SUMA 41
noviembre 2002, pp. 65-68

¿Se puede predecir el número de cifras de un número periódico estudiando la fracción que lo genera?

Agustín Colell Martínez

La enseñanza de los números racionales e irracionales a los alumnos de ESO y Bachillerato pasa por dar algunos ejemplos de números periódicos. Normalmente, recurrimos a fracciones con un múltiplo de 3 en el denominador.
Para obtener 2, 3, 4... cifras en el período la cosa cambia, el método suele ser inverso. Partimos de un decimal con 2, 3, 4... cifras en el período y obtenemos la fracción generatriz.
Con un sencillo estudio de divisibilidad podemos relacionar el denominador con el número de cifras del período.

ARTÍCULOS

SE TRATA en este artículo de estudiar la relación entre las fracciones que dan lugar a números periódicos y el número de cifras del período.

En el proceso de introducción de los números irracionales, tanto en alumnos de ESO como de Bachillerato, acabamos por identificar lo números irracionales como aquellos cuya expresión decimal está compuesta por infinitas cifras decimales y que no son periódicos. Esto supone que, previamente, el alumno haya aprendido la noción de número decimal finito y número decimal periódico.

Con más o menos dificultad, los alumnos son capaces de aprender el procedimiento de obtención de las fracciones generatrices de números decimales finitos o periódicos.

Desde la Enseñanza Primaria los alumnos han ido viendo que cualquier fracción da origen a un número decimal finito o periódico. Como casi siempre, nos limitamos a dar unos cuantos ejemplos y los alumnos quedan convencidos del hecho.

«Por suerte», con pocos ejemplos los alumnos admiten que las fracciones dan lugar a números decimales finitos o periódicos. Digo «por suerte», porque a la hora de buscar estos ejemplos es cuando, personalmente, me he encontrado con más dificultades. Pruebe el lector a buscar directamente una fracción que dé lugar a un número decimal periódico puro con cinco cifras decimales en su período. O con seis.

Otra manera de darnos cuenta de que no existen muchas fracciones cuya expresión decimal tenga un período corto consiste en efectuar los cocientes de unas cuantas fracciones propias con numerador y denominador elegidos aleatoriamente. Si el lector dispone de una calculadora a mano puede comprobar rápidamente que en la mayoría de cocientes la calculadora no dispone de suficientes dígitos como para que aparezca claramente el período.

Si se quiere dar ejemplos de fracciones que den lugar a un número predeterminado de cifras en el período el mejor método es partir del número decimal periódico puro y hallar su fracción generatriz.

Veamos, seguidamente, un estudio sobre la relación entre el número de cifras periódicas y las fracciones que los generan.

Centraremos el estudio en los decimales periódicos puros.

Dado un número decimal periódico puro, se obtiene, por el procedimiento habitual, la fracción generatriz con 9 como única cifra en el denominador. La fracción simplificada da lugar a una fracción irreducible $a/b = c/9\ldots9$ siendo a y b primos entre sí.

De la igualdad $b \cdot c = a \cdot 9\ldots^{(n}9$, y por ser b primo con a, deducimos que b es divisor de $9\ldots^{(n}9$. El número de cifras en el período coincide con el número de nueves del denominador.

En lo que sigue, supondremos que b es un número primo, y diferente de 2 y 5 puesto que éstos no generan números periódicos.

El denominador es de la forma $9\ldots^{(n}9$, que supondremos descompuesto según $9 \cdot 1\ldots^{(n}1$. En el decurso de este trabajo aparecerán, sucesivamente, los números conteniendo únicamente la cifra 1. Convengamos en anotar $U_n = 1\ldots^{(n}1$.

Para una sola cifra en el período el denominador es 9, el único divisor primo es 3.

Para dos cifras en el período el denominador es 99, aparte del 3, el divisor primo es 11. Quiere ello decir que las fracciones irreducibles con denominador 11 tienen en el período dos cifras. Ejemplo: 1/11 = 0,09090909…

Si aparecen tres cifras en el período el denominador es $999 = 9 \cdot 111$. El número $U_3 = 111$ se descompone según $111 = 3 \cdot 37$. Con este resultado, cuando se quiera números periódicos con tres cifras en el período deberemos usar fracciones con 37 como factor en el denominador. Ejemplo: 4/37 = 0,108108108…

Permítaseme el detalle del caso de cuatro cifras en el período para reforzar la importancia de la descomposición de los números U_n (el 1 como única cifra).

Para cuatro cifras el denominador es $9999 = 9 \cdot U_4 = 9 \cdot 1111 = 9 \cdot 11 \cdot 101$.

Ejemplo: 53/101 = 0,524752475247…

Obsérvese que en los denominadores van aprareciendo los factores primos de U_2, U_3, U_4...

Descomposición de los denominadores

En la descomposición de los números U_n emergen inmediatamente dos propiedades elementales de las reglas de divisibilidad del número 3 y del número 11. Primero, U_{3n} es divisible por 3, ya que la suma de las cifras es $3n$. Segundo, U_{2n} es divisible por 11, puesto que hay tantos unos ocupando las posiciones pares como las impares, luego la suma de las cifras ocupando las posiciones pares será igual a la suma de las cifras de las posiciones impares.

Hay otra manera de ver que U_{2n} es divisible por 11, solamente hay que observar el resultado de la división de U_{2n} por 11.

$$U_4 = 11 \cdot 101$$
$$U_6 = 11 \cdot 10101$$
$$U_8 = 11 \cdot 1010101$$
$$\ldots$$

De hecho, los número anteriores admiten otra descomposición similar (no en factores primos) que ayudará en la descomposición general de U_n.

$$U_6 = 111111 = 111000 + 111 = 1000 \cdot 111 + 1 \cdot 111 = (1000 + 1) \cdot 111 == 1001 \cdot 111 = U_3 \cdot 1001$$
$$U_8 = 10001 \cdot 1111 = U4 \cdot 10001$$
$$U_{10} = U5 \cdot 100001$$
$$U_{12} = U_6 \cdot 1000001 = U_4 \cdot 100010001 = U_3 \cdot 1001001001$$
$$U_{14} = U_7 \cdot 10000001$$

...con la ayuda de programas informáticos se puede obtener la descomposición de los primeros 25 números U_n

De esta observación puede enunciarse que los divisores de U_n serán también divisores de U_{kn}.

Los casos más difíciles de descomponer serán, por supuesto, U_5, U_7, U_{13}...

Combinando esta técnica con la ayuda de programas informáticos se puede obtener la descomposición de los primeros 25 números U_n, con los cuales ya se pueden inferir conjeturas sobre el número de cifras de los periodos.

En las descomposiciones que siguen figuran en negrita los factores nuevos que van apareciendo.

$U_1 = 1$, y, como ya se ha dicho, se corresponde con el denominador 3.

$U_2 = \mathbf{11}$
$U_3 = 3 \cdot \mathbf{37}$
$U_4 = 11 \cdot \mathbf{101}$
$U_5 = 11111 = \mathbf{41} \cdot \mathbf{271}$
$U_6 = 111111 = 3 \cdot \mathbf{7} \cdot 11 \cdot \mathbf{13} \cdot 37$
$U_7 = \mathbf{239} \cdot \mathbf{4649}$
$U_8 = 11 \cdot \mathbf{73} \cdot 101 \cdot \mathbf{137}$
$U_9 = 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot \mathbf{333667}$

$U_{10} = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \mathbf{9091}$

$U_{11} = \mathbf{21649} \cdot \mathbf{513239}$

$U_{12} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot \mathbf{9901}$

$U_{13} = \mathbf{53} \cdot \mathbf{79} \cdot \mathbf{265371653}$

$U_{14} = 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot \mathbf{909091}$

$U_{15} = 3 \cdot \mathbf{31} \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \mathbf{2906161}$

$U_{16} = 11 \cdot \mathbf{17} \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot \mathbf{5882353}$

$U_{17} = \mathbf{2071723} \cdot \mathbf{5363222357}$

$U_{18} = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \mathbf{52579} \cdot 333667$

U_{19} es primo.

$U_{20} = 11 \cdot 41 \cdot 101 \cdot 271 \cdot 9091 \cdot \mathbf{27961}$

$U_{21} = 3 \cdot 37 \cdot \mathbf{43} \cdot 239 \cdot \mathbf{1933} \cdot 4649 \cdot \mathbf{10838689}$

$U_{22} = 11 \cdot 11 \cdot \mathbf{23} \cdot \mathbf{4093} \cdot \mathbf{8779} \cdot 21649 \cdot 513239$

U_{23} es primo.

$U_{24} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 9901 \cdot \mathbf{99990001}$

$U_{25} = 41 \cdot 271 \cdot 21401 \cdot \mathbf{25601} \cdot \mathbf{182521213001}$

Reinterpretemos el hecho de que U_{19} sea primo: el mínimo denominador que genera un número decimal con 19 cifras en el período es $11\ldots{}^{(19}1$. Ídem para U_{23}.

Aparte del interés de las descomposiciones anteriores con respecto al número de cifras del período, se puede destacar alguna curiosidad referente a la divisibilidad de los números U_n.

Cuando un factor primo p aparece por primera, vez lo hace en U_n con $p = n \cdot k + 1$; por ejemplo: el 7 y el 13 aparecen en U_6. También se observa que 41 y 271 aparecen en U_5. Y 21649 aparece en U_{11} siendo $21649 = 11 \cdot 1968+1$.

...se puede destacar alguna curiosidad referente a la divisibilidad de los números U_n.

Enunciado propuesto

En términos de periodicidad, podríamos decir: Dado un número primo p, el número n de cifras del período de la fracción propia a/p es un divisor de $p-1$.

Lo comprobaremos para los números primos 7 y 11:

El número de cifras del período de 1/7 es un divisor de 6 ($6 = 7 - 1$). El período es 142857.

El número de cifras del período de 1/11 es un divisor de 10 ($10 = 11 - 1$). El período es 09.

De las descomposiciones de U_n y de lo dicho anteriormente podemos extraer la tabla 1, en la que se recorren los primeros números primos con expresión del número de cifras del período.

Núm. primo	3	7	11	13	19	29
Núm. cifras período	1	6	2	6	18	28

Tabla 1

Aunque no se halle la descomposición de U_{28}, se comprueba, efectuando la división correspondiente, que el período de la fracciones $a/29$ es 28. Así:

$$1/29 = 0{,}0344827586206896551724137931\ 0344827586206896551724137931$$

Esta división se ha efectuado con un programa en Visual Basic cuyo código puede descargarse en la web <www.xtec.es/~acolell2>; el símbolo ~ se corresponde con la combinación de teclas <alt>+126.

En la tabla 1 no aparece el período con 3 cifras, 5 cifras, 7 cifras, etc., porque los números primos que generan estos períodos son mayores. Podemos completarla, como se ve en la tabla 2, dando mayor importancia al número de cifras del período. Escribimos los denominadores menores que generan dichos períodos.

Núm. cifras período	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Denominador	3	11	37	101	41	7	239	73	333667

Tabla 2

Esta última tabla responde a la cuestión que se plantea cuando queremos dar muestras de números periódicos generados por fracciones. Si en los denominadores aparecen otros factores distintos de los anteriores el período tiene tantas cifras que se hace tedioso encontrarlo.

¿Qué pasa cuando el denominador es un número compuesto?

Tomemos como ejemplo $407 = 11 \cdot 37$ en el denominador.

1/11 = 0,0909... El número de cifras del período es 2

1/37 = 0,027027... El número de cifras del período es 3.

1/407=0'002457002457... El número de cifras del período es 6, que coincide con el mcm(2, 3).

Parece plausible que, cuando el denominador es un número compuesto, el número de cifras del período es el mcm de los números de cifras de los períodos correspondientes a los factores del denominador considerado.

Con ayuda del referido programa de ordenador se puede comprobar esta conjetura para cualesquiera otros casos sencillos. He aquí otra muestra.

Sea $287 = 7 \cdot 41$.

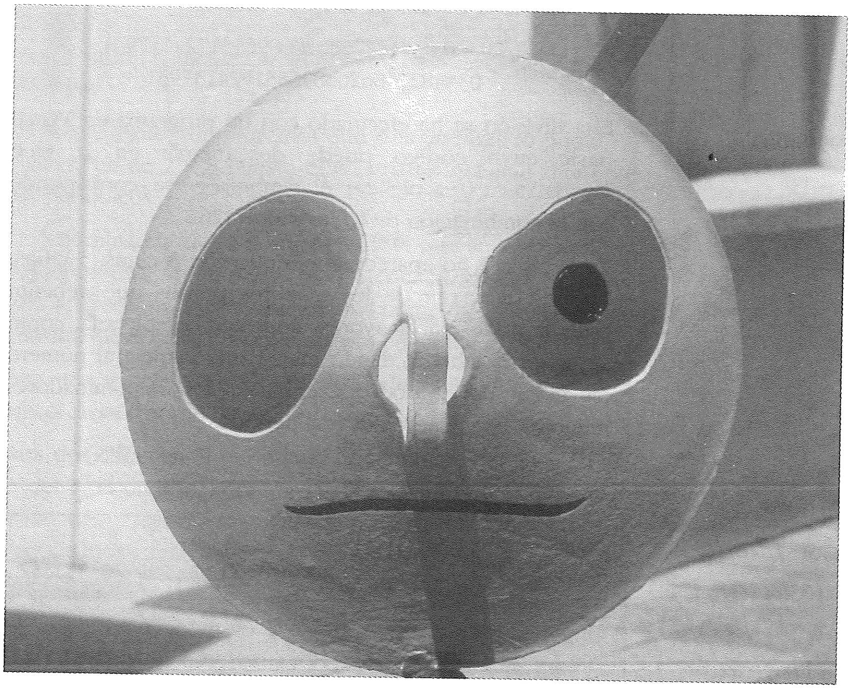
1/7 = 0,142857142857... El número de cifras del período es 6.
1/41 = 0,0243902439... El número de cifras del período es 5.
1/287 = 0,0034843205574912891986062717770034843205 7491289198606271777...

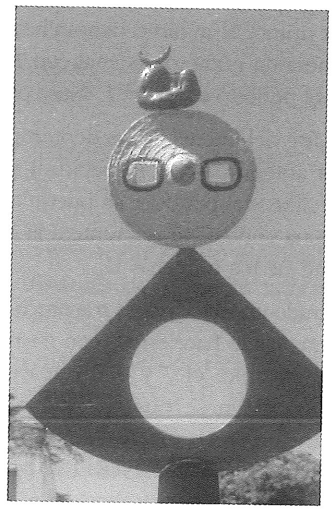
Como cabía esperar, el número de cifras del período es 30.

Agustín Colell
IES Ramón Berenguer IV.
Amposta (Tarragona)

Conclusión

Si no queremos períodos demasiado largos hemos de restringir las fracciones que tomemos como ejemplo en la introducción de los números periódicos a aquellas cuyos denominadores estén contenidos en la última tabla, esto es: 3, 11, 37, 101, 41, 7, 13, 239, 73... Para otros denominadores, el número de dígitos de las calculadoras resultarán insuficientes.





Fundación Joan Miró. Barcelona

(Fotos: Pilar Moreno)