SUMA 41
noviembre 2002, pp. 59-63

Generación de desigualdes en dos variables a partir de la interpretación geométrica de la integral definida

Juan Carlos Cortés López
Gema Calbo Sanjuán

ARTÍCULOS

En este artículo se estudia un método basado en la interpretación geométrica de la integral definida de una función y de su inversa para generar desigualdades en dos variables. Sin pretender agotar la técnica descrita vemos cómo el método permite deducir una gran variedad de desigualdades, algunas de ellas ciertamente sofisticadas. La potencia del método se muestra probando de un modo distinto al tradicional algunas desigualdades clásicas. El artículo está planteado como un modelo de trabajo-investigación dirigido por el profesor, para ser llevado al aula, y para que de esta forma, a partir de ejemplos sencillos, los alumnos acaben por generalizar los resultados. Por ello, a lo largo de la exposición del trabajo se van intercalando las tareas que se les fueron encomendando a los alumnos, así como los resultados que obtuvieron y las ayudas que se les fueron proporcionando para que esta actividad dirigida alcanzara los objetivos establecidos inicialmente.

EN LAS PROGRAMACIONES actuales de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato el estudio de desigualdades sólo llega a tener –en el mejor de los casos– un «pequeño hueco» en el segundo curso de bachillerato de las modalidades científico-tecnológica y ciencias de la naturaleza y de la salud, y, siempre, como una aplicación mecánica del cálculo diferencial, donde la potencia del método «permite» ocultar toda interpretación geométrica de las inecuaciones que se demuestran.

Son varios los artículos recientes en los cuales se proponen interesantes métodos geométricos para estudiar algunas desigualdades clásicas en dos variables (Fernández y González, 1997 y 1998), por ejemplo, o métodos para obtener desigualdades en dos variables (Cortés, 1998).

En el siguiente trabajo damos un método para generar desigualdades en dos variables a partir de la interpretación geométrica de la integral definida de una función y de su inversa. La base matemática que se requiere es la propia de cualquier alumno del nivel educativo antes citado, y, sin embargo, la aplicación de la técnica permite demostrar, de un modo distinto al usual, algunas inecuaciones importantes. Así, por ejemplo, aplicando este método demostraremos la conocida desigualdad de Young.

El artículo no está planteado para agotar la técnica descrita, sino como un modelo de trabajo-investigación para ser llevado al aula de segundo de bachillerato o de un primer curso universitario científico-tecnológico; por ello, durante la exposición de estas páginas iremos explicitando la forma en la que el trabajo se llevó al aula, con las correspondientes indicaciones que se les dio a los alumnos, así como las tareas que se les encomendó realizar. Se trata, por tanto, de una *investigación matemática dirigida*. *Investigación*, porque pretendemos que sean los alumnos quienes se adentren fuera de las fronteras propias de la programación de matemáticas que cursan, y pisen un terreno, el de las desigualdades en dos variables, que les resulta prácticamente desconocido. *Dirigida*, por que pretendemos que con nuestra ayuda y dirección, *todos* los alumnos puedan realizar la siempre difícil, pero excitante, aventura del descubrimiento.

La estructura del trabajo es como sigue: en primer lugar, veremos cómo podemos generar desigualdades en dos variables sobre algunas familias de funciones elementales que los alumnos de estos niveles educativos conocen bien. Seguidamente, expondremos algunas observaciones, obtenidas como consecuencia del trabajo en el aula, que resultan de utilidad cuando los alumnos tratan, a propuesta nuestra, de extender las desigualdades a recintos más amplios. Ello nos conducirá, de forma natural, al desarrollo de su espíritu crítico cuando les pidamos que comparen esta técnica geométrica que se les propone con los métodos analítico-algebraicos, que ya conocen. Finalmente, y como aspiración propia del quehacer matemático, propondremos que generalicen los resultados obtenidos.

Desigualdades sobre familias de funciones elementales

Familia potencial-radical

Comenzamos ilustrando la técnica que proponemos mediante varios ejemplos sencillos en los cuales, los alumnos, bajo una primera labor fuertemente dirigida por nosotros, fueron generando desigualdades en dos variables para la familia de funciones potenciales y sus inversas, las funciones radicales. Posteriormente, les pedimos que generalizasen las inecuaciones establecidas en los primeros ejemplos particulares.

Empezamos nosotros considerando la función $f(x) = x^2$, y su inversa, $g(x) = \sqrt{x}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ a partir de la gráfica de la figura 1 se deduce que el área del rectángulo de lados a y b es menor que la suma de las áreas A_1 y A_2, siendo A_1 el área bajo la función $f(x) = x^2$ en $[0, a]$, y A_2 el área bajo la función $g(x) = \sqrt{x}$ en $[0, b]$; esto es. utilizando la interpretación de la integral definida:

$$a\cdot b\le\int_0^a t^2dt+\int_0^b\sqrt{t}\,dt=\frac{a^3}{3}+\frac{2}{3}b\sqrt{b}=\frac{1}{3}\left(a^3+2b\sqrt{b}\right)$$

o equivalentemente

$$3ab\le a^3+2b\sqrt{b},\quad \forall a,b\ge 0 \qquad [1]$$

Además geométricamente se deduce que en [1] se da la igualdad sí y sólo sí $b = a^2$, como es sencillo comprobar algebraicamente.

Ahora, les propusimos a ellos que partiesen de la función $f(x) = x^3$ y su inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$, razonando como antes y a partir de la gráfica análoga a la dada en la figura 1 obtuvieron:

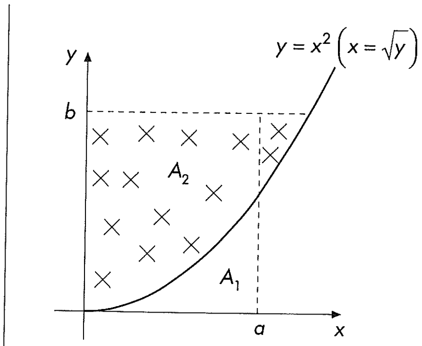

Figura 1

$$a\cdot b\le\int_0^a t^3dt+\int_0^b\sqrt[3]{t}\,dt=\frac{a^4}{4}+\frac{3}{4}b\sqrt[3]{b}=\frac{1}{4}\left(a^4+3b\sqrt[3]{b}\right)$$

$$4ab\le a^4+3b\sqrt[3]{b}\quad \forall a,b\ge 0 \qquad [2]$$

Después de trabajar algunos casos particulares más, establecieron que en general, dado $n \in \mathbb{N}$, y a partir de un razonamiento análogo al anterior sobre la función potencial $f(x) = x^n$ y su inversa $g(x) = \sqrt[n]{x}$, se tiene para $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$a\cdot b\le\int_0^a t^n dt+\int_0^b\sqrt[n]{t}\,dt=\frac{a^{n+1}}{n+1}+\frac{n}{n+1}b\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n+1}\left(a^{n+1}+nb\sqrt[n]{b}\right)$$

$$(n+1)ab\le a^{n+1}+nb\sqrt[n]{b}\quad \forall a,b\ge 0,\ n\in\mathbb{N} \qquad [3]$$

La riqueza de este trabajo dirigido nos brindó, llegado este momento, la oportunidad de introducir aquí el método de inducción como mecanismo de demostración matemática para resultados que dependen de una variable discreta.

Comenzamos ilustrando la técnica que proponemos mediante varios ejemplos sencillos...

Familia exponencial-logarítmica

Veamos cómo se aplicó el método desarrollado en el subapartado anterior para establecer desigualdades en dos variables sobre la función exponencial y su inversa, la función logaritmo. Se les propuso que realizasen el mismo trabajo que habían hecho sobre las funciones potenciales, pero sobre la función logarítmica. Así, empezando para distintos casos particulares de la base (base decimal y base natural), después se pasó a analizar directamente el caso general. Sea entonces $f(x) = c^x$ y supongamos $c > 1$. Consideremos su función inversa, $g(x) = \log_c x$. De nuevo, por la interpretación geométrica de la integral definida y la figura 2, obtuvieron:

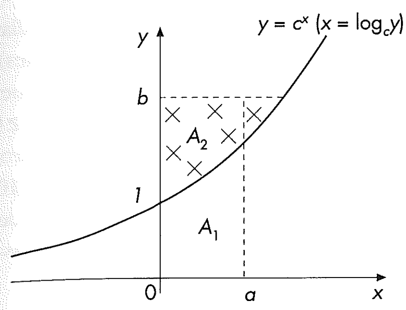

Figura 2

$$a \cdot b \leq \int_0^a c^t dt + \int_1^b \log_c t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\ln c}\left(c^a + b\ln b - b\right) \quad \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 1,\ \forall c > 1 \qquad [4]$$

o, equivalentemente,

$$ab\ln c \leq c^a + b\ln b - b \Rightarrow c^{ab} \leq e^{c^a - b}b$$

$$\left(\frac{c^a}{b}\right)^b \leq e^{c^a - b}, \quad \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 1,\ \forall c > 1 \qquad [5]$$

Otras familias

Sin pretender agotar en este trabajo la técnica expuesta para generar las desigualdades correspondientes sobre todas las familias de funciones elementales, en este apartado mostraremos cómo este método sirvió para generar desigualdades ciertamente sofisticadas.

Propusimos que partiesen de la función $f(x) = \tan x$, y su inversa $g(x) = \arctan x$. Entonces para todo $a \in [0, \pi/2)$ y $b \geq 0$, obtuvieron (ver figura 3)

$$a \cdot b \leq \int_0^a \tan t \, dt + \int_0^b \arctan t \, dt = -\ln(\cos a) + b\arctan b - \frac{1}{2}\ln(1 + b^2)$$

es decir

$$a \cdot b \leq b\arctan b - \ln\left(\sqrt{1 + b^2} \cdot \cos a\right), \quad \forall a \in [0, \pi/2),\ \forall b \geq 0 \qquad [6]$$

Algunas observaciones sobre las desigualdades obtenidas

La aplicación sistemática de esta técnica sobre una amplia colección de funciones nos ha deparado algunas situaciones interesantes que merece la pena comentar. A continuación, recogemos a modo de observaciones, algunas de las conclusiones que resultaron del trabajo en el aula.

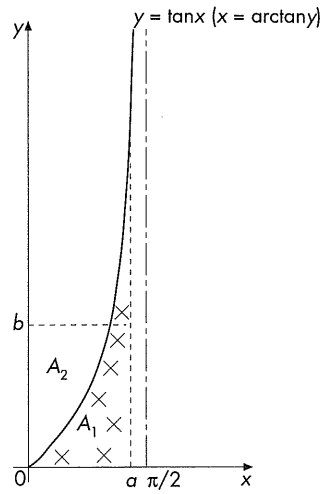

Figura 3

Observación 1

En ocasiones, el método utilizado permite extender la validez de las desigualdades a recintos más amplios aplicando la misma técnica. Así, por ejemplo, la desigualdad [2] no sólo es válida en el primer cuadrante, $(a, b) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, sino en todo el plano, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir:

$$4ab \leq a^4 + 3ab\sqrt[3]{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad [7]$$

Los casos $(a, b) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$ y $(a, b) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$, esto es cuando $a \cdot b < 0$, son triviales, pues el miembro izquierdo de [7] es negativo y el derecho positivo. El caso $a \leq 0$ y $b \leq 0$ se estudia sin más que aplicar la técnica en el tercer cuadrante (ver figura 4)

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \leq -\int_a^0 t^3 dt - \int_b^0 \sqrt[3]{t} \, dt = \int_0^a t^3 dt + \int_0^b \sqrt[3]{t} \, dt$$

obteniendo [7] exactamente igual que [2]. Más aún, se obtuvo que por este argumento es posible extender la

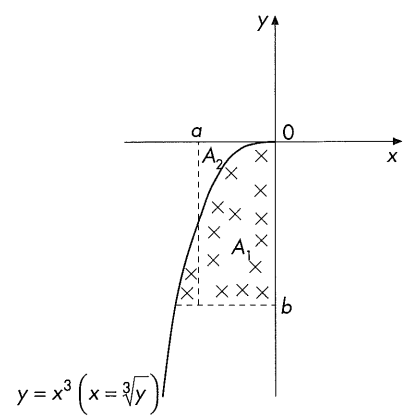

Figura 4

desigualdad [3] a todo el plano real, cuando la función potencial es de exponente impar

$$(n+1)ab \leq a^{n+1} + nb\sqrt[n]{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ impar} \qquad [8]$$

Se pensó, empezando por extender la región de validez de la desigualdad [1], en obtener el recinto más amplio del plano donde se verifica [3] para el caso n par. Aunque dejamos esta cuestión abierta, sí se observó que [1] (y [8] para n par) sólo tiene sentido ampliarlas al segundo cuadrante, $a \leq 0$ y $b \geq 0$, y, desde luego, [1] no se verifica en toda esta región, pues si $a = -10^{-1} < 0$, $b = 10^{-8} > 0$ y $n = 2$, se tiene

$$-3 \cdot 10^{-9} = 3ab > a^3 + 2b\sqrt{b} = -10^{-3} + 2 \cdot 10^{-12}$$

Resumiendo, el uso de esta técnica geométrica nos permitió obtener desigualdades en dos variables con validez en un recinto que, en ocasiones pero no siempre, se podían ampliar utilizando la misma técnica.

Observación 2

También conviene subrayar a los alumnos que a veces las desigualdades que aporta este método geométrico no sólo pueden demostrarse por procedimientos algebraico-analíticos, sino que éstos permiten deducir la validez de dichas inecuaciones en regiones más extensas. Así, por ejemplo, se les comentó que si particularizamos la desigualdad [4] para $c = e > 1$, deducimos geométricamente

$$a \cdot b \leq e^a + b \cdot \ln b - b, \ \forall\, a \geq 0, \ \forall\, b \geq 1$$

Sin embargo, esta desigualdad puede deducirse analíticamente con una restricción más suave: $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^+$. En efecto, si les sugerimos que partan de la conocida desigualdad

$$e^x \geq 1 + x, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad [9]$$

y definimos $x = a - \ln b$ para $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces aplicando [9] llegan a que

$$e^{a - \ln b} \geq 1 + a - \ln b$$

esto es

$$\frac{e^a}{b} \geq 1 + a - \ln b \Rightarrow e^a \geq b + ab - b\ln b$$

$$a \cdot b \leq e^a + b \cdot \ln b - b, \ \forall\, a \in \mathbb{R}, \ \forall\, b \in \mathbb{R}^+.$$

Aplicación del método a la deducción de algunas desigualdades clásicas

Para demostrar la potencia del método propuesto, a continuación utilizaremos esta técnica para probar tres desigualdades clásicas

$$2ab \leq a^2 + b^2, \ \forall\, a, \ b \in \mathbb{R} \qquad [10]$$

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \ \forall\, a, \ b \in \mathbb{R} \qquad [11]$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b > 0, \ \forall p > 1 \text{ racional tales que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad [12]$$

Las desigualdades [10] y [11] son bien conocidas por los alumnos (obsérvese que [10] es una representación equivalente de la desigualdad de las medias geométrico-aritmética en dos variables), y son consecuencia de las inecuaciones elementales $(a - b)^2 \geq 0$ y $(a + b)^2 \geq 0$ respectivamente. Sin embargo, nosotros les ayudamos a que observasen que [10] también puede probarse a través del método geométrico, ya que es un caso particular de [9] tomando $n = 1$.

Para demostrar la potencia del método propuesto, a continuación utilizaremos esta técnica para probar tres desigualdades clásicas...

Llegado este punto, conviene señalar a los alumnos que acaban de encontrar una demostración geométrica de [10] (y luego veremos que también de [11]) independiente del método geométrico expuesto aquí, que requiere en principio evaluar dos integrales. En efecto, si partimos de la función $f(x) = x$ y tomamos $a, b \in \mathbb{R}^+$, el área bajo $f(x) = x$ en $[0, a]$ y el área bajo su función inversa, $g(x) = x$ en $[0, b]$, puede evaluarse sin necesidad del cálculo integral al tratarse de dos triángulos rectángulos isósceles T_1 y T_2; luego, a partir de la figura 5, se tiene

$$a \cdot b \leq \text{Área}(T_1) + \text{Área}(T_2) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

A continuación, les pedimos que extendieran esta desigualdad, lo que hicieron sin problemas al segundo cuadrante, $(a, b) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$, y al cuarto cuadrante, $(a, b) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$, ya que el miembro de la izquierda es negativo y el de la derecha es positivo. Para justificar [10] en el recinto $(a, b) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$, tuvieron en cuenta la primera observación realizada en el apartado 3 y la figura 6

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad \forall (a, b) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$$

La desigualdad [11] puede deducirse también geométricamente de un modo análogo, pero partiendo de la función $f(x) = -x$.

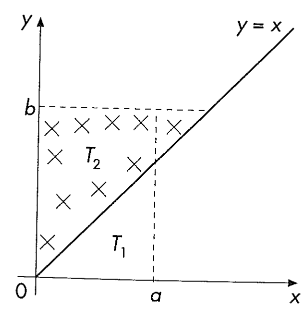

Figura 5

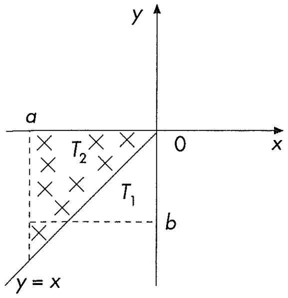

Figura 6

Saliéndonos de la labor desarrollada propiamente en el aula, subrayemos que la desigualdad de Young además de ser una generalización de [10] en el primer cuadrante, ya que se obtiene en el caso particular $p = q = 2$, desempeña un papel importante en el estudio de los espacios L^p. A continuación, y aplicando el método geométrico, estableceremos una demostración de [12], pero puede verse otra prueba distinta en el problema 301 (Shklarsky, 1994). Para ello, primero observemos que razonando como al principio, [3] se puede extender para $n = \alpha > 0$ racional

$$(\alpha+1)ab \le a^{\alpha+1} + \alpha b b^{1/\alpha}, \quad \forall a, b \ge 0, \ \forall \alpha > 0 \qquad [13]$$

$$a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{p-1}{p} b^{\frac{p}{p-1}}$$

Dado $p > 1$ racional, aplicaremos la última desigualdad para $\alpha = p - 1 > 0$.

$$a \cdot b \le \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1} b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

si q es tal que $1/p + 1/q = 1$, entonces $(p-1)/p = 1/q$, y $p/(p-1) = q$, por lo que de la última desigualdad se deduce [12].

Generalización de los resultados y conclusiones

Es interesante ayudar a los alumnos para que observen que en los razonamientos seguidos en los ejemplos anteriores subyacen unas hipótesis comunes a partir de las cuales puede establecerse un resultado general. Así, en nuestra experiencia en el aula, después de proponerles que realizasen por grupos de tres personas, la labor de abstracción que exige el enunciar las condiciones generales bajo las cuales se verifican las conclusiones a las cuales se pueden llegar a través del método que se les propuso, y tras una puesta en común dirigida por nosotros, se llegó al siguiente resultado:

Es interesante ayudar a los alumnos para que observen que en los razonamientos seguidos en los ejemplos anteriores subyacen unas hipótesis comunes a partir de las cuales puede establecerse un resultado general.

Teorema

Sea $f(x)$ ($p(x)$) una función continua estrictamente creciente (decreciente) para $x \ge 0$ y cuya inversa es $g(x)$ ($q(x)$). Sean $F(x)$ ($P(x)$) y $G(x)$ ($Q(x)$) las primitivas de $f(x)$ ($p(x)$) y $g(x)$ ($q(x)$) respectivamente, entonces se verifica

1. $a \cdot b \le \{F(a) - F(0)\} + \{G(b) - G(f(0))\}$, $\forall a \ge 0$, $\forall b \ge f(0) \ge 0$
1. $-a \cdot b \le \{P(0) - P(a)\} + \{Q(p(0)) - G(b)\}$, $\forall a \ge 0$, $\forall b \le p(0) \le 0$

En los ejemplos expuestos a lo largo de este trabajo la función $f(x)$ –con la notación del teorema anterior– siempre ha sido elegida creciente sobre los reales positivos, y aunque en el teorema anterior damos la desigualdad análoga para el caso en que sea decreciente, aún quedan por estudiar las correspondientes inecuaciones sobre los reales negativos. Inducir a los alumnos a través de ejemplos sencillos a que intenten generalizar los resultados, así como que investiguen la extrapolación de las conclusiones obtenidas a otros casos distintos a los estudiados previamente, es siempre un camino interesante para que ellos se inicien y profundicen en la finalidad del verdadero quehacer matemático.

Como en otros trabajos basados en experiencias similares (Cortés, 1998), concluimos que la realización de experiencias dirigidas de este tipo arrastran una gran riqueza, tanto para los alumnos como para el profesor, ya no sólo por el cambio de dinámica de trabajo, que obviamente al ser más creativa nos estimula más a todos, sino que también observamos que nos ha permitido, trabajar en el aula aspectos propios del currículo de Bachillerato, como son el estudio de las funciones elementales, sus funciones inversas (incluyendo las gráficas de ambas, así como la relación de simetría respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, entre dichas representaciones), el cálculo de primitivas así como sus propiedades, la interpretación geométrica de la integral definida, e, incluso, otros aspectos que quedan fuera de estudio bajo el itinerario de las programaciones oficiales, como son las desigualdades en dos variables, el método de inducción o estrategias propias de la resolución de problemas, como son estudiar, primero, casos particulares y, posteriormente, generalizar los resultados.

Juan Carlos Cortés
IES Bonifacio Sotos.
Casas Ibáñez (Albacete).
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Gema Calbo
IES Fernando de los Ríos.
Quintanar del Rey (Cuenca).
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

CORTÉS LÓPEZ, J.C. (1998): «Algunas aplicaciones de un teorema de Peano», *Puig Adam*, n.° 48, 59-65.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y A. BEDMAR SÁNCHEZ (1997): «La probabilidad en la Teoría de Números», *Epsilon*, n.° 37, 79-90.

FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1997): «Una visión distinta de un problema clásico», *Suma*, n.° 24, 59-62.

FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1998): «Una visión distinta de un problema clásico (II)», *Suma*, n.° 28, 5-9.

SHKLARSKY D.O., N.N. CHENTZOV e I.M. YAGLOM (1994): *The URSS Olympiad Problem Book*, Dover, Nueva York.