del crecimiento de una población de conejos

En el mismo, los alumnos tienen que buscar la información adecuada para hallar la llamada matriz de crecimiento y a partir de las técnicas de diagonalización establecer, mediante el cálculo de vectores propios, la población óptima de conejos.

Proyecto 2

Se estudia sistemáticamente un hipotético caso del crecimiento de un virus informático regido por la sucesión de Fibonacci. Los alumnos tienen que hallar

el término general, para ello producen la potencia n -ésima de una matriz.

Proyecto 3

Se plantea un problema de circuitos eléctricos en donde aparece una ecuación diferencial de segundo orden. Para su resolución se les dirige al cálculo de la matriz exponencial.

Selección y registro de datos de aprendizaje de una muestra de estudiantes

En el desarrollo de la investigación, hemos registrado datos cognitivos (producción de conocimientos matemáticos), epistemológicos (connotaciones matemática-realidad) y heurísticos (como conjunto de habilidades para solucionar los problemas matemáticos involucrados), de todos los alumnos de los cursos mencionados con el fin de establecer resultados fiables de la metodología. Hemos seleccionado cinco alumnos para analizar con profundidad su proceso de aprendizaje. Con el fin de no perder generalidad, los alumnos han sido seleccionados proporcionalmente a su procedencia académica (cuatro de ellos de COU y uno de formación profesional). Los resultados de cada uno han sido graficados con el fin de tener una visión global del proceso de aprendizaje (Gómez, 1998), en el que destacamos su desarrollo en los periodos inicial, medio y final, en las componentes cognitivas, heurísticas y epistemológicas, valorados en tres grados o niveles (poco, aceptable, muy buena).

Autoinstrucción del profesor investigador y detalle de diversos instrumentos utilizados en la investigación

Durante la investigación es vital el papel del profesor. El profesor debe tener claro en todo momento los estadios de trabajo y sus limitaciones, procurando ser lo menos subjetivo posible. Debe poseer conocimientos no propios de matemáticas (aspectos tecnológicos), con el fin de establecer los lazos entre la situación extra-matemática y el modelo. El profesor investigador anota diariamente las incidencias y aspectos más destacados en un documento denominado *diario del profesor*, y, a su vez, elabora una *ficha de cada alumno* con un resumen de los aspectos cognitivos, epistemológicos y heurísticos más relevantes. La ficha de cada alumno permite ofrecer una visión rápida y global del proceso de aprendizaje y, a su vez, es un indicador de la eficacia de la metodología. Otro elemento destacado en la investigación es la preocupación del profesor en registrar las opiniones de los alumnos de forma escrita, este hecho se realiza mediante los denominados *cuestionarios*. En ellos se reflejan aspectos sobre la enseñanza tradicional, comparación de metodologías, y, ade-

Los proyectos propuestos en el dominio del álgebra lineal corresponden a los contenidos de diagonalización y se presentan a partir de problemas reales.

más, se utiliza para descubrir los conocimientos previos que posee el alumno. Con ello podemos establecer criterios comparativos sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje y establecer resultados sobre la viabilidad de la metodología (Gómez, 1998). En la figura 4 vemos una muestra de comentarios establecidos en los cuestionarios por los estudiantes.

Consideramos oportuno incluir en el presente artículo diversos comentarios realizados por los propios alumnos, con el fin de mostrar el grado de implicación en la metodología. Mostramos a continuación (figura 5) argumentos

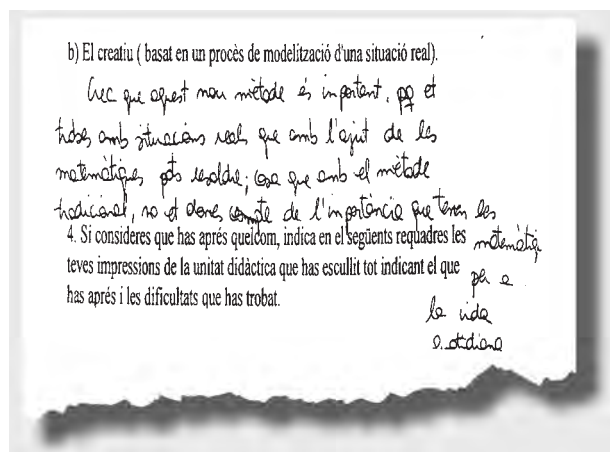


Figura 4. Opiniones de los estudiantes

He aprendido a construir matrices y su utilidad en aplicaciones cotidianas.

He aprendido aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana de un ingeniero.

El beneficio de estas experiencias será una nueva y mejor docencia.

Todo parte de las matemáticas. En la enseñanza tradicional no se contempla la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Prefiero la inclusión de las técnicas de modelización, es un método más creativo. En él observas en qué ámbito puedes aplicar lo que has aprendido. En el método tradicional sólo ves temario y no aplicación.

El modelaje es un método importante porque presenta situaciones reales que puedes resolver matemáticamente.

El trabajo en grupo hace participar a los alumnos en clase y ayuda a hallar aplicaciones prácticas de la teoría.

Realizando un proyecto se aprende el tema muy bien, ya que resuelves un problema buscando tú la información.

Figura 5. Opiniones aportadas por los alumnos

...el diario de sesiones permite registrar datos tema por tema, tanto de la metodología como del proceso de aprendizaje.

proporcionados por los alumnos que avalan la necesidad de la inclusión de la modelización matemática en los currículos.

También hemos utilizado para la investigación la *encuesta oficial* que anualmente realiza la Universidad y el documento denominado *diario de sesiones* (figura 6). La encuesta oficial posee la característica de ser anónima, este hecho nos proporciona criterios para establecer y comparar las respuestas de los estudiantes; en el hecho de ser anónima existe el peligro de que las respuestas no sean coincidentes con las realizadas de forma no anónima. Es gratificante observar la coincidencia en las respuestas; este hecho es un indicador fiable (las respuestas no están en contradicción) que refuerza las conjeturas. El diario de sesiones, es un documento que cumplimenta el alumno. En él se recogen los puntos –a criterio del estudiante– más importantes del tema, el grado de utilidad, los aspectos que quedan claros y a su vez los que quedan oscuros y una aproximación a la utilidad del tema en su formación académica. Por consiguiente, el diario de sesiones permite registrar datos tema por tema, tanto de la metodología como del proceso de aprendizaje.

Finalmente, otro instrumento de investigación utilizado es el *examen*. El examen es un elemento que permite averiguar de una forma individualizada y personal la interpretación de esquemas técnicos y las habilidades matemáticas en la resolución del modelo (figura 7).

Nom:	Tema:	Data inici:	Data final:
1. Quins creus que són els punts més importants del tema?			
2. Creus que tenen alguna utilitat?			
3. Detalla els aspectes que han quedat clars.			
4. Detalla els aspectes que han quedat foscos.			
5. Pel que fa a l'ensenyament, creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional.			
6. Creus que el què has après te utilitat en la teva carrera, o fins i tot en la teva futura vida professional?			

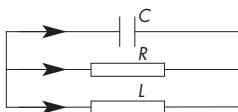
Figura 6. Diario de sesiones

Considerem la següent matriu :

$$\begin{pmatrix} E-(3+a) & 2 & a \\ 2 & -(2+b) & b \\ 4 & 5 & -(a+b+3) \end{pmatrix}$$

- Per quins valors dels paràmetres a i b representa la matriu de rigidesa d'un sistema de ressorts? (2 punts)
- Pels valors trobats, representa gràficament el sistema de masses i ressorts que modelitza. (2,5 punts)
- Si les masses s'han vèl·lugat respectivament dues unitats, quant val la força obtinguda? (2.5 punts)
- Suposa ara que totes les components de la força obtinguda prenen el valor de 4 unitats, quina es la matriu d'elasticitat? (3 punts)

Sigui el circuit elèctric següent:



- Raoneu el perquè aquest circuit està descrit pel sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} E \\ V \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ punts})$$

- Demostreu que els valors propis de la matriu del sistema són reals i iguals si $L = 4R^2C$. (1 punt)
- Sigui $R = 1$, $L = 4$, $C = 1$. Si $I(0) = 4$ i $V(0) = 2$, quant valen la intensitat de corrent i la diferència de potencial a qualsevol instant? (1.5 punts)

Figura 7. Muestra del examen

Resultados

Resultados de la experimentación

Durante el desarrollo de la experiencia, el profesor investigador ha utilizado diversos instrumentos para establecer resultados. Entre ellos destacan el registro en vídeo y audio de las actuaciones de los estudiantes, y la posterior transcripción por parte del profesor. Los elementos mencionados, conjuntamente con las respuestas aportadas por los estudiantes en las unidades didácticas, proyectos y cuestionarios permiten establecer resultados acerca de las producciones matemáticas y el grado de impli-

...los resultados enumerados proporcionan información sobre aspectos heurísticos, epistemológicos y cognitivos...

cación matemática-realidad, así como la eficacia del proceso de enseñanza/aprendizaje en contraposición a la enseñanza tradicional.

Los resultados de la experimentación pueden resumirse en los siguientes puntos:

- Se consigue una mejor conexión con el mundo real. Tradicionalmente, las matemáticas aparecen desvinculadas de la realidad.
- La enseñanza tradicional mantiene excesivos formalismos que se alejan de la realidad inmediata del futuro ingeniero. En la modelización se evita la carga de formalismo, apostando por un aprendizaje más intuitivo y próximo a los problemas de la técnica.
- El modelaje es una herramienta de aprendizaje eficiente:
 - Los alumnos aprenden de una manera espontánea, dirigida y agradable.
 - Los estudiantes ven la utilidad de lo que aprenden.
 - Los estudiantes ven la necesidad de las matemáticas para resolver problemas, deduciendo ellos mismos las herramientas.
 - Los alumnos manifiestan una fuerte motivación.
 - Los estudiantes adquieren una actitud creativa.
 - Los estudiantes desarrollan la habilidad en el uso de las matemáticas en situaciones no matemáticas.

En síntesis, los resultados enumerados proporcionan información sobre aspectos heurísticos, epistemológicos y cognitivos, como consecuencia de aplicar la metodología. Hemos entendido por heurísticos, el conjunto de habilidades adquiridas en el análisis empírico como proceso de abstracción en la construcción del modelo; por epistemológicos, la influencia observada en el proceso de aprendizaje de los alumnos de la modelización como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana (utilitarismo); y por cognitivo, el grado de conocimiento adquirido a nivel de producciones matemáticas. Estos resultados han sido graficados de forma puntual (tema por tema, figura 8) y de forma global (figura 9). Dichas gráficas nos proporcionan una visión rápida de los aspectos mencionados.

En cuanto a las aportaciones en la mejora de la calidad docente se consigue la visión del modelaje como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana y que la metodología proporciona las producciones matemáticas necesarias para el currículo del ingeniero. Argumento que avala la necesidad de incluir la metodología de la modelización matemática como herramienta docente en los currículos académicos.

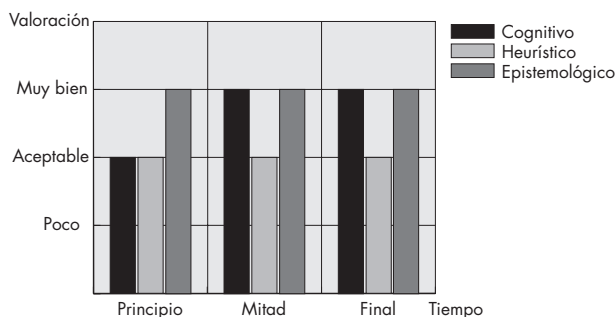


Figura 8. Resultados cualitativos

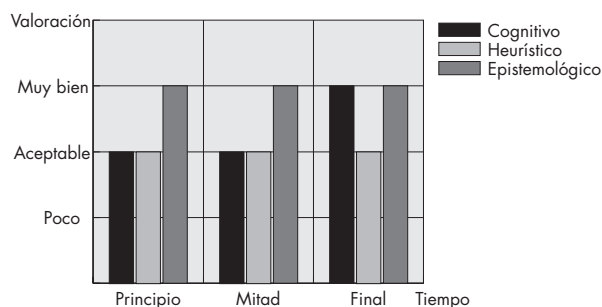


Figura 9. Resultados cualitativos globales

Las producciones matemáticas las podemos concretar en los siguientes aspectos: los alumnos son capaces de reconocer diversos tipos de matrices y adquirir una familiarización con la terminología matemática. Consolidar conocimientos: operaciones con matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes. Adquirir conocimientos nuevos de álgebra lineal: polinomio característico, valor y vector propio, diagonalización. Estos conocimientos se adquieren de una manera más profunda y de calidad que de la manera tradicional que es rutinaria, ya que se presentan en el contexto usual de la especialidad. Reconocimiento y familiarización de una ecuación diferencial y su tipología: orden, campo de pendientes, lineal, homogénea, homogénea de segundo orden, sistema de ecuaciones diferenciales, matriz exponencial.

Conclusiones generales

Como fruto de las discusiones anteriores, resaltamos las siguientes conclusiones generales en el ámbito de la innovación didáctica

1. Las aplicaciones y el modelaje matemático constituyen una forma de motivación e ilusión de los alumnos. Se observa el sentido de los temas estudiados.

...el modelaje es una herramienta innovadora de enseñanza eficiente, y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimiento y establece hermandad entre matemática y realidad.

2. El modelaje es una componente cultural. El modelaje proporciona conocimientos que usualmente no se encuentran en los currículos de matemáticas; en nuestro caso, los estudiantes descubren la existencia de un proyecto espacial denominado *Columbia*, la biografía de Robert Hooke, etc., elementos de cultura general no proporcionados clásicamente en las clases de matemáticas.
3. El modelaje constituye una forma de aprendizaje significativo. Construcción en contraposición a la memorización. En la experiencia, por citar un ejemplo, los alumnos producen una matriz inversa a partir de una situación técnica; hecho bastante lejano de la memorización de algoritmos.
4. El modelaje es una forma de reconocer estructuras. Los alumnos reconocen diversas situaciones, distantes en la vida real, pero con el mismo modelo matemático de denominador común.
5. El modelaje proporciona una visión diferente e integradora de las matemáticas. En la metodología del modelaje se engloban diversas áreas de conocimiento, no solamente de matemáticas, de manera que no se presentan los temas de forma aislada.

En síntesis, podemos afirmar que *el modelaje es una herramienta innovadora de enseñanza eficiente, y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos y establece hermandad entre matemática y realidad.*

Recomendaciones para futuras investigaciones

A raíz de la experimentación consideramos oportuno presentar orientaciones para posteriores estudios relativos al tema. Las recomendaciones están orien-

tadas al papel que debe asumir el profesor como investigador.

1. Establecer un estadio inicial y final de trabajo. Es decir, marcar el dominio y definir claramente los objetivos y delimitaciones.
2. Acotación de las situaciones y prudencia en la elección de problemas no matemáticos. Con ello destacamos que la tipología de problemas y situaciones reales no son fácilmente matematizables, y hay que tener en consideración los conocimientos técnicos previos que posee el alumno. Por lo tanto, es preciso tener claro los criterios de selección de situaciones.
3. Predisposición al diálogo con otros profesores de otras áreas de conocimiento. Este argumento se fundamenta en coordinar contenidos curriculares y averiguar las necesidades de la especialidad.
4. Referenciar las clases y los ejercicios a las situaciones estudiadas. Con ello no se desvincula el diálogo matemática-realidad.
5. Interpelar a los alumnos en las aulas y fomentar el debate. Es una manera de enriquecer el aprendizaje.
6. Atribuir especial atención a las actividades de modelización, seleccionar comentarios y registrar los aspectos más relevantes. Con ello se consigue estudiar con mayor profundidad el proceso de aprendizaje.
7. Considerar el trabajo del profesor como orientador de las actividades y discusión de las mismas, no como un simple orador y calificador.
8. El profesor ha de contribuir a facilitar recursos y poseer un elevado grado de disponibilidad.

Nuevas líneas de investigación

Como nuevas líneas de investigación en este ámbito de innovación didáctica

Joan Gómez
Universidad Politécnica
de Cataluña.
Federació d'Entitats
per l'Ensenyament
de les Matemàtiques
a Catalunya

en educación matemática a nivel universitario destacamos las siguientes:

1. Impacto de las nuevas tecnologías. La implementación de las unidades didácticas en soporte informático permite economizar tiempo. ¿Qué resultados cognitivos diferenciados se obtendrán en el perfil de aprendizaje de los alumnos?
2. Recopilación de situaciones técnicas susceptibles para implementar la metodología. El trabajo consistiría en realizar un inventario de situaciones óptimas en cada nivel educativo y establecer criterios y requisitos para incluir estas situaciones en los currículos de matemáticas (contextualización).
3. Influencia de la metodología en la eficacia del aprendizaje de otras asignaturas técnicas
4. Generalización de la experiencia a otras parcelas de las matemáticas. Consistiría en aplicar la metodología en ramas no necesariamente de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Bibliografía

- ABRANTES, P. (1994): *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática*, Tesis doctoral, Lisboa.
- DE LANGE, J. (1993): «Assesment in Problem-oriented Curricula», en N. L. WEEB y COXFORD (eds.): *Assesment in the Mathematics classroom*, NCTM, Reston, 197-208
- FORTUNY, J.M.^a y J. GÓMEZ (1998): <<http://cc.uab.es/~ipdm1/TGOMEZ.ZIP>>.
- GÓMEZ, J. (1997): *La modelització com a eina didàctica per a l'ensenyament de les matemàtiques*, Publicacions UPC, Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC, Barcelona.
- GÓMEZ, J. (1998): *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*, Tesis doctoral, UAB.
- GÓMEZ, J. (2000): *Per un nou ensenyament de les matemàtiques*, CEAC.
- LUSA, G. (1975): *Las matemáticas en la ingeniería*. ICE-UPC
- NISS, M. y W. BLUM (1989): *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, Ellis Horwood, Chichester.
- PUIG ADAM, P. (1958): *Ecuaciones diferenciales*, Nuevas gráficas.
- PUIG ADAM, P. (1979): *Cálculo integral*, Gráficas Lormo, Madrid. [17.^a edición.]
- SKOVSMOSE, (1997). «Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas», *EMA*, vol. 2, n.º 3, 191-216.
- VALERO, P. (1994). «La educación matemática y la construcción de la democracia». Una empresa docente, *EMA*, n.º 6.
- VITHAL, R., I. CHRISTIANSEN y O. SKOVSMOSE (1995): *Project work in university mathematics education*. Alborg University. Denmark.