SUMA 41
noviembre 2002, pp. 113-115

Isoperímetros: El problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico

Grupo Construir las Matemáticas*

A LO LARGO DE LA HISTORIA han existido una serie de problemas que han intrigado, seducido y, a la vez, frustrado a los matemáticos de todos los tiempos. Algunos de ellos siguen sin resolverse y otros como el *problema isoperimétrico* del que venimos ocupándonos desde el número 33 de SUMA –tan sencillo de enunciar y, sin embargo tan difícil de demostrar– se resolvieron tras siglos de esfuerzo. Cuando decimos lo anterior, lo hacemos teniendo muy en cuenta lo que tal afirmación significa. Es decir, resolver un problema no consiste sólo en dar una solución sino en demostrar que tal solución existe. De esta cuestión nos ocupamos ahora.

Con las contribuciones de Zenoro, Pappus, al-Khazin, Ibn al-Haytham, de los hermanos Bernoulli... y las abejas, ha conseguido ciertamente ocupar un puesto privilegiado entre los problemas clásicos de las Matemáticas. Sin embargo, como vamos a ver en esta entrega, los fascinantes resultados que hemos venido comentando en los números anteriores, no resuelven totalmente el problema isoperimétrico más general que enunciamos en la primera entrega:

> De todas las curvas cerradas y simples en el plano con longitud dada *l*, ¿cuál es la que encierra un área máxima?

Bajo esta forma el problema era conocido desde hace siglos, y también su solución, a saber, la circunferencia de longitud *l* es la curva que encierra área mayor.

La «demostración» de Steiner del problema isoperimétrico

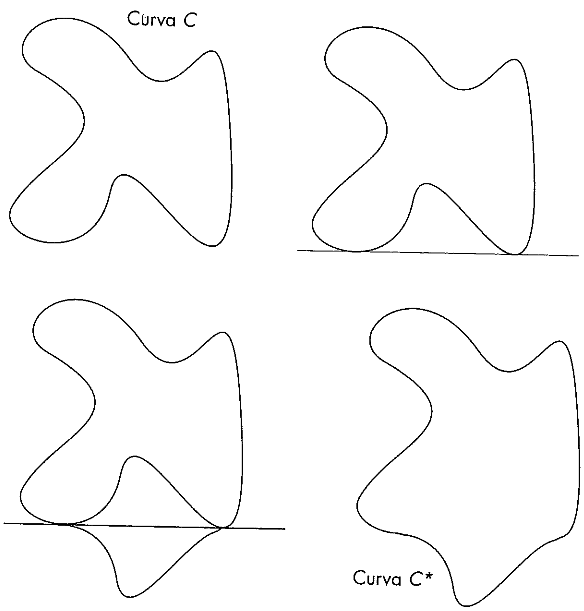
Una de las contribuciones más esenciales hacia la resolución rigurosa del problema anterior la dio Jacob Steiner (1796-1863) en 1838, momento en el que se vivía una gran controversia entre los partidarios de los métodos analíticos (es decir usando Cálculo) y los métodos sintéticos (pura

TALLER DE PROBLEMAS

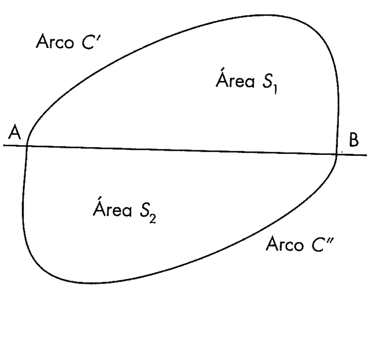
* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

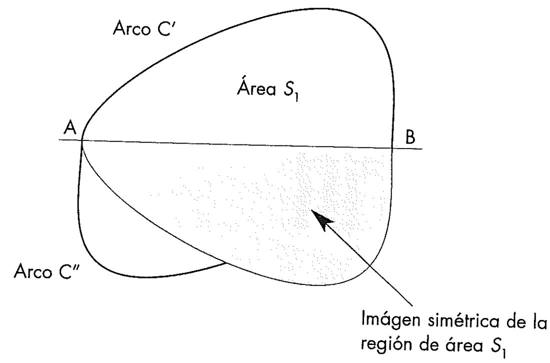
Geometría). En su demostración, Steiner empleó un argumento geométrico muy simple al que vamos echar un vistazo: supongamos que existe al menos una solución del problema isoperimétrico. Tendremos entonces una curva C, que entre todas las curvas cerradas de longitud dada l, encierra la máxima área. Pretendemos demostrar que tal curva es una circunferencia.

- El primer paso de su demostración consiste en probar que la solución del problema isoperimétrico C debe ser una curva convexa. De no ser así, podremos construir una nueva curva C^*, como podemos observar en las figuras siguientes, que tiene la misma longitud que la primera pero que acota mayor área.

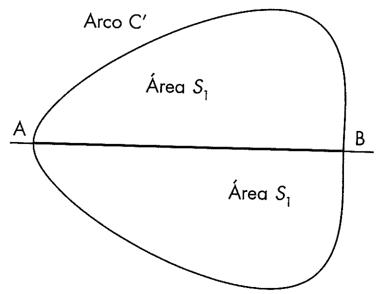


- Una vez justificada la convexidad de la solución, elijamos sobre la curva convexa C dos puntos, A y B de modo que dividan a C en dos arcos C' y C'' de igual longitud. La recta que pasa por A y B divide al dominio acotado por C en dos trozos de áreas S_1 y S_2 respectivamente. La propiedad de optimización de la curva C implica que S_1 y S_2 sean iguales. Si no fuera así, por ejemplo si S_1 fuese mayor que S_2, entonces podríamos reflejar la región de área S_1 respecto de la recta que une A con B, y obtendríamos una nueva región como muestra la siguiente figura.



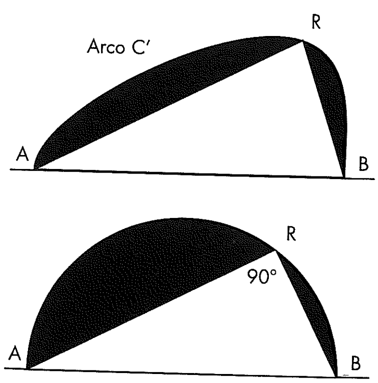


La unión de esta región con su imagen reflejada formaría una figura plana de mayor área que la abarcada por la curva C, de manera que la longitud de su perímetro seguiría siendo l. Obtendríamos así una contradicción con el carácter óptimo de la curva C. En consecuencia las áreas S_1 y S_2 deben ser iguales.



Simetrización de una curva convexa

- Por último, para demostrar que C es una circunferencia, será suficiente demostrar que C' y C'' son semicircunferencias. Para ello supongamos que uno de los arcos no fuera una semicircunferencia, por ejemplo el arco C'. Ello implicaría la existencia de un punto sobre él, R, de manera que el triángulo de vértices ARB no fuese rectángulo en R. Entonces movemos como si hubiese ua *carrete infinitesimal* instalado en R hasta que el ángulo en R sea recto y en esta posición reflejamos la figura obtenida en la recta AB para obtener una curva cerrada con longitud l pero que acota mayor área que C, en contra del carácter óptimo de la curva C.



Se abre el problema de la existencia y se dan soluciones

Aunque, para Steiner, el problema quedaba completamente resuelto, y su amigo Dirichlet trató, sin conseguirlo, convencerle de ello, el elegante razonamiento que acabamos de reproducir no soluciona el problema isoperimétrico que hemos planteado. ¿Por qué?

Observemos que en cada uno de los tres pasos se supone que la solución existe. Es decir, se supone que existe una curva cerrada y simple de perímetro l que acota más área que las demás y bajo esta hipótesis se demuestra que tal curva es una circunferencia.

Fueron muchas, aparte de la demostración de Steiner, las supuestas demostraciones, (pues todas ellas suponían que la solución del problema existía) de que la circunferencia soluciona el problema isoperimétrico. Sin embargo, una demostración satisfactoria de este hecho no fue obtenida hasta 1870 cuando K. Weierstrass observó que algunos problemas parecidos al isoperimétrico no tenían solución (pensemos, por ejemplo, en el problema de determinar de todas las curvas cerradas y simples en el plano con longitud l, si existe alguna que acote menor área que las demás) y dio una demostración completa de la solución del problema isoperimétrico. La demostración de Weierstrass era un tanto complicada, en el sentido de que era consecuencia de la teoría creada por él mismo que hoy conocemos como Cálculo de Variaciones y de la que hablamos en el número 39 de SUMA.

Con posterioridad a la demostración de Weierstrass, se han encontrado demostraciones más sencillas y directas, en las que muy diferentes ideas y técnicas se utilizan para establecer el mismo resultado. Entre ellas destacamos las demostraciones de Hurwitz y de Schmidt.

El primero de ellos, A. Hurwitz, dio en 1902 una demostración bastante elegante y corta en la que utilizó algunas ideas de la teoría de las series de Fourier y en particular la Desigualdad de Wirtinger. Esta demostración puede consultarse en Chern (1967).

Posteriormente, en 1939, E. Schmidt da, posiblemente, la más sencilla de las demostraciones conocidas, utilizando la fórmula para el área, obtenida directamente de la fórmula de Green y algunas ideas sencillas de Geometría Diferencial. La demostración se recoge en el texto de M. P. Do Carmo, (1992).

No recogemos aquí estas demostraciones, por hallarse más allá del propósito de estas secciones. Sin embargo, sí comentaremos un par de consecuencias que podemos extraer de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia.

Dos consecuencias importantes de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia

Una de las conclusiones más interesantes que podemos extraer de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia es la conocida como *desigualdad isoperimétrica*. Consideremos una curva C cerrada, simple, plana de longitud l, y A es el área de la región encerrada por C. Sea r el radio de una circunferencia de longitud l. La propiedad isoperimétrica de la circunferencia nos permite asegurar que el área A no puede ser mayor que πr^2 y que solamente será igual a este valor si C es una circunferencia. Es decir, $A \leq \pi r^2$.

Teniendo en cuenta que:

$$\pi r^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi} l^2$$

tendremos que:

$$A \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

o equivalente que:

$$4\pi A \leq l^2$$

Esta última desigualdad, llamada *desigualdad isoperimétrica*, permite relacionar la longitud de una curva plana cerrada arbitraria y el área que encierra, y en la que la igualdad solamente se da si y sólo si la curva es una circunferencia.

Como consecuencia inmediata de la desigualdad isoperimétrica, podemos resolver la siguiente cuestión:

> De todas las figuras planas de la misma área A, ¿cuál posee menor perímetro?

La respuesta, como puede adivinarse es el círculo de área A. La razón, es sencilla. Si hubiera una figura plana con la misma área A pero con perímetro l menor que el del círculo, puesto que el perímetro del circulo es:

$$2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

tendríamos que:

$$l < 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

o equivalentemente que, $l^2 < 4\pi A$, en contradicción con la desigualda isoperimétrica.

Bibliografía

DO CARMO, M.P. (1992): *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

CHERN S.S. (1967): «Curves and surfaces in Euclidean space», en *Studies in Global Geometry and Analysis*, Math. Assoc. Amer., distribuido por Prentice-Hall, pp. 16-56.